



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

Comptes Rendus Mecanique

www.sciencedirect.com



A century of fluid mechanics: 1870–1970 / Un siècle de mécanique des fluides : 1870–1970

L'héritage de Craya, pour une approche statistique à points multiples de la turbulence homogène anisotrope

*Multipoint turbulence structure and modelling: The legacy of Antoine Craya*

Claude Cambon

LMFA, UMR CNRS 5509, École centrale de Lyon, Université de Lyon, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 17 décembre 2016

Accepté le 10 avril 2017

Disponible sur Internet le 23 juin 2017

Mots-clés :

Turbulence

Anisotropie

Statistique à points multiples

Keywords:

Turbulence

Anisotropy

Multipoint structure

R É S U M É

Cet article commence par quelques éléments bibliographiques concernant Antoine Craya... où il reste beaucoup de zones d'ombre ! Son influence à Grenoble a été très importante, en particulier sur l'orientation des travaux scientifiques de Jean Mathieu, de Geneviève Comte-Bellot, de René Moreau, pour ne citer que quelques noms dans l'aire Lyon–Grenoble. Je vais ensuite me concentrer sur l'apport scientifique de sa thèse de doctorat ès sciences, soutenue en 1957. Ce mémoire est le seul document détaillé qui nous reste ; il présente l'approche générale, dynamique et statistique de la turbulence (statistiquement) homogène, mais arbitrairement anisotrope. Par rapport au concept de « turbulence homogène isotrope », le champ turbulent est soumis à l'action d'un champ moyen à gradients uniformes qui structure son anisotropie et peut lui fournir de l'énergie. L'effort s'est porté sur la dynamique des corrélations doubles en deux points, et celle des corrélations triples en trois points, dans l'espace physique puis dans l'espace de Fourier. Le formalisme, toujours utile et reconnu, grâce à Jacks Herring (1974), est le repère éponyme, dit « Craya-Herring », qui permet de décomposer fluctuation et corrélations de vitesse sur des modes de type poloïdal / toroïdal / divergent. Mais la contribution d'Antoine Craya ne se limite pas à cette contribution. Cette revue est aussi l'occasion de revenir sur la très longue histoire de la théorie linéaire dite de « distorsion rapide », et de souligner l'importance de la « matrice de Cauchy » (voir aussi la revue d'Uriel Frisch sur la formulation lagrangienne de Cauchy) dans cette histoire. Je vais aussi illustrer comment l'héritage de Craya a pu fructifier, depuis au moins trois décennies jusqu'à aujourd'hui, dans des domaines tels que la turbulence stratifiée ou la magnéto-hydrodynamique, thèmes qui n'avaient pas été abordés par Craya. Nous discuterons aussi comment des études de Keith Moffatt (théorie linéaire dite de « distorsion rapide ») et Steven Orszag (approche non linéaire dite EDQNM) – plus marginalement de Robert Kraichnan – ont constitué des étapes ultérieures essentielles pour une approche générale intégrée de la turbulence anisotrope, qui bénéficie de l'héritage de Craya. Le « problème de fermeture » le plus général en turbulence est aussi commenté à cette occasion.

© 2017 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND

(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

A B S T R A C T

Some elements are given on the very multiform career of Antoine Craya. In addition to a strong involvement in applied hydraulics in Grenoble, he was very influential on the

Adresse e-mail : claudc.cambon@ec-lyon.fr.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.crme.2017.05.004>

1631-0721/© 2017 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

research of his colleagues: to give only a few examples of well-known scientists in the Lyon–Grenoble area, he inspired the doctoral work on wall-jets by Jean Mathieu, the doctoral work on channel flow by Geneviève Comte-Bellot, and the dominant research area of René Moreau on magnetohydrodynamic (MHD) turbulence. The main part of this article is devoted to the legacy of Antoine Craya, from his own doctoral dissertation (1957). Inspired by G.I. Taylor probably more than by G. Batchelor, he contributed to establish the concept of HAT (Homogeneous Anisotropic Turbulence), as a useful intermediate step between HIT (Homogeneous Isotropic Turbulence) and fully statistically inhomogeneous turbulent flows. For this purpose, a mean flow with space-uniform velocity gradient can inject energy and anisotropy to a fluctuating flow, and statistical homogeneity is restricted to fluctuations. Complete equations for two-point second-order and three-point third-order velocity correlations were written, both in physical space and in Fourier space, in order to exactly solve mixed pressure–velocity correlations thanks to the incompressibility constraint. Antoine Craya is well known for the use of the eponymous frame of reference, thanks to Jacks Herring (1974). Later recognized as a spectral counterpart of a general decomposition in terms of toroidal/poloidal/dilatational modes, this frame leads to expressing the spectral tensors of correlation with a minimal number of scalar (or pseudo-scalar) descriptors, without loss of information and for arbitrary anisotropy. Craya provided us with a special angle of attack of the so-called RDT (Rapid Distortion Theory) and triadic closures, even if he did not work directly on them. Accordingly, this paper is also an opportunity to come back on the long history of RDT, including the Spectral Linear Theory as a better nomenclature, especially for recent studies. As far as possible, historical milestones are recalled throughout this article, and one recovers the Lagrangian formalism of Cauchy, emphasized by Uriel Frisch as well, with the use of a ‘Cauchy matrix’ in connection with linear theory. Finally, it is shown how the legacy of Craya is present in new (not addressed by him) domains, such as stratified turbulence and MHD turbulence. We discuss how further (past 1957) approaches, by Keith Moffatt (spectral linear theory, 1967), and Steven Orszag (triadic closure for HIT, as EDQNM, Eddy Damped Quasi-Normal Approximation, 1970) can be integrated in a general approach to anisotropic turbulence, which still benefits from Craya’s legacy. A synoptic scheme for the description of multipoint statistics is re-discussed on this occasion. More incidentally, connections with Kraichnan theories and with the formalism of Kármán–Howarth–Monin equation(s) are touched upon.

© 2017 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND

(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

1. Préambule sur la vie et la carrière d’Antoine Craya

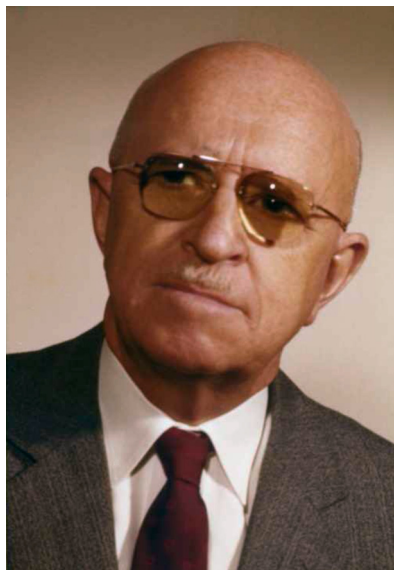


Fig. 1. Antoine Craya.

Il n'existe pas, à ma connaissance, de curriculum vitae détaillé d'Antoine Craya, et la recherche bibliographique le concernant devra être approfondie. Nous savons qu'il est né en Albanie, et il n'y a pas beaucoup de natifs de cette nation qui

soient connus du grand public en France, hormis mère Teresa et peut-être l'écrivain Ismail Kadaré! Sur ces études en France, retenons que Craya est polytechnicien (X), donc qu'il a acquis un prestigieux diplôme.

Nous retrouvons ensuite son séjour à l'université de Columbia, où il a remplacé Boris A. Bakhmeteff durant plusieurs années, avant de rejoindre l'INPG (institut de mécanique de Grenoble), où il fut recruté par son directeur, Julien Kravtchenko. Grenoble était déjà à cette époque un pôle très attractif pour la recherche scientifique, sous l'influence notamment de Louis Néel, futur prix Nobel, et de Félix Esclangeon.

Craya a d'abord fait carrière dans l'hydraulique appliquée, en participant à des contrats avec les sociétés Sogreah (Société grenobloise de recherche et d'applications hydrauliques) et Neyrpic (d'après les noms des premiers directeurs). Nous pouvons retrouver une revue de certaines de ces activités dans l'article de Hunter Rouse, « Hydraulic's Latest Golden Age » [1]. Des échanges particulièrement fructueux ont eu lieu à l'INPG, en 1954, avec H. Rouse et McNown de l'« Iowa Institute of Hydraulics », notamment.

Son influence scientifique a été cruciale à cette époque, autour de 1960, pour lancer de nouveaux thèmes en mécanique des fluides. Il a proposé le sujet de thèse de doctorat ès sciences de Jean Mathieu sur le jet pariétal, qui a donné lieu ultérieurement à une publication [2]; Jean Mathieu a ensuite fondé le LMFA (laboratoire de mécanique des fluides et d'acoustique, à Lyon puis à Écully) dont il a été le directeur de 1968 à 1985. Le sujet de thèse de doctorat ès sciences de Geneviève Comte-Bellot sur le canal plan [3] a été aussi inspiré et suivi par Craya; Geneviève Comte-Bellot a ensuite effectué un stage postdoctoral avec Stanley Corrsin, avant d'animer la partie acoustique du LMFA à Écully. Notons encore l'influence décisive d'Antoine Craya sur l'étude des instabilités de couche limite, par George Lespinard. Craya a encouragé et suivi René Moreau dans ses activités expérimentales et théoriques sur la turbulence magnéto-hydrodynamique, qui ont été novatrices et suggèrent ici une discussion particulière (dans la section 6.2). Pour finir, son travail avec Roger Curtet sur les jets et diffuseurs a eu des prolongements jusqu'à une date récente : on trouve des références aux jets de Craya–Curtet, pour des jets coaxiaux, ainsi qu'au nombre sans dimension du même nom (voir, par exemple, [4]).

Le souvenir d'Antoine Craya est resté très vivace à Grenoble, comme en témoigne le nom de l'« amphithéâtre Craya », dans lequel se déroulent conférences, séminaires et soutenances de thèse, notamment au LEGI (laboratoire des écoulements géophysiques et industriels.)

Dans la carrière d'Antoine Craya, et le contexte évoqué ci-dessus, la seule longue publication qui nous reste, son mémoire de thèse de doctorat ès sciences de 1957 [5], apparaît comme une étude presque déconnectée, et donc une sorte de singularité. Tout le reste de cet article sera maintenant consacré à l'héritage de cette étude, avec l'organisation suivante : le concept de turbulence homogène anisotrope (HAT pour *Homogeneous Anisotropic Turbulence*) est présenté dans la section 2, tel qu'il a été traité dans la thèse. Les solutions, établies ultérieurement, des « équations de Craya » sont données dans la section 3. La section 4 est consacrée à la très longue histoire de la théorie linéaire dite de « distorsion rapide », avec ses nombreuses variantes. Les étapes qui nous semblent importantes pour prolonger le travail de la thèse de Craya vers une modélisation statistique non linéaire figurent dans la section 5. Les développements nouveaux et les progrès récents sont présentés dans la section 6, dans les domaines de la turbulence stratifiée et de la turbulence magnéto-hydrodynamique, avec une comparaison avec d'autres approches pour la description statistique et le problème de fermeture associé. La section 7, la dernière, amène quelques conclusions.

Tout au long de cet article, nous allons tenter de renouer les fils d'un thème assez restreint, gravitant autour de la thèse de Craya, avec la revue historique, qui est la motivation du colloque de Toulouse. En particulier, la revue des approches de type « distorsion rapide » (RDT pour *Rapid Distortion Theory*) est enrichie par l'utilisation du formalisme lagrangien, qui a fait aussi l'objet d'une présentation d'Uriel Frisch dans ce même colloque. Pour la bibliographie, nous mentionnons, sans références précises, les scientifiques illustres des deux derniers siècles, d'Alfvén à Weber (dans l'ordre alphabétique), et renvoyons le lecteur à la monographie [6] pour les références plus récentes sur la dynamique de la turbulence homogène.

2. Le concept de turbulence homogène anisotrope et l'apport crucial de la thèse de Craya

Le mémoire de thèse de doctorat ès sciences d'Antoine Craya n'est disponible qu'en français, par exemple sur le site <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00684659/>.

Cela explique partiellement le manque de reconnaissance dont souffre son travail de thèse dans la communauté scientifique internationale, à la seule exception du repère de coordonnées, local dans l'espace de Fourier, souvent appelé « repère de Craya–Herring » grâce à Jacks Herring [7].

Mais l'héritage de Craya, dans sa thèse, contient beaucoup plus. Son ambition était de passer du cas de la turbulence homogène isotrope à celui de la turbulence homogène anisotrope, sous l'influence de G.I. Taylor (et pas de G. Batchelor, probablement). À cet effet, un champ de vitesse moyen à gradient uniforme dans l'espace peut structurer le champ turbulent et lui fournir de l'énergie. L'homogénéité statistique (invariance par translation) est restreinte au champ fluctuant, et il n'y a pas de rétroaction du champ fluctuant sur le champ moyen.

Souvent les spécialistes de la turbulence passent du modèle de turbulence homogène isotrope (HIT) aux écoulements inhomogènes, en court-circuitant l'étape intermédiaire HAT (*Homogeneous Anisotropic Turbulence*), de sorte que la pertinence de HAT mérite une discussion préliminaire, comme suit.

Même si HAT n'est pas considéré comme un domaine d'étude *en soi*, il offre un cadre utile de description simplifiée, qui se retrouve implicitement dans des secteurs d'application tels que la géophysique et l'astrophysique, ou des domaines allant de la mécanique des fluides à la magnéto-hydrodynamique et aux plasmas. Cet aspect a été illustré par les thèmes du

colloque « Fundamental problems of turbulence : 50 years after the turbulence colloquium Marseille 61 », sur lequel on peut retrouver toute l'information (les deux colloques de 1961 et de 2011) sur le site <http://turbulence.ens.fr>. (On mentionnera plus particulièrement la première conférence du colloque (2011) portant sur la turbulence homogène, par Keith Moffatt [8].)

Le concept HAT reste pertinent quand les effets volumiques des gradients moyens, vitesse et/ou flottaison, et les forces massiques (Coriolis, flottaison, Laplace – ou Lorentz) induisent des mécanismes linéaires (distorsion, ondes internes) spécifiques et modifient la cascade, sans effet significatif des frontières explicites du domaine fluide. Il est aussi possible d'ignorer les effets inhomogènes explicites, par exemple pour la turbulence uniformément cisailée, en imposant *a priori* le cisaillement moyen et en « oubliant » qu'il est le plus souvent créé par la paroi. Un autre exemple est l'instabilité elliptique, qui peut être simplifiée en considérant *a priori* un seul tourbillon à section elliptique non bornée, bien que l'ovalisation du tourbillon puisse résulter de l'influence mutuelle de deux tourbillons adjacents, comme dans les sillages d'avion.

Il faut aussi tenir compte de l'inflation galopante d'études à base de simulation numérique en boîte tri-périodique, allant de la turbulence en rotation, avec et sans stratification (Mininni, Pouquet et collaborateurs, Lindborg et collaborateurs, Biferale et collaborateurs), à la turbulence cisailée (Pumir, Jimenez et collaborateurs). Les résultats sont souvent très loin du cadre idéal HAT, en raison d'effets très significatifs de taille de boîte finie, ou de rapport d'aspect (boîte aplatie). D'autres études, en particulier pour l'instabilité barocline et la stratification instable, utilisent un contrôle précis du confinement artificiel dans les simulations numériques directes et comparent les résultats à des études théoriques, avec anisotropie détaillée, dans le cadre strict du HAT. Dans tous les cas, il ne s'agit pas de décerner des bons et des mauvais points dans l'utilisation de ces simulations numériques directes, mais nous recommandons de discuter avec précision les limites du concept HAT, sans ignorer les approches théoriques qu'il a engendrées.

Le travail de thèse de Craya a donné un angle d'attaque particulier à la théorie linéaire spectrale, dite RDT à Cambridge, mais aussi aux « fermetures triadiques ». La prise en compte de la relation non locale entre vitesse et pression, et de son expression algébrique dans l'espace de Fourier, est au cœur du formalisme pour la turbulence incompressible. La résolution des termes liés à la pression fluctuante, et son élimination finale dans les équations de moments conduit à considérer les corrélations doubles de vitesse en deux points dans l'espace physique, et le tenseur spectral correspondant, obtenu par transformée de Fourier à trois dimensions (3D) :

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \Leftrightarrow \hat{R}_{ij}(\mathbf{k}, t) \quad (1)$$

où \mathbf{k} est le vecteur d'onde 3D associé au vecteur \mathbf{r} séparant les deux points. L'équation dynamique pour $R_{ij}(\mathbf{r}, t)$, en présence de gradients uniformes de vitesse moyenne $A_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$, et après élimination exacte des termes mixtes de vitesse–pression, conduit à une équation beaucoup plus simple pour $\hat{R}_{ij}(\mathbf{k}, t)$, dite première équation de Craya. Par rapport à l'équation de Lin (HIT), cette équation de Craya donne les termes linéaires exacts induits par $A_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ pour un écoulement moyen

$$U_i(\mathbf{x}, t) = U_i^0 + A_{ij}(t)x_j \quad (2)$$

De plus, la contribution des corrélations triples en deux points, induite par la non-linéarité quadratique, généralise le terme de transfert spectral sous la forme d'un tenseur $T_{ij}(\mathbf{k}, t)$.

La procédure est étendue aux corrélations triples en trois points, avec :

$$R_{ijm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) u_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}') \rangle \Leftrightarrow \hat{R}_{ijm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, t) \quad (3)$$

Une seconde étape conduit à réduire le nombre de composantes des tenseurs spectraux, sans perte d'information, en utilisant le repère local de la Fig. 2. Il est plus simple de considérer la projection du vecteur de vitesse fluctuante, comme l'a fait Herring [7], plutôt que celle du tenseur spectral (équation (1)) par Craya.

Notre point de départ est donc la décomposition d'Helmholtz pour n'importe quel champ de vecteur $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$, qui revient dans l'espace de Fourier à

$$\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{w}}^{(\text{sol})} + \hat{\mathbf{w}}^{(\text{dil})}$$

où le « chapeau » dénote une transformée de Fourier 3D, au sens des distributions en général : la composante « dilatationnelle » correspond à la projection algébrique sur la direction du vecteur d'onde, tandis que la projection « solénoïdale » se retrouve dans le plan normal au vecteur d'onde, de sorte que

$$\hat{w}_i^{(\text{dil})} = \alpha_i \alpha_j \hat{w}_j, \quad \hat{w}_i^{(\text{sol})} = (\delta_{ij} - \alpha_i \alpha_j) \hat{w}_j, \quad \alpha_i = \frac{k_i}{|\mathbf{k}|}$$

Rappelons que la composante solénoïdale, à divergence nulle, peut être engendrée par un potentiel vecteur $\mathbf{w}^{(\text{sol})} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$ dans l'espace physique, tandis que sa partie « dilatationnelle » l'est par un potentiel scalaire $\mathbf{w}^{(\text{dil})} = \nabla \varphi$. (Dans la revue historique, la décomposition d'Helmholtz peut être reliée au double potentiel de Monge–Ampère.) Finalement, le repère local est choisi pour caractériser le plan normal à \mathbf{k} , comme sur la Fig. 2, de sorte que

$$\hat{\mathbf{w}}^{(\text{sol})}(\mathbf{k}, t) = w^{(1)}(\mathbf{k}, t) \mathbf{e}^{(1)}(\boldsymbol{\alpha}) + w^{(2)}(\mathbf{k}, t) \mathbf{e}^{(2)}(\boldsymbol{\alpha})$$

avec la décomposition orthonormale en trois contributions

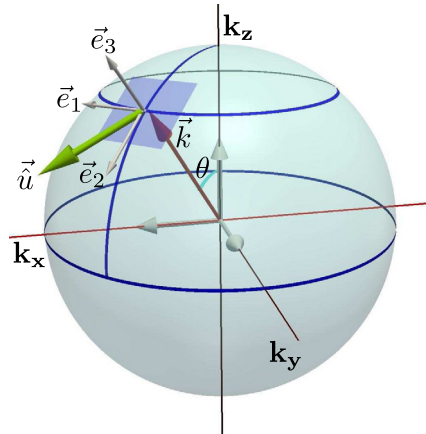


Fig. 2. Le repère dit de Craya-Herring.

$$\hat{w}(\mathbf{k}, t) = w^{(1)}(\mathbf{k}, t)e^{(1)}(\boldsymbol{\alpha}) + w^{(2)}(\mathbf{k}, t)e^{(2)}(\boldsymbol{\alpha}) + w^{(3)}(\mathbf{k}, t)\boldsymbol{\alpha} \tag{4}$$

et

$$e^{(1)} = \frac{\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{n}}{|\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{n}|}, \quad e^{(2)} = \boldsymbol{\alpha} \times e^{(1)}, \quad \boldsymbol{\alpha} (= e^{(3)}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \tag{5}$$

Par ailleurs, le repère de Craya-Herring n'est rien d'autre que le repère local attaché à un système de coordonnées sphériques pour \mathbf{k} , avec $e^{(1)}$ le long des parallèles (zonal direction), $e^{(2)}$ le long des méridiens, et $\boldsymbol{\alpha}$ dans la direction radiale. De plus, les composantes selon $e^{(1)}$ et $e^{(2)}$ correspondent presque exactement aux modes *toroïdal* et *poloïdal* dans l'espace physique, comme l'a aussi suggéré ultérieurement la décomposition dite « ondes-vortex » de Riley et al. (1981) (voir les détails dans [6])

L'utilisation d'un axe privilégié \mathbf{n} dans le système de coordonnées sphériques (Fourier), comme dans la décomposition toroïdale-poloïdale de l'espace physique, ne restreint pas la généralité : en particulier, l'anisotropie n'est pas restreinte à la symétrie de révolution, même si cette dernière conduit à des simplifications supplémentaires. Notre meilleur exemple est le cas du cisaillement pur plan, où le choix de l'axe \mathbf{n} dans la direction verticale (*cross-gradient*) permet d'identifier les variables de la décomposition toroïdale-poloïdale à celles d'Orr-Sommerfeld-Squires : laplacien de vitesse verticale et vorticité verticale.

Nous retiendrons la décomposition explicite du champ de vitesse solénoïdal à l'aide de deux composantes, et la résolution implicite de l'équation de Poisson pour la pression fluctuante, à partir des équations de Navier-Stokes¹ en écoulement incompressible. Ce problème, initialement à quatre composantes (u_1, u_2, u_3, p), se réduit finalement à deux ($u^{(1)}, u^{(2)}$).

Si nous considérons maintenant les moments statistiques, la réduction du nombre de composantes, sans perte de généralité, est de plus en plus importante à mesure que l'ordre augmente.   l'ordre 2, le tenseur spectral est engendré par seulement quatre descripteurs statistiques, spectres et co-spectres. Cette structure reflète celle de la matrice de covariance ($\hat{\mathbf{u}}^* \otimes \hat{\mathbf{u}}$), avec deux composantes pour $\hat{\mathbf{u}}$ et la condition de divergence nulle $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{k} = 0$, de sorte que

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \underbrace{\mathcal{E} - \Re Z}_{\mathcal{E}^{(tor)}} & \Im Z - i\mathcal{H} & 0 \\ \Im Z + i\mathcal{H} & \underbrace{\mathcal{E} + \Re Z}_{\mathcal{E}^{(pol)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} - \mathcal{H} & Z & 0 \\ Z^* & \mathcal{E} + \mathcal{H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

La première matrice correspond à la projection de $\hat{\mathbf{u}}$ dans le repère de Craya, et la seconde à sa projection sur les modes hélicoïdaux (Cambon et Jacquin 1989, Waleffe 1992, in [6]) :

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\alpha}) = e^{(2)} - ie^{(1)}, \quad \mathbf{N}^*(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{N}(-\boldsymbol{\alpha}) = e^{(2)} + ie^{(1)}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \tag{7}$$

Dans la première matrice, la définition des quatre « scalaires de base de Craya » a pu être un peu modifiée et réinterprétée, avec les énergies poloïdale et toroïdale pour les termes diagonaux, tandis que le terme non diagonal purement imaginaire

¹ Selon Olivier Darrigol, Uriel Frisch and Jacques Magnaudet, cette équation aurait pu s'appeler Navier-Cauchy-Green dès 1823, avant sa redécouverte par Stokes in 1847.

est relié au spectre d'hélicité $k\mathcal{H}$. Finalement, le pseudo-scalaire à valeur complexe Z décrit l'anisotropie de polarisation, i.e. le fait que les directions dans le plan normal à \mathbf{k} ne sont pas statistiquement équivalentes, à \mathbf{k} fixé.

Un traitement similaire est possible pour les corrélations triples en trois points, via le tenseur spectral $\hat{R}_{ijm}(\mathbf{k}, \mathbf{p})$. Par souci de brièveté, nous mentionnerons uniquement que Craya n'a pas utilisé le produit de trois repères locaux indépendants associés aux trois vecteurs de la triade formée par \mathbf{k} , \mathbf{p} et $\mathbf{q} = -\mathbf{k} - \mathbf{p}$, mais trois repères liés entre eux et au plan de la triade, avec son vecteur normal comme nouvel axe polaire. Cette procédure reste utile pour traiter de façon optimale la non-linéarité, mais ne lui a pas permis de généraliser les solutions linéaires des corrélations doubles à celles des corrélations triples.

3. Solutions des « équations de Craya »

Le problème de génération des solutions linéaires a été résolu ultérieurement, et à un ordre quelconque (Cambon 1982, in [6]), en revenant à l'équation de la fluctuation de vitesse dans l'espace de Fourier

$$\hat{u}_i(\mathbf{k}, t) + \nu k^2 \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) + M_{ij}(\boldsymbol{\alpha}) \hat{u}_j(\mathbf{k}, t) = \underbrace{i P_{imn}(\mathbf{k}) \widehat{(u_m u_n)}(\mathbf{k}, t)}_{s_i(\mathbf{k}, t)} \quad (8)$$

dans laquelle la matrice

$$M_{ij}(\boldsymbol{\alpha}) = (\delta_{im} - 2\alpha_i \alpha_m) A_{mj} \quad \text{avec} \quad \alpha_i = k_i/k$$

prend en compte l'effet direct (linéaire) des gradients de vitesse moyenne \mathbf{A} , y compris la contribution de la pression fluctuante via le terme $-2\alpha_i \alpha_m$. Quand à la non-linéarité héritée de Navier–Stokes, elle met en jeu un produit de convolution

$$\widehat{u_i u_j}(\mathbf{k}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \hat{u}_i(\mathbf{p}, t) \hat{u}_j(\underbrace{\mathbf{k} - \mathbf{p}}_{\mathbf{q}}, t) d^3 \mathbf{p} \quad (9)$$

qui donne l'origine des interactions triadiques ($\mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$). Ce terme est affecté par l'opérateur de projection $P_{imn} = (1/2)(k_m(\delta_{in} - \alpha_i \alpha_n) + k_n(\delta_{im} - \alpha_i \alpha_n))$, parfois attribué à Kraichnan, qui préserve à nouveau la propriété de divergence nulle assurée par la pression fluctuante dans l'espace physique. Le point superposé correspond à l'advection par l'écoulement moyen, qui conduit aussi à considérer un vecteur d'onde dépendant du temps (voir section 4). La solution de la partie linéaire de cette équation s'écrit

$$\hat{u}_i(\mathbf{k}(t), t) = G_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}, t, t_0) \hat{u}_j(\mathbf{k}(t_0), t_0) \quad (10)$$

à l'aide d'un tenseur de Green, algébrique et local dans l'espace de Fourier. Ce tenseur est utilisé pour absorber la partie non linéaire s_i de l'équation complète, ou n'importe quel terme de forçage associé, de telle sorte que

$$\hat{u}_i(\mathbf{k}(t), t) = G_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}, t, t_0) \hat{u}_j(\mathbf{k}(t_0), t_0) + \int_{t_0}^t G_{ij}^{(0)}(\mathbf{k}, t, t') s_j(\mathbf{k}(t'), t') dt' \quad (11)$$

Les solutions linéaires pour les moments statistiques s'en déduisent simplement, avec

$$\hat{R}_{ij}(\mathbf{k}(t), t) = G_{im}^{(0)}(\mathbf{k}, t, t_0) G_{jn}^{(0)}(\mathbf{k}, t, t_0) \hat{R}_{mn}(\mathbf{k}(t_0), t_0) \quad (12)$$

et

$$\hat{R}_{ijm}(\mathbf{k}(t), \mathbf{p}(t), t) = G_{iu}^{(0)}(\mathbf{q}, t, t_0) G_{jv}^{(0)}(\mathbf{k}, t, t_0) G_{mw}^{(0)}(\mathbf{p}, t, t_0) \hat{R}_{uvw}(\mathbf{k}(t_0), \mathbf{p}(t_0), t_0) \quad (13)$$

pour les corrélations doubles et triples. Ce dernier résultat tire parti de l'expression factorisée des tenseurs spectraux de corrélation à partir du spectre de la fluctuation de vitesse

$$\langle \hat{u}_i^*(\mathbf{k}) \hat{u}_j(\mathbf{p}) \rangle = \hat{R}_{ij}(\mathbf{k}) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad \langle \hat{u}_i(\mathbf{q}) \hat{u}_j(\mathbf{k}) \hat{u}_m(\mathbf{p}) \rangle = \hat{R}_{ijm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q}) \quad (14)$$

et est donc facilité par l'usage des distributions, ignorées par Craya, et déjà employées implicitement pour écrire l'équation (8).

4. Au-delà du sujet principal : la longue histoire de la théorie dite de « distorsion rapide »

Cet article offre maintenant l'occasion de rappeler quelques étapes marquantes, en liaison avec l'histoire de la mécanique des fluides.

Avant de séparer *a priori* moyenne et fluctuation, on trouve des intégrales lagrangiennes des équations d'Euler incompressibles telles que

$$\omega_i(\mathbf{x}, t) = F_{ij}(\mathbf{X}, t, t_0)\omega_j(\mathbf{X}, t_0) \quad (15)$$

pour la vorticité ($\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$), en accord avec le théorème de Kelvin, et

$$u_i(\mathbf{x}, t) = F_{ji}^{-1}(\mathbf{X}, t, t_0)u_j(\mathbf{X}, t_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad (16)$$

pour la vitesse elle-même, selon Weber (in [6]). Ces formules mettent en jeu la « matrice de Cauchy » \mathbf{F} réintroduite dans la suite (voir aussi Uriel Frisch dans le même colloque²) Pour un champ de vitesse lisse, les trajectoires correspondent à un « mapping » des variables lagrangiennes, dénotées \mathbf{X} , à leur contrepartie eulérienne \mathbf{x} . La matrice de Cauchy est

$$F_{ij}(\mathbf{X}, t, t_0) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (17)$$

en différenciant l'équation de la trajectoire

$$x_i = \chi_i(\mathbf{X}, t, t_0)$$

soit

$$dx_i = u_i dt + F_{ij}(\mathbf{X}, t, t_0) dX_j$$

Les variables lagrangiennes donnent les positions initiales à $t = t_0$ et « étiquettent » les trajectoires. Pour éviter toute confusion entre variables lagrangiennes et eulériennes, la dérivée temporelle sera dénotée par un point superposé dans le premier système de variables.

Les équations ci-dessus, par Kelvin et Weber, ne sont pas de « vraies » solutions, car \mathbf{F} contient aussi l'information sur le champ de vitesse, ou de vorticité, en général. Il est possible toutefois d'obtenir des solutions linéaires, ou linéarisées, en restreignant \mathbf{F} à un écoulement moyen, et en considérant \mathbf{u} et $\boldsymbol{\omega}$ comme des fluctuations par rapport à cette moyenne. Une telle application de la RDT par Hunt (1992, in [6]) repose sur l'équation de Weber linéarisée, mais n'est valable que pour un écoulement moyen irrotationnel. Pourquoi une telle équation perd-elle sa généralité après linéarisation ? La réponse est donnée par la linéarisation du terme d'étirement tourbillonnaire de l'équation de vorticité :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \omega_j \rightarrow \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \omega_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} W_j$$

Le second terme après linéarisation, ou étirement de la vorticité moyenne par la vitesse fluctuante, ne peut pas être résolu simplement. Seulement, si cette vorticité moyenne est nulle, le premier terme, ou étirement de la vorticité fluctuante par la vitesse moyenne, relève du traitement des équations (15) et (16).

4.1. Théorie spectrale linéaire avec des modes de Fourier advectés

Nous pouvons revenir maintenant à la classe d'écoulements moyens utilisés dans la thèse de Craya, avec une matrice de gradients \mathbf{A} uniforme dans l'espace, mais combinant déformation et vorticité. Les modes de la fluctuation de vitesse (et de pression) peuvent être choisis sous la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \sim a_i(t)e^{i\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x}} \quad (18)$$

déjà suggérée par lord Kelvin (1887) pour un écoulement de Couette non borné. La dépendance en temps du vecteur d'onde est liée à la conservation des modes de Fourier le long des trajectoires de l'écoulement moyen, en accord avec

$$x_i = \bar{F}_{ij}(t, t_0)X_j, \quad k_i = \bar{F}_{ji}^{-1}(t, t_0)K_j \quad (19)$$

où $\mathbf{K} = \mathbf{k}(t_0)$ est la contrepartie de la coordonnée lagrangienne \mathbf{X} de l'écoulement moyen.

Après les contributions éminentes d'Orr (1909) et de Prandtl, la RDT fut introduite à Cambridge par Batchelor & Proudman (1954, in [6]) pour des applications statistiques. Cette approche a été longtemps restreinte aux écoulements moyens irrotationnels, de sorte que l'espace de Fourier n'a été qu'une commodité pour passer algébriquement de la vorticité à la vitesse (à partir de l'équation (15) linéarisée), plutôt que d'utiliser la formulation non locale de Biot-Savart. Le terme potentiel de l'équation de Weber linéarisée peut être résolu de manière similaire. Rappelons que le seul mécanisme physique retenu, et largement surestimé, est l'étirement linéaire de la fluctuation de vorticité par la déformation moyenne.

Dans ce contexte RDT, Keith Moffatt [9] a donné la forme moderne de la théorie linéaire spectrale, en identifiant un tenseur de Green pour la réponse linéaire de la turbulence avec un écoulement moyen *rotationnel*, le cisaillement pur plan. L'importance de la partie rotationnelle du cisaillement moyen pour organiser la turbulence a été finalement reconnue par Townsend (1976, in [6]) dans sa revue de la RDT.

² La meilleure terminologie pourrait être « matrice jacobienne de Cauchy-Lagrange ».

L'extension à un écoulement moyen de matrice \mathbf{A} a été étudiée par Cambon (1982) et Cambon & Teissède (1985, in [6]), avec notamment une première caractérisation de l'instabilité elliptique, dans le contexte RDT. Cette instabilité a ensuite fait l'objet d'un très grand nombre d'études après sa redécouverte dans le cadre strict de la stabilité hydrodynamique, par A. C. C. Craik (Craik & Criminale, 1986, in [6]) et Bayly (1986, in [6]). Il est à noter que Craik et Criminale ont présenté leurs solutions comme des « solutions exactes » des équations d'Euler non linéaires : cela est justifié dans la mesure où la perturbation consiste en un mode unique, du type (18), car un seul mode n'interagit pas avec lui-même dans la limite incompressible. En revanche, la linéarisation doit être justifiée quand la fluctuation consiste en une collection de modes, par exemple avec un spectre initial dense ; cela constitue la spécificité de la RDT par rapport à la stabilité hydrodynamique unimodale. L'impact fort de l'étude de Bayly (1986) vient aussi de sa publication sur l'instabilité elliptique, parue la même année que celle de Pierrehumbert (1986, in [6]), qui a utilisé une méthode classique de modes normaux, beaucoup plus opaque.

Il faut aussi noter que les instabilités « hyperboliques » et « elliptiques » sont à croissance exponentielle. Un autre avantage de la théorie linéaire spectrale (ou RDT au sens large) est la possibilité de traiter la croissance algébrique transitoire. Dans la stabilité hydrodynamique classique, les perturbations sont de la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = e^{\sigma t} \mathbf{a}(\mathbf{x})$$

où σ est un taux de croissance à valeur complexe. La croissance exponentielle est donc spécifiée par cette forme, contrairement à l'équation (18) avec (19). Nous ne discutons pas ici l'utilisation du spectre continu pour σ , qui peut réconcilier tous ces effets, car elle est beaucoup plus compliquée à mettre en œuvre.

Les applications d'une approche de stabilité non modale, avec un cisaillement uniforme, sont illustrées par Chagelishvili et ses collaborateurs (1983), avec beaucoup d'études dans cette continuité. En astrophysique, l'approximation de la couche cisailée (*Shearing Sheet Approximation*, SSA, Balbus et Hawley, 1998) permet de retrouver le cisaillement tournant comme un modèle pour la stabilité de l'écoulement de Taylor–Couette, lui-même utilisé pour analyser des disques d'accrétion. La transition à la turbulence, via la croissance transitoire, peut être étudiée dans les disques d'accrétion képlériens, qui sont exponentiellement stables. Sur ce dernier point, le critère de Rayleigh est cohérent avec celui de Bradshaw (1969, in [6]) pour le cisaillement tournant.

Il semble que la RDT soit maintenant presque oubliée dans la communauté de l'ingénierie, par exemple pour calibrer des constantes dans les modèles de tenseurs de pression–déformation. En revanche, elle a trouvé un nouvel essor, avec une terminologie très différente, en géophysique et en astrophysique, avec de nouveaux défis : croissance transitoire, sa contribution aux cycles de régénération des structures, puis transition à la turbulence (voir la nouvelle édition de [6], en préparation).

4.2. La formulation locale de Lifschitz et Hameiri

Cette approche très générale de Lifschitz et Hameiri (1991, 1993, in [6]) nous servira à conclure cette revue de la RDT, au sens le plus large. L'idée est de rendre locale l'analyse des perturbations en généralisant la forme (18) pour des écoulements moyens (ou écoulements de base) plus réalistes que ceux à gradients uniformes \mathbf{A} dans l'espace. Les perturbations sont maintenant de la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \sim \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \exp\left(i \frac{\Phi(\mathbf{x}, t)}{\epsilon}\right) \quad (20)$$

où ϵ est un paramètre arbitrairement petit.

Les perturbations sont donc des paquets d'onde (pas nécessairement de vraies ondes propagatives) avec phases « rapides » qui suivent n'importe quelle trajectoire lisse de l'écoulement moyen (de base). Aux premiers ordres pertinents de ϵ , on retrouve les équations de Kelvin–Moffatt

$$\dot{a}_i + M_{ij} a_j = 0, \quad \dot{k}_i = -A_{ij} k_j$$

avec un vecteur d'onde « zonal » défini localement dans l'espace physique par

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \Phi$$

Toutes ces quantités dépendent de \mathbf{X} , contrairement au cas « homogène ». Au premier ordre pertinent, la phase rapide est uniquement transportée par l'écoulement de base, ou $\dot{\Phi} = 0$, de sorte que le vecteur d'onde est donné par

$$k_i(\mathbf{X}, t) = \bar{F}_{ij}^{-1}(\mathbf{X}, t, t_0) k_j(\mathbf{X}, t_0) \quad (21)$$

comme pour le gradient d'un scalaire passif, ce qui généralise l'équation (19). Bien sûr, il faut garder en tête que les notations inspirées de Cauchy et Lagrange, telle que \mathbf{X} , le point superposé et $\mathbf{F} \rightarrow \bar{\mathbf{F}}$, ne concernent que l'écoulement de base. L'application à des écoulements réalistes a permis d'identifier localement les différentes instabilités, hyperboliques, elliptiques et centrifuges, dans Godefert et coll. (2001, in [6]). On trouvera aussi dans Guimbard et Leblanc (2005) une application très originale à des écoulements épicycliques.

5. Quelques étapes après la thèse de Craya, de 1958 à 1970

5.1. Inversion/résolution des opérateurs linéaires, pour des moments d'ordre quelconque

Il n'y a aucune difficulté de principe à prendre en compte la contribution des moments d'ordre $n + 1$ en n points dans les équations des moments d'ordre n en n points, via les tenseurs spectraux et à l'aide du tenseur de Green de base (11). Les solutions linéaires (12), (13) peuvent alors absorber les contributions des non-linéarités, avec

$$\hat{R}_{ij}(\mathbf{k}(t), t) = G_{im}^{(0)}(\mathbf{k}, t)G_{jn}^{(0)}(\mathbf{k}, t)\hat{R}_{mn}(\mathbf{k}, t, t_0) + \int_{t_0}^t G_{im}^{(0)}(\mathbf{k}, t, t')G_{jn}^{(0)}(\mathbf{k}, t, t')T_{mn}(\mathbf{k}(t'), t') dt' \quad (22)$$

à l'ordre 2, où T_{mn} regroupe la contribution des corrélations triples en deux points, et

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ijm}(\mathbf{k}(t), \mathbf{p}(t), t) &= G_{iu}^{(0)}(\mathbf{q}, t, t_0)G_{jv}^{(0)}(\mathbf{p}, t, t_0)G_{mw}^{(0)}(\mathbf{p}, t)\hat{R}_{uvw}(\mathbf{k}(t_0), \mathbf{p}(t_0), t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t G_{iu}^{(0)}(\mathbf{k}, t, t')G_{jv}^{(0)}(\mathbf{k}, t, t')G_{mw}^{(0)}(\mathbf{p}, t, t')T_{uvw}(\mathbf{k}(t'), \mathbf{p}(t'), t') dt' \end{aligned} \quad (23)$$

à l'ordre 3, où $T_{uvw}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, t)$ donne la contribution des corrélations quadruples en trois points.

5.2. Vers les fermetures triadiques

Une étape cruciale pour la fermeture, qui peut être réalisée au niveau de l'équation (23), est l'application d'une technique à base d'approximation QNM (quasi-normale markovienne), qui s'est révélée efficace pour la turbulence « faible » comme pour la « forte ». L'ingrédient QNM reçoit un support mathématique dans la « théorie de turbulence d'onde », par Newell [10] notamment. L'approximation quasi-normale, introduite par Millionshchikov [11] fournit la fermeture intrinsèque de la contribution des corrélations quadruples dans l'équation des corrélations triples ; le triple produit de tenseurs de Green, que l'on retrouve dans (23), conduit à un amortissement très important de la non-linéarité par dispersivité des ondes, via leur mélange de phase, sauf au voisinage des interactions résonantes de ces ondes ; finalement, la « markovianisation » est cohérente avec la dynamique lente des amplitudes, qui sont les enveloppes des phases rapides, et où ne survivent que les interactions résonantes.

La fermeture QNM, qui peut être considérée comme exacte quand la turbulence est dominée par des interactions d'ondes dispersives, n'est pas satisfaisante au départ pour la turbulence « forte ». Un progrès décisif a été réalisé par Orszag [12] en turbulence isotrope (sans ondes) : il a montré que la contribution des cumulants d'ordre 4, considérée comme nulle dans l'approximation QN, est essentielle ; elle peut être modélisée par un terme de relaxation tourbillonnaire (Eddy Damping, ED) dans l'équation des corrélations triples ; ce dernier ingrédient, qui n'est en général ni suffisant pour assurer la réalisabilité, permet de justifier *a posteriori* la « markovianisation », de sorte que la mémoire des corrélations triples devient évanescence vis-à-vis de l'histoire des corrélations doubles. L'ensemble EDQNM donne finalement un modèle réalisable, solide et prédictif du spectre d'énergie en HIT.

Finalement, tous ces aspects ont pu être réconciliés, au moins dans le cas de HAT en utilisant l'équation suivante, qui prolonge (23) :

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ijm}(\mathbf{k}(t), \mathbf{p}(t), t) &= G_{iu}^{(0)}(\mathbf{q}, t, t_0)G_{jv}^{(0)}(\mathbf{k}, t, t_0)G_{mw}^{(0)}(\mathbf{p}, t)\hat{R}_{uvw}(\mathbf{k}(t_0), \mathbf{p}(t_0), t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t G_{iu}^{(NL)}(\mathbf{q}, t, t')G_{jv}^{(NL)}(\mathbf{k}, t, t')G_{mw}^{(NL)}(\mathbf{p}, t, t')T_{uvw}^{(QN)}(\mathbf{k}(t'), \mathbf{p}(t'), t') dt' \end{aligned} \quad (24)$$

$T_{uvw}^{(QN)}$ est rigoureusement dérivé de T_{uvw} dans (23) par l'approximation QN (symboliquement $\langle uuuu \rangle = \sum \langle uu \rangle \langle uu \rangle$). L'écart par rapport à une loi gaussienne (ici probabilité jointe à quatre points) est prise en compte par le réajustement non linéaire du tenseur de Green. En d'autres termes, la différence entre la version « nue » et « habillée » du tenseur de Green, ou $\mathbf{G}^{(NL)} - \mathbf{G}^{(0)}$, est reliée à la différence entre les « vraies » corrélations quadruples et leur forme QN, qui s'exprime comme des sommes de produits de corrélations doubles. Dans la version initiale d'Orszag, $\mathbf{G}^{(NL)}$ est un facteur exponentiel, qui ajoute au terme visqueux le terme d'amortissement tourbillonnaire, d'origine non linéaire via les cumulants d'ordre 4. Dans l'autre cas extrême de turbulence d'onde, le tenseur de Green est un propagateur d'ondes, qu'il n'est pas nécessaire en général de renormaliser, car la dispersion par mélange de phase amortit les corrélations triples et coupe leur mémoire propre. Il existe beaucoup de cas intermédiaires et nous renvoyons le lecteur à [6] pour une discussion élargie.

5.3. Retour sur les théories de Kraichnan

L'analyse précédente suggère une stratégie générale de fermeture à base d'EDQNM anisotrope généralisé. Il est, par exemple, possible de couvrir un très large domaine de la turbulence en rotation, qui est presque décrit par l'EDQNM isotrope à grand nombre de Rossby et relève de la turbulence d'ondes inertielles aux plus petits nombres de Rossby. Pour cette stratégie, l'angle d'attaque initial de Craya, avec les avancées ultérieures de Keith Moffatt, Alan Newell et Steven Orszag, a joué un plus grand rôle que les théories de Kraichnan.

Nous sommes conscients du caractère provocateur de cette dernière opinion ! Un premier argument est que l'essentiel des théories de Kraichnan, de la DIA (*Direct Interaction Approximation*) [13] aux versions lagrangiennes ou semi-lagrangiennes plus compliquées, résulte d'un développement formel de faible perturbation autour d'un état de référence isotrope et gaussien. En conséquence, la « fonction réponse » à l'ordre zero est purement isotrope et ne peut pas coïncider avec le tenseur réponse associé à la RDT visqueuse, comme il devrait le faire pour des écoulements soumis à des gradients moyens et/ou des forces massiques.

Plus généralement, le tenseur réponse infinitésimal est défini par

$$\delta \hat{u}_i(\mathbf{k}t) = \int_{t_0}^t \mathcal{G}(\mathbf{k}, t, t'') \delta f_j(\mathbf{k}, t'') dt'' \quad (25)$$

(avant toute moyenne d'ensemble), mais il devrait être

$$\delta \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = \int \left(\int_{t_0}^t \mathcal{G}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', t, t'') \delta f_j(\mathbf{k}'', t'') dt'' \right) d^3 \mathbf{k}''$$

avec deux vecteurs d'onde indépendants, car la perturbation est effectuée autour d'une réalisation pleinement non linéaire, avec le terme non local $\mathbf{u} \otimes \delta \mathbf{u}$ issu des équations de Navier–Stokes dans l'espace de Fourier. (Rappelons que cette structure non locale se retrouverait avec une formulation dans l'espace physique, d'abord pour la dissipation, et à cause de la relation non locale entre pression et vitesse.)

Pour les grandeurs statistiques, le tenseur réponse infinitésimal moyenné est correct, sous la forme

$$\overline{G}_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', t, t'') = \overline{G}_{ij}(\mathbf{k}, t, t'') \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'')$$

en turbulence homogène isotrope (HIT), mais non pour HAT « à la Craya », où il devrait être

$$\overline{G}_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'', t, t'') = \overline{G}_{ij}(\mathbf{k}, t, t'') \delta^3(\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{F}}(t, t'') \mathbf{k}'')$$

Kraichnan est passé directement du domaine HIT [13] aux écoulements inhomogènes, cisailés et/ou dominés par la flottaison (1976), en court-circuitant la case HAT : on ne peut pas le lui reprocher, mais il est probable que l'application à HAT aurait révélé une faiblesse, ou approximation trop forte, telle que la diagonalité de l'expression (25) supposée *a priori*. À notre connaissance, Kraichnan n'a jamais travaillé sur la RDT, et sur son extension naturelle vers la faible non-linéarité en turbulence d'onde.

Pour conclure sur une note humoristique, je ne résiste pas à rapporter ce commentaire d'Antoine Craya, à propos d'une des premières versions de la DIA : « La DIA est comme la Joconde (Mona Lisa), dont elle a la beauté étrange, mais aussi l'ambiguïté. » Incidemment, il y a toute une tradition orale, dont j'ai eu connaissance par Jean Mathieu, Marcel Lesieur et Bertrand Aupoix (voir aussi sa thèse de doctorat ès sciences), sur les boutades, aphorismes et commentaires de Craya : un florilège à rassembler ?

6. Progrès récents

Tout d'abord, la description de l'anisotropie peut être complètement détaillée, directement dans l'espace de Fourier, en utilisant le nombre minimal de descripteurs statistiques, comme dans (6). La Fig. 3 en donne une illustration, principalement pour la turbulence à symétrie de révolution, dans des domaines que n'avait pas abordé Craya. Il est possible de démêler les effets de directivité, qui affectent surtout la réduction de dimensionalité dans l'espace physique, et ceux de polarisation. Leurs manifestations, combinées et multiformes, se retrouvent dans toutes les corrélations statistiques, en deux points, puis en un point. L'anisotropie peut être induite par des effets linéaires directs, à partir de conditions initiales isotropes, mais résulte aussi des transferts non linéaires (par exemple dans l'équation (22)), qui reflètent les transferts d'énergie et d'anisotropie entre échelles de taille et d'orientation différente.

6.1. Écoulements stratifiés avec flottaison

Dans ce cas, non traité par Craya, la flottaison due à un champ de densité, de température ou de concentration, peut inclure, comme la vitesse, moyenne et fluctuation. Le gradient uniforme de flottaison moyenne met en jeu le carré de la

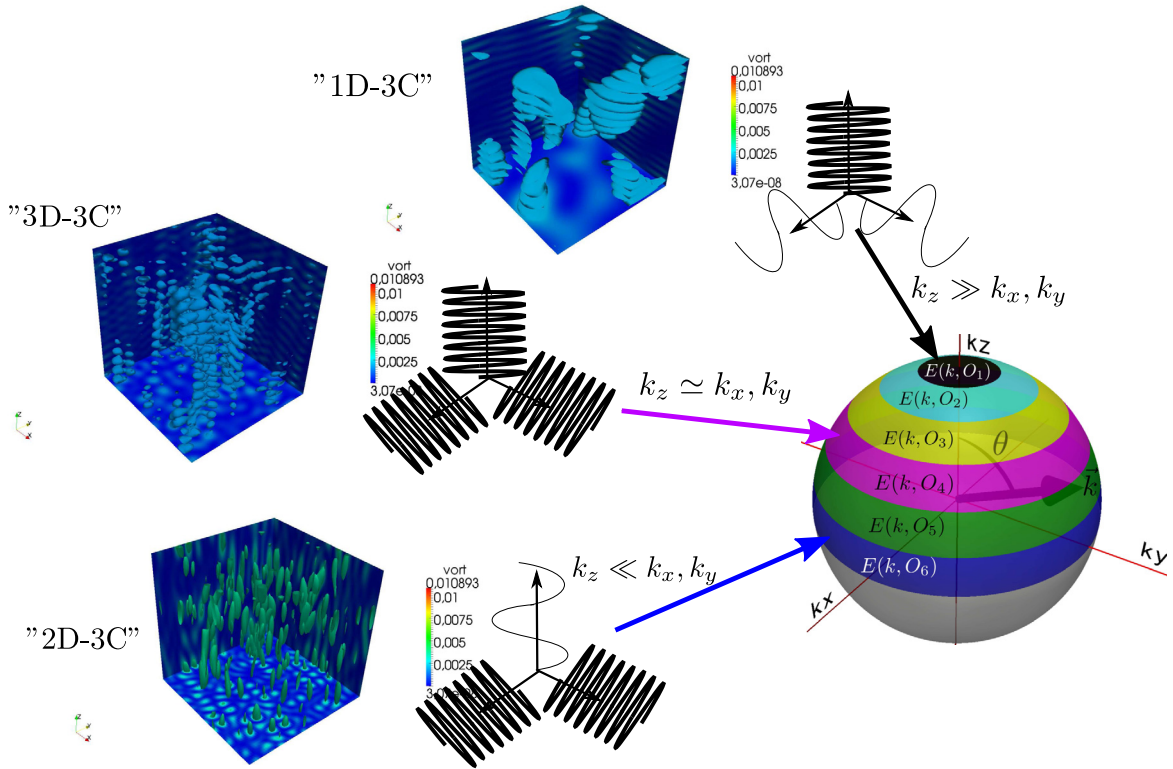


Fig. 3. Relation entre structure anisotrope et directivité des spectres. En configuration axisymétrique, la concentration de l'énergie dans des directions particulières reflète une réduction de dimensionnalité, 1D dans la zone « polaire » des sphères dans l'espace de Fourier, 2D dans leur « ceinture équatoriale ». En plus de la directivité, l'anisotropie de polarisation détecte les composantes dominantes (2C, 3C). Les deux démèlent *dimensionality* et *componentiality* (selon la nomenclature de Kassinos et coll. (2001, in [6]), intraduisible). D'après Alex Delache, avec mes remerciements.

fréquence de stratification N , dite fréquence de Brünt-Wäisälä. En accord avec l'approximation de Boussinesq, pour de faibles écarts de densité et à très faible nombre de Mach, le champ de vitesse reste à divergence nulle, mais la densité, et donc le scalaire de flottaison, dénoté b (pour *buoyancy*), peut fluctuer autour de sa valeur constante de référence. Les trois composantes du repère de Craya peuvent être utilisées pour décrire le champ complet de fluctuation, avec la contribution de la fluctuation de flottaison traitée comme un mode pseudo-dilatationnel, ou $u^{(3)} \sim \hat{b}/N$. En conséquence, $(1/2)u^{(1)*}u^{(1)}$, $(1/2)u^{(2)*}u^{(2)}$ et $(1/2)u^{(3)*}u^{(3)}$ correspondent respectivement à l'énergie toroïdale, l'énergie poloïdale et l'énergie potentielle. Le système initial de variables fluctuantes à cinq composantes (trois pour la vitesse, une pour la pression, une pour la flottaison) et cinq relations (trois pour Navier–Stokes, une pour le transport de b , et condition de divergence nulle pour \mathbf{u}) se réduit à trois (voir Godefert & Cambon (1994, in [6]) et Godefert & Staquet (2003, in [6])).

La matrice de covariance, dont la structure est donnée par $\langle u^{(i)*}u^{(j)} \rangle$, devient

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \underbrace{\mathcal{E} - \Re Z}_{\mathcal{E}^{(\text{tor})}} & \Im Z - i\mathcal{H} & F^{(\text{tor})} \\ \mathcal{E}^{(\text{tor})} & \underbrace{\mathcal{E} + \Re Z}_{F^{(\text{pol})}*} & F^{(\text{pol})}* \\ F^{(\text{tor})}* & \mathcal{E}^{(\text{pol})} & \mathcal{E}^{(\text{pot})} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Les nouveaux descripteurs statistiques mis en jeu par le couplage avec la flottaison sont le spectre d'énergie potentielle $\mathcal{E}^{(\text{pot})}$ et les co-spectres de flux de flottaison, toroïdal $F^{(\text{tor})}$ et poloïdal $F^{(\text{pol})}$.

Le flux toroïdal est aussi relié à la corrélation croisée entre vorticité axiale (le long de l'axe vertical portant la gravité) et flottaison. Comme le spectre d'hélicité $k\mathcal{H}$, il disparaît par symétrie miroir. Des équations de Lin partiellement couplées sont obtenues pour tous les descripteurs dans (26), avec des termes linéaires exacts et des termes de transfert généralisés. Pour les écoulements stratifiés sans cisaillement moyen, les transferts d'énergie et cascades associées sont schématisés sur la Fig. 4. Pour les grandeurs intégrées sphériquement, le schéma en haut à gauche illustre une cascade directe, des grandes vers les petites échelles, donc vers les sphères de plus grand rayon k dans l'espace de Fourier. La cascade inverse (ou effet plus restreint de *backscatter*) apparaît en haut à droite. En bas, on décrit la cascade vis-à-vis de k_{\perp} (de cylindre à cylindre en Fourier) directe à gauche, inverse au centre. Finalement, le schéma en bas à droite illustre le transfert angulaire d'énergie, dans le cas de la stratification stable. La concentration de l'énergie vers le pôle de la sphère correspond à un

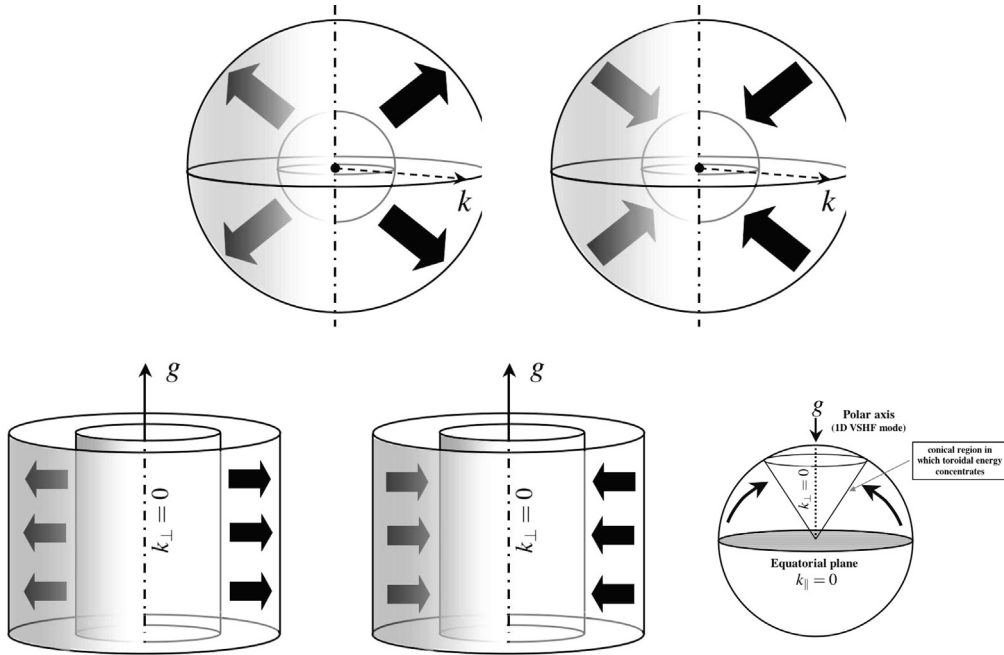


Fig. 4. Schémas pour divers processus de « cascade » ou effets éventuels de « backscatter ».

champ de vitesse de plus en plus horizontal, à cause de l'orthogonalité entre $\hat{\mathbf{u}}$ et \mathbf{k} , dont la variabilité est de plus en plus restreinte à la direction verticale. La limite est appelée VSHF (*Vertically Sheared Horizontal Flow*) par Smith et Waleffe (2002, in [6]), ou 1D–2C sur la Fig. 3). Cette transition partielle du 3D–3C au 1D–2C quantifie le feuilletage des écoulements stratifiés stablement, et résulte d'une cascade toroidale ; elle réconcilie les manifestations schématisées sur la Fig. 4, en haut à gauche, en bas au centre, et en bas à droite.

6.2. La turbulence magnéto-hydrodynamique

Antoine Craya n'a pas abordé la turbulence magnéto-hydrodynamique (MHD) mais son influence est claire dans l'excellent article de René Moreau [14] sur la MHD quasi statique. Des études expérimentales sans précédent ont été conduites dans une cuve de mercure, soumise à un champ magnétique axial uniforme intense, où la turbulence est engendrée par la chute d'une grille. L'étude de la contrepartie théorique et numérique a été poursuivie par Cambon (1991) à partir d'une approche EDQNM anisotrope et menée à terme beaucoup plus récemment par Favier et coll. (2012) en utilisant des simulations numériques directes comparées quantitativement, puis extrapolées à très grand nombre de Reynolds par l'EDQNM anisotrope.

Toutefois la MHD quasi statique est une version très particulière de la MHD anisotrope, validée par la valeur extrêmement faible du nombre de Reynolds magnétique (10^{-8} dans le mercure !) : le champ magnétique n'est pas réellement turbulent, il est complètement déterminé par le champ de vitesse, et la force de Laplace, ou de Lorentz, revient à un terme de dissipation ohmique anisotrope ajouté à l'équation de Navier–Stokes. En conséquence, la limite quasi-statique de la MHD revient à modifier la turbulence hydrodynamique classique en déclin par un opérateur linéaire supplémentaire, dont l'échelle dépend du champ magnétique uniforme imposé. Cet opérateur linéaire favorise tout d'abord un état 2D–3C, qui devient 2D–2C quand il est relayé par la dynamique non linéaire (voir Fig. 3). Cette transition ultime correspond à une cascade inverse pour l'énergie des fluctuations transversales (par rapport à la direction du champ magnétique imposé) et à une cascade directe pour l'énergie des fluctuations axiales, au voisinage du mode 2D (ceinture équatoriale sur la figure).

Plus généralement, la turbulence MHD combine la diffusion ohmique et les ondes d'Alfvén, et le champ magnétique apparaît comme un vecteur actif, transporté par le champ de vitesse mais réagissant sur lui par la force de Laplace. La description homogène anisotrope met en jeu un vecteur d'état qui combine les fluctuations de vitesse \mathbf{u} et de champ magnétique \mathbf{b} , non divergents, avec quatre composantes non nulles, soit $u^{(1)}, u^{(2)}, 0, b^{(1)}, b^{(2)}, 0$ dans le repère de Craya. La matrice de covariance suivante regroupe les composantes non nulles, d'après Cambon et coll. (2012) sur la base des modes hélicoïdaux \mathbf{N}, \mathbf{N}^* dans (7), qui est particulièrement adaptée.

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} - \mathcal{H} & Z & C^1 - C^2 & Z^1 \\ Z^* & \mathcal{E} + \mathcal{H} & Z^2 & C^1 + C^2 \\ C^1 - C^{2*} & Z^{2*} & \mathcal{E}^M - \mathcal{H}^M & Z^M \\ Z^{1*} & C^1 + C^{2*} & Z^{M*} & \mathcal{E}^M + \mathcal{H}^M \end{pmatrix} \quad (27)$$

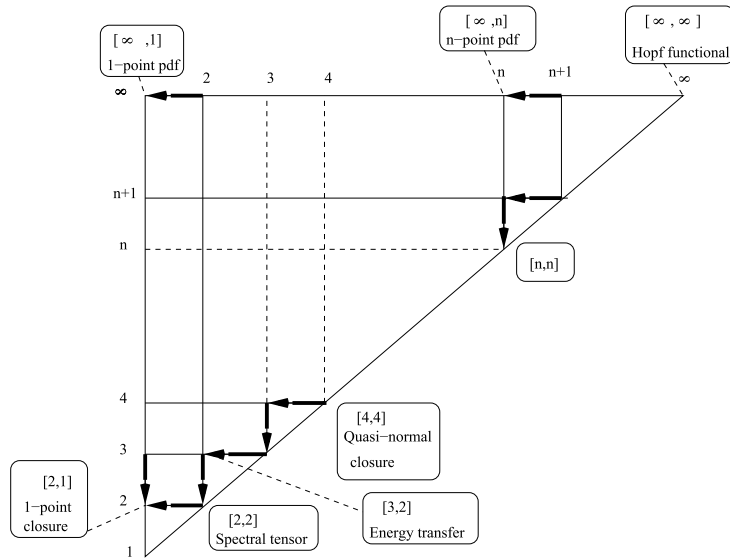


Fig. 5. Représentation synthétique du problème de fermeture, par approche statistique et probabiliste.

Le bloc purement cinématique, correspondant à $\langle \hat{\mathbf{u}}^* \otimes \hat{\mathbf{u}} \rangle$, redonne les descripteurs $\mathcal{E}, \mathcal{Z}, \mathcal{H}$ comme dans (6). Le bloc purement magnétique, pour $\langle \hat{\mathbf{b}}^* \otimes \hat{\mathbf{b}} \rangle$, donne leur contrepartie $\mathcal{E}^M, \mathcal{Z}^M, \mathcal{H}^M$ avec une structure identique. Quant aux blocs non diagonaux engendrés par $\langle \hat{\mathbf{b}}^* \otimes \hat{\mathbf{u}} \rangle$ et son complexe conjugué, ils conduisent à définir deux termes de polarisation, Z^1 and Z^2 , le spectre de l'hélicité croisée $\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}$, dénoté C^1 , et le spectre de la force électromotrice $\mathbf{u} \times \mathbf{b}$, dénoté C^2 . Des équations de Lin généralisées peuvent être écrites pour tous ces termes, avec ou sans champ magnétique imposé, dans lesquelles la contribution spécifique des corrélations triples combine des termes de transfert conservatifs aux contributions non linéaires de la force de Laplace.

6.3. Formulation en deux points directement dans l'espace physique

La dynamique des corrélations doubles en deux points est abordée par les équations de type Kármán–Howarth–Monin, directement dans l'espace physique, et donc contiennent en principe la même information que l'«équation de Craya» pour $\hat{R}_{ij}(\mathbf{k}, t)$. Si l'homogénéité statistique est satisfaite, il y a une stricte équivalence entre l'équation scalaire pour $(1/2)R_{ii}(\mathbf{r}, t)$ et sa contrepartie spectrale, l'équation scalaire pour $\mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = (1/2)\hat{R}_{ii}(\mathbf{k}, t)$. En revanche, les corrélations mixtes vitesse/pression, dont la contribution disparaît seulement pour la trace de $R_{ij}(\mathbf{r}, t)$, retrouvent une expression non locale presque ingérable pour les termes non diagonaux. Ces termes non diagonaux sont beaucoup plus accessibles, sous forme de terme de polarisation et de spectre d'hélicité dans la formulation spectrale. En pratique, l'équation de Kármán–Howarth peut être étendue à des écoulements fortement inhomogènes (jets, sillages, proche paroi), mais seule sa version scalaire est utilisée pour des diagnostics et des bilans, et donc elle n'a pas de caractère prédictif en l'absence d'une évaluation précise des contributions non diagonales. Cette équation met en jeu, via la non-linéarité, la fonction de structure d'ordre 3, et permet de dériver des relations scalaires, telle que la relation 4/5 de Kolmogorov en HIT et de nombreuses variantes, obtenues avec champs couplés.

L'équation sur les corrélations triples en trois points $R_{ijm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ est d'une complexité qui la rend inutilisable en pratique, contrairement à sa contrepartie dans l'espace de Fourier, pour $\hat{R}_{ijm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, t)$. Au-delà de la dualité entre espace physique et espace de Fourier, l'information sur les corrélations triples en trois points est cruciale pour retrouver la cohérence de phase et décrire son impact, en turbulence d'onde mais aussi dans beaucoup d'autres domaines de turbulence «forte». Cette information est beaucoup plus riche que celle contenue dans la fonction de structure d'ordre 3, qui est uniquement en deux points, pour décrire les cascades anisotropes.

6.4. Contribution au « problème de fermeture » général

Le problème de fermeture de la turbulence via une description statistique et probabiliste peut être schématisé sur le diagramme de la Fig. 5 (voir aussi [6]).

L'ordre n des moments statistiques, disons pour une fluctuation de vitesse centrée, est porté par l'axe vertical, et le nombre de points distincts p pour les décrire figure sur l'axe horizontal, avec, bien entendu, $1 \leq p \leq n$. Le point $[n, p]$ correspond donc à un moment d'ordre n en p point, par exemple les corrélations triples peuvent être décrites en 3, 2 et un point, du plus général au plus particulier, avec des besoins de fermeture différents. Le prolongement jusqu'à la ligne

horizontale supérieure correspond à la connaissance de tous les moments à un ordre quelconque, et est en principe équivalente à la densité de probabilité jointe. Le prolongement de cette ligne horizontale, qui reporte le nombre de points de la description probabiliste, jusqu'à l'infini, représente le cas ultime de la fonctionnelle d'Hopf, considéré comme la limite d'une densité de probabilité jointe à une infinité de points.

La règle de contraction de l'information est très simple de droite à gauche, en suivant une ligne horizontale : la connaissance du moment d'ordre n en n points, sur l'hypothénuse du triangle, entraîne la connaissance de tous les termes à sa gauche, en faisant coïncider des points. De façon plus complexe, et cela est illustré par des flèches verticales, de haut en bas, la connaissance du moment $[n + 1, n]$ entraîne celle du moment $[n, n]$, de par la structure des équations dynamiques, et en faisant abstraction des conditions limites et initiales. Les relations de fermeture visent à re-déployer l'information, avec le processus inverse du précédent, par exemple exprimer un moment d'ordre n en p points à l'aide des moments d'ordre inférieurs, et éventuellement contractés sur un plus petit nombre de points. Nous illustrons ici deux types de hiérarchies, qui prennent en compte la non-linéarité et la non-localité des équations de base : la hiérarchie des équations de moments, qui découle de la non-linéarité quadratique des équations de type Navier–Stokes, fait dépendre le moment d'ordre n de celui d'ordre $n + 1$, mais on ignore en général le problème de la non-localité (relation de la pression à la vitesse, et même dissipation) dans cette hiérarchie. La seconde hiérarchie, dite de Lundgren/Novikov/Monin, fait dépendre la densité de probabilité jointe en n points de celle en $n + 1$ points, à cause de la non-localité. Le problème de fermeture disparaît au niveau de l'équation de Hopf, symbolisée par le point ultime en haut à droite du diagramme : cette équation est linéaire et fermée, mais son caractère fonctionnel complique terriblement toute application.

Ces généralités étant dites, nous allons maintenant illustrer quelques techniques de fermeture, plus ou moins conventionnelles, et retrouver les aspects importants que l'analyse de Craya a contribué à initier.

Le point $[2, 2]$ représente $R_{ij}(\mathbf{r}, t) \Leftrightarrow \hat{R}_{ij}(\mathbf{k}, t)$, d'où est obtenu par contraction d'information le tenseur de Reynolds $R_{ij}(\mathbf{r} = 0, t)$ en $[2, 1]$. Inversement, la flèche de $[2, 2]$ à $[2, 1]$ indique un besoin de fermeture dans les équations du tenseur de Reynolds à cause des effets non locaux de la pression fluctuante (termes de pression – taux de déformation). En toute rigueur, ces termes ont aussi une origine non linéaire, et donc mettent aussi en jeu le niveau $[3, 2]$, de même que les termes de flux de corrélations triples, si nous sortons du cadre HAT. En général, la fermeture de (des équations de transport de) la grandeur statistique $[n, p]$ met en jeu les points immédiatement en haut et à droite, tels que $[n, p + 1]$, $[n + 1, p]$, $[n + 1, p + 1]$, par les effets combinés de non-linéarité et de non-localité. Insistons encore sur l'intérêt d'attaquer directement le problème au niveau $[n, n]$. L'équation pour $[2, 2]$ ne met en jeu (flèche verticale descendante de $[3, 2]$ à $[2, 2]$) que $[3, 2]$, qui représente $T_{mn}(\mathbf{k}, t)$ (HAT) via l'équation (22). Dans les « fermetures triadiques », la fermeture n'est pas effectuée directement au niveau de $[3, 2]$ mais sur l'équation qui gouverne $R_{ijm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \Leftrightarrow \hat{R}_{ijm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, t)$, représentant $[3, 3]$. Cette dernière équation (23) met en jeu les corrélations quadruples en trois points, et donc le niveau $[4, 3]$ et les hypothèses de base, telle que QN, sont formulées au niveau $[4, 4]$.

7. Conclusions

Le principal message à retenir du travail de la thèse d'Antoine Craya est que les corrélations triples doivent être abordées, pour leur description et leur modélisation, en trois points distincts. L'espace de Fourier n'est qu'une commodité mathématique, dès le moment où l'équivalence de $R_{ijm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ (tous les bi-points) et de $\hat{R}_{ijm}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, t)$ (toutes les triades) est posée. Nous allons au-delà de la séparation conventionnelle entre « fermetures en un point » et « fermetures en deux points », et nous suggérons de limiter la mention des fermetures en deux points aux modèles, aussi bien dans l'espace physique à partir des équations de type Kármán–Howarth que dans l'espace de Fourier avec des modèles *ad hoc* de transfert spectral, quand il ne font pas appel à une description triadique détaillée. Le domaine des fermetures triadiques caractérise alors les théories et modèles les plus élaborés et les plus efficaces, qui peuvent maintenant réconcilier la turbulence faible, telle que la turbulence d'onde, et la forte. La turbulence d'onde donne un des meilleurs exemples du traitement de la cohérence de phase, avec en particulier l'impact crucial des interactions d'ondes résonantes. Cette cohérence de phase est perdue au niveau des corrélations doubles en turbulence homogène et donc ne peut être rétablie que sur les corrélations triples en trois points (ou sur toutes les triades). Au-delà de la turbulence homogène, la pertinence des corrélations en trois points est discutée par John Lumley (1967, in [6]) dans son article initial sur la « proper orthogonal decomposition ».

Pour finir, n'oublions pas l'utilité du repère de Craya, et de ses nombreuses variantes apparues ultérieurement, dont les modes hélicoïdaux et une grande variété de décompositions « ondes/vortex » en géophysique. Même si elle est limitée à des configurations quasi homogènes, la réduction du nombre de descripteurs statistiques en HAT permet une analyse très profonde de l'anisotropie, en séparant notamment directivité et polarisation.

Remerciements

Je suis reconnaissant à Emil Hopfinger et Jacques Magnaudet pour m'avoir communiqué des informations sur la carrière d'Antoine Craya. Je remercie Julian Scott pour avoir relu un texte préliminaire en anglais, et m'avoir encouragé à repasser du « broken English » au français.

Références

- [1] H. Rouse, Hydraulic's latest golden age, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 8 (1976) 1–13.

- [2] A. Tailland, J. Mathieu, Jet pariétal, *J. Méc.* 6 (1967) 103–131.
- [3] G. Comte-Bellot, Contribution à l'étude de la turbulence en conduite, thèse de doctorat ès sciences faculté des sciences de l'université de Grenoble 1963.
- [4] A. Revuelta, C. Martínez-Bazán, A.L. Sánchez, A. Liñán, Laminar Craya–Curtet jets, *Phys. Fluids* 16 (2004) 208.
- [5] A. Craya, Contribution à l'analyse de la turbulence associée à des vitesses moyennes, thèse de doctorat ès sciences, Université de Grenoble, 1957.
- [6] P. Sagaut, C. Cambon, *Homogeneous Turbulence Dynamics*, CUP, New York, 2008, Nouvelle édition à paraître.
- [7] J.R. Herring, Approach of axisymmetric turbulence to isotropy, *Phys. Fluids* 17 (5) (1974) 859–872.
- [8] H.K. Moffatt, Homogeneous turbulence: an introductory review, *J. Turbul.* 13 (39) (2012) 1–11.
- [9] H.K. Moffatt, Interaction of turbulence with strong wind shear, in: *Colloquium on Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, Nauka, Moscou, 1967, pp. 139–156.
- [10] D.J. Benney, A.C. Newell, Random wave closures, *Stud. Appl. Math.* 48 (1969) 29–53.
- [11] M.D. Millionshchikov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 32 (1941) 22–24.
- [12] S.A. Orszag, Analytical theories of turbulence, *J. Fluid Mech.* 41 (1970) 363–386.
- [13] R.H. Kraichnan, The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* 5 (1959) 497–543.
- [14] R. Moreau, On magnetohydrodynamic turbulence, in: *Proc. Symposium on Fluids and Plasmas*, Polytechnic Institute of Brooklyn, New York, 1968, pp. 359–372.