



## Modélisation de la turbulence en déclin avec rotation



### Modeling of decaying rotating turbulence

Zouaoui Jihene<sup>a</sup>, Hamed Marzougui<sup>a,b</sup>, Taieb Lili<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Département de physique, faculté des sciences de Tunis, 2092 Tunis, Tunisie

<sup>b</sup> Département de physique, faculté des sciences de Hafr Al Batin, Arabie saoudite

#### INFO ARTICLE

##### Historique de l'article :

Reçu le 25 juin 2016

Accepté le 14 mai 2017

Disponible sur Internet le 8 juin 2017

##### Mots-clés :

Turbulence en déclin

Effets de rotation

Modélisation

Fermeture au second-ordre

Simulation

##### Keywords:

Decaying turbulence

Rotation effects

Second-order closure model

Simulation

#### R É S U M É

L'étude présentée dans cet article porte sur la modélisation des effets induits par la rotation sur une turbulence homogène évoluant sans gradient de vitesse moyenne. Le modèle développé est le résultat d'une modification du modèle au second ordre de Haworth et Pope. Cette modification est explicitée en fonction du taux de rotation  $\Omega$ , de la composante  $\overline{u_{\parallel}^2}$  du tenseur de Reynolds et de l'échelle caractéristique de longueur  $\mathcal{L}_{\parallel}$  dans la direction de l'axe de rotation. Les résultats obtenus ont montré la grande capacité de la présente fermeture à décrire les effets induits par les forces de Coriolis dues à la rotation sur l'évolution temporelle de la turbulence en déclin.

© 2017 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

#### A B S T R A C T

The study presented in the present paper deals with the modeling of the rotation effects on a homogeneous turbulence evolving without a mean velocity gradient. The developed model results from a modification of the second order model of Haworth and Pope. This modification is expressed as a function of the rotation rate, of the component of the Reynolds tensor and of the characteristic length scale in the direction of the rotation axis. The obtained results have evidenced the great capacity of the present model to describe the rotation effects on the time evolution of the homogeneous decaying turbulence.

© 2017 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## 1. Introduction

La turbulence joue un rôle très important dans un grand nombre de phénomènes physiques évoluant dans des référentiels non inertiels; nous les retrouvons dans beaucoup d'applications industrielles (machines tournantes type moteur d'avion, turbopompes), géophysiques (tempêtes) et astrophysiques (les disques d'accrétion-éjection). Par conséquent, une

Adresse e-mail : jihenezouaoui82@gmail.com (Z. Jihene).

compréhension claire des effets non inertiels sur la turbulence est nécessaire afin de comprendre la physique de ces phénomènes.

Les effets de la rotation font l'objet d'un grand nombre d'études théoriques [1,2], numériques [3–6] et expérimentales [7, 8]. Cambon et al. [1] ont montré que la suppression du transfert d'énergie des grosses structures turbulentes vers les petites est l'effet majeur de la rotation sur la turbulence. Une conséquence directe de cet effet est un taux de dissipation visqueux plus faible que dans le cas isotrope, ce qui entraîne une réduction du taux de décroissance de l'énergie cinétique turbulente avec l'augmentation du taux de rotation. Ces résultats sont observés dans les simulations numériques de Morinishi et al. [3,4], Yeung et al. [5], Yang et al. [6], et ils sont soutenus aussi expérimentalement par Wigeland et Nagib [7] ou Jacquin et al. [8]. Nous avons remarqué aussi que, pour un nombre de Reynolds élevé et pour des valeurs modérées et élevées du taux de rotation, l'énergie spectrale subit une transition de la loi  $k^{-5/3}$  à la loi  $k^m$  ( $m$  varie de 2 à 3) [2,9,10].

Il est indiqué dans la littérature que la rotation n'affecte pas seulement le transfert d'énergie, mais aussi l'anisotropie de la turbulence. Nous trouvons dans les travaux de Cambon et al. [1], Jacquin et al. [8], Speziale et al. [11], Mansour et al. [12] et Yang et al. [6] que l'anisotropie générée par la rotation se manifeste par l'augmentation de l'échelle intégrale de longueur dans la direction de l'axe de rotation comparé aux échelles dans les directions perpendiculaires ; cependant, le tenseur de Reynolds reste isotrope. En revanche, dans les simulations numériques de Yang et al. [6] et Bartello et al. [13], le tenseur de Reynolds devient anisotrope pour des temps de simulation suffisamment grands.

En présence de la rotation, deux échelles de temps interviennent : le temps de retournement de la turbulence  $\tau_t = K/\epsilon$  et le temps caractéristique de l'action de la rotation  $\tau_\Omega = 1/\Omega$ . Le rapport des deux échelles donne une grandeur adimensionnelle  $\mathcal{R}_0 = \epsilon/2K\Omega$ , appelée nombre de Rossby. Ce paramètre permet de distinguer trois régimes. Le premier correspond à des taux de rotation faible ( $\mathcal{R}_0 \gg 1$ ). Dans ce régime, l'écoulement turbulent n'est pas affecté par la rotation. Le second, qui correspond à des valeurs modérées de la rotation, est dominé par l'effet couplé des effets linéaires dus à la rotation et des effets non linéaires de la turbulence. En présence de cet effet, l'anisotropie se développe, en accord avec la transition de la turbulence vers un état bidimensionnel. Dans le troisième régime, pour lequel le nombre de Rossby est très inférieur à 1, l'effet couplé est fortement amorti via l'inhibition des effets non linéaires par la rotation rapide. Dans ce cas, la turbulence évolue en régime purement visqueux et aucune transition ne peut se produire.

Dans la littérature, une gamme très importante de modèles de turbulence est disponible, depuis les modèles algébriques les plus simples jusqu'aux plus avancés – ASM (*algebraic Reynolds stress model*) et RSM (*Reynolds stress model*) –, en passant par le modèle  $K-\epsilon$ . Kassinos et Reynolds [14], Cambon et al. [1] ont montré que le tenseur associé aux tensions de Reynolds ne peut à lui seul fournir une image complète de l'effet de la rotation sur la turbulence. Pour plus d'informations sur ce type d'écoulement, ces auteurs ont décomposé le tenseur d'anisotropie  $b_{ij}$  en une partie directionnelle ( $b_{ij}^e$ ) permettant de décrire les effets liés à la dimensionalité de la turbulence et une partie appelée tenseur de polarisation ( $b_{ij}^z$ ) permettant de décrire l'anisotropie du tenseur de Reynolds et les échelles intégrales de longueur. Notons ici que cette décomposition n'est possible que dans le cadre d'une description en deux points dans l'espace physique ou dans le cadre d'une description spectrale. Les mêmes auteurs ont suggéré aussi d'introduire l'anisotropie due à la rotation dans les échelles intégrales de longueur de la turbulence. Speziale [15,16] a mentionné dans ses travaux que la bonne voie pour mieux appréhender les effets rotatifs s'articule autour de la modification du modèle généralisé de Haworth et Pope [17] à partir du modèle de Langevin. C'est dans ce contexte que s'inscrit le présent travail, qui consiste principalement à apporter une modification au modèle de Haworth et Pope qui tient compte des effets de la rotation en faisant intervenir les échelles intégrales de longueur de la turbulence.

## 2. Modélisation des effets induits par la rotation sur la turbulence en déclin

Nous avons mentionné dans ce qui précède que l'objet principal du présent travail est de développer une modification du modèle au second ordre de Haworth et Pope [17] afin de décrire les effets induits par la rotation sur la turbulence homogène en déclin. Nous rappelons ici que leur modèle est le résultat de l'intégration de l'équation eulérienne d'évolution de la densité de probabilité des vitesses, dans laquelle les termes inconnus sont modélisés en utilisant l'équation de Langevin généralisée proposée par Pope [17]. Ce modèle s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \tau_{kl} = -\tau_{km} \bar{U}_{l,k} - \tau_{lm} \bar{U}_{k,m} + \mathcal{G}_{km} \tau_{ml} + \mathcal{G}_{lm} \tau_{mk} + C_0 \epsilon \delta_{kl} \quad (1)$$

$C_0$  est une constante universelle de valeur 2 et  $\mathcal{G}$  est un tenseur d'ordre 2, son expression est la suivante :

$$\mathcal{G}_{kl} = (2 + \beta_1)(\bar{U}_{k,l} + e_{nlk} \Omega_m) - \frac{1}{2K} \beta_1 (\bar{U}_{k,m} + e_{nmk} \Omega_n) \tau_{ml} + \mathcal{H}_{kl}(\tau, \bar{D}, \epsilon) \quad (2)$$

$\beta_1$  est une constante et  $\mathcal{H}$  est un tenseur qui ne dépend pas de la rotation. Pour plus de détails sur ce tenseur, le lecteur pourra se référer à la référence [17].

Dans le cas d'une turbulence isotrope en déclin avec rotation, le système d'équations de ce modèle se réduit à un système d'équations identique à celui d'une turbulence isotrope ;  $\Omega$  disparaît.

Dans toute la suite, nous allons présenter notre modèle. Rappelons que, lorsque la turbulence est sujette à une rotation pure, il y a deux directions privilégiées : une direction parallèle à la rotation désignée par l'indice  $\parallel$  et une direction perpendiculaire désignée par  $\perp$ . Selon ces notations, les équations pour les tensions de Reynolds issues du modèle modifié

s'écrivent d'une manière générale comme suit :

$$\overline{u_{\perp,t}^2} = -\frac{2}{3}\epsilon - (3C_0 + 2)\epsilon b_{\perp} + 4g_1\epsilon(1/3 + b_{\perp})[b_{\perp} - (2b_{\perp}^2 + b_{\parallel}^2)] + f_{\perp}(\Omega, \overline{u^2}) \quad (3)$$

$$\overline{u_{\parallel,t}^2} = -\frac{2}{3}\epsilon - (3C_0 + 2)\epsilon b_{\parallel} + 4g_1\epsilon(1/3 + b_{\parallel})[b_{\parallel} - (2b_{\perp}^2 + b_{\parallel}^2)] + f_{\parallel}(\Omega, \overline{u^2}) \quad (4)$$

$g_1$  est une constante du modèle de Haworth et Pope ( $g_1 = 3.7$  voir réf [17]).

$b_{\perp}$  et  $b_{\parallel}$  sont les compantes du tenseur d'anisotropie ( $b_{\perp} = \frac{\overline{u_{\perp}^2}}{2k} - 1/3$ ,  $b_{\parallel} = \frac{\overline{u_{\parallel}^2}}{2k} - 1/3$ ).  $f_{\perp}$  et  $f_{\parallel}$  deux corrections que nous proposons de les exprimer en fonction des grandeurs de l'écoulement turbulent. Ces corrections doivent donc respecter les deux conditions suivantes.

- (i) Nous savons que les forces de Coriolis ne produisent pas de l'énergie, le rôle de ces forces est de modifier la redistribution de l'énergie sur les composantes du tenseur de Reynolds. Par conséquent, la forme de l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente est identique à celle en turbulence isotrope. La contraction entre les indices  $\perp$  et  $\parallel$  dans l'équation d'évolution du tenseur de Reynolds conduit alors à :

$$f_{\parallel} + 2f_{\perp} = 0 \quad (5)$$

- (ii) L'analyse des résultats de type DNS et LES ont montré qu'en présence de la rotation :

- la structure de la turbulence s'aligne dans la direction de la rotation ; l'échelle de longueur de la turbulence  $\mathcal{L}_{\parallel}$  dans la direction de la rotation augmente avec l'augmentation du taux de rotation et elle a un comportement quasi linéaire du temps ;
- les fluctuations de vitesse dans la direction de la rotation sont fortement atténuées par la rotation ;
- dans le cas où la rotation est rapide, les effets liés à la rotation disparaissent,

$$\Omega \rightarrow \infty \implies f_{\parallel} = f_{\perp} = 0 \quad (6)$$

Ces arguments physiques nous ont aide considerablement, avec les travaux de Speziale [15] à proposer un modèle algébrique exprimant  $f_{\parallel}$  et  $f_{\perp}$  comme suit :

$$f_{\parallel}(\Omega, \overline{uu}, \mathcal{L}_{\parallel}, \mathcal{L}_0) = \frac{C_1}{K^{1/2}} \Omega \overline{u_{\parallel}^2}^{3/2} \left(\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_{\parallel}}\right)^2, \quad C_1 = -0.18 \quad (7)$$

$$f_{\perp}(\Omega, \overline{uu}, \mathcal{L}_{\parallel}, \mathcal{L}_0) = -\frac{C_1}{2K^{1/2}} \Omega \overline{u_{\parallel}^2}^{3/2} \left(\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_{\parallel}}\right)^2 \quad (8)$$

$\mathcal{L}_0$  représente l'échelle de longueur isotrope de la turbulence. Dans ce modèle, le rapport des échelles  $\frac{\mathcal{L}_{\parallel}}{\mathcal{L}_0}$  s'exprime simplement par :

$$\frac{\mathcal{L}_{\parallel}}{\mathcal{L}_0} = 1 + \frac{\Omega}{2\pi} t \quad (9)$$

Finalement, le système d'équations (3) et (4) est fermé par l'équation modèle pour le taux de dissipation développée par Marzougui [18] :

$$\epsilon_{,\Omega} = -1.83 \frac{\epsilon^2}{K} - C_{\Omega} \left(\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_{\parallel}}\right)^2 \Omega \epsilon, \quad C_{\Omega} = 0.1 \quad (10)$$

### 3. Évaluation du modèle

#### 3.1. Équations adimensionnelles du modèle proposé

D'une façon générale, il est intéressant d'exprimer les grandeurs turbulentes sous une forme adimensionnelle. Si on définit une vitesse de référence  $u_0$  et une échelle de longueur  $\mathcal{L}_0$  et une échelle de temps telle que  $t^* = tu_0/\mathcal{L}_0$ , les équations adimensionnelles du modèle proposé relatives à une turbulence sujette à une rotation pure s'écrivent :

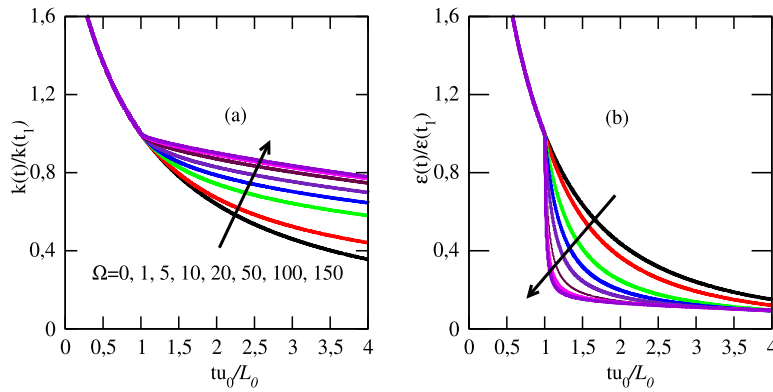
$$\overline{u_{\perp,t}^2} = -\frac{2}{3}\epsilon - (3C_0 + 2)\epsilon b_{\perp} + 4g_1\epsilon(1/3 + b_{\perp})[b_{\perp} - (2b_{\perp}^2 + b_{\parallel}^2)] - \frac{C_1}{4\mathcal{R}_0} \left(\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_{\parallel}}\right)^2 \frac{\overline{u_{\parallel}^2}^{3/2}}{K^{1/2}} \quad (11)$$

$$\overline{u_{\parallel,t}^2} = -\frac{2}{3}\epsilon - (3C_0 + 2)\epsilon b_{\parallel} + 4g_1\epsilon(1/3 + b_{\parallel})[b_{\parallel} - (2b_{\perp}^2 + b_{\parallel}^2)] + \frac{C_1}{2\mathcal{R}_0} \left(\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_{\parallel}}\right)^2 \frac{\overline{u_{\parallel}^2}^{3/2}}{K^{1/2}} \quad (12)$$

$$\epsilon_{,\Omega} = -1.83 \frac{\epsilon^2}{k} - \frac{C_{\Omega}}{2\mathcal{R}_0} \left(\frac{\mathcal{L}_0}{\mathcal{L}_{\parallel}}\right)^2 \epsilon \quad (13)$$

**Tableau 1**  
Conditions initiales.

Cas	cas 1	cas 2	cas 3	cas 4	cas 5	cas 6	cas 7	cas 8
$\Omega$	0	1	5	10	20	50	100	150
$k_0$	0,58	–	–	–	–	–	–	–
$\mathcal{L}_0$	1,32	–	–	–	–	–	–	–
$\mathcal{R}_0$	$\infty$	0,329	0,0659	0,0329	0,0164	0,00659	0,00329	0,0021



**Fig. 1.** Évolution temporelle : (a) de l'énergie cinétique turbulente, (b) du taux de dissipation.

### 3.2. Présentation des résultats

Les équations ci-dessus sont résolues numériquement par une méthode de Runge–Kutta d'ordre quatre. Plusieurs cas de simulation sont traités, pour lesquels le taux de rotation  $\Omega$  varie de zéro à 150 (Tableau 1). Dans l'intervalle de temps adimensionnel  $[0, t_1]$ , la turbulence est isotrope ( $\overline{u^2_{\parallel}} = \overline{u^2_{\perp}}$ ).  $t_1 = 1$  représente l'instant où la rotation est appliquée. Les résultats obtenus et que nous venons de représenter montrent que la rotation a des effets énergétiques et structuraux liés à l'anisotropie du tenseur de Reynolds.

Sur la Figure 1b, nous traçons l'évolution dans le temps du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente. Conformément aux résultats de littérature [3,4,11,19], le présent modèle reproduit la réduction de cette grandeur avec l'augmentation du taux de rotation. Cette réduction est due essentiellement aux ondes inertielles qui affectent la cascade d'énergie en inhibant le transfert non linéaire de l'énergie turbulente des grosses structures turbulentes vers les petites, ce qui entraîne un taux de dissipation plus faible que dans le cas isotrope. Par conséquent, le taux de réduction de l'énergie cinétique d'une turbulence en déclin diminue avec la diminution du nombre de Rossby. Ceci est observé sur la Figure 1a, qui montre bien que l'énergie cinétique turbulente croît avec l'augmentation du taux de rotation. Ces figures montrent aussi que les effets rotatifs disparaissent pour des valeurs élevées du taux de rotation ; nous remarquons qu'il n'y a aucune différence entre les cas  $\Omega = 100$  et  $\Omega = 150$ .

Sur la Figure 2 sont tracées les courbes d'évolution temporelle des composantes  $b_{\parallel}$  et  $b_{\perp}$  du tenseur d'anisotropie. Cette figure montre qu'à partir d'un état isotrope dominé par les effets nonlinéaires dus aux forces inertielles, la turbulence se développe rapidement à l'instant  $t_1$  où l'on applique la rotation vers un état anisotrope dont le degré est augmenté, pour des temps faibles, avec l'augmentation du taux de rotation. Cette anisotropie est le résultat d'émergence des ondes inertielles dues aux forces de Coriolis. Ces dernières, qui sont significatives dans le cas où la turbulence est dominée par l'effet couplé, excitent les fluctuations de vitesses parallèles à l'axe de rotation de manière à céder leur énergie aux fluctuations normales, ce qui entraîne une amplification forte de l'intensité turbulente normale et une inhibition de celle parallèle à l'axe de rotation (Figure 3). Par référence aux résultats de littérature [6,13], les résultats des Figures 2 et 3 sont à la hauteur de ceux escomptés.

Nous revenons maintenant aux cas où la rotation est rapide. Les résultats analytiques et numériques développés pour ce type d'écoulement ont montré que, dans le cas où la rotation est rapide, la turbulence évolue en régime purement visqueux ; dans lequel les effets liés aux forces de Coriolis disparaissent. Il est important d'indiquer ici qu'en présence de la rotation, la turbulence est le siège d'une interaction entre les effets nonlinéaires et les effets linéaires dus aux forces de Coriolis, que le présent modèle prédit avec un niveau acceptable. Les résultats présentés sur les Figures 4a et 4b montrent que l'évolution temporelle du rapport des intensités turbulentes  $I_{\parallel}/I_{\perp}$  et les différentes composantes du tenseur d'anisotropie passent par trois phases. Dans la première phase  $[0, t_1]$ , où la rotation est absente, la turbulence est maintenue dans un état isotrope par les effets nonlinéaires des forces inertielles ( $I_{\parallel}/I_{\perp} = 1, b_{\parallel} = b_{\perp} = 0$ ). La deuxième phase est définie par l'intervalle de temps adimensionnel  $[t_1, \tau_{\Omega}]$ .

Dans cette phase, la turbulence est dominée par l'effet couplé qui oriente la turbulence vers un état anisotrope dont le niveau est fixé par le taux de rotation. Pour  $t \gg \tau_{\Omega}$  (phase 3) et pour des valeurs suffisamment élevées du taux de rotation,

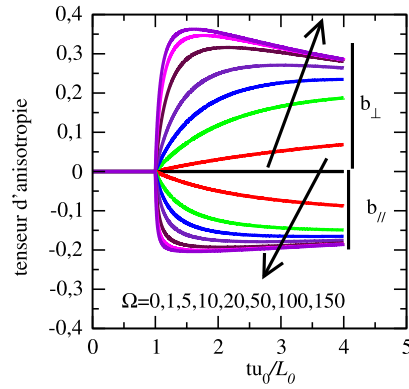


Fig. 2. Évolution temporelle de l'anisotropie de la turbulence.

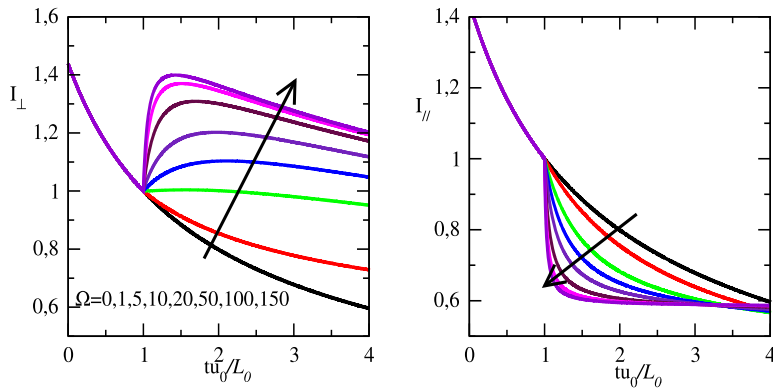


Fig. 3. Évolution temporelle des intensités turbulentes.

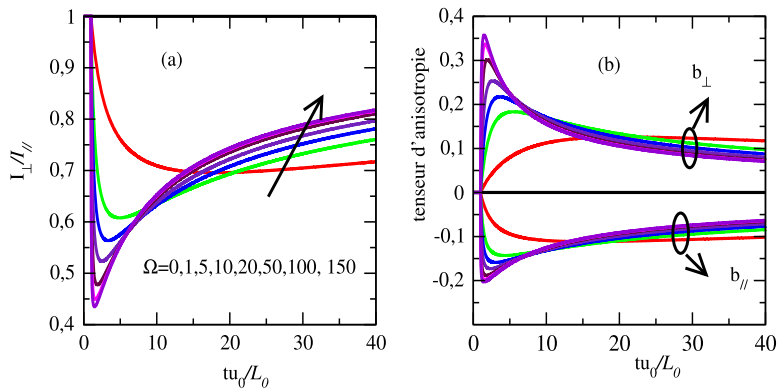


Fig. 4. Évolution temporelle : (a) du rapport des intensités turbulentes, (b) du tenseur d'anisotropie.

nous remarquons qu'il n'y a aucune différence entre les cas  $\Omega = 50, 100$  et  $150$ . En plus, nous remarquons que, pour des temps grands, les grandeurs turbulentes  $I_{\parallel}/I_{\perp}$ ,  $b_{\parallel}$  et  $b_{\perp}$  retombent et tendent rapidement vers leurs valeurs isotropes. Ceci est dû à la suppression de l'effet couplé via l'inhibition des effets non linéaires par la rotation. Dans ce cas, la turbulence se trouve dans un régime visqueux dans lequel les effets de la rotation disparaissent. Ces résultats sont observés dans les travaux de Morinishi et al. [3,4] et de Yang et al. [6].

Pour terminer, il est important à ce stade d'évoquer le problème de transition de la turbulence du régime 3D au régime 2D. Il est maintenant établi par la littérature qu'en présence de la rotation, l'anisotropie du tenseur associé aux tensions de Reynolds se développe en accord avec la transition de la turbulence vers un état bidimensionnel, qui s'effectue sous le contrôle de l'effet couplé. C'est dans cet état (état 2D) que les effets linéaires de la rotation rapide deviennent significatifs, les effets des forces de Coriolis disparaissent. Du point de vue pratique, cette transition ne peut être détectée que par une fermeture en deux points dans l'espace physique où par une description spectrale. Cambon et al. [1], en étudiant le phé-

nomène anisotrope généré par la rotation, ont fixé des arguments permettant de déterminer la structure de la turbulence. Le cas de la turbulence bidimensionnelle avec trois composantes correspond à ( $b_{33} = 1/6, b_{33}^e = 1/6, b_{33}^z = 0$ ) et le cas où la turbulence est dans un état bidimensionnel avec deux composantes correspond à ( $b_{33} = -1/3, b_{33}^e = 1/6, b_{33}^z = -1/2$ ). Quand on regarde les résultats de nos calculs, nous remarquons bien que notre modèle prédit la disparition des effets de Coriolis pour des rotations rapides, mais qu'il se trouve incapable de déterminer la dimensionnalité de la turbulence. Ceci est évident, puisqu'il s'agit d'un modèle qui résulte d'une fermeture en un point.

#### 4. Conclusion

Dans ce travail, nous avons construit une modification dans le modèle de Haworth et Pope pour décrire les effets de la rotation sur la turbulence. Le modèle obtenu est le premier à faire intervenir explicitement les échelles de longueur de la turbulence. Les cas test envisagés ont montré la capacité significative de ce dernier à reproduire les effets des forces de Coriolis sur l'évolution temporelle d'une turbulence homogène en décroissance libre : la forte anisotropie de la turbulence générée par l'effet couplé pour des rotation modérées et le retour à son état isotrope, pour des rotations rapides, sont observés dans les résultats de nos calculs.

#### Références

- [1] C. Cambon, L. Jacquin, S. Godeferd, Energy transfer in rotating turbulence, *J. Fluid Mech.* 337 (1997).
- [2] Y. Zhou, A phenomenological treatment of rotating turbulence, *Phys. Fluids* 7 (1995).
- [3] Y. Morinishi, K. Nakabayashi, S. Ren, Dynamics of anisotropy on decaying homogeneous turbulence subjected to system rotation, *Phys. Fluids* 13 (2001).
- [4] Y. Morinishi, K. Nakabayashi, S. Ren, A new DNS algorithm for rotating homogeneous decaying turbulence, *Int. J. Heat Fluid Flow* 22 (2001).
- [5] K. Yeung, Y. Zhou, Numerical study of rotating turbulence with external forcing, *Phys. Fluids* 10 (1998).
- [6] X. Yang, J. Domaradzki, Large eddy simulations of decaying rotating turbulence, *Phys. Fluids* 16 (2004).
- [7] A. Wigeland, M. Nagib, Grid-Generated turbulence with and without rotation about the streamwise direction, IIT Fluids and Heat Transfer Report R78-1, 1978.
- [8] L. Jacquin, O. Leucher, C. Cambon, J. Mathieu, Homogeneous turbulence in the presence of rotation, *J. Fluids Mech.* 220 (1990).
- [9] O. Zeman, A note on the spectra and decay of rotating homogeneous turbulence, *Phys. Fluids* 6 (1994).
- [10] A. Mahalov, Y. Zhou, Analytical and phenomenological studies of rotating turbulence, *Phys. Fluids* 8 (1996).
- [11] C. Speziale, N. Mansour, S. Rogallo, The decay of isotropic turbulence in a rapidly rotating frame, in: *Proc. of the 1987 Summer Program, Center of Turbulence Research, Stanford University and Nasa Ames Research Center*, 1987.
- [12] N. Mansour, C. Cambon, C. Speziale, Theoretical and computational study of rotating isotropic turbulence, in: B. Gatski, S. Sarkar, C. Speziale (Eds.), *Studies in Turbulence*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [13] P. Bartello, O. Metais, M. Liseur, Coherent structures in rotating three-dimensional turbulence, *J. Fluid Mech.* 273 (1994).
- [14] S. Kassinos, W. Reynolds, A structure-Based Model for the Rapid Distortion of Homogeneous Turbulence, Technical Report TF-61, Stanford University, 1994.
- [15] C. Speziale, Second-order models for rotating turbulent flows, *Q. Appl. Math.* 4 (1987).
- [16] G. Speziale, Turbulence modeling in non-inertial frames of reference, *Theor. Comput. Fluid Dyn.* 1 (1989).
- [17] D.C. Haworth, S.B. Pope, A generalized Langevin model for turbulent flows, *Phys. Fluids* 29 (1986).
- [18] H. Marzougui,  $K-\epsilon$  model for rotating homogeneous decaying turbulence, *Can. J. Phys.* 94 (2016).
- [19] Y. Huidan, S. Grimaji, S. Luo, DNS and LES of decaying isotropic turbulence with and without frame rotation using lattice Boltzmann method, *J. Comput. Phys.* 209 (2005).