



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

Comptes Rendus Mecanique

www.sciencedirect.com



Description analytique complète des limites de l'espace de travail pour un manipulateur en série plan



Complete analytical description of workspace boundaries for a planar serial manipulator

Jérôme Bastien

Laboratoire inter-universitaire de biologie de la motricité, POLYTECH, Université Claude-Bernard – Lyon-1, 15, boulevard André-Latarjet, 69622 Villeurbanne cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 14 avril 2017

Accepté après révision le 24 octobre 2017

Disponible sur Internet le 20 novembre 2017

Mots-clés :

Robotique
Espace de travail
Frontière
Bras
Articulation
Biomécanique

Keywords:

Robotics
Workspace
Boundary
Arm
Joints
Biomechanics

RÉSUMÉ

Nous proposons une méthode générale et analytique de description des limites de l'espace de travail plan, c'est-à-dire la frontière de la partie de l'espace du plan atteinte par l'extrémité d'un bras humain ou de robot. La méthode proposée est décomposée en trois étapes indépendantes, aucune ne faisant appel à des calculs de dérivées, de déterminants ou de valeurs propres, ou utilisant des méthodes de résolution numérique de problèmes non linéaires, tous souvent utilisés dans la littérature. La première étape, déjà présentée dans des travaux précédents, consiste à interpréter de façon géométrique la nécessaire dégénérescence de la matrice jacobienne de la fonction de position, au bord de l'espace de travail et une condition d'alignement de certaines articulations permet de déterminer une réunion d'arcs de cercle qui contiennent la frontière. Ensuite, pour chacun des arcs de cercle, l'étude de la variation infinitésimale d'un point par rapport à ce cercle permet d'éliminer tout ou partie des arcs de cercle précédemment définis, qui n'est pas sur la frontière. Enfin, un parcours global de la réunion des arcs de cercle permet de déterminer la frontière extérieure ainsi que la frontière intérieure de l'éventuel trou de l'espace de travail qui contient l'origine.

© 2017 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND

(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

ABSTRACT

We give a general and analytical description of plan workspace boundaries, *i.e.* the boundaries of the part of the space that is reached by the extremity of a human or robot arm. The proposed method is decomposed into three independent steps, for which we do not use calculus of derivatives, determinants and eigenvalues, or numerical resolutions of non-linear problems, which are often used in the literature. The first step, already presented in previous works, consists in interpreting geometrically the necessary Jacobian rank deficiency of the position function at the boundary, and an alignment condition of some joints allows us to determine a union of arcs of circle, which contains the boundary. Then, for all arc of circle, the study of the infinitesimal displacement of a point with regard to this circle allows one to eliminate all or a part of arcs of circle, previously defined, which

Adresse e-mail : jerome.bastien@univ-lyon1.fr.

<https://doi.org/10.1016/j.crme.2017.10.004>

1631-0721/© 2017 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

is not on the boundary. Finally, a global course of the arcs of circle allows us to determine the outer boundary and the inner boundary of the possible void that contains the origin.

© 2017 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

Abridged English version

Let $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ be a reference frame, p an integer greater than or equal to 1, $(l_i)_{1 \leq i \leq p}$ p non-negative numbers and $(\theta_i^+)_{1 \leq i \leq p}$ and $(\theta_i^-)_{1 \leq i \leq p}$ $2p$ angles satisfying

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad -\pi < \theta_i^- < \theta_i^+ \leq \pi \quad (1)$$

We define the workspace as the set of points A_p such as

$$A_0 = O, \quad \widehat{(\mathbf{j}, OA_1)} = \theta_1 \quad (2a)$$

$$\forall i \in \{2, \dots, p\}, \quad \widehat{(A_{i-2}A_{i-1}, A_{i-1}A_i)} = \theta_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad A_{i-1}A_i = l_i \quad (2b)$$

with the constraints

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \theta_i \in [\theta_i^-, \theta_i^+] \quad (2c)$$

See Fig. 1. We consider the function Φ_p from the domain

$$F = \prod_{i=1}^p [\theta_i^-, \theta_i^+] \quad (3)$$

to \mathbb{R}^2 defined by

$$\forall (\theta_1, \dots, \theta_p) \in F, \quad \Phi_p(\theta_1, \dots, \theta_p) = A_p \quad (4)$$

The point A_p represents the distal extremity of an articulated chain of segments, like a human arm. The space defined by this extremity is called planar “workspace” [1].

In this Note, we give a general, analytical, and complete description of the boundary of the range $D = \Phi_p(F)$, i.e. the part $S = \partial D = D \setminus \dot{D}$. Three independent and robust steps are proposed. The first one, already published in [2,3] consists in describing geometrically the fact that the Jacobian rank is deficient on the boundary, which is treated in classical way by vanishing some determinants. We obtain, as in the literature, a finite union of arcs of circle, which contain the boundary. This condition is necessary, but not sufficient, and the second step of our method is to eliminate the parts of arcs of circle that are certainly in the interior of the workspace. For that, we do not use classical computing, based on the symbolic derivative of the function Φ_p , followed by the determination of ranks and eigenvalues that characterize that the studied point is not in the interior. We directly provide the infinitesimal variation of point A_p according to this circle by using simple scalar products. If this point is locally on a same side of this circle, we keep the part of the studied circle. Finally, in the third part of this work, we describe the boundary by considering all the previous obtained arcs of circle, in order to be certainly at the boundary.

As in [3], for numerical simulation, a subject of 1.80 m of height is considered. The lengths of the upper limb were determined from anthropometric data [4]. Thus, segment lengths are presented as ratios of total body height (0.108, 0.146 and 0.186 for the hand, forearm and upperarm, respectively, for the right arm). The angles correspond to minima and maxima of joints degrees of freedom of human upper limb, i.e. horizontal shoulder abduction/adduction ($-60^\circ/120^\circ$), elbow flexion/extension ($0^\circ/130^\circ$), wrist abduction/adduction ($-10^\circ/25^\circ$). See Fig. 1, where $p = 3$ and O is the shoulder, A_1 is the elbow and A_2 is the wrist, i.e. segment OA_1 is the upperarm, A_1A_2 is the forearm, and A_2A_3 is the hand. All the angles in this Note are given in degrees. See Table 1 and Figs. 2, 3 and 4. Case (i) corresponds to free upperarm, fixed forearm, and fixed hand displacements. Case (ii) corresponds to free upperarm, free forearm and fixed hand displacements. Case (iii) corresponds to free upperarm, free forearm, and free hand displacements.

1. Présentation du problème

En robotique comme en biomécanique, la connaissance de l'espace de travail, zone de l'espace que peut atteindre, par exemple, l'extrémité d'un membre humain ou d'un bras d'un robot, est fondamentale. La frontière de cet espace de travail doit être correctement définie. Les articulations considérées sont des liaisons pivots, définies par un intervalle auquel

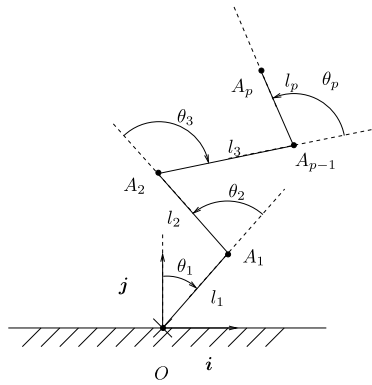


Fig. 1. Le système plan considéré.

Fig. 1. The considered planar system.

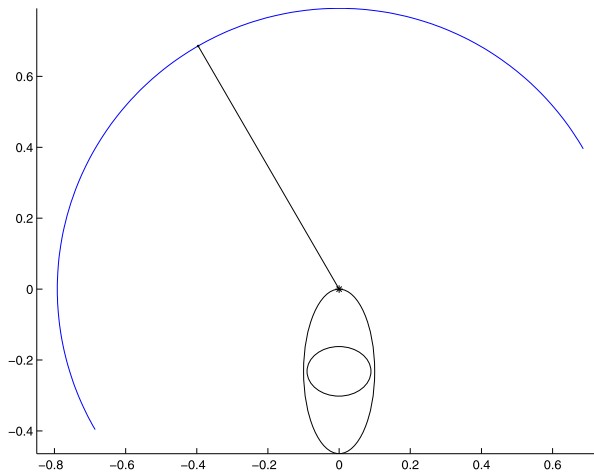


Fig. 2. Simulations pour $p = 1$. Il n'y a qu'un seul arc de cercle (S_{III}) (en bleu).

Fig. 2. Simulations for $p = 1$. There is only one arc of circle (S_{III}) (in blue).

appartient l'angle entre les deux segments autour de la liaison. Dans le cas plan, cette Note est la suite des travaux [2,3], où nous proposons une condition locale nécessaire, mais non suffisante, pour qu'un point de l'espace de travail soit sur sa frontière. Fondée sur une propriété géométrique simple, cette condition permettrait d'obtenir, sous forme analytique, un ensemble d'arcs de cercle, sans les habituels calculs de déterminants effectués en symbolique, qui contiennent la frontière, ce qui constitue l'étape 0 de la méthode (voir section 2). Ayant en tête la simplicité et la robustesse de la méthode proposée, nous souhaitons maintenant éliminer les parties des arcs de cercle déterminés qui ne seraient pas sur la frontière de l'espace de travail. Là encore, nous proposons une méthode générale, analytique et complète, fondée uniquement sur des calculs simples de produits scalaires, ce qui constitue l'étape 1 de la méthode (voir section 3). Enfin, nous proposons une condition nécessaire et suffisante globale qui permette de donner analytiquement la frontière sous forme de réunions d'arcs de cercle (section 4). Nous donnerons quelques applications possibles (section 5). Ensuite, nous faisons quelques remarques sur l'implémentation informatique (section 6), avant de donner un exemple (section 7) et les quelques limitations de la méthode proposée (section 8).

Comme dans [2,3], on considère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ un repère orthonormé direct, p un entier supérieur ou égal à un, $(l_i)_{1 \leq i \leq p}$ p nombres strictement positifs, et $(\theta_i^+)_{1 \leq i \leq p}$ et $(\theta_i^-)_{1 \leq i \leq p}$ $2p$ angles vérifiant (1). On définit l'espace de travail comme l'ensemble des points A_p vérifiant (2a), (2b) et les contraintes (2c) (voir Fig. 1). On considère la fonction Φ_p , définie par (4), de F , défini par (3), vers \mathbb{R}^2 .

De nombreux travaux portent naturellement sur la détermination des frontières de l'espace de travail. Pour l'étape 0, la jacobienne de la fonction Φ_p est nécessairement de rang inférieur à un si le point est sur la frontière. Systématiquement, cette étape est résolue de façon symbolique en annulant tous les déterminants extraits possibles [5–10]. Pour l'étape 1, on renvoie par exemple aux nombreux travaux d'Abdel-Malek [7,11,8]. Les calculs présentés sont valables dans un cadre plus général que le nôtre (2 ou 3D, liaisons de type sphérique ou pivot glissant). La condition naturelle utilisée est fondée sur un développement limité à l'ordre 2 localement autour d'un point où la jacobienne est dégénérée. La forme quadratique

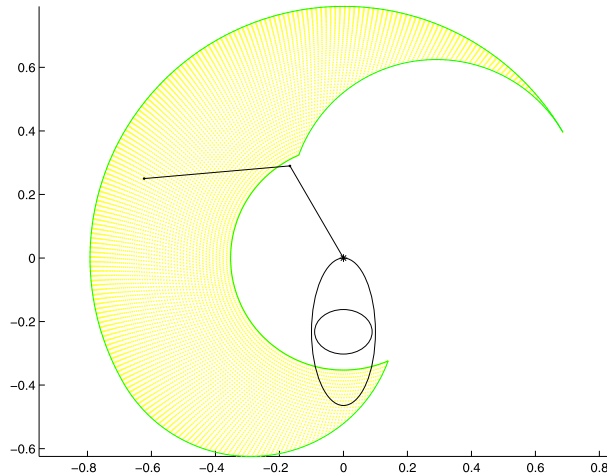


Fig. 3. Simulations pour $p = 2$. S_{III} est tracé en vert. La surface discrète balayée est tracée en jaune. Ici, les trois étapes donnent les mêmes résultats. Le nombre d’arcs de cercle obtenus est de 4.

Fig. 3. Simulations for $p = 2$. S_{III} is plotted in green. The discrete swept surface is plotted in yellow. Here, the three steps give the same results. The number of arcs of circle is equal to 4.

associée à la hessienne y est étudiée. Ensuite, la condition suffisante pour ne pas être à l’intérieur de l’espace de travail est programmée en calcul symbolique (avec Mathematica[®], par exemple) et le calcul de rang et de spectre de matrice sont utilisés. Ce sont les signes des valeurs propres qui permettent de discriminer les différents cas. Ces calculs sont, en théorie, assez simples, mais peuvent présenter de fortes instabilités numériques, en plus d’être longs. Au contraire, dans cette Note, nous essayons d’utiliser la structure particulière de notre problème plan, notamment le fait que l’on se déplace localement le long d’un cercle ; aucun calcul de dérivée ou de spectre de matrices n’est effectué.

D’autres nombreuses études concernent la résolution de ce problème pour des manipulateurs en série ou en parallèle [12–24]. Cependant, aucun ne propose de méthode générale, et ces travaux sont relatifs à des cas particuliers (petits nombres de degrés de liberté) ou sont faits avec des approximations numériques ou grâce à des simulations aléatoires.

À notre connaissance, un seul récent et très intéressant travail propose une méthode générale de résolution pour déterminer les limites de l’espace de travail dans un cadre très général (voir [25] et [26, chapitre 4 (Workspace Determination)]). Mais il s’agit d’une méthode de résolution numérique, fondée sur la méthode proposée dans [27].

2. Étape 0 : condition locale nécessaire, mais non suffisante, pour appartenir à la frontière (rappels)

La frontière $S = \partial D = D \setminus \overset{\circ}{D}$ est traditionnellement décomposée sous la forme de la partition suivante $S = S_I \cup S_{II} \cup S_{III} \in \mathbb{R}^2$. Sur S_I , tous les angles θ_i sont libres (c’est-à-dire dans $] \theta_i^-, \theta_i^+ [$). Sur S_{II} , il y a au moins deux composantes libres parmi les p angles (les autres valant θ_i^\pm). Sur S_{III} , il n’y a qu’une seule composante libre. On a montré dans [2,3] que les articulations correspondant à des configurations de S_I et de S_{II} correspondant à des composantes libres sont nécessairement alignées, ce qui a permis d’écrire et de programmer l’algorithme complet de détermination des points vérifiant cette condition géométrique simple. S_{III} est clairement une réunion finie d’arcs de cercle. On a donc montré que S est inclus dans une union d’arcs de cercle définis par

$$\bigcup_{1 \leq m \leq M} \Phi_p \left(\prod_{k=1}^p \Theta_k^m \right) \tag{5}$$

où \prod désigne le produit cartésien et où chaque ensemble Θ_k^m est déterminé de façon analytique. Il s’agit, soit un singleton, soit d’un intervalle (ouvert ou fermé). Pour chaque m , un seul des ensembles Θ_k^m n’est pas réduit à un singleton.

Remarque 2.1. Il est possible que l’une ou plusieurs des parties S_I , S_{II} ou S_{III} soit vide, ce qui n’invalide pas l’algorithme de l’étape 0, valable pour toutes les valeurs de θ_i^\pm .

3. Étape 1 : condition locale suffisante, mais non nécessaire, pour que des parties d’arcs de cercle ne soient pas sur la frontière

Une fois que l’on a déterminé les cercles possibles auxquels doit nécessairement appartenir un point pour être sur la frontière, on regarde, comme cela est fait de façon classique dans la littérature, la contribution locale des variations infinitésimales des angles qui définissent ce point. S’il est possible pour ce point d’évoluer de part et d’autre du cercle, on

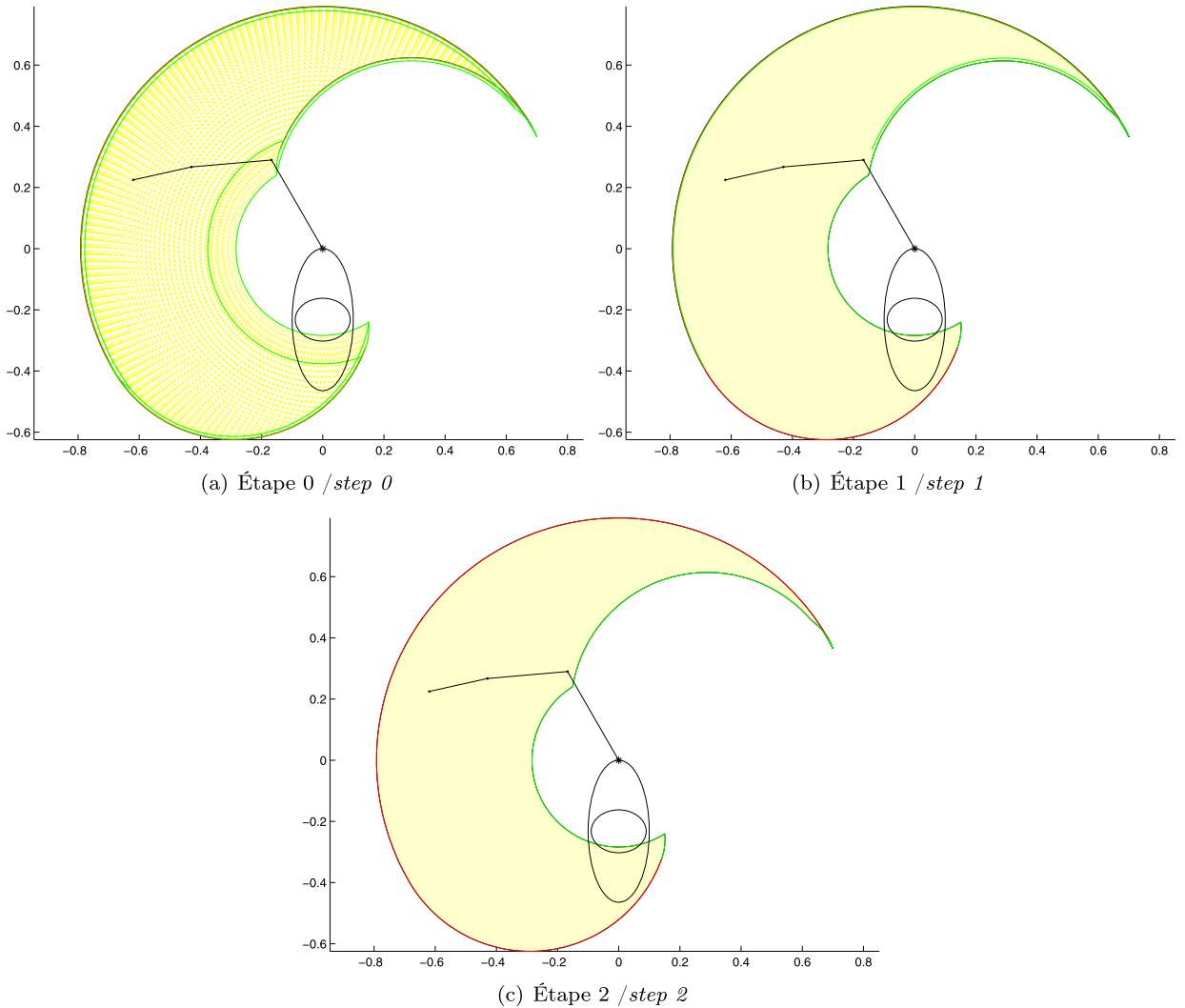


Fig. 4. Simulations pour $p = 3$. S_{II} est tracé en rouge et S_{III} est tracé en vert. La surface discrète balayée et l'intérieur calculé de l'espace de travail sont tracés en jaune. Les nombres d'arcs de cercle correspondant aux étapes 0, 1 et 2 valent respectivement 16, 11 et 8.

Fig. 4. Simulations for $p = 3$. S_{II} is plotted in red and S_{III} is plotted in green. The discrete swept surface and the interior of the workspace are plotted in yellow. The numbers of arcs of circle corresponding to the steps 0, 1, and 2 are respectively given by 16, 11, and 8.

en déduit qu'il n'est pas sur la frontière. Au contraire, s'il reste localement d'un même coté du cercle, on conservera le point ou l'ensemble de ces tels points (c'est-à-dire une partie de l'arc de cercle étudié), en conservant comme information le coté dans lequel il se trouve. Cette discrimination est habituellement faite grâce à l'étude en symbolique et à la détermination du spectre et du rang d'une matrice. Au contraire, dans cette Note, on peut déterminer dans le cas plan, les côtés où évolue localement le point étudié avec des simples calculs de produits scalaires.

Étudions maintenant l'un des cercles définis par (5), correspondant à un entier m fixé et noté C_m . Soit $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que Θ_i^m soit un intervalle non réduit à un singleton et que les autres intervalles soient un singleton. L'angle θ_i varie donc dans l'intervalle Θ_i^m . L'étude de la variation infinitésimale de θ_i n'apporte rien ici, puisque l'on sait que le point A_p se déplacera le long de l'arc de cercle C_m . En revanche, on peut supposer que chacun des angles θ_j , pour $j \neq i$, peut varier de façon infinitésimale autour de sa valeur. Pour $j \neq i$, considérons ε_j défini par

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1, & \text{si } \theta_j = \theta_j^- \\ -1, & \text{si } \theta_j = \theta_j^+ \\ 0, & \text{si } \theta_j \in]\theta_j^-, \theta_j^+[\end{cases} \tag{6}$$

Notons $h = {}^t(h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$h_i = 0 \tag{7}$$

Considérons $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p$. Les points A_k , pour $1 \leq k \leq p$ sont dépendants de Θ , désormais fixés, et $A_p(\Theta + h)$ désigne $\Phi_p(\Theta + h)$. Considérons l'application $\rho : \mathbb{R}^{p-1} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{h} = (h_1, \dots, h_{i-1}, 0, h_{i+1}, \dots, h_p) \mapsto \rho(\tilde{h})$ définie par

$$\rho(\tilde{h}) = A_{i-1}A_p^2(\Theta + \tilde{h}) - A_{i-1}A_p^2 \tag{8}$$

En rajoutant des composantes nulles, correspondant à la i -ième composante, on peut considérer le gradient $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et la hessienne (symétrique) $C \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ de la fonction ρ , calculés en 0 et écrire le développement limité de ρ à l'ordre 2 au voisinage de $h = 0$ sous la forme

$$\rho(h) = Bh + {}^t hCh + o(\|h\|^2) \tag{9}$$

où h vérifie (7). Habituellement (par exemple dans [7]), ces éléments sont calculés informatiquement en symbolique (de façon formelle), donnés ci-dessous, de façon explicite.

Lemme 3.1 (Expression de B et des termes diagonaux de C). On note σ la rotation vectorielle d'angle $\pi/2$ de \mathbb{R}^2 . Posons $r_j = A_{j-1}A_p$, pour $j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$. On a pour tout $j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$:

$$B_j = 2\overrightarrow{A_{i-1}A_p} \cdot \sigma(\overrightarrow{A_{j-1}A_p}) \tag{10a}$$

$$C_{jj} = r_j^2 - \overrightarrow{A_{i-1}A_p} \cdot \overrightarrow{A_{j-1}A_p} \tag{10b}$$

Lemme 3.2. On a alors, pour tout $j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$:

(i) Si $j \leq i - 1$, il existe $\alpha \neq 0$ et β ne dépendant que de $(\theta_k)_{k \in \{j+1, \dots, i-1, i+1, \dots, p\}}$ tels que pour tout θ_i , on ait

$$\sigma(\overrightarrow{A_{j-1}A_p}) \cdot \overrightarrow{A_p A_{i-1}} = \alpha \sin(\theta_i + \beta) \tag{11}$$

(ii) Si $j \geq i + 1$, il existe α ne dépendant que de $(\theta_k)_{k \in \{i+1, \dots, p\}}$ tels que pour tout θ_i , on ait

$$\sigma(\overrightarrow{A_{j-1}A_p}) \cdot \overrightarrow{A_p A_{i-1}} = \alpha \tag{12}$$

Remarque 3.3. Le nombre $\sigma(\overrightarrow{A_{j-1}A_p}) \cdot \overrightarrow{A_p A_{i-1}}$ est de même signe que la composante du déplacement du point $A_p(\Theta + h)$ dans la direction de $\overrightarrow{A_p A_{i-1}}$ quand l'angle h_j subit une variation infinitésimale positive et que toutes les autres composantes de h sont nulles.

Nous éliminerons les parties d'arcs de cercle correspondant à des points vérifiant la condition suffisante suivante pour ne pas être sur la frontière :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \exists h, h' \in \mathbb{R}^p, \text{ vérifiant } ((7), \Theta + h, \Theta + h' \in F, 0 < \|h\| \leq a, 0 < \|h'\| \leq a, \rho(h)\rho(h') < 0) \tag{13}$$

En effet, dans ce cas, $A_p(\Theta + h)$ évolue de part et d'autre de l'arc de cercle C_m .

(i) Dans un premier temps, contrairement à la littérature, on se contente de n'étudier que le cas où une seule composante de h est non nulle, les autres étant nulles (critère local diagonal). Fixons donc $j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$. Si note $\rho_j(\kappa) = \rho(0, \dots, 0, \kappa, 0, \dots, 0)$, où κ appartient à \mathbb{R} , alors (9) s'écrit

$$\rho_j(\kappa) = B_j\kappa + C_{jj}\kappa^2 + o(\kappa^2) \tag{14}$$

Notons que $B_j = 0$ est équivalent à A_{i-1} , A_{j-1} et A_p alignés. D'après [2,3], $\varepsilon_j = 0$ implique donc que $B_j = 0$. On fait l'hypothèse, raisonnable en biomécanique ou robotique, que les points A_k ne peuvent se confondre, ce qui implique que, si $B_j = 0$, alors $C_{jj} \neq 0$. On a donc, compte tenu de (6) :

$$\text{si } B_j \neq 0, \text{ alors } \varepsilon_j \neq 0 \text{ et localement, } \rho_j(\kappa) \text{ est du même signe que } B_j\varepsilon_j \tag{15a}$$

$$\text{si } B_j = 0, \text{ alors } C_{jj} \neq 0 \text{ et localement, } \rho_j(\kappa) \text{ est du même signe que } C_{jj} \tag{15b}$$

Notons que, pour cette étape, la connaissance de l'alignement de certains points, mis en évidence géométriquement lors de l'étape 0 (dans [2,3]), est donc fondamentale.

Remarque 3.4. Conformément à la remarque 3.3, dans le cas (15a), on s'intéresse en fait au déplacement normal infinitésimal d'un point décrivant un des arcs de cercle, comme le remarque aussi Abdel-Malek, par exemple, dans [7]. Le développement limité (8) est aussi présent dans ces travaux, via le calcul de l'accélération normale. Dans ce cas (15b), en revanche, l'examen seul de la composante normale du mouvement ne suffit plus.

Le nombre B_j dépend ou non de i , selon les [lemmes 3.1](#) et [3.2](#). En faisant varier j dans $\{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$, on peut donc éliminer toutes les parties des arcs de cercle pour lesquels $\rho_j(\kappa)$ change de signe et donc ne conserver que les parties d'arcs de cercle pour lesquelles le signe de $\rho_j(\kappa)$ est localement constant, c'est-à-dire

$$\exists \varepsilon_0 \in \{-1, 1\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\}, \quad \begin{cases} B_j = 0 & \implies \varepsilon_0 C_{jj} > 0 \\ B_j \neq 0 & \implies \varepsilon_0 \varepsilon_j B_j > 0 \end{cases} \quad (16)$$

(ii) On a donc, en n'utilisant que les termes diagonaux de C , éliminé toutes les parties d'arcs de cercle vérifiant une condition suffisante qui entraîne [\(13\)](#). Une discussion sur la méthodologie à adopter désormais et une comparaison avec les méthodes habituelles est présentée en [Annexe A](#) pour ne pas alourdir ce texte.

Finalement, pour chacun des arcs de cercle de [\(5\)](#), soit on élimine donc la totalité de l'arc de cercle étudié, si aucun de ses points n'est sur la frontière, soit on ne conserve qu'une partie (correspondant à une réunion finie d'arcs de cercle). Si on fait le choix [\(18\)](#), il n'est pas certain que la partie conservée corresponde à des points qui se trouvent localement du même côté du cercle. Au contraire, si on fait le choix [\(23\)](#), plus long à établir, il est certain que cette partie correspond à des points qui se trouvent localement du même côté du cercle, et on connaît alors le côté de l'arc de cercle (à l'intérieur ou à l'extérieur) où évoluera le point A_p localement. On peut donc là encore conserver la partie des arcs de cercle qui ne contient que des points qui ne sont sûrement pas à l'intérieur sous la forme [\(5\)](#).

Pour tous les exemples présentés ici, le choix [\(18\)](#) a été fait. Cependant, à titre de vérification, il est intéressant de mettre en place ensuite le choix [\(23\)](#) pour vérifier *a posteriori* que tous les arcs de cercles conservés sont garantis. On a alors constaté que tous les arcs de cercles sont garantis.

Voir la [Fig. 6\(c\)](#) où les arcs de cercle conservés de l'étape 1 ont été représentés, avec une petite barre, pour chaque arc de cercle, indiquant le côté où évolue A_p .

4. Étape 2 : condition globale nécessaire et suffisante pour être sur la frontière

Il reste maintenant à éliminer les parties d'arc de cercle définies par [\(5\)](#) qui ne sont pas sur la frontière, en utilisant cette fois un critère global. En effet, localement, le point A_p peut rester du même côté de l'arc de cercle, mais l'autre côté de la frontière peut être atteint pour d'autres valeurs angulaires éloignées de celles qui définissent l'arc de cercle. Abdel-Malek dans [\[8,7\]](#) dit sobrement que la frontière de l'espace de travail est l'enveloppe des courbes précédemment définies.

Nous partons tout d'abord d'un point dont on est sûr qu'il appartient à la limite de l'espace de travail : le point le plus éloigné de l'origine de l'ensemble des arcs de cercle définis par [\(5\)](#). Il est certain que ce point appartient à un arc de cercle qui a pour centre l'origine. Ensuite, arc de cercle par arc de cercle, nous tournons, toujours dans le même sens, en déterminant, pour chaque intersection d'arcs de cercle, celui dont la direction de la tangente est la plus proche possible de l'arc de cercle que nous venons de déterminer. Ensuite, nous conservons la portion de cet arc de cercle comprise entre le point considéré et l'intersection avec l'arc de cercle le plus proche, parmi ceux qui restent. L'algorithme s'achève quand on revient au point de départ. Cette étape est simple en théorie : il s'agit en effet, à chaque fois que l'on passe d'un arc de cercle de la frontière au suivant, d'être capable de traiter tous les cas qui peuvent se présenter : plusieurs cercles peuvent passer par le même point, ils peuvent être tangents ou concentriques. De plus, les calculs étant effectués de façon numériques, il est nécessaire de prendre en compte la précision machine afin de prévoir numériquement si les cercles sont sécants, tangents ou concentriques (voir section [6](#)).

La partie D étant connexe, mais non simplement connexe, il est possible que son complémentaire ne soit pas connexe, c'est-à-dire que des trous apparaissent. La partie de la frontière que nous venons de définir sous la forme [\(5\)](#) est la frontière extérieure, c'est-à-dire la frontière commune à D et à la composante non bornée de son complémentaire. Pour déterminer les autres composantes connexes de la frontière (les frontières intérieures), notre algorithme ne fournit avec certitude que la frontière du trou contenant l'origine, s'il existe (voir [Fig. 6\(d\)](#)). Dans ce cas, on détermine alors le point le plus proche de l'origine parmi les arcs de cercle définis par [\(5\)](#). Si le trou contenant l'origine existe, on est sûr de nouveau que ce point appartient à un arc de cercle qui a pour centre l'origine. Ensuite, comme précédemment, on détermine les arcs de cercle, de proche en proche, en s'arrêtant quand on revient au premier point. Ici, la connaissance des côtés éventuels de l'intérieur par rapport aux arcs de cercle peut être utile pour éliminer des réunions finies d'arcs de cercle qui ne constitueraient pas de partie de frontières intérieures.

On a donc finalement déterminé de manière complète la frontière de l'espace de travail sous la forme [\(5\)](#).

5. Applications

Deux applications peuvent être proposées immédiatement grâce à la méthode proposée (mais elles n'ont pas encore été programmées).

Tout d'abord, puisque la frontière est connue sous la forme [\(5\)](#), il est possible de résoudre le problème inverse sur la frontière : c'est-à-dire, un point M du plan étant donné sur la frontière, on peut déterminer les valeurs de tous les angles $(\theta_1, \dots, \theta_p)$ tels que $M = \Phi_p(\theta_1, \dots, \theta_p)$. Notons, à cet égard, que notre méthode permet de proposer, pour chaque arc de cercle de la frontière, une configuration donnée dans [\(5\)](#) permettant de décrire l'arc de cercle en question. Il existe des

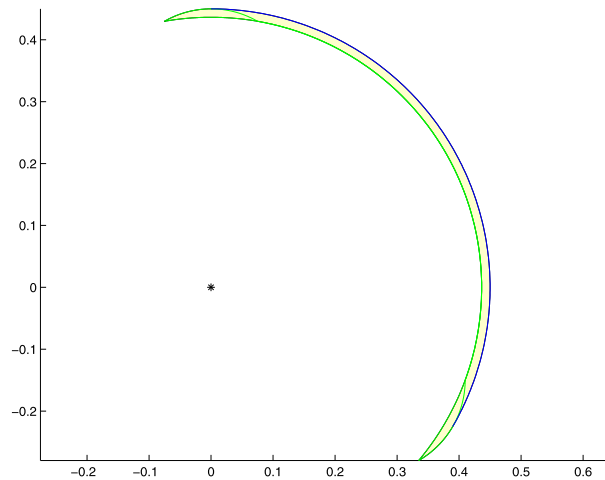


Fig. 5. Simulations pour $p = 2$. S_I est tracé en bleu, et S_{III} est tracé en vert. L'intérieur calculé de l'espace de travail est tracé en jaune. Pour l'étape 1, on obtient sept arcs de cercle.

Fig. 5. Simulations for $p = 2$. S_I is plotted in blue, and S_{III} is plotted in green. The interior of the workspace is plotted in yellow. For the step 1, we obtain seven arcs of circle.

cas où plusieurs configurations données permettent de décrire la même portion d'arc de cercle, rendant donc le problème inverse avec plusieurs solutions possibles. Considérons, par exemple, le système avec un nombre de degrés de liberté égal à $p = 2$, dont les valeurs sont données par

$$l = (0, 30, 0, 15) \text{ (en mètres)}$$

$$\theta^- = (-120, -30) \text{ (en degrés)}$$

$$\theta^+ = (0, 30) \text{ (en degrés)}$$

Voir Fig. 5. Il existe deux configurations possibles pour décrire une partie du cercle de centre l'origine et qui correspond à la partie de la frontière la plus proche de celle-ci.

Une autre application est un critère simple pour savoir si un point donné du plan est dans l'espace de travail ou non. Il est clair que, grâce à la donnée de (5), on peut savoir si un point est sur la frontière ou non. Supposons qu'il ne soit pas sur la frontière. S'il est à l'extérieur du cercle de centre l'origine et de rayon la plus grande distance de l'origine à la frontière, il sera sûrement à l'extérieur. Enfin, en dénombrant, méthodiquement et exhaustivement, le nombre de points d'intersection d'un segment de droite donné avec un ensemble de cercle donnés par (5) et en considérant la parité du nombre obtenu, on obtient un moyen simple de savoir si le point est à l'extérieur ou à l'intérieur d'un espace de travail.

6. Implémentation informatique

Les algorithmes utilisés ont été implémentés analytiquement, mais sans utiliser le calcul symbolique, sous Matlab®. Cette étape a donc utilisé le calcul numérique de Matlab. Lors des étapes 0 à 2, il a fallu essentiellement déterminer des angles lors du passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires. Voir détails de l'algorithme de l'étape 0 dans [3]. De plus, lors des étapes 1 et 2, il a fallu tester la nullité ou le signe non nul de certaines quantités, ce qui se fait nécessairement de façon approchée, du fait des arrondis de calculs. On a donc choisi un paramètre $\varepsilon > 0$ et remplacé, par exemple, les égalités du type $X = 0$ par $|X| \leq \varepsilon$. Plus précisément, pour l'étape 1, on a choisi $\varepsilon = 1,0 \cdot 10^{-12}$ et pour l'étape 2, $\varepsilon = 1,0 \cdot 10^{-13}$, qui a dû être pris 100 ou 1000 fois plus grand dans certains cas, ceux où p est plus grand.

En design de robots, il est parfois important de pouvoir disposer de façon explicite des caractéristiques géométriques des frontières des espaces de travail. On peut donc utiliser, dans ce cas, le calcul symbolique de Matlab. Lors des passages des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires, nos codes utilisent les fonctions de Matlab `cart2pol` et `atan2`, qui ne supportent pas les types symboliques. Cependant, les fonctions `acos` et `asin` les supportent, et il serait donc possible de déterminer des coordonnées polaires de façon symbolique, dans la mesure où les longueurs et les angles seraient eux-même convertis en symbolique. Dans ce cas, on pourrait naturellement tester rigoureusement la nullité et les signes de quantités définies de façon symbolique.

7. Simulations numériques

Comme dans [3], pour la simulation numérique, on considère un sujet de hauteur 1,80 m. Les longueurs du membre supérieur ont été déterminées d'après les données anthropométriques de [4]. Les longueurs des segments sont données comme

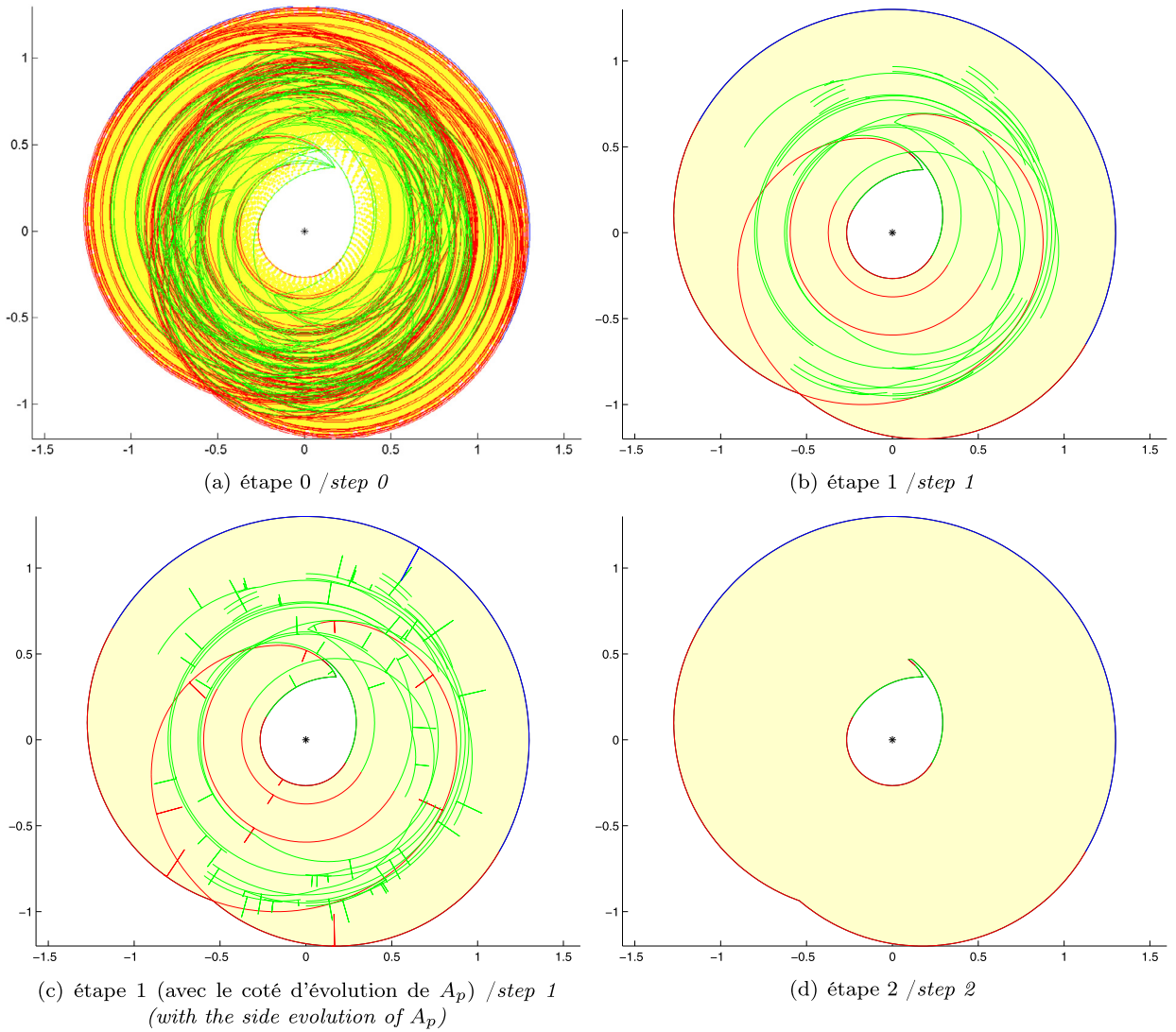


Fig. 6. Simulations pour $p = 6$. S_I est tracé en bleu, S_{II} est tracé en rouge et S_{III} est tracé en vert. La surface discrète balayée et l'intérieur calculé de l'espace de travail sont tracés en jaune. Les nombre d'arcs de cercle correspondant aux étapes 0, 1 et 2 valent respectivement 506, 75 et 9.

Fig. 6. Simulations for $p = 6$. S_I is plotted in blue, S_{II} is plotted in red and S_{III} is plotted in green. The discrete swept surface and the interior of the workspace are plotted in yellow. The numbers of arcs of circle corresponding to the steps 0, 1 and 2 are respectively given by 506, 75 and 9.

Tableau 1

Les paramètres utilisés.

Table 1

Used parameters.

cas/cases	p	Longueur du segment/taille/Segment length/body height	$(\theta_i^-)_{1 \leq i \leq p}$ (°)	$(\theta_i^+)_{1 \leq i \leq p}$ (°)	Figures
i	1	0.440	-60	120	2
ii	2	0.186; 0.254	-60; 0	120; 130	3
iii	3	0.186; 0.146; 0.108	-60; 0; -10	120; 130; 25	4

ratio de la taille (0,108, 0,146 et 0,186, respectivement, pour la main, l'avant-bras et le bras pour le membre supérieur droit). Les angles correspondent aux maxima et minima des articulations, correspondant à l'abduction/adduction horizontale de l'épaulle (-60°/120°); la flexion/extension du coude (0°/130°) et l'abduction/adduction du poignet (-10°/25°). Voir la Fig. 1, où $p = 3$ et O est l'épaulle, A_1 le coude, A_2 le poignet, tandis que le segment OA_1 est le bras, A_1A_2 , l'avant-bras et A_2A_3 la main. Voir le Tableau 1 et les Figs. 2, 3 et 4.

Tableau 2
Définition géométrique des arcs de cercle sous la forme (5).

Table 2
Geometrical definitions of arcs of circle under the form (5).

type/kind	Θ_1 (°)	Θ_2 (°)	Θ_3 (°)
II	[-60, 120]	{0}	{0}
II	{120}	[0, 130]	{0}
III	{120}	{130}	[0, 25]
III	[-60, 120]	{130}	{25}
III	{-60}	[0, 130]	{25}
III	{-60}	{0}	[10, 25]
III	[-60, -55, 1005]	{0}	{-10}
III	{-60}	{0}	[-10, 0]

- (i) Le cas **i** correspond au bras libre, et l'avant-bras et la main bloqués.
- (ii) Le cas **ii** correspond au bras et à l'avant bras libres, main bloquée.
- (iii) Le cas **iii** correspond au bras, à l'avant bras et la main libres.

Nous donnons dans le **Tableau 2** la description de $S = S_I \cup S_{II} \cup S_{III}$ sous la forme d'une union d'arcs de cercle (5) et les intervalles Θ_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ correspondant, pour le cas complet (iii). Chaque ensemble Θ_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ est, soit un singleton, soit un ensemble fermé. Tous les angles donnés dans cette Note le sont en degrés.

Considérons maintenant un système (virtuel) avec un nombre de degrés de liberté égal à $p = 6$ et dont les valeurs sont donnés par

$$l = (0, 20, 0, 20, 0, 15, 0, 35, 0, 20, 0, 20)$$

$$\theta^- = (-120, -120, -30, -90, -45, -23)$$

$$\theta^+ = (60, 170, 30, 91, 23, 24)$$

Voir la **Fig. 6**.

Des tirages aléatoires ont été réalisés sur les angles θ^\pm et les longueurs l . On a fait varier le nombre p de segments de 2 à 12 en réalisant 200 calculs pour chaque valeur de p . Les calculs ont été faits sur un ordinateur équipé de Windows 7 Professionnel, et d'un processeur Intel(R) Core(TM) i5-6300HQ à 2,30 GHz (64 bits).

Nous avons montré dans [3], que l'algorithme de l'étape 0, le plus long, était en $\mathcal{O}(a^p)$, où a est un réel. Une régression linéaire sur le logarithme décimal du temps de calculs confirme cela : elle donne une corrélation égale à 0,9765 et une valeur de a égale à 3,5289. Si on fait une régression sur le nombre d'arcs de cercle de l'étape 0, cela confirme aussi ces calculs : elle donne une corrélation égale à 0,9950 et une valeur de a égale à 2,7771. Pour l'étape 1, on trouve une corrélation égale à 0,9356 et une valeur de a égale à 1,5190. Pour l'étape 2, la moyenne des nombres d'arcs de cercle semble se stabiliser avec p : pour $p \geq 5$, on trouve un nombre proche de 11. On constate aussi que jusqu'à $p = 4$, les temps de calculs sont inférieurs à 0.1 s et que jusqu'à $p = 6$, 95% des temps de calculs sont inférieurs à 1,0 s. Voir la **Fig. 7**.

8. Limitations

En pratique, conformément à ce qui est fait dans la littérature, p ne dépasse pas 6 (ce qui correspond à des temps de calculs inférieurs à 1,0 s). Il semblerait que, jusqu'à $p = 11$, les calculs soient de durées beaucoup plus longues (en moyenne inférieures à 7,0 min). Au-delà, le temps d'exécution est énorme (en moyenne supérieur à 50,9 min). Programmées sous Matlab, qui est un langage interprété, certaines boucles (qui ne peuvent être parallélisées) peuvent être lentes. Une programmation optimisée dans un langage compilé gagnerait donc en rapidité.

Dans la section 4, nous avons évoqué les difficultés de la détection des frontières internes qui ne contiennent pas l'origine. Des techniques de balayages systématiques de graphes permettraient de détecter des courbes fermées qui pourraient constituer des frontières internes, en cherchant toutes les suites d'arcs de cercles possibles parmi ceux détectés lors de l'étape 1.

Enfin, la seule contrainte mathématiques respectée est la contrainte (1). D'autres contraintes peuvent apparaître pour des valeurs plus grandes de p que celle données en exemple : il se peut que l'un des segment $A_i A_{i+1}$ intersecte un autre segment ou en soit trop proche, ce qui n'est pas possible mécaniquement. On pourrait vérifier que ce cas-là n'arrive jamais pour des petites valeurs de p . La prise en compte de cette contrainte semble être un problème beaucoup plus ardu !

9. Conclusion

Nous avons déterminé de façon analytique et explicite, uniquement par des calculs explicites, d'angles, de produits scalaires, d'intersections d'arcs de cercle, sans aucun calcul en symbolique, ni de résolution numérique de problèmes non linéaires, la frontière d'un espace de travail plan. Plus intuitive puisque, fondée uniquement sur des calculs simples de

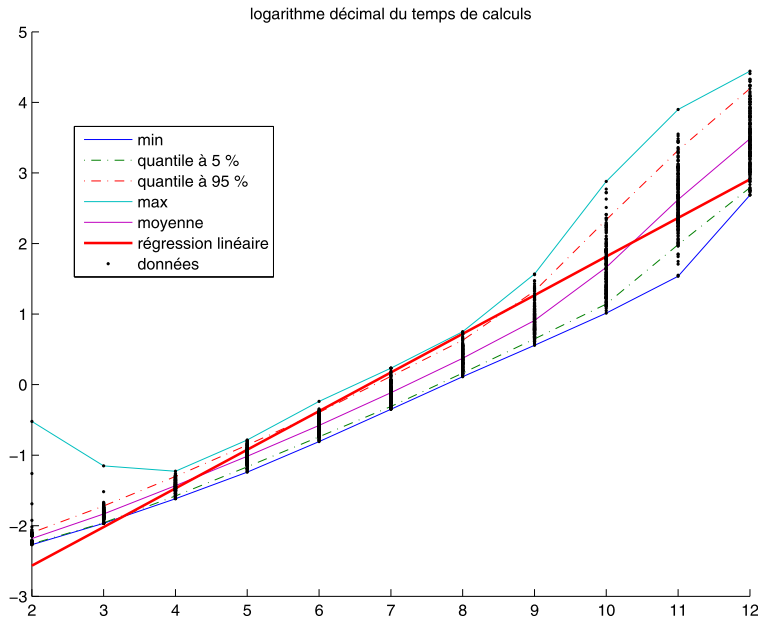


Fig. 7. Logarithme du temps de calculs.
 Fig. 7. Logarithm of the calculus time.

produits scalaires, cette méthode nous paraît plus performante ; elle n'utilise, ni le calcul symbolique pour le calcul de la jacobienne, ni la détermination numérique du spectre de matrice, ce qui est très consommateur en ressources informatiques et en temps de calcul.

Un prolongement naturel de ce travail est l'extension en dimension 3. Plus technique, elle devrait pouvoir s'étendre naturellement, en reprenant par exemple les angles d'Euler, les matrices de rotations et les matrices (4, 4) homogènes, dites de Denavit–Hartenberg [28,29] ou avec les recommandations de [30]. Les arcs de cercle seraient alors remplacés par des portions de surfaces dans l'espace, comme par exemple des sphères ou des tores. L'idée géométrique simple d'alignement de l'étape 0 devrait subsister, ainsi que le critère de l'étape 1. L'étape 2 serait plus subtile, le balayage des surfaces devant se faire dans deux dimensions.

Annexe A. Compléments sur la méthode utilisée

On a donc, en n'utilisant que les termes diagonaux de C, éliminé toutes les parties d'arcs de cercle vérifiant une condition suffisante qui entraîne (13). Cependant, celles qui restent ne vérifient pas nécessairement la négation de (13), qui s'écrit :

$$\exists \varepsilon_0 \in \{-1, 1\}, \quad \exists a_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall h \in \mathbb{R}^p, \text{ vérifiant (7) } (\Theta + h \in F \text{ et } 0 \leq \|h\| \leq a_0) \implies \varepsilon_0 \rho(h) \geq 0 \quad (17)$$

Dans ce cas, $A_p(\Theta + h)$ évolue du même côté de l'arc de cercle C_m .

(i) Contrairement à la littérature, et donc, plus simplement, un premier choix consiste à se contenter de ces calculs : on suppose donc vérifié le

$$\text{critère local diagonal : défini par (16) où le signe est constant, égal à } \varepsilon_0. \quad (18)$$

Dans ce cas, (17) n'est vrai que si h n'a qu'une composante non nulle. Les parties d'arcs de cercle conservées n'ont donc pas un signe de $\rho(h)$ localement garanti. Nous verrons pour l'étape 2 (section 4) que l'on part d'un arc de cercle garanti, c'est-à-dire dont on est certain que (17) est vérifié. De proche en proche, chaque signe local de $\rho(h)$ sera alors nécessairement garanti. Ainsi, à la fin de l'algorithme, pour toutes les parties d'arcs de cercle conservées, (17) sera vraie. Pour ce choix-là, aucun calcul de rang, de spectre et de calcul en symbolique n'a donc été nécessaire.

(ii) Un second choix consiste maintenant à vouloir garantir le signe local de $\rho(h)$ le long des arcs de cercle conservés, comme cela est fait classiquement. En toute rigueur, cela n'apporte pas grand chose, si ce n'est d'éliminer *a posteriori* quelques arcs de cercle conservés qui ne vérifieraient pas (17). Nous verrons plus bas, numériquement, que ces arcs de cercle sont en nombre très faible. Nous étudions alors la forme quadratique définie par (9), mais que nous allons déterminer explicitement et sans calcul symbolique comme cela est fait habituellement. De plus, il n'est nécessaire de définir que la partie relative aux angles correspondant aux B_j nuls, contenant les cas où les points sont alignés.

En effet, quitte à réordonner les éléments de $(\varepsilon_j)_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}}$, B et de C , on peut supposer, sans perte de généralité, qu'il existe $q \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que

$$\forall k \in \{1, \dots, q\}, \quad B_k = 0 \quad (19a)$$

$$\forall k \in \{q+1, \dots, p-1\}, \quad B_k \neq 0 \quad (19b)$$

On décompose alors h , B et C par blocs avec cette partition : $h = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \mathcal{D} & \mathcal{E} \\ \mathcal{I} & \mathcal{F} \end{pmatrix}$. On a :

$$\rho(h) = {}^t \mathcal{H}_1 \mathcal{D} \mathcal{H}_1 + \varepsilon_0 \sum_{j=q+1}^{p-1} (\varepsilon_0 \varepsilon_j B_j + o(1)) |h_j| + o(\|h\|^2) \quad (20)$$

Compte tenu de (16) et (20), une condition nécessaire et suffisante pour que (17) ait lieu est donc

$$\exists a_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall \mathcal{H}_1 \in \mathbb{R}^q, \text{ vérifiant (6) et (7), } (0 \leq \|\mathcal{H}_1\| \leq a_0 \implies \varepsilon_0 {}^t \mathcal{H}_1 \mathcal{D} \mathcal{H}_1 \geq 0) \quad (21)$$

Réciproquement, une condition suffisante (mais plus nécessaire) pour que la relation (13) soit vérifiée est :

$$\begin{aligned} \exists a_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall \mathcal{H}_1, \mathcal{H}'_1 \in \mathbb{R}^q, \text{ vérifiant (6) et (7)} \\ (0 < \|\mathcal{H}_1\| \leq a_0 \text{ et } 0 < \|\mathcal{H}'_1\| \leq a_0) \implies ({}^t \mathcal{H}_1 \mathcal{D} \mathcal{H}_1) ({}^t \mathcal{H}'_1 \mathcal{D} \mathcal{H}'_1) < 0 \end{aligned} \quad (22)$$

On est donc amené à faire le second choix suivant, comme dans la littérature :

$$\text{Critère local total : défini par (21) ou (22)} \quad (23)$$

Il faut donc étudier le signe d'une forme quadratique, en étudiant classiquement le spectre de la matrice associée. On se restreint néanmoins aux composantes correspondant aux points alignés (contenant les cas où les angles correspondant sont libres). On peut déterminer explicitement les coefficients de \mathcal{D} , uniquement en fonction des distances entre les points A_k , sans passer par du calcul symbolique, comme le montre le lemme suivant.

Lemme A.1 (Expression des termes non diagonaux de \mathcal{D} (correspondant aux termes B_j nuls)). Pour tout j, j' dans $\{1, \dots, q\}$, tels que $j \leq j'$, les points $A_{j-1}, A_{j-1}, A_{j'-1}$ et A_p sont alignés et on a

$$D_{jj'} = \overline{A_{j-1} A_p A_{j'-1} A_p} - \overline{A_{j-1} A_p A_{j'-1} A_p} \quad (24)$$

Il existe des conditions suffisantes simples, non exprimées ici, portant sur \mathcal{D} , sans passer par son spectre, qui assurent que (21) ou (22) est vérifiée. Dans ce cas, tous les arcs de cercles ont un signe garanti. En dernier recours, si aucune d'elles n'est vérifiée, il faut alors comme dans la littérature, étudier le spectre de \mathcal{D} . On constatera, numériquement, que ces cas sont très rares.

Références

- [1] J.F.M. Molenbroek, Reach envelopes of older adults, in: The 42-nd Annual Meeting of the "Human Factors and Ergonomics Society", Chicago, IL, États-Unis, 1998, pp. 166–170.
- [2] J. Bastien, P. Legreneur, K. Monteil, Caractérisation géométrique de la frontière de l'espace de travail d'un système polyarticulé dans le plan (Geometrical characterisation of the boundary of the polyarticulated system workspace in the plane), C. R. Mecanique 335 (3) (2007) 181–186 (en français).
- [3] J. Bastien, P. Legreneur, K. Monteil, A geometrical alternative to jacobian rank deficiency method for planar workspace characterisation, Mech. Mach. Theory 45 (2010) 335–348.
- [4] D.A. Winter, Biomechanics and Motor Control of Human Movement, 4th edition, John Wiley & Sons, New Jersey, Canada, 2009.
- [5] K. Abdel-Malek, F. Adkins, H.-Y. Yeh, E. Haug, On the determination of boundaries to manipulator workspaces, Robot. Comput.-Integr. Manuf. 13 (1) (1997) 63–72.
- [6] K. Abdel-Malek, H.-Y. Yeh, Geometric representation of the swept volume using jacobian rank-deficiency conditions, Comput. Aided Des. 29 (6) (1997) 457–468.
- [7] K. Abdel-Malek, H.-Y. Yeh, O. Saeb, Swept volumes: void and boundary identification, Comput. Aided Des. 30 (13) (1998) 1009–1018.
- [8] K. Abdel-Malek, J. Yang, R. Brand, E. Tanbour, Towards understanding the workspace of human limbs, Ergonomics 47 (13) (2004) 1386–1405.
- [9] E. Dupuis, E. Papadopoulos, V. Hayward, The singular vector algorithm for the computation of rank-deficiency loci of rectangular Jacobians, in: International Conference on Intelligent Robots and Systems, Maui, Hawaii, États-Unis, 2001.
- [10] J. Yang, Y. Zhang, L. Chen, K. Abdel-Malek, Reach envelope of human extremities, Tsinghua Sci. Technol. 9 (6) (2004) 653–666.
- [11] K. Abdel-Malek, H.-J. Yeh, S. Othman, Interior and exterior boundaries to the workspace of mechanical manipulators, Robot. Comput.-Integr. Manuf. 16 (2000) 365–376.
- [12] M. Zein, P. Wenger, D. Chablat, An exhaustive study of the workspace topologies of all 3R orthogonal manipulators with geometric simplifications, Mech. Mach. Theory 41 (8) (2006) 971–986.
- [13] A.M. Hay, J.A. Snyman, The determination of nonconvex workspaces of generally constrained planar Stewart platforms, Comput. Math. Appl. 40 (8–9) (2000) 1043–1060.
- [14] A.J. Cebula, P.J. Zsombor-Murray, Formulation of the workspace equation for wrist-partitioned spatial manipulators, Mech. Mach. Theory 41 (7) (2006) 778–789.

- [15] S. Dibakar, T.S. Mruthyunjaya, A computational geometry approach for determination of boundary of workspaces of planar manipulators with arbitrary topology, *Mech. Mach. Theory* 34 (1999) 149–169.
- [16] J.-P. Merlet, C.M. Gosselin, N. Mouly, Workspaces of planar parallel manipulators, *Mech. Mach. Theory* 33 (1–2) (1998) 7–20.
- [17] M. Husty, E. Ottaviano, M. Ceccarelli, A geometrical characterization of workspace singularities in 3R manipulators, in: *Advances in Robot Kinematics: Analysis and Design*, Springer, New York, 2008, pp. 411–418.
- [18] N. Klopčar, J. Lenarčič, Kinematic model for determination of human arm reachable workspace, *Meccanica* 40 (2) (2005) 203–219.
- [19] X.-J. Liu, J. Wang, G. Pritschow, Kinematics, singularity and workspace of planar 5R symmetrical parallel mechanisms, *Mech. Mach. Theory* 41 (2) (2006) 145–169.
- [20] H. Li, C.M. Gosselin, M.J. Richard, Determination of maximal singularity-free zones in the workspace of planar three-degree-of-freedom parallel mechanisms, *Mech. Mach. Theory* 41 (10) (2006) 1157–1167.
- [21] J.-S. Zhao, M. Chen, K. Zhou, J.-X. Dong, Z.-J. Feng, Workspace of parallel manipulators with symmetric identical kinematic chains, *Mech. Mach. Theory* 41 (6) (2006) 632–645.
- [22] P. Jauer, I. Kuhlemann, F. Ernst, A. Schweikard, GPU-based real-time 3d workspace generation of arbitrary serial manipulators, in: *Proc. 2nd International Conference on Control, Automation and Robotics, ICCAR, Hong Kong, 2016*.
- [23] I.A. Bonev, C.M. Gosselin, Analytical determination of the workspace of symmetrical spherical parallel mechanisms, *IEEE Trans. Robot.* 22 (5) (2006) 1011–1017.
- [24] M. Arsenault, C.M. Gosselin, Kinematic, static and dynamic analysis of a planar 2-DOF tensegrity mechanism, *Mech. Mach. Theory* 41 (9) (2006) 1072–1089.
- [25] O. Bohigas, M. Manubens, L. Ros, A complete method for workspace boundary determination on general structure manipulators, *IEEE Trans. Robot.* 28 (5) (2012) 993–1006.
- [26] O. Bohigas, M. Manubens, L. Ros, *Singularities of Robot Mechanisms: Numerical Computation and Avoidance Path Planning*, Mechanisms and Machine Science, vol. 41, Springer, Cham, Suisse, 2017.
- [27] J.M. Porta, L. Ros, F. Thomas, A linear relaxation technique for the position analysis of multiloop linkages, *IEEE Trans. Robot.* 25 (2) (2009) 225–239.
- [28] J. Denavit, R.S. Hartenberg, A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices, *J. Appl. Mech.* 22 (1955) 215–221.
- [29] G. Legnani, F. Casolo, P. Righettini, B. Zappa, A homogeneous matrix approach to 3d kinematics and dynamics – I. Theory, *Mech. Mach. Theory* 31 (5) (1996) 573–587.
- [30] G. Wu, F.C.T. van der Helm, M. Veeger, H.E.J. Makhsoos, P. Van Roy, C. Anglin, J. Nagels, A.R. Karduna, K. McQuade, X. Wang, et al., Isb recommendation on definitions of joint coordinate systems of various joints for the reporting of human joint motion—Part II: shoulder, elbow, wrist and hand, *J. Biomech.* 38 (5) (2005) 981–992.