C. R. Mecanique 347 (2019) 228–258

Contents lists available at ScienceDirect

Comptes Rendus Mecanique

www.sciencedirect.com

La notion de moyenne en turbulence. Quelques réflexions selon une perspective historique

The notion of averaging in turbulence. Some considerations from a historical perspective

Patrick Chassaing [1]

Institut de mécanique des fluides de Toulouse, Toulouse, France

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 6 mai 2018
Accepté le 12 décembre 2018
Disponible sur Internet le 14 février 2019

Mots-clés :
Aérodynamique
Agitation
Aléatoire
Déterminisme
Histoire des sciences
Hydrodynamique
Mécanique des fluides
Moyenne
Probabilité
Statistique
Turbulence

Keywords:
Aerodynamics
Agitation
Average
Determinism
History of sciences
Hydrodynamics
Fluid mechanics
Mean value
Probability
Randomness
Statistic
Turbulence

R É S U M É

On retrace l'évolution historique du concept de moyenne en turbulence selon une double dimension d'analyse, prenant en considération sa signification physique et sa formulation mathématique. Après avoir replacé dans leur contexte d'époque quelques caractéristiques symptomatiques des écoulements turbulents, la question de leur interprétation au sens d'un syndrome de turbulence, conduisant à une identification unitaire du phénomène, est discutée. On s'intéresse alors à l'émergence de la notion de moyenne, comme outil de compréhension physique d'une telle approche unitaire, et de sa relation avec la progression des connaissances « expérimentales ». On termine en mettant en relation cette notion avec les aspects théoriques touchant au sens du *déterminisme en moyenne* du régime turbulent, de sa finalité et des tentatives d'élaboration d'une théorie probabiliste de la turbulence.

© 2018 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

A B S T R A C T

The historical evolution of the averaging concept in turbulence is presented according to a two-fold analysis, taking into consideration the physical meaning and the mathematical formulation. After having placed in their historical context some symptomatic characteristics of turbulent flows, the question of their interpretation as a turbulence syndrome, leading to a unitary identification of the phenomenon, is discussed. We then deal with the emergence of the notion of mean as a tool of physical understanding of such a unitary approach, and its relation with the progression of the "experimental" evidence. We conclude by relating this notion to the theoretical aspects of a *determinism on average* of the turbulent regime, its finality and some attempts to develop a probabilistic theory of turbulence.

© 2018 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Adresse e-mail : patrick.chassaing@isae-supaero.fr.

[1] Professeur émérite INP–ENSEEIHT–IMFT – Professeur honoraire ISAE-SUPAERO.

https://doi.org/10.1016/j.crme.2018.12.002
1631-0721/© 2018 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

1. Introduction

La relation entre expérience et théorie, question centrale de toute « Philosophie de la Nature », revêt, s'agissant de la turbulence dans les fluides, une spécificité toute particulière, pour au moins deux raisons. La première tient à la facilité d'observation, à échelle humaine, des nombreuses et diverses manifestations du phénomène, donnant à penser que sa connaissance intime ne résistera pas longtemps à l'expérimentation. La seconde est d'ordre théorique car, si l'on en croit Feynman (cf. [1], p. 293) :
« dans le cas de la turbulence, le problème n'est pas que la théorie explique seulement quelques cas simples : elle n'en explique tout simplement aucun. Nous n'avons pas de bonne théorie fondamentale du tout pour la turbulence.»

Un tel constat devrait amener, à tout le moins, à s'interroger sur l'angle de présentation du sujet, tel qu'il est adopté dans la plupart des ouvrages modernes sur la turbulence. Très généralement, en effet, les développements de nature théorique sont mis en avant, à travers un formalisme mathématique souvent complexe[2] pouvant, en première lecture, masquer le caractère incomplet de l'état de nos connaissances. L'expérience est invoquée en validation de ces développements, renforçant l'impression d'une construction théorique achevée du savoir en turbulence.

À la source de la spécificité d'articulation expérience–théorie en turbulence se trouve sans doute l'irruption de l'aléatoire à l'ordre du continu. Dans sa dimension *expérimentale*, cette question débouche sur l'identification et la caractérisation de ce que l'on peut qualifier de « symptômes » de l'agitation turbulente. Par son volet *théorique*, elle touche au sens du déterminisme en turbulence et interroge sur l'introduction et la justification d'un traitement statistique de la turbulence.

On se propose ici d'approfondir la relation expérience–théorie, en renversant l'ordre usuellement retenu des facteurs, *i.e.* en suivant d'abord ce que l'expérience a apporté à la connaissance du phénomène au cours du temps avant d'examiner la traduction/formalisation de cette connaissance dans une conception statistique à visée théorique.

En fil rouge à tout l'exposé se trouve la question d'un « déterminisme opératoire » en turbulence, à travers la restitution d'un lien de causalité à finalité[3] par une reformulation des équations instantanées, question qui, concrètement, est déclinée ici en deux volets :

- (i) la reconquête du « déterminisme perdu », grâce à un traitement *en moyenne*,
- (ii) le sens physique des « objets » issus de ce « déterminisme *moyen* recouvré ».

2. Historique de quelques symptômes de l'agitation turbulente

2.1. La problématique

Une des constantes de toute l'histoire de la mécanique des fluides est que la connaissance empirique précède le savoir théorique, au point même d'être, sur une période donnée, le seul outil exploitable pour les applications pratiques. La turbulence en fournit sans doute l'une des illustrations les plus patentes. Cependant, grâce notamment au développement des techniques métrologiques, l'expérimentation en turbulence a très vite dépassé le simple cadre utilitaire pour ambitionner la découverte de traits caractéristiques du phénomène lui-même. C'est l'émergence de cette connaissance fragmentaire, au sens de *symptômes de turbulence*, que nous allons retracer brièvement.
L'examen de l'ensemble de ces symptômes — dont certains ont été découverts en l'absence de tout cadre théorique préexistant — conduira à les envisager comme la signature possible d'un *syndrome* de turbulence, et donc de poser la question d'une étude dédiée à cet ensemble (§ 3). Dans la section suivante (§ 4), nous verrons comment fut introduit, au cours du temps, le formalisme de moyenne, outil majeur de cette étude. Finalement, nous confronterons la *réalité empirique*, issue de l'identification « expérimentale » du syndrome de turbulence, à la *perception théorique en moyenne* du phénomène, dans une perspective d'élaboration d'une *physique probabiliste de la turbulence* (§ 5).

2.2. Historique d'identification de quelques symptômes de l'agitation turbulente

2.2.1. Identification du régime

Vers 1508–1510, Leonardo da Vinci [4] observe que le courant d'une rivière suit, dans le sillage d'un obstacle, un mouvement tortueux où l'eau forme des tourbillons.[4]

Depuis lors, de nombreuses expressions ont été utilisées pour décrire ce régime d'écoulement. Il est ainsi le siège de « mouvements tumultueux, de bouillons ou tourbillons », selon Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant [6], en 1872.

[2] Une exception notable est celle de l'ouvrage de Marcel Lesieur [2].

[3] Pour une présentation plus générale mais toujours contextualisée à la turbulence de cette relation, on pourra consulter l'ouvrage de Favre et al. [3].

[4] Il existe au moins un écrit de Vinci où l'on trouve le mot « turbulence » (*turbulenza*). Il s'agit du passage *De la façon de représenter une bataille* au chapitre « Pratique de la peinture », (voir Richter [5], p. 303), où Vinci décrit comment figurer la fureur de la bataille : « *Ed alcū fiume, dentrovi cavalli corrēti, riēpiēdo la circonstāte aqua di turbulēza d'onde, di schivmo e d'acqua cōfusa saltate ī̄fra l'aria e tra le gābe e corpi de' cavalli.* » (« Et il peut y avoir une rivière dans laquelle galopent les chevaux en agitant l'eau tout autour d'eux en vagues turbulentes de mousse et d'eau, jetés dans l'air et entre les jambes et les corps des chevaux. ») Cependant, dans les commentaires qui accompagnent les nombreuses illustrations de mouvements d'agitation dans les fluides, Vinci n'emploie pas le mot *turbulenza* pour qualifier les mouvements qu'il observe alors.

L'écoulement de l'eau, « qui est une masse de tourbillons », est qualifié de « sinueux » par Osborne Reynolds [7] en 1883. Henri Émile Bazin, s'agissant de l'écoulement dans « le canal le plus régulier » parle, en 1887, de la « masse du courant sans cesse traversée par des mouvements giratoires » [8].

2.2.2. Perception moyenne

À l'origine de la notion empirique de moyenne se trouve la question de la résistance d'écoulements en conduites. Le fait fondateur est que cette résistance est mesurée à l'identique dans une conduite donnée, chaque fois que l'expérience est refaite sous les mêmes conditions hydrodynamiques.[5] Il est donc possible de s'affranchir de la connaissance du détail des irrégularités de l'agitation. Ce point de vue est explicité par Saint-Venant en 1872 [6] :

> « Tant pour la direction que pour la grandeur, les vitesses effectives, si variables, font des oscillations, compliquées sans doute, mais d'amplitude généralement médiocre, autour de moyennes constantes, relatives à chaque point. Ce sont ces vitesses moyennes locales, ces vitesses de translation ou de transport du fluide que mesurent les flotteurs et autres instruments hydrométriques, et qui déterminent les écoulements, objets du calcul. »

Il est repris quelques années plus tard par Osborne Reynolds ([9], 1886) pour qui « l'écoulement moyen en tout point sur un temps suffisant est parallèle », alors qu'il est composé « d'une succession de mouvements traversant la section de la conduite dans des directions différentes ».

2.2.3. Fluctuation de turbulence

En 1872, Saint-Venant [6] fait état de changements brusques des vitesses, d'un point à un autre et d'un instant à l'autre dans le mouvement des rivières. En 1887, Henri Émile Bazin [8] détecte des « oscillations » du niveau du tube jaugeur de Pitot–Darcy placé dans un écoulement turbulent. Reynolds [10] franchit en 1895 un pas cognitif décisif en explicitant la fluctuation par différence entre la valeur réelle et sa moyenne, et formule les équations qui régissent la dynamique du mouvement moyen, l'énergie cinétique du mouvement moyen et de la moyenne de l'énergie cinétique du mouvement fluctuant.

Un des premiers enregistrements de fluctuations est rapporté par Samuel Pierpont Langley [11] en 1893, à la conférence internationale sur la navigation aérienne de Chicago. Il s'agit du signal de vitesse d'un vent, délivré par un anémomètre à coupelle de faible inertie mécanique.

Un oscillogrammme des fluctuations mesurées par anémométrie à fil chaud apparaît en 1929 dans la publication [12] de Hugh Latimer Dryden et Arnold Martin Kuethe.

2.2.4. Contrainte de turbulence

En 1816, Pierre Louis Georges Dubuat [13] énonce le paradoxe éponyme selon lequel la résistance sur un obstacle se déplaçant dans un fluide au repos est différente de celle sur ce même obstacle immobile dans un courant de même vitesse relative. Ce paradoxe sera levé en 1898 par Auguste Camille Edmond Rateau [14], attribuant la différence à la présence d'une pression additionnelle par l'agitation turbulente du courant, au motif que la moyenne de la quantité de mouvement du fluide, à l'origine de la résistance effective, est supérieure à la quantité de mouvement de la vitesse moyenne retenue dans le calcul.

Entre temps, Bazin [8] en 1887, avait déduit des oscillations de niveau d'un tube jaugeur une première estimation de l'intensité de turbulence d'un courant ($\simeq \overline{u'^2}/\overline{U}^2$). Mais c'est à Reynolds [10] que l'on doit, en 1895, d'avoir formellement exprimé les contributions des fluctuations dans l'équation de la dynamique du mouvement moyen, et à Hendrik Antoon Lorentz [15] en 1907, de les avoir explicitement identifiées à des « contraintes » supplémentaires dues aux mouvements d'agitation.

2.2.5. Intermittence

Ce nom désigne l'alternance d'épisodes turbulents et non turbulents au sein d'un écoulement, qu'elle soit observée en différents points du champ à un même instant, ou présente dans un signal temporel en un point donné. Quatre types d'intermittence ont été détectés.

a) **L'ntermittence de transition**, vraisemblablement observée par Hagen [16] en 1854 par les modifications structurelles du jet en sortie de l'écoulement de tube, elle est décrite explicitement par Reynolds [7] en 1883, qui notait le « caractère intermittent des perturbations » au cours du passage au régime turbulent dans des tubes de petit diamètre. Des taches de turbulence apparaissent d'abord sporadiquement, puis augmentent en fréquence avec le nombre de Reynolds, structurant des poches turbulentes en alternance avec des « bouchons » laminaires qui disparaissent en fin de transition.
b) **L'intermittence de frontière**, mise en évidence d'abord dans des écoulements libres de type jet par Corrsin [17] en 1943, elle est également présente à la frontière libre de couche limite, comme l'ont montré indépendamment, en 1954, Klebanoff [18] et Corrsin & Kistler [19] (voir également § 2.2.8). La surface délimitant la région turbulente du reste de l'écoulement présente des irrégularités à grande échelle de longueur, traduisant une pénétration en profondeur du fluide externe non turbulent.

[5] On peut voir dans ce constat une première référence au paradoxe de l'approche statistique (voir § 5.2.2).

c) **L'intermittence interne à petite échelle**, découverte par Batchelor & Townsend [20] en 1949, elle se caractérise par le fait que « l'activation aux grands nombres d'onde est inégalement répartie dans l'espace ». Le phénomène, confirmé par Yi-Shuong Kuo & Corrsin [21] en 1971, induit un caractère intermittent de la dissipation d'énergie d'agitation turbulente.
d) **L'intermittence de paroi**, associée au phénomène de « *bursting* », rapportée en 1967 par Kline et al. [22] à partir de visualisations par bulles d'hydrogène, confirmée en 1972 par Narahari Rao et al. [23] sur des signaux d'anémomètre à fil chaud. En région interne de couche limite, d'après Kline et al. [22], des structures striées interagissent avec l'écoulement de la région externe selon un processus graduel de « décollage », oscillation brusque, éclatement (*bursting*) et éjection. Les deux dernières séquences induisent un caractère fortement intermittent de la « production » d'énergie cinétique de turbulence en couche limite.

2.2.6. Organisation à grande échelle en turbulence libre

Dès 1510, Vinci [4] fait état de deux types de mouvements dans le sillage d'un obstacle et identifie visuellement des enroulements à grande échelle périodiquement distribués dans l'espace. En regard de dessins des structures tourbillonnaires d'un sillage il note [24] :

> « Observe le mouvement de la surface de l'eau qui ressemble à celui des cheveux qui a deux mouvements, l'un d'eux qui suit leur propre poids et l'autre les injonctions des boucles. Ainsi l'eau forme des tourbillons tournoyants, dont une partie suit le sens du courant principal et l'autre le mouvement fortuit du courant de retour. »

Cette réalité fut ignorée ou oubliée pendant plus de quatre siècles. Pourtant, en 1908, Bénard [25] décrit la déformation périodique alternée de la surface libre de l'eau au passage d'un cylindre à section circulaire. En 1927, Camichel [26] établit que cette déformation signe une organisation interne à toute la masse du courant fluide en tourbillons alternés et mesure la dépendance de la fréquence adimensionnelle au nombre de Reynolds. Encore plus significatif pour notre sujet, Roshko [27] publie en 1961 les résultats de ses expériences montrant l'existence d'un détachement tourbillonnaire à caractère périodique pour un nombre de Reynolds supérieur à $3,5 \times 10^6$. Il fait même état de travaux de 1924 (Relf & Simmons) rapportant cette même observation à des nombres de Reynolds de 10^5. Ce n'est pourtant qu'en 1971 que le « monde des turbulenciers » semble avoir véritablement reconnu la réalité de cette organisation spatio-temporelle à grande échelle, de caractère quasi périodique dans certains écoulements libres, grâce aux visualisations des structures tourbillonnaires en zone de mélange, présentées par Brown et Roshko [28] au congrès AGARD de Londres. L'importance de cette communication tient donc moins à l'objet de sa « découverte » qu'à l'initialisation d'un nouveau centre d'intérêt des recherches en turbulence, en rupture avec la vision statistique classiquement adoptée jusqu'alors et conceptuellement inapte à traduire tout caractère différencié entre structures d'agitation (voir § 4.3).

2.2.7. Turbulence de paroi : anisotropie statistique

Dès 1872, Saint-Venant [6] signale l'influence que joue la paroi dans la production de tourbillons venant s'épanouir à la surface d'une rivière. En 1887, Bazin [8] pose la question de la distribution de l'agitation tourbillonnaire « à travers toute l'étendue de la section d'un courant ». Une réponse convaincante est apportée en 1932 par Fage et Townend [29], qui établissent, par l'observation des mouvements de particules de taille ultra-microscopique, l'anisotropie prononcée des contraintes normales de turbulence. Ils vont même jusqu'à révéler la présence de fluctuations dans une sous-couche très proche de la paroi (à 1/40 000 pouce de distance).

2.2.8. Turbulence de paroi : mouvements organisés

Comme pour la turbulence libre, la turbulence de paroi a également été scrutée en vue de déceler d'éventuels éléments d'organisation au sein même de l'agitation. On s'accorde actuellement (voir par exemple Sharma & McKeon [30] en 2013) pour retenir les éléments distinctifs suivants :

a) la structure en stries, à proximité immédiate de la paroi ;
b) les tourbillons en fer à cheval ou épingle à cheveu, jusque dans la zone de recouvrement du profil de vitesse moyenne ;
c) les mouvements à grande et très grande échelles, *i.e.* sur des distances de l'ordre de quelques échelles externes à une dizaine de ces échelles.

a) **Structure striée**, rapportée en 1956 par Corrsin [31], en référence aux visualisations de Beatty, Ferrell et Richardson [32] (écoulement en conduite) et Hama [33] (couche limite), qui mentionne que :

> « la propriété remarquable semble être l'orientation prononcée en filaments longitudinaux de la fumée résiduelle. Probablement c'est une indication d'une prédominance de la vorticité axiale près de la paroi, "balayant" le fluide (marqué de fumée) en ces longues et étroites stries. »

La présence de ces stries fut confirmée en 1967 par Kline et al. [22], en canal hydraulique, à l'aide de visualisations par bulles d'hydrogène.

b) **Tourbillon en fer à cheval**, conjecturé par Theodorsen [34] en 1952, ce type de structure, encore qualifié « d'épingle à cheveu » a été anticipé dans une première « expérimentation numérique » par Kim [35] en 1983, avant d'être confirmée, toujours par simulation, par Kim & Moin [36], en 1986. Cependant, d'après Kline [37] en 1991, si ces simulations identifient des modèles structurels aux propriétés cinématiques et dynamiques compatibles avec les données de l'expérience physique, les preuves effectives de leur présence dans les couches limites turbulentes sont limitées.

c) **Mouvement à grande échelle**, révélés par signature anémométrique, ils sont interprétés par Corrsin & Kistler [19] en 1954, comme de larges protubérances turbulentes venant de l'intérieur de la couche limite et pénétrant le fluide non turbulent. Les visualisations de Falco [38] en 1977 confirment la présence de tels mouvements sur une très grande partie de l'épaisseur de la couche limite. Contrairement à ce qui a été observé dans certains cas de turbulence libre, ces mouvements à grande échelle ne semblent pas présenter, en couche limite, de caractère périodique.

2.2.9. Dissipation et cascade énergétique

Une première mention du caractère nécessairement dissipatif du mouvement de l'eau remonte vraisemblablement à Daniel Bernoulli. Dans la section VII, §2 de son ouvrage *Hydrodynamica* [39] de 1738, il mentionne explicitement qu'une partie de la force vive d'un *mouvement progressif* peut être perdue, *i.e.* sans retour pour celui-ci, dans la production de *mouvements intestins*. Il en fait même la cause principale de dissipation dans un écoulement présentant une singularité de section (élargissement ou rétrécissement brusque).
La même idée se retrouve en 1794 dans le traité de Jean-Baptiste Venturi [40], où l'on relève que le frottement de l'eau le long des berges et sur le fond des rivières n'est pas la cause principale du « ralentissement de leurs cours », laquelle vient des tourbillons qui s'y forment sans cesse partout, et ainsi :

« une bonne partie du courant est employée à rétablir un équilibre de mouvement qu'elle même dérange continuellement. »

Une anticipation assez remarquable est avancée par Poncelet [41] en 1839. Dans son ouvrage *Introduction à la mécanique industrielle, physique ou expérimentale*, il écrit en effet (cf. [41], pp. 530–531) :

« L'observation attentive des faits autorise à croire qu'indépendamment de ces mouvements giratoires communs à toute une portion de la masse fluide, il s'en produit aussi de secondaires ou de moins apparents, qui embrassent un groupe plus ou moins grand de molécules, et qui se distribuent dans les intervalles des précédents... Mais on peut aller au delà, et admettre, sans trop s'aventurer, que de pareils mouvements de rotation ou d'oscillation imprimés aux molécules individuelles ou aux derniers groupes de molécules, sont, après l'adhérence et la cohésion... l'une des causes les plus puissantes de la déperdition du mouvement dans ces fluides, et notamment de la résistance que leurs filets éprouvent à glisser les uns sur les autres ou sur la surface des corps solides. »

En 1868 Boussinesq [42] montre en quoi le caractère dissipatif de l'agitation interne du mouvement est une condition indispensable à l'existence d'écoulements en canal ou conduite sous des vitesse réalistes.[6] Il retient, comme Poncelet, que :

« les plus petits tournoiements, produits par les inégalités du fond ou de toute autre manière, doivent amener une perte de force vive capable de neutraliser l'accélération due à la pesanteur ou aux variations de pression. »

En 1917, Taylor [43] fait un premier pas vers l'identification du rôle des petits tourbillons dans la dissipation. Il écrit en effet :

« Le taux de dissipation d'énergie cinétique dans un fluide turbulent est

$$\iiint \mu(\text{vorticité})^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

où μ représente la viscosité et l'intégration s'étend à tout le volume. Pour qu'une fraction appréciable de l'énergie [...] puisse être dissipée par les tourbillons, il est nécessaire que la valeur moyenne de (vorticité)^2 soit énormément plus grande que le carré de la vorticité due au mouvement moyen. Pour ce faire, le mouvement tourbillonnaire [*eddy motion*] doit tendre à produire de petits tourbillons [*whirls*] ou discontinuités[7] avec une vorticité très grande dans un très petit volume. C'est la seule façon pour que l'effet de viscosité se fasse sentir dans un fluide à très faible viscosité. »

Puis il ajoute une seconde spécificité :

« Pour que des régions à vorticité élevée apparaissent, il est nécessaire que le mouvement soit tri-dimensionnel, car la vorticité de toute portion de fluide se conserve dans un mouvement bi-dimensionnel. Il est donc manifeste que, si le mouvement turbulent s'accompagne d'une dissipation d'énergie au sein de l'ensemble du fluide, le mouvement turbulent doit se faire en trois dimensions. »

En 1922, Richardson, dans son ouvrage *Wheather prediction by numerical process* [45], livre un raccourci célèbre de sa vision de l'activité inter-tourbillonnaire dans les structures convectives de l'atmosphère. Sa formulation initiale, reprise et mise en rimes en 1950 par Batchelor [46], sera utilisée comme une préfiguration de la cascade énergétique, selon une rédaction « extrapolant » légèrement les idées d'origine de Richardson telles qu'exprimées dans le passage suivant :

---

[6] Boussinesq fait remarquer que dans un canal à surface libre à section semi-circulaire de 1 m de rayon avec une pente de 0,0001, l'équilibre dynamique entre forces de frottement et de gravité conduirait à une vitesse centrale de 187 m/s, si l'on ne prenait en compte que le seul frottement visqueux.

[7] Il n'est pas aisé de se faire une idée juste de ce que Taylor a en tête avec ce vocabulaire. Selon Sreenivasan [44] on pourrait y voir la conjecture de l'intermittence interne à petite échelle.

« Les mouvements convectifs sont gênés par la formation de petits tourbillons ressemblant à ceux dûs à l'instabilité dynamique. Ainsi C. K. M. Douglas, s'exprimant sur des observations aériennes, remarque : "Les courants ascendants de gros cumuli donnent naissance à beaucoup de turbulence, à l'intérieur, en dessous et autour des nuages, et la structure des nuages est souvent très complexe." On a une impression semblable quand on fait un dessin d'un cumulus s'élevant d'un point fixe ; les détails ont changé avant d'avoir achevé le tracé. Nous réalisons ainsi que : les gros tourbillons ont de plus petits tourbillons alimentés par leur vitesse, et les petits tourbillons en ont d'encore plus petits et ainsi de suite jusqu'à la viscosité — au sens moléculaire.[8] »

Taylor & Green [47] expriment en 1937 les choses de façon moins poétique, mais sans doute plus réaliste, en référence à la cascade énergétique en turbulence. L'idée remonte à 1935, lorsque Taylor [48] montre que l'équation régissant le taux de décroissance de l'énergie cinétique d'agitation en turbulence homogène et isotrope fait intervenir une micro-échelle λ, laquelle peut être empiriquement reliée à la maille de la grille.[9] Dans l'article signé avec Green [47] en 1937, ce résultat est interprété comme représentant

« l'effet du processus fondamental des écoulements turbulents, à savoir le broyage [*grinding down*] des tourbillons produits par les obstacles solides (et d'échelle comparable à ces obstacles) dans des tourbillons de plus en plus petits jusqu'à ce qu'ils atteignent une taille si réduite qu'ils disparaissent par viscosité plus vite qu'ils ne sont produits par le processus de broyage.[10] »

Ils ajoutent qu'en raison du caractère diffusif de l'agitation, la tendance à l'étirement des lignes fluides se traduit par une augmentation de l'enstrophie[11] au cours d'une phase purement inertielle du processus.

En 1941, dans le premier article qu'il consacre au sujet, Kolmogorov [49] introduit l'hypothèse *d'isotropie locale* qu'il considère devoir s'appliquer avec un bon degré d'approximation à tout écoulement turbulent à grand nombre de Reynolds, dans des domaines spatio-temporels (x, y, z, t) suffisamment petits et éloignés de frontières solides et d'autres singularités. Il précise à cette occasion[12] sa conception du transfert énergétique :

« À très grand nombre de Reynolds, on peut concevoir l'écoulement turbulent comme suit : à l'écoulement moyen (caractérisé par les espérances mathématiques $\overline{u}_\sigma$) se superposent des pulsations de premier ordre consistant en des déplacements désordonnés de volumes indépendants de fluide, de diamètre moyen de l'ordre de grandeur $l^{(1)} = \ell$ (où ℓ est la longueur de mélange de Prandtl) ; on note v^1 l'ordre de grandeur des vitesses de ces déplacements relatifs. Pour de très grands nombres de Reynolds, ces pulsations de premier ordre sont à leur tour instables, et se superposent à elles des pulsations de deuxième ordre avec une longueur de mélange $l^{(2)} < l^{(1)}$ et des vitesses relatives $v^{(2)} < v^{(1)}$; un tel processus de réduction des pulsations turbulentes peut se poursuivre tant que, pour des pulsations d'ordre n suffisamment élevé, le nombre de Reynolds

$$R^{(n)} = \frac{v^{(n)} l^{(n)}}{\nu}$$

n'est pas suffisamment petit, c'est-à-dire, tant que l'influence de la viscosité n'est pas suffisante pour empêcher une pulsation d'ordre n de former une pulsation d'ordre $n+1$.

Du point de vue énergétique, on peut se représenter le processus de mélange turbulent ainsi : les pulsations de premier ordre captent l'énergie du mouvement et la redistribuent successivement à des pulsations d'ordres plus élevés. L'énergie des pulsations les plus fines est dissipée en chaleur en raison de la viscosité.

En vertu des mécanismes chaotiques de transmission du mouvement des pulsations aux ordres peu élevés vers celles d'ordres élevés, il est naturel de supposer que, dans des domaines spatiaux, dont les dimensions sont petites comparées à $l^{(1)}$, les pulsations fines d'ordres élevés sont soumises approximativement à un régime statistiquement isotrope dans l'espace. Pour de petits intervalles de temps, il est naturel de considérer ce régime approximativement permanent, même dans le cas où le mouvement d'ensemble ne l'est pas. »

2.2.10. Diffusion – Dispersion

En 1816, dans le tome premier de ses *Principes d'hydraulique et de pyrodynamique*, Dubuat [51] livre, à titre de conjecture, une description explicite de l'effet diffusif de quantité de mouvement par la viscosité, même si le terme même de « diffusion » n'est pas mentionné :

---

[8] *Big whirls have little whirls that feed on their velocity, and little whirls have lesser whirls and so on to viscosity in the molecular sense.*

[9] Il s'agit de la combinaison de (*i*) la relation théorique $\overline{W} = 15\nu {u'}^2/\lambda^2$ exprimant la dissipation en fonction de la micro échelle λ avec (*ii*) une expression de cette micro-échelle à partir de la maille de grille, $\frac{\lambda}{M} = 2.0\sqrt{\frac{\nu}{u'M}}$ qui, quant à elle, est issue de résultats expérimentaux.

[10] Le terme de « broyage » (*grinding down*) pourrait suggérer que les « gros » tourbillons sont fractionnés en des plus petits et donc qu'ils disparaissent « physiquement » de l'ensemble des structures constitutives de l'agitation. Cette vision des choses est erronée, car en phase finale de dégénérescence de turbulence de grille, l'observation montre que ce sont les plus grosses structures qui sont les dernières à subsister. Ce caractère quelque peu abusif de la formulation est parfaitement révélé par l'analyse du contenu mathématique de la suite de l'article de Taylor & Green.

[11] Par définition, le terme d'enstrophie désigne la grandeur $\epsilon = \frac{1}{2}\overline{\omega_i \omega_i}$, où $\omega_i = \Omega_i - \overline{\Omega}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ sont les composantes des fluctuations du pseudo-vecteur rotationnel de vitesse $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \nabla \times \overrightarrow{V}$.

[12] Note en bas des pp. 300 et 301 de la publication d'origine. Voir également l'article sur Kolmogorov dans l'ouvrage édité par Yakov Sinai [50], p. 327.

« Les molécules qui touchent immédiatement celles qui sont collées à la paroi, étant considérablement retardées, altèrent aussi le mouvement de celles qui les touchent ; et la résistance ou l'inertie du lit se communiquant ainsi de proche en proche, répand sa force coercitive sur toute la masse. La viscosité, cet effet de l'attraction ou de l'adhésion qu'ont entre elles ces mêmes particules, concourt à augmenter cette résistance ; car, si les molécules les plus éloignées de la paroi tendent à aller plus vite, elles ne peuvent le faire sans entraîner un peu celles qui avoisinent la paroi. »

En 1920, Richardson traite, dans le §VII de son article *The Supply of Energy from and to Atmospheric Eddies* [52], de la « diffusion de l'énergie tourbillonnaire ». Il note que la génération de turbulence près du sol pose la question de son mode de diffusion au reste de l'atmosphère. Il envisage alors le mécanisme suivant :

« Deux processus différents peuvent être à l'œuvre en même temps. Des tourbillons [*eddies*] peuvent errer individuellement depuis des endroits où ils sont en nombre vers d'autres où ils sont rares. On peut qualifier cela de diffusion vraie de chaleur-tourbillonnaire-par-unité-de-masse.[13] Ou de grands tourbillons [*whirls*], tels que ceux que montrent les cumuli, peuvent soulever plusieurs kilomètres cubes d'air contenant des milliers de plus petits tourbillons. Cela peut être appelé diffusion par les gros tourbillons de chaleur-tourbillonnaire-à-petite-échelle-par-unité-de-masse.[14] »

Les premières photographies de la diffusion d'un traceur (fumée) émis d'un point source placé dans un courant turbulent sont publiées en 1921 par Richardson [53]. L'émission se fait à 1 m du sol dans un vent de vitesse de l'ordre de 1 m/s. Elles révèlent une limite latérale du marqueur en forme de cône à proximité de la source, évoluant ensuite progressivement vers celle d'un paraboloïde de révolution.
C'est en 1926 que Richardson [54] constate, sur la base de plusieurs observations, que le modèle de diffusion de Fick ne peut s'appliquer au cas de la diffusion de particules dans un écoulement turbulent et en particulier dans l'atmosphère, la diffusivité pouvant varier d'un facteur de deux à un milliard selon les données. La raison vient du fait qu'au fur et à mesure que le temps de parcours augmente, des tourbillons de tailles de plus en plus grandes interviennent dans la dispersion, sans autres limites que celles des échelles d'ordre planétaire.
Richardson argumente alors que cet effet ne se manifeste pas si l'on s'attache à des propriétés se rapportant, non à la position d'une particule, mais relatives à la distance entre paires de particules. Notant $q(\ell, t)$ une telle propriété,[15] l'équation modèle de sa diffusion peut s'écrire

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(F(\ell)\frac{\partial q}{\partial \ell}\right)$$

où $F(\ell)$ est une fonction croissante de ℓ.

En exploitant les données récoltées entre 1908 et 1921, Richardson propose, pour des séparations n'excédant pas 10 cm, d'approcher la fonction $F(\ell)$ par $F(\ell) = \varepsilon \ell^{4/3}$.

3. La question du syndrome de turbulence

En prélude à l'exploitation des données historiques précédentes, il convient d'observer :

– le caractère non exhaustif des éléments cités, ne faisant pas mention, par exemple, de propriétés telles que l'étirement des lignes fluides, la relaxation vers l'isotropie, l'existence de régions de production négative, la diffusion à contre-gradient...
– la focalisation sur les apports de l'expérimentation sur modèle physique, la simulation par résolution directe des équations de Navier–Stokes étant devenue actuellement un outil puissant d'analyse de la turbulence au titre d'une « expérimentation numérique » ;
– la possibilité de variabilité dans l'identification d'un symptôme, excluant d'en faire une « unité identitaire » de « la turbulence en général », sans vérification approfondie de l'indépendance aux spécificités de la configuration d'écoulement.
– les limitations inhérentes à plusieurs facteurs implicitement retenus dans la revue : agitation tridimensionnelle, évolution isovolume… excluant des effets de bidimensionnalité, stratification, rotation, compressibilité...

Après avoir mis en avant la réalité de plusieurs *symptômes* de la turbulence, la question cruciale qui se pose est de savoir s'ils peuvent donner corps à un *syndrome* de turbulence, *i.e.* un phénomène unitaire pouvant les intégrer dans une

[13] L'expression de Richardson est *eddy-heat-per-mass*. Dans le contexte de l'article, cette appellation définit une « température » $\Theta = \frac{1}{2}(\overline{v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2})$, qui n'est autre que la moyenne de l'énergie cinétique cinématique de l'agitation, usuellement notée $\overline{k}$.

[14] Le terme de Richardson est *small-eddy-heat-per-mass*. Il s'agit donc d'une « restriction » de $\overline{k}$ à l'agitation fine.

[15] En p. 719 de l'article de Richardson [54], la propriété en question est définie par

$$q(\ell, t) = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{+\infty} \nu(x, t)\nu(x+\ell, t)\,\mathrm{d}x$$

où $\nu(x, t)$ est une concentration linéique, *i.e.* le nombre par unité de longueur, de particules marquées disposées le long d'une droite.

compréhension et explication globale. En d'autres termes, il s'agit de savoir si parler de « la » turbulence a un sens, ou s'il faut, au contraire réduire le phénomène à une collection d'écoulements.
Une première façon d'envisager la réponse à cette question pourrait être d'accumuler de plus en plus d'observations afin d'élargir sans cesse le contenu du syndrome avec l'espoir qu'*in fine*, la juxtaposition de tous les éléments puisse « révéler » le sujet, comme autant de touches d'un tableau impressionniste. Il est à craindre cependant que cela ne fasse qu'enrichir une taxonomie d'éléments sans garantir d'aboutir au but recherché.

Pour dépasser ce stade et accéder aux nécessaires relations d'interdépendance des observations, prélude à toute connaissance consolidée du phénomène, il faut avoir recours à un cadre théorique permettant d'envisager une cohérence d'intégration.
Au regard d'une telle démarche théorique, le premier problème qui apparaît d'emblée tient paradoxalement davantage à l'abondance et à la diversité des données expérimentales qu'à leur rareté.[16] Dès lors, la théorie doit-elle s'affranchir de tout ou partie de ces données ? Comment sélectionner, le cas échéant, les informations pertinentes ? Faut-il envisager, non pas une, mais des approches théoriques ?
Un second problème concerne le positionnement théorique le mieux à même de fournir le cadre adéquat d'interprétation–explication de tout ou partie du syndrome. Si l'on s'accorde pour ne pas remettre en cause le modèle de Navier–Stokes,[17] l'absence de condition d'existence des solutions tridimensionnelles, n'en fait pas nécessairement une référence exempte de tout questionnement, s'agissant en particulier de la nature aléatoire des « solutions turbulentes ».[18] En revanche ce modèle constitue un outil indispensable à toute « expérimentation numérique » et la base d'ancrage de tout modèle dérivé, dédié à l'écoulement turbulent.

Nous allons donc maintenant nous intéresser à un élément majeur du développement d'un contexte théorique explicatif du syndrome de turbulence qu'est la notion de moyenne, en commençant par en retracer l'historique.

4. De la moyenne en turbulence

4.1. La question de la moyenne

L'introduction de la notion de « moyenne » en turbulence conjugue deux objectifs :

(*i*) définir un outil permettant une étude mathématique du sujet,
(*ii*) ouvrir sur une approche déterministe de tout ou partie du syndrome de turbulence.

• Le premier objectif est parfaitement formulé par Lumley et Yaglom [57] :

> « Nous devons discuter l'établissement de la base mathématique pour le traitement des problèmes de turbulence. En général, l'inter-relation entre mathématiques pures et leurs applications est assez complexe. Évidemment, l'apparition de notions et concepts mathématiques nouveaux est souvent suscitée par des besoins pratiques. Cependant, dans certains cas, l'émergence d'une nouvelle théorie mathématique est due à des idées abstraites sans relation avec des problèmes pratiques, ou bien est suggérée par des problèmes pratiques, mais s'étend bien vite au delà des limites des applications spécifiques dont elle s'inspire. »

• S'agissant du caractère déterministe, il est d'usage de faire référence à un *déterminisme statistique*, qui, selon von Kármán, remonterait à Osborne Reynolds.[19] En introduction de sa présentation à l'Institut de technologie de Californie, le 23 juin 1948, il mentionne en effet que [58] :

> « La notion fondamentale des valeurs moyennes statistiques en mécanique des fluides fut introduite pour la première fois par Reynolds. »

L'examen plus attentif des textes d'origine qui va suivre montre que l'histoire ne s'est pas déroulée de la façon aussi simple que le donne à penser cette affirmation de von Kármán.

[16] Ce trait a déjà été relevé, non sans une certaine poésie, par Kampé de Fériet dans son rapport de président de la section «Nouvelles conceptions et contributions récentes» du Colloque international de mécanique de la turbulence de Marseille de 1961 [55] : *« D'un côté, sur un pic couvert de neiges éternelles, flotte dans la solitude et le silence, l'étendard des équations de Navier ; un abîme insondable sépare ce sommet glacé du terrain sur lequel se déverse la pluie incessante des résultats de l'expérience. C'est sur ce sol, parfois un peu marécageux, à cause de l'abondance des pluies, que tentent de s'élaborer les modèles mathématiques, suggérés bien souvent par des intuitions physiques profondes.»*

[17] La validité du modèle de Navier–Stokes en turbulence est plutôt une condition de « non-invalidité » dans la mesure où l'on continue de l'utiliser tant qu'aucune observation ne vient contredire l'une quelconque de ses conséquences.

[18] On peut citer, à ce propos, l'opinion d'Uriel Frisch [56] : *« Nous savons que l'équation fondamentale de Navier–Stokes est déterministe : quoique il n'y ait aucune preuve rigoureuse de cela, il est largement conjecturé que, pour une condition initiale donnée , il existe une solution unique à tout temps.»*

[19] Von Kárman ne cite pas de façon précise l'article de Reynolds auquel il fait allusion. Mais tout porte à croire qu'il s'agit de sa publication de 1895, intitulée *On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion* [10].

4.2. Aperçu historique de la notion mathématique de moyenne

4.2.1. Joseph Boussinesq 1872

C'est sans doute Boussinesq qui est le premier à s'attaquer à la question d'un traitement *en moyenne* du mouvement turbulent dans son *Essai sur la théorie des eaux courantes*, publié en 1877.[20] Il y écrit en effet (cf. [59], p. 24) :

> « Tous les observateurs ont remarqué que le mouvement des eaux courantes n'est pas continu, c'est-à-dire tel, que les vitesses, à un moment donné, y varient graduellement d'un point aux points voisins : ce mouvement est caractérisé, au contraire, par des changements fréquents et rapides, mais assujettis à une sorte de périodicité irrégulière, en vertu de laquelle, si l'on prend la moyenne des valeurs que reçoit, durant un temps assez court τ, la composante, parallèle à une direction donnée, de la vitesse en un point fixe, cette moyenne est indépendante du temps dans le cas d'un mouvement dit permanent, graduellement variable d'un instant à l'autre dans celui d'un mouvement non permanent, et, dans tous les cas, fonction continue des coordonnées du point considéré. »

Il indique à la page suivante que « si u_1, υ_1, w_1 désignent, à l'époque t, les composantes de la vitesse », les composantes de la vitesse moyenne locale (u, υ, w) sont respectivement (cf. [59], page 26) :

$$\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} u_1\,\mathrm{d}t, \qquad \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} \upsilon_1\,\mathrm{d}t, \qquad \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} w_1\,\mathrm{d}t$$

en précisant que (cf. [59], page 28)

> « ces intégrations *[temporelles]* pourront évidemment se faire sous les signes $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$, et u_1, υ_1, w_1, se trouveront ainsi remplacés par leurs moyennes locales u, υ, w, dans le calcul desquelles des instants infiniment courts sont sans importance. »

Boussinesq définit ainsi un opérateur mathématique dont il fixe une propriété importante, car indispensable à l'établissement des équations locales du « mouvement moyen ». Cet opérateur correspond à une sorte de *lissage temporel local*, ou de *moyenne temporelle sur un temps court*, qui n'est pas, au sens strict, la moyenne temporelle classique d'un signal stationnaire dans le temps qui, elle, est définie sur un temps asymptotiquement infini :

$$< F >_T = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

Avec cet outil, Boussinesq s'attaque à son objectif, qui est d'établir les équations du mouvement pour (cf. [59], p. 26) :

> « un fluide fictif dont les vitesses auraient u, υ, w pour composantes suivant les axes, en chaque point et à chaque instant, c'est-à-dire dont les mouvements vrais seraient exactement les mêmes que les mouvements moyens du liquide considéré. »

Il lui faut donc en premier lieu exprimer l'accélération du mouvement de ce « fluide fictif ». Partant de l'expression de la composante instantanée de l'accélération suivant x en formulation eulérienne (cf. [59], p. 28) :

$$u'_1 = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + u_1\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \upsilon_1\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}y} + w_1\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}z}$$

il argumente que (cf. [59], p. 29) :

> « Les rapides variations subies d'un instant à l'autre par les six quantités u_1, υ_1, w_1, $\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}y}$, $\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}z}$ ne sont affectées que d'une périodicité très-irrégulière et doivent être, en général, tellement indépendantes les unes des autres que, si, après avoir remplacé chacune de ces quantités par sa valeur moyenne (obtenue en faisant abstraction des moments où il y aurait discontinuité), augmentée d'un terme alternativement positif et négatif, on développe les trois expressions, les produits deux à deux de ces termes n'aient aucune raison de se trouver plus souvent positifs que négatifs et soient nuls en moyenne. »

Grâce à ces considérations,[21] Boussinesq conclut que :

---

[20] Une première rédaction de ce grand travail a fait l'objet d'une lecture à l'Académie le 15 avril 1872.

[21] Les considérations en question sur une compensation statistique des fluctuations amènent à annuler toutes les « tensions de Reynolds ». S'agissant des contraintes normales, l'argument est manifestement irrecevable. En revanche, sur l'axe de symétrie d'un écoulement turbulent, il permet effectivement de justifier que la contrainte de cisaillement turbulent $\overline{u\upsilon}$ est nulle. Peut-être est-ce cette seule région et cette seule contrainte que Boussinesq a en tête pour justifier ses conclusions ? La suite de son mémoire pourrait donner matière à le penser, car il signale lui-même que son argumentation pourrait être mise en défaut dans la région comprise entre la surface libre et le plan de vitesse maximum de l'écoulement de canal plan, mais ajoute (cf. [59], p. 31) « *que ce fait se produirait seulement dans une région relativement peu étendue et presque toujours négligeable* ».

« les composantes, suivant les trois axes coordonnés, de l'accélération moyenne en un point s'expriment généralement, en fonction des vitesses moyennes locales et de leurs dérivées, comme si les mouvements étaient bien continus. »

En notant alors u', υ' et w' les composantes de l'accélération moyenne, soit

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \; ...etc.\; \upsilon', ...\; etc.\; w'$$

le bilan de quantité de quantité de mouvement moyen s'exprime par (cf. [59], p. 53) :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}T_3}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}z} + \rho X = \rho u', \\ \frac{\mathrm{d}T_3}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}z} + \rho Y = \rho \upsilon', \\ \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}z} + \rho Z = \rho w' \end{cases}$$

où les effets de l'agitation turbulente sont intégralement reportés dans les forces de surfaces dont les composantes sont données par (cf. [59], p. 46) :

$$(12) \quad \begin{cases} N_1 = -p + 2\varepsilon\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad N_2 = -p + 2\varepsilon\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}y}, \quad N_3 = -p + 2\varepsilon\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}, \\ T_1 = \varepsilon\left(\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}\right), \quad T_2 = \varepsilon\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right), \quad T_3 = \varepsilon\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}x}\right) \end{cases}$$

Au final, Boussinesq en arrive à la conclusion suivante :

« Ces expressions (12) sont isotropes et ne diffèrent de celles que Navier a données pour représenter les frottements développés dans les mouvements bien continus des fluides, qu'en ce que le coefficient ε doit dépendre en chaque point, non-seulement de la température et peut-être de la pression p, mais encore et surtout de l'intensité de l'agitation moyenne qui s'y trouve produite. »

Cette présentation de l'étude de Boussinesq permet d'attester qu'il est le premier à proposer un modèle ouvert[22] d'équations régissant le seul mouvement moyen d'un écoulement turbulent. Dans la suite de son mémoire, il s'attache à donner des expressions du coefficient des « frottements intérieurs » ε afin de fermer le modèle.
Elle montre également qu'il n'est pas historiquement correct de présenter cette fermeture comme une schématisation explicite des tensions de Reynolds. En effet, la notion de contrainte de turbulence, ayant son origine dans la non-linéarité des termes d'advection moyennés, n'est pas formellement identifiée et encore moins explicitée par Boussinesq, mais implicitement prise en compte dans une formulation directe d'un modèle d'équations régissant le mouvement moyen.

Cette remarque est une première inférence de la nécessité de distinguer la *moyenne des équations* et les *équations du mouvement moyen*.

4.2.2. Osborne–Reynolds 1895

Dans l'article *On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion* publié en 1895, Reynolds ancre son étude sur « les bases géométriques de la méthode d'analyse utilisées dans la théorie cinétique des gaz ». Il part donc de l'idée que la question du traitement en moyenne des équations du mouvement d'un fluide peut être envisagée en adaptant (cf. [10], p. 125)

« les définitions et bases mathématiques sur lesquelles se fonde la méthode analytique de distinction des mouvements moléculaires [*molar motions*] et d'agitation thermique [*heat motions*] dans la théorie cinétique de la matière. »

À cet effet, il commence par transposer le vocabulaire, en posant les équivalences figurant dans le Tableau 1.

• **Vitesse moyenne d'ordre microscopique** Selon Reynolds (cf. [10], p. 126), cette notion repose sur

« l'hypothèse que la composante, dans n'importe quelle direction particulière, de la vitesse d'une molécule peut être réduite en une composante moyenne de vitesse (soit u) qui est la vitesse moyenne des composantes de toutes les molécules du voisinage immédiat, et une vitesse relative (soit ξ) qui est la différence entre u et la composante de vitesse de la molécule. »

De cette hypothèse, relativement claire, Reynolds déduit une conséquence assez surprenante dans sa proposition finale (même référence) :

« La composante de vitesse moyenne (u) de toutes les molécules dans le voisinage d'un point quelconque P ne peut être que la moyenne des composantes de vitesse de toutes les molécules dans un certain domaine (S) entourant P… u et ses dérivées sont à considérer comme des fonctions continues de la position de P, lesquelles fonctions peuvent varier d'un point à l'autre, même à l'intérieur de S ; de sorte que u n'est pas censée représenter la composante moyenne de vitesse du système intérieur à S, mais la vitesse moyenne au point P. »

[22] Au sens où le modèle comprend plus d'inconnues que d'équations.

Tableau 1
Correspondance entre natures de mouvements aux échelles microscopique et macroscopique respectivement, selon Reynolds [10].

Méso(macro)-scopique		Microscopique
Mouvement turbulent moyen	$\rightleftharpoons$	Mouvement moléculaire moyen
(« *mean molar motion* or	$\rightleftharpoons$	(« *molar motion* or
MEAN MEAN MOTION »)	$\rightleftharpoons$	MEAN MOTION »)
Mouvement d'agitation turbulent	$\rightleftharpoons$	Mouvement d'agitation moléculaire
(« *relative molar motion* or	$\rightleftharpoons$	(« *relative motion* or
RELATIVE MEAN MOTION »)	$\rightleftharpoons$	HEAT MOTION »)

• **Vitesse moyenne d'ordre mésoscopique** Reynolds débute son étude par l'observation suivante (cf. [10], p. 133) :

« Dans tous les cas que je connaisse, aucune définition très stricte [*des composantes*] u, v, w, telles qu'elles figurent dans les équations du mouvement n'a été avancée. Elles sont habituellement définies comme les vitesses d'une particule au point (x, y, z) du fluide, ce qui pourrait signifier qu'elles sont les composantes effectives des vitesses de la matière passant en chaque instant au point, ou qu'elles sont les vitesses moyennes de toute la matière d'un certain domaine entourant le point, ou qui passe en ce point pendant un intervalle de temps. »

Cette réserve posée, Reynolds poursuit (cf. [10], p. 134) :

« quels que puissent être à chaque instant les mouvements de la matière à l'intérieur d'un domaine spatial fixe S, si l'on désigne par u, v, w les composantes des vitesses en un point, les composantes des vitesses prises sur S s'exprimeront par

$$\overline{u} = \frac{\Sigma(\rho u)}{\Sigma\rho} \;\&c., \;\&c., \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Alors, si $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ sont tenues, à chaque instant, pour les vitesses de x, y, z, centre de gravité instantané de la matière à l'intérieur de S, la composante de la quantité de mouvement du centre de gravité peut se mettre sous la forme :

$$\rho u = \rho\overline{u} + \rho u' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

où u' est le mouvement de la matière, relativement à des axes se déplaçant à la vitesse moyenne, au centre de gravité de la matière interne à S. Puisqu'un domaine S de taille et de forme données peut être défini en tout point x, y, z, d'un domaine spatial indéfiniment plus grand, de sorte que x, y, z, soit le centre de gravité de la matière intérieure à S, le mouvement dans le plus grand espace peut être divisé en deux systèmes distincts de mouvement, dont $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ représentent un mouvement moyen en chaque point et u', v', w', un mouvement au même point, relatif au mouvement moyen en ce point. »

Reynolds ajoute que (même référence) :

« Néanmoins, pour que $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ puissent représenter réellement le mouvement moyen, il est nécessaire que $\Sigma(\rho u')$, $\Sigma(\rho v')$, $\Sigma(\rho w')$ sommés sur tout le domaine S, pris en un point quelconque, soient nuls. »

Il semble important de se rapporter à ces écrits de Reynolds pour éviter certaines interprétations abusives.

1) Le changement d'ordre entre mouvements d'échelles microscopique et mésoscopique n'apparaît pas avoir été conceptualisé par Reynolds au sens « moderne » du milieu continu.
2) La notion de moyenne qui, à échelle du mouvement moléculaire, ne représente pas la moyenne du « système intérieur au domaine S » devient, à l'ordre du continu, celle de « la matière à l'intérieur de S », ramenée au centre de gravité.
3) La moyenne de Reynolds n'est ni une moyenne temporelle, ni une moyenne d'ensemble ou statistique, ni même une moyenne spatiale *stricto sensu* opérant sous conditions d'homogénéité. Comme pour Boussinesq, il s'agit d'un opérateur permettant de procéder à une sorte de « lissage spatial local ».
4) L'opération de moyenne définie par Reynolds repose sur une sommation de quantité de mouvement pondérée par la masse volumique, laquelle est usuellement considérée comme une « moyenne de Favre » de nos jours [60].

• **Dynamique du mouvement moyen** Contrairement à Boussinesq, qui prend le terme d'advection des équations de la dynamique sous la forme transport — $U_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_i)$ —, Reynolds part de la forme conservative — $\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_i U_j)$ — (cf. [10], p. 131) :

$$\left.\begin{aligned}
\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= -\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p_{xx}+\rho uu)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(p_{yx}+\rho uv)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(p_{zx}+\rho uw)\right\}\\
\rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p_{xy}+\rho vu)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(p_{yy}+\rho vv)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(p_{zy}+\rho vw)\right\}\\
\rho\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= -\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p_{xz}+\rho wu)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(p_{yz}+\rho wv)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(p_{zz}+\rho ww)\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

En introduisant la décomposition (cf. [10], p. 140)

$$u=\overline{u}+u', \qquad v=\overline{v}+v', \qquad w=\overline{w}+w' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

où la vitesse moyenne est telle que définie plus haut, il fait directement apparaître les termes de corrélations entre fluctuations de vitesse dans les équations du mouvement moyen.
Pour autant, sa démonstration n'est pas très explicite sur le passage à la moyenne des équations instantanées.[23] Il se contente des simples indications suivantes (cf. [10], p. 141) :

« Puisque u, v, w sont des fonctions continues de x, y, z, alors $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ et u', v', w' sont des fonctions continues de x, y, z. Et comme ρ est supposé constant, les équations de continuité pour les deux systèmes de mouvement sont (*sic*)

$$\frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}\overline{w}}{\mathrm{d}x}=0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}w'}{\mathrm{d}z}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

où les deux systèmes de mouvement doivent satisfaire les conditions aux limites, quelles qu'elles puissent être.

Ensuite, en posant $\overline{p}_{xx}$, &c., pour les valeurs moyennes des contraintes prises sur l'espace S_1, et $p'_{xx}=p_{xx}-\overline{p}_{xx}$ et en définissant S_1 tel que les variations spatiales de $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ soient approximativement constantes sur cet espace, nous avons, posant $\overline{u'u'}$, &c., pour les valeurs moyennes des carrés et produits des composantes du mouvement d'agitation, pour les équations du mouvement moyen

$$\left.\begin{aligned}
\rho\frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}t} \;&=\; -\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\overline{p_{xx}}+\rho\overline{u}\overline{u}+\rho\overline{u'u'}\right) \;+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\overline{p_{yx}}+\rho\overline{u}\overline{v}+\rho\overline{u'v'}\right)\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left.+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\overline{p_{zx}}+\rho\overline{u}\overline{w}+\rho\overline{u'w'}\right)\right\}\\
\&c. \;&=\; \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \&c.\\
\&c. \;&=\; \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \&c.
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

qui sont les équations du mouvement moyen. »

Si l'équation (15) n'est peut-être pas établie avec toute la rigueur souhaitable, elle permet en revanche à Reynolds de dégager une analogie formelle qui sera à l'origine de l'interprétation physique des corrélations doubles de vitesse, en terme de contraintes qui portent aujourd'hui son nom (cf. [10], p. 147) :

« Si au lieu d'inclure les seuls effets du mouvement d'agitation sur le mouvement moyen tels qu'exprimés par p_{xx}, &c., les effets du mouvement fluctuant sont aussi inclus en posant $\overline{p_{xx}}+\overline{\rho u'u'}$ pour p_{xx}, &c., et $\overline{p_{yz}}+\overline{\rho w'v'}$ pour p_{yz}, &c., dans les équations (15) [...], les équations (15) du mouvement moyen deviennent identiques aux équations du mouvement (1). »

En définitive, on peut retenir de l'étude de Reynolds[24] que :

1) le mouvement turbulent d'un fluide peut être décomposé en un système de deux mouvements : (i) un mouvement moyen et (ii) un mouvement d'écart à ce dernier ;
2) la vitesse du mouvement moyen est définie par une opération de sommation spatiale locale de quantité de mouvement pondérée par la masse volumique ;
3) la décomposition du mouvement amène à poser, pour chaque composante de la vitesse, une relation de la forme $u=\overline{u}+u'$, avec $\overline{u'}=0$ et $\overline{u^2}=\overline{u}^2+\overline{u'^2}$, en considérant $\overline{u}$ et u' comme des fonctions continues ;
4) la décomposition précédente est formellement étendue aux contraintes de pression et de viscosité ;

[23] Les équations du mouvement instantané formulées avec la décomposition de vitesse ne figurent pas dans sa publication. Reynolds ne donne que les équations moyennes du mouvement moyen *mean mean motion* et les équations aux fluctuations *relative mean motion*, obtenues en soustrayant les équations du mouvement moyen à celles du mouvement instantané.

[24] L'article de Reynolds ne se réduit pas aux seuls éléments sur la moyenne et sur l'équation de la dynamique du mouvement moyen considérés ici. Il contient également — et principalement — des considérations énergétiques tout à fait remarquables, mais qui n'entrent pas dans le champ de la présente étude. En revanche, on n'y trouve aucun élément venant corroborer la déclaration de von Kármán rappelée en introduction de cette section, cf. § 4.1.

5) l'équation de la dynamique du mouvement moyen est déduite des équations du mouvement instantané après introduction des décompositions précédentes, mais sans que soit explicitée une notion d'*opérateur de moyenne* applicable aux équations, ni les règles opératoires qui s'y rattachent ;
6) en raison d'une formulation conservative des équations de départ, les termes issus, en moyenne, des non-linéarités advectives apparaissent « nativement » sous forme de contraintes additionnelles.

4.2.3. Hendrik Antoon Lorentz 1897 & 1907

En 1907, Hendrik Antoon Lorentz publie l'article *Über die Entstehung turbulenter Flüssigkeitsbewegungen and über den Einfluss dieser Bewegungen bei der Strömung durch Röhren* (« Sur la formation de mouvements turbulents d'un fluide et sur l'influence de ces mouvements en écoulement en conduite ») [15]. Il s'agit d'une version révisée et améliorée de sa publication de 1897 *Over den weerstand dien een vloeistofstroom in eene cilindrische buis ondervindt* (« Sur la résistance d'un fluide circulant dans un tube cylindrique »).
C'est sans doute à cet article que remonte l'utilisation systématique du qualificatif « turbulent » pour désigner les mouvements d'agitation dans un écoulement de fluide.

Après avoir étudié la question de la stabilité de l'écoulement et l'instauration du régime turbulent, Lorentz aborde celle de la formulation des équations, en prolongement des travaux de Boussinesq et de Reynolds, notamment.
Il débute par un rappel de la notion de moyenne en relation avec le mouvement principal (cf. [15], p. 58) :

« Pour définir précisément ce terme de mouvement principal, nous introduisons pour u, v, w, p et pour toute autre grandeur φ certaines moyennes. Celles ci peuvent être définies de différentes façons. On peut, par exemple, après avoir sélectionné un intervalle de temps spécifique τ, calculer la moyenne $\overline{\varphi}$, en chaque point (x, y, z) du champ et à tout instant t par la relation

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{\tau} \int_{t-\frac{1}{2}\tau}^{t+\frac{1}{2}\tau} \varphi \, \mathrm{d}t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Il poursuit (cf. [15], p. 59) :

« Une autre méthode est de prendre un élément de droite s de longueur l centré autour du point considéré P, en adoptant pour grandeur

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{l} \int \varphi \, \mathrm{d}s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

où l'intégration se fait sur la distance l. Ou prendre autour de P un domaine fermé de taille S et calculer en intégrant sur le domaine,

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{S} \int \varphi \, \mathrm{d}S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

»

Lorentz ne se limite pas à la définition d'*opérations de moyennage de fonctions de l'écoulement*, mais s'attache également à préciser les propriétés mathématiques permettant d'envisager leur extension au titre d'*opérateur de moyenne s'appliquant aux équations du mouvement* (même référence) :

« Il apparaît que les valeurs moyennes sont elles-mêmes des fonctions du temps et des coordonnées du point pour lesquelles elles ont été calculées, et qu'il résulte de nos définitions que

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}, \qquad \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}, \qquad \text{etc. »}$$

Il ajoute que ces formules s'étendent à des dérivées croisées entre variables d'espace et de temps, et que, puisque (cf. [15], p. 60) « les valeurs moyennes sont elles-mêmes des fonctions de x, y, z, t, on peut à nouveau en prendre les valeurs moyennes », avec dans ce cas, la moyenne du produit $\overline{\varphi}\psi$ égale à $\overline{\varphi}\,\overline{\psi}$.

Il passe alors à l'essentiel du problème qui est (même référence) « d'établir les relations qui peuvent être appelées équations différentielles pour le mouvement principal. À cet effet, on utilise les valeurs effectives de la vitesse et de la pression

$$u = \overline{u} + u' \quad v = \overline{v} + v' \quad u = \overline{w} + w' \quad p = \overline{p} + p'$$

où, dans les expressions ci-dessus, $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, $\overline{p}$ se rapportent au mouvement principal et u', v', w', p' au mouvement turbulent. »

Les règles suivantes s'appliquent (même référence) :

$$\overline{u'} = 0, \quad \overline{v'} = 0, \quad \overline{w'} = 0, \quad \overline{p'} = 0,$$
$$\overline{u^2} = \overline{u}^2 + \overline{u'^2}, \quad \overline{uv} = \overline{u}\,\overline{v} + \overline{u'v'}$$

Lorentz établit alors (même référence) les « équations applicables au mouvement global »[25] (*entsprechenden Gleichungen fur die Gesamtbewegung*) sous la forme :

$$\rho\left[\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \frac{\partial\{(\overline{u})^2\}}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u}\,\overline{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u}\,\overline{w})}{\partial z}\right] = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \quad \text{usw.} \quad (38)$$

avec

$$\left.\begin{aligned} X_x &= 2\mu\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} - \rho\overline{u'^2}, \\ X_y &= \mu\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x}\right) - \rho\overline{u'v'}, \\ X_z &= \mu\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial x}\right) - \rho\overline{u'w'}, \\ &\text{usw.} \end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ (37)$$

Tout en notant que ces expressions sont bien conformes à celles établies par Reynolds, Lorentz franchit un pas de plus dans leur interprétation physique, en identifiant les termes additionnels dûs à l'agitation turbulente à des contraintes (cf. [15], p. 61) :

« ce sont en quelque sorte de nouvelles tensions résultant du mouvement turbulent. »

4.2.4. Lewis Fry Richardson, 1921

En 1921 et 1922, Lewis Fry Richardson signe deux publications, dans lesquelles il livre des avancées majeures sur deux points fondamentaux d'ordre mathématique et statistique de l'approche « en moyenne » de la turbulence. Ils concernent :

– l'interprétation statistique des tensions de Reynolds,
– les règles algébriques d'utilisation de l'opérateur.

• ***Interprétation statistique des tensions de Reynolds*** Cette interprétation figure dans l'article *Some Measurements of Atmospheric Turbulence* [53], que Richardson publie en 1921. Elle procède d'une analyse lagrangienne de la dispersion d'un marqueur depuis un point source placé à l'origine des coordonnées, telles des bouffées de fumée sortant d'une pipe (the scattering of smoke puffs... [which] emerge from a pipe at the origin of the co-ordinate).
Au bout d'un intervalle de temps τ, le marqueur se trouve en un point P, de coordonnées X, Y, H. Pour τ suffisamment petit, il pose $v_X = \frac{X}{\tau}$ et $v_H = \frac{H}{\tau}$ pour les deux composantes respectives de la vitesse.
En répétant n fois l'expérience, les différentes positions du marqueur se disperseront en un nuage de points, conduisant à définir des valeurs moyennes en tant que moyennes d'ensemble, soit

$$\overline{v}_X = \frac{\overline{X}}{\tau} = \frac{1}{\tau\, n}\sum X; \qquad \overline{v}_H = \frac{\overline{H}}{\tau} = \frac{1}{\tau\, n}\sum H$$

Dans ces conditions, la tension $-\rho\overline{v'_X v'_X}$ s'écrit

$$-\rho\overline{v'_X v'_X} = -\rho\overline{(v_X - \overline{v}_X)(v_X - \overline{v}_X)} = -\frac{\rho}{\tau^2 n}\sum(X - \overline{X})(X - \overline{X}) = -\rho\frac{\sigma_X^2}{\tau^2}$$

où σ_X est l'écart type de la distribution des abscisses des points.
Plus généralement, les tensions de Reynolds s'expriment, selon Richardson, par des corrélations entre composantes des vecteurs représentant les écarts de position à la moyenne des points d'un nuage de dispersion relatif à une même source.

• ***Règles algébriques de l'opérateur de moyenne*** Ce point est traité par Richardson dans son ouvrage *Wheather prediction by numerical process* [45], publié en 1922. En p. 95, il y introduit la décomposition du mouvement turbulent en ces termes :

« Supposons que la distribution réelle soit remplacée par une qui soit lissée [*smoothed one*], que nous notons par un symbole surligné. Ainsi, pour toute quantité A, nous avons
$A = \overline{A} + A'$, où A' est l'écart.

[25] Il s'agit bien des équations du mouvement moyen.

L'algèbre subséquente repose sur les suppositions suivantes, dont aucune n'est strictement vérifiée, mais qui toutes tendent à devenir des approximations acceptables si les diversités [de valeurs] sont suffisamment nombreuses et aléatoires. Ces suppositions deviendraient exactes s'il était possible de choisir un intervalle de lissage qui pourrait être tenu comme infinitésimal pour la distribution lissée, tout en étant infiniment grand vis-à-vis des diversités.[26] »

À partir de ces considérations, Richardson énonce ([45], p. 96) les cinq règles[27] s'appliquant à cet opérateur de « lissage » :

« (i) La valeur lissée est inchangée par un second lissage

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

ce qui entraîne $\overline{A'} = 0$.

(ii) La valeur lissée du produit entre un écart et une valeur lissée est nulle

$$\overline{\overline{A}B'} = 0$$

(iii) Le lissage ne modifie pas un produit de valeur lissées

$$\overline{\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$$

(iv) La valeur lissée d'un coefficient différentiel est égale au coefficient différentiel de la valeur lissée

$$\overline{\frac{\partial A}{\partial B}} = \frac{\partial}{\partial B}\overline{A} \text{ »}$$

4.2.5. Keller & Friedmann 1925

Au premier congrès international de mécanique appliquée, qui s'est tenu à Delft en 1925, Keller, avec son maître Friedmann [62], proposent la formulation suivante, reprise de Kampé de Fériet [63], de la moyenne d'une fonction $f(y,s)$ variable dans l'espace et dans le temps :

$$\overline{f}(x,t) = \frac{1}{16\,T A_1 A_2 A_3} \int_{t-T}^{t+T} \int_{x_1-A_1}^{x_1+A_1} \int_{x_2-A_2}^{x_2+A_2} \int_{x_3-A_3}^{x_3+A_3} f(x,s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s$$

Cette formule peut être vue comme une extension composée des opérateurs de moyenne temporelle (Boussinesq) et spatiale (Reynolds).

4.2.6. Johannes Martinus Burgers 1929

Entre 1929 et 1940, Burgers va signer une série de sept articles sous le titre *On the application of statistical mechanics to the theory of turbulent fluid motion* [64–70].

Dès le premier, il aborde la question d'une approche probabiliste de l'agitation turbulente (cf. [64], p. 416) dans sa section « *2. Description of the field of flow ; the probability hypothesis* ».

Cette question est discutée par Burgers en référence à l'écoulement entre plans parallèles, de sorte que la formulation mathématique en est simplifiée en raison des conditions particulières de bidimensionnalité spatiale et de stationnarité temporelle du champ moyen. Nous la reprenons ici, en nous efforçant de n'en retenir que les traits génériques et en supprimant, autant que possible, les développements se rapportant par trop à la situation considérée.

Burgers inscrit son analyse dans le cadre d'une approche discrète (cf. [64], p. 417) :

« Pour en venir à présent au traitement statistique de notre problème, nous commençons par ramener le champ des variables continues x, y à un champ discontinu. Nous introduisons un réseau quadratique de points espacés de ε, que nous supposons pour le moment être très petit devant la "longueur d'onde minimum" du mouvement relatif [*fluctuant*]. Les points seront distingués par les indices k_1 (pour les colonnes, parallèles à l'axe y) et k_2 (pour les lignes, parallèles à l'axe des x) [...] Le nombre total de points distribués sur une longueur L sera désigné par N.

Nous ne considérons plus que les N valeurs ψ_k[28] que prend la fonction ψ à un instant donné en chaque point du réseau...

Ensuite nous introduisons un espace à N dimensions, de coordonnées $\xi_1 \ldots \xi_N$ et considérons le point $\xi_1 = \psi_1$, $\xi_2 = \psi_2 \ldots \xi_N = \psi_N$. Ce point nous donne une représentation de l'état du mouvement relatif [*fluctuant*] à l'instant choisi. Quand, au cours du temps, le mouvement relatif change, le point va se déplacer dans le ξ-espace. On peut imaginer les différents états du mouvement relatif pour une série d'instants séparés d'un même intervalle de temps, disons M, dans le ξ-espace. Ces points peuvent s'accumuler dans des régions du ξ-espace qui correspondent à des états du champ qui se présentent assez souvent, alors que leur densité sera moindre dans des parties relatives à des fréquences d'occurrence plus réduite. Il est clair que lorsque M est suffisamment grand, des valeurs moyennes en fonction du

[26] Ces considérations s'appliquent aussi bien au temps qu'à l'espace. Richardson ne choisit donc pas le type de lissage temporel ou spatial. Il englobe les deux dans un même traitement, suivant en cela la présentation de Lamb dans la quatrième édition de son traité [61].

[27] Ces règles seront reformulées dans un contexte mathématique plus rigoureux par Kampé de Fériet (voir ci-après § 4.2.10). Elles seront qualifiées par lui de « règles de Reynolds ». Il eût été plus conforme à l'antériorité historique de les qualifier de « règles de Richardson ».

[28] Dans l'analyse de Burgers, il s'agit de la fonction courant, avec laquelle il exprime les composantes u et v de la vitesse. Il suppose donc implicitement que le caractère bidimensionnel de l'écoulement s'applique aux fluctuations turbulentes. Bien qu'inexact, ce point n'entache que l'expression formelle du raisonnement, sans répercussion sur la pertinence de sa ligne directrice.

temps de quantités du mouvement relatif liées à ψ peuvent tout aussi bien être calculées à partir des points distribués sur le ξ-espace.

Pour formuler cela plus clairement, nous divisons le ξ-espace en cellules à N-dimensions de volume $\mathrm{d}\Omega$, aux dimensions petites par rapport aux valeurs de ξ ou ψ qui sont à prendre en considération, mais qui, d'autre part, contiennent chacune beaucoup de points [...] Les nombres de points dans ces cellules sont notés $n_1, n_2, n_3 \ldots$; nous posons :

$$n = \nu M = f\, M\, \mathrm{d}\Omega$$

de sorte que

$$\sum \nu = 1, \quad \text{ou :} \quad \int f\, \mathrm{d}\Omega = 1$$

(nous pouvons, selon le cas, écrire soit une sommation, soit une intégration). Si maintenant X est une fonction de ψ_k (ou ξ_k), la valeur moyenne de X peut être obtenue par :

$$\overline{X} = \sum \nu X = \int f X \mathrm{d}\Omega$$

Nous présumons à présent que la distribution des points dans les cellules, *i.e.* les quantités ν ou la fonction f, peut être calculée comme la distribution la plus probable, tenant compte seulement de quelques conditions générales.[29] »

Cette dernière formule de Burgers anticipe la définition de la moyenne statistique d'un élément aléatoire X en tant qu'espérance mathématique de cet élément, avec, pour densité de probabilité, la fonction f.

4.2.7. Isakson 1930

Au troisième congrès international de mécanique appliquée, qui s'est tenu à Stockholm en 1930, Burgers, dans la discussion faisant suite à la communication générale d'Oseen sur la turbulence, présente une définition originale de la moyenne, due à Isakson. Selon Kampé de Fériet [63], cette moyenne repose sur un opérateur de filtrage opérant sur la décomposition en fréquences harmoniques au sens de l'intégrale de Fourier de la fonction à moyenner, soit

$$f(t) = \int_0^{+\infty} A(\lambda)\cos[\lambda t - \alpha(\lambda)]\, \mathrm{d}\lambda$$

Ainsi,

$$\overline{f}(t) = \int_E A(\lambda)\cos[\lambda t - \alpha(\lambda)]\, \mathrm{d}\lambda$$

où l'intégration porte sur un ensemble E de fréquences conservées après filtrage.

4.2.8. Geoffrey Ingram Taylor (1935) & Theodore Theodore von Kármán (1937)

En 1935, Taylor publie une série de quatre articles [48], [71], [72], et [73], sous le titre *Théorie statistique de la turbulence*. Cette dénomination pourrait donner à penser que la moyenne employée par Taylor est une moyenne « statistique ». En fait, Taylor ne définit pas l'opérateur qu'il utilise pour introduire les corrélations de vitesse au cœur de sa théorie. Cependant, dans le premier papier [48], il explique que sa théorie des corrélations publiée dans son article *Diffusion par mouvements continus* [74] de 1921 s'applique à la présente étude. Or, dans cette référence, seules des moyennes spatiale et temporelle sont envisagées.

Les travaux de Taylor seront prolongés et étendus par von Kármán [75] en 1937, à l'occasion de sa publication *Les fondamentaux de la théorie statistique de la turbulence*. Dans cet article, il précise la notion de moyenne en ces termes

« Les valeurs moyennes considérées peuvent être variables dans le temps. Cependant on supposera que les fluctuations sont très rapides au point que les valeurs moyennes pourront être prises sur un certain intervalle de temps, sur lequel la variation des valeurs moyennes est négligeable. Les valeurs moyennes sont des "fonctions lentement variables" du temps. »

Ainsi, en dépit de la référence explicite à une *théorie statistique*, ces deux auteurs ne font pas appel à une définition statistique de la moyenne.

[29] Par exemple, annulation de la vitesse à la paroi d'un solide fixe.

4.2.9. Dedebant, Schereschewsky & Wehrlé 1934, 1938

Dans une note à l'Académie des sciences de 1934 [76], Dedebant, Schereschewsky et Wehrlé ouvrent leur propos par la déclaration suivante :

« Il paraît d'un grand intérêt d'adopter, dans la théorie de la turbulence, un point de vue résolument *statistique*, c'est-à-dire de poser une *décoordination* complète dans l'espace et dans le temps du mouvement perturbé. »

Ils explicitent ensuite clairement l'objectif théorique général de cette nouvelle approche statistique :

« Toute propriété du mouvement turbulent ne doit alors se traduire que par une *relation entre les paramètres statistiques des lois de distribution des vitesses perturbées* autour d'un instant donné, pour différents points du fluide et non entre les vitesses elles-mêmes en ces points. »

Dans une série de quatre conférences présentées à l'Institut d'histoire des sciences à partir de 1935, Dedebant et Wehrlé [77] adoptent, pour étudier les mouvements de fluides à grande échelle (atmosphère), la démarche inverse à celle de Maxwell avec la théorie cinétique des gaz qui, partant du microcosme, vise à reconstruire des notions de la matière à l'ordre du continu. Pour le météorologiste, la situation consiste, à l'inverse, à aller des grandes vers les petites échelles et, dans ce cas ([77], p. 61) « la *notion d'échelle* entraîne *l'emploi de la statistique*, car on est assuré de disposer du « chaos » sous-jacent nécessaire ».

L'édification d'une théorie probabiliste reste une entreprise difficile, car devant tenir compte (cf. [77], pp. 69–70) :

« – *de l'échelle variable dans l'espace* (turbulence au voisinage d'une paroi)...
– *du changement d'échelle dans le temps* (passage du régime laminaire au régime turbulent)...
– *d'un champ d'échelle complexe*... Il y a un « spectre » de « longueurs d'onde » et il importe de faire la théorie de ce spectre comme elle a été faite pour le rayonnement. »

Selon Du Vachat [78], la mention explicite d'une définition de moyenne statistique par Dedebant et Wehrlé remonte au 6 avril 1938, lors de leur conférence sur *La mécanique des fluides turbulents fondée sur des concepts statistiques* [79], qu'ils présentent à l'Institut d'histoire des sciences.[30] En début de leur article, après avoir passé en revue les travaux antérieurs, ils ajoutent (cf. [79], p. 152) :

« C'est l'école française[31] qui a accompli la révolution qui s'imposait en créant les notions *d'échelle* et *d'étage de perturbations* directement inspirées des mouvements de l'atmosphère, et en adoptant le *point de vue statistique pur*. »

En se limitant au cas du régime permanent, la conception statistique revient, avec leur notation, à calculer la moyenne par l'intégrale de Lebesgue (cf. [79], p. 157)

«

$$\overline{\xi}_f = \int\limits_{(f)} \xi_f F_f(\xi/P)\,\mathrm{d}\xi_f$$

où ξ_f est la « valeur courante » de l'élément f et $F_f\,\mathrm{d}\xi_f$ la fréquence avec laquelle elle se manifeste, $F_f(\xi/P)$ est la « fonction de distribution » de l'élément f — *considéré seul* — au point P. Le domaine d'intégration (f) est un espace abstrait correspondant à la coordonnée ξ_f et renfermant toutes les valeurs *possibles* de f en P. »

Cette définition est étendue à la corrélation double sous la forme

$$\text{«}\quad \overline{\xi_f \eta_g} = \int\limits_{(f,\,g)} \xi_f \eta_g G_{f,\,g}(\xi, \eta_g/P)\,\mathrm{d}\xi_f\,\mathrm{d}\eta_g \quad\text{»}$$

Dans la suite de l'article, Dedebant et Wehrlé abordent des éléments d'analyse des fonctions aléatoires (dérivation en moyenne quadratique, commutation des opérateurs de moyennage et de dérivation), avant d'établir les « équations aux valeurs probables » (équivalent des équations de Navier–Stokes moyennées, mais déduites de celles relatives « aux fonctions de distribution d'une fonction aléatoire et de sa dérivée »).

Cet aperçu, très rapide et partiel, des travaux de Dedebant et Wehrlé permet néanmoins de remettre en lumière leurs recherches, d'entrevoir l'importance déterminante de leur contribution et leur rôle de pionniers dans le développement de la théorie des fonctions aléatoires appliquée aux mouvements des fluides atmosphériques.

[30] Le texte de cette conférence a été publié dans le numéro 4 de la revue "Thalès" pour les années 1937–1939. Il y est fait référence à des articles publiés en 1940, ce qui fait que ce texte aurait pu être remanié après sa présentation en conférence.

[31] Dedebant et Wehrlé ne donnent pas d'indication sur les représentants de cette "école française". On peut penser qu'elle comprend les co-auteurs de certains de leurs articles, tels José Moyal et Philippe Schereschewsky. Elle pourrait également inclure Kampé de Fériet et Kiveliovitch, au titre de membres de la Commission de la turbulence atmosphérique.

4.2.10. Kampé de Fériet 1934–1957

Il semble que Kampé de Fériet[32] se soit intéressé, en premier lieu, à la question de savoir qu'elles étaient les règles mathématiques que devait vérifier un opérateur de moyenne pour pouvoir déduire les équations de Reynolds de celles de Navier–Stokes, en continuant de considérer vitesse et pression comme des fonctions *certaines* de l'espace et du temps. Dans son article de 1951 [81], il fait remonter ses premiers travaux aux années 1934 et 1935 [82,83].

• **Axiomes de Reynolds** — Les règles en question, qu'il suggère d'appeler « axiomes de Reynolds », sont au nombre de quatre [81] :

- règle R_1 : $\overline{f+g}=\overline{f}+\overline{g}$;
- règle R_2 : $\overline{af}=a\overline{f}$, où a est une constante ;
- règle R_3 : $\overline{\overline{f}g}=\overline{f}\,\overline{g}$;
- règle R_4 : $\overline{\lim f_n}=\lim \overline{f_n}$.

Ces règles reprennent largement celles déjà formulées antérieurement, mais pour Kampé de Fériet, le point essentiel est d'en préciser la pertinence mathématique, et en premier lieu de définir la classe de fonctions à laquelle elles s'appliquent.

• **Moyenne temporelle** — Prenant le cas d'une fonction *certaine* du temps $f(t)$, Kampé de Fériet [81] fait observer que l'opérateur apparenté à celui de Boussinesq, soit

$$\overline{f}(t)=\frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} f(s)\,\mathrm{d}s$$

ne vérifie pas la conséquence immédiate de la règle R_3 obtenue en faisant $g=1$, à savoir $\overline{\overline{f}}=\overline{f}$. (Il suffit de considérer le contrexemple $f(t)=\cos(\omega t)$.)

Par passage à la limite $T\to\infty$, les axiomes de Reynolds sont vérifiés, mais les moyennes doivent alors être indépendantes du temps.

• **Filtrage spectral** Kampé de Fériet considère ensuite une fonction *certaine* d'une variable d'espace réelle $f(z)$ qu'il suppose continue, définie, de valeur nulle à l'origine et intégrable [81]. Cette fonction a pour transformée de Fourier

$$f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(\mathrm{i}\,\lambda\, z)\alpha(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

où λ désigne le nombre d'onde.
Dans le cas d'une fonction liée à l'agitation turbulente, Kampé de Fériet envisage la définition suivante de la moyenne

$$\overline{f}(z)=\int_{-\eta}^{+\eta}\exp(\mathrm{i}\,\lambda\, z)\alpha(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

où η est un nombre d'onde caractéristique du mouvement d'agitation.
En d'autres termes, cette moyenne revient à filtrer les tourbillons en fonction de leur taille, en éliminant tous ceux de « diamètre » inférieur à $2\pi/\eta$.
Avec cette définition, très directement inspirée de celle d'Isakson, Kampé de Fériet fait remarquer que la règle R_3 n'est pas satisfaite en général.

• **Mécanique statistique** En 1939, Kampé de Fériet signe deux articles préfigurant ses futures orientations de recherches d'après guerre. Le premier s'intitule *Les fonctions aléatoires stationnaires et la théorie statistique de la turbulence homogène* [84] et le second *Sur le spectre de la turbulence homogène* [85]. De fait, à partir de 1947 et jusqu'en 1957, il publiera de nombreux articles approfondissant les questions mathématiques d'analyse harmonique des fonctions aléatoires et de leurs applications à la turbulence.[33] Lors de son séjour académique à l'université du Maryland entre 1950 et 1951, il fera le tour de ces

[32] Pour une présentation très documentée des travaux de Kampé de Fériet, on pourra consulter l'article de Demuro [80].

[33] Dans le chapitre qu'il signe dans l'ouvrage de Blanc-Lapierre et Fortet de 1953, Kampé de Fériet fait explicitement référence aux travaux de pionnier de Philippe Wehrlé et Georges Dedebant *« c'est à* Ph. Wehrlé *et* G. Dedebant *que revient le mérite d'avoir, dans une série de travaux parus de 1935 à 1940, explicitement et fortement attiré l'attention sur la nécessité d'utiliser, dans la théorie statistique de la turbulence, les résultats de la théorie des fonctions aléatoires qui se développait rapidement à cette époque. C'est sous leur impulsion que nous avons, en particulier, nous-mêmes appliqué pour la première fois à la turbulence homogène les résultats que* A. Kolmogoroff, A. Khintchine *et* N. Wiener *venaient de publier.»*

sujets dans une série de conférences présentées à l'Institut de dynamique des fluides et de mathématiques appliquées de cette université. Ce matériel scientifique sera mis en forme par Shih-I. Pai et publié en anglais en 1954 et 1955 [86–89]. Entretemps, en 1953, une rédaction en français fera l'objet du chapitre XIV de l'ouvrage de Blanc-Lapierre & Fortet [90].

• **Fonction aléatoire** En tant que mathématicien, une première préoccupation de Kampé de Fériet est d'établir une transposition rigoureuse des concepts de la mécanique statistique de Gibbs sur un ensemble discret, à la turbulence, en tant que phénomène relevant de la mécanique du milieu continu. Comme il l'exprime en 1957, cette transposition est un enjeu majeur de l'étude théorique de la turbulence (cf. [63], p. 65) :

« L'introduction de la notion de fonction aléatoire ne constitue pas seulement une novation de langage ; elle est la clé qui nous ouvre la généralisation que nous recherchions. En effet, dans la mécanique statistique de GIBBS, l'espace des phases Ω était, jusqu'à présent, une partie d'un espace euclidien à un nombre fini de dimensions. La notion de fonction aléatoire nous montre la voie : le fait que Ω a un nombre fini de dimensions ne joue aucun rôle essentiel ; il suffit, pour construire la théorie, de partir d'un espace de probabilité $(\Omega,\ S,\ \mu)$; aucune propriété spéciale concernant le nombre de dimensions ou la structure (métrique) n'est imposée. »

D'après Kampé de Fériet (cf. [91], p. 201)

« La définition générale d'une fonction aléatoire est la suivante :

Soit X un ensemble abstrait, $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mu)$ un espace de probabilité c'est-à-dire : (a) un ensemble abstrait Ω ; (b) une σ-algèbre $\mathcal{F}$ de parties de Ω ; (c) une mesure, fonction non négative complètement additive, μ définie sur toute partie $\Lambda \in \mathcal{F}$ telle que :

$$\mu(\Omega) = 1$$

Une fonction aléatoire sur X est une fonction $f(x,\ \omega)$ à valeurs réelles sur $X \times \Omega$, μ-mesurable en ω pour tout $x \in X$...
Une fonction aléatoire est donc simplement un ensemble de fonctions de x (les échantillons), dépendant d'un paramètre ω, que l'on suppose choisi, au hasard, dans Ω selon la loi de probabilité : $\quad Prob[\omega \in \Lambda] = \mu(\Lambda) \quad \lambda \in \mathcal{F}$. »

• **Moyenne statistique** Comme l'exprime Kampé de Fériet en 1957, la moyenne statistique se pose en rupture avec les conceptions antérieures de la notion (cf. [91], p. 200) :

« Dans toutes les définitions de la moyenne considérées jusqu'ici, nous avons toujours supposé qu'une moyenne $\overline{f}$ était calculée sur une seule fonction f bien déterminée ; mais la Mécanique Statistique, sous la forme classique que lui a donnée J. W. GIBBS, introduit un type tout à fait différent de moyenne. »

Cette moyenne est en effet calculée, non pas en référence à la (ou les) variable(s) spatio-temporelle(s) dont dépend la fonction, mais sur l'ensemble de tous les états possibles du système, ou, en d'autres termes sur toutes les « réalisations » possibles de la fonction aléatoire.
Mathématiquement, cela s'exprime, selon Kampé de Fériet, de la façon suivante (cf. [91], p. 202) :

« *La moyenne de la fonction aléatoire $f(x,\omega)$ au point x* est donnée, par définition, par l'intégrale :

$$\overline{f}(x) = \int_{\Omega} f(x,\omega)\,\mathrm{d}\mu$$

en tout point x pour lequel celle-ci a un sens, c'est-à-dire tel que :

$$f(x,\omega) \in L(\Omega)$$

Il faut noter que f dépend, en général, de x, mais jamais de ω. »

Ces quelques citations ne sont qu'un faible aperçu des contributions de Kampé de Fériet au développement mathématique de la théorie des fonctions aléatoires appliquée à l'étude de la turbulence. Elles remettent néanmoins en lumière le rôle majeur de cette figure de la turbulence.

4.3. Limitations physiques de la moyenne statistique

Bien que rigoureuse, la définition mathématique de la moyenne statistique ne la rend pas, pour autant, aisément accessible à une détermination pratique directe. En suivant la théorie, sa mesure nécessiterait, en effet, d'accéder à l'ensemble de toutes les réalisations aléatoires d'un écoulement turbulent défini par un même jeu de conditions initiales et aux imites. Une tentative fut donc envisagée par Bass pour éviter de recourir à « l'arsenal statistique » par l'introduction d'une classe particulière de fonctions *certaines* (cf. § 4.3.1).

Cette tentative ne fit pas école car, pour la classe en question,[34] il existe des théorèmes dits ergodiques, ramenant le calcul de la moyenne statistique à celui d'une moyenne temporelle (champ permanent) ou spatiale (champ homogène).

[34] Il s'agit des fonctions stationnaires au second ordre ; voir, par exemple, Chassaing [92], p. 61.

En revanche, lorsque de telles hypothèses ergodiques ne sont pas vérifiées, l'usage généralisé de la moyenne statistique se révèle poser à nouveau des questions de pertinence et de signification physique de «l'objet moyenné». Deux illustrations vont en être données, avec l'intermittence de frontière libre (§ 4.3.2) et l'incidence de structures cohérentes à comportement quasi périodique (§ 4.3.2).

4.3.1. Fonction pseudo-aléatoire de Bass

En tout début des années 1950, Jean Bass s'intéresse aux applications de la mécanique aléatoire à l'hydrodynamique [93]. Il regroupera plus tard l'essentiel de ses contributions dans deux articles en 1973 [94] et 1974 [95].
Ses travaux sur une théorie non probabiliste de la turbulence sont motivés par les considérations suivantes, qu'il livre en introduction de sa présentation au Colloque sur la mécanique de la turbulence de Marseille en 1962 : elles sont toujours d'actualité (cf. [96], p. 459).

> «Les théories habituelles de la turbulence sont essentiellement probabilistes. Elles renoncent à expliquer la complication du mouvement turbulent, et se contentent d'affirmer que l'agitation turbulente est de nature statistique. Par ailleurs, il est généralement admis que le mouvement turbulent obéit aux équations de l'hydrodynamique, c'est-à-dire, dans les cas des fluides incompressibles, aux équations de Navier–Stokes. On sait qu'il est presque impossible, à l'aide de ces deux bases de départ, de construire une théorie cohérente de la turbulence.»

Bass pose donc une approche alternative visant à chercher des «*solutions turbulentes*» des équations de Navier-Stokes, au sens de (même référence, p. 460) «fonctions ordinaires, et non aléatoires, [que l'on] calculera en premier lieu, pour en déduire les moyennes ou les distributions qui sembleront dignes d'intérêt».
Selon la définition qu'il en donne dans un article de 1959, la notion de fonction pseudo-aléatoire peut s'envisager comme suit (cf. [97], p. 3) :

> «« Soit $f(t)$ une fonction complexe de la variable réelle t, bornée, nulle pour $t<0$. Soit M l'opérateur de valeur moyenne défini par
>
> $$M(\ )=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T(\ )\,\mathrm{d}t$$
>
> On suppose que les moyennes
>
> $$Mf(t),\qquad \gamma(h)=M\overline{f(t)}\,f(t+h)$$
>
> existent.[35] La seconde s'appelle *fonction de corrélation* de $f(t)$. On vérifie facilement qu'elle est prolongeable aux valeurs négatives de t, et que
>
> $$\gamma(-h)=\overline{\gamma}(h)$$
>
> Ceci posé, on dit que $f(t)$ est une fonction pseudo-aléatoire si les conditions suivantes sont vérifiées :
>
> $$Mf(t)=0$$
>
> $\gamma(h)$ est une fonction continue de h ;
>
> $$\gamma(0)\neq 0,\qquad \gamma(\infty)=0$$
>
> On peut démontrer que, d'après cette définition, $f(t)$ n'est pas la transformée de Fourier–Stieltjes d'une fonction à variation bornée. Si, en particulier, cette fonction était continue, $\gamma(0)$ serait nul. Si c'était une fonction de sauts, $\gamma(\infty)$ ne serait pas nul, et $f(t)$ serait presque périodique. »

C'est par ces deux remarques que se justifie, selon Bass, l'étude originale, mais restée sans suite, de cette nouvelle classe de fonctions certaines en vue de l'application à la turbulence.

4.3.2. Moyenne pondérée de l'intermittence

Une première situation interrogeant la représentativité physique de la moyenne statistique est apparue avec les travaux de Corrsin [17] en 1943 sur la structure de la frontière libre d'écoulements turbulents (voir § 2.2.5, b). Dans ce cas, la vitesse instantanée en un point présente des fluctuations d'amplitudes et de fréquences élevées (au passage de bouffées turbulentes), se détachant, par épisodes, sur une signature lentement évolutive de faible amplitude (mouvement irrotationnel externe). La moyenne temporelle, sur un temps aussi long soit-il, d'un tel phénomène fortement instationnaire[36] ne peut servir d'estimateur de la moyenne statistique, laquelle ne correspond à aucune réalité physique (voir, par exemple, la note de bas de page n° 42 plus loin).

---

[35] La grandeur surlignée désigne la quantité conjuguée.

[36] L'instationnarité est ainsi particulièrement nette pour les moments du second ordre en fluctuation de vitesse, *i.e.* $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ ... Les hypothèses d'ergodicité ne sont donc plus vérifiées à cet ordre.

Pour redonner sens à un traitement en moyenne dans ce cas, il faut discriminer les épisodes turbulents et non-turbulents et moyenner sur les temps respectifs de chacun d'eux. Townsend [98] est le premier, en 1949, à proposer une telle procédure. Il introduit à cet effet une fonction indicatrice d'intermittence δ de valeur unité sur toute la durée d'un épisode turbulent et nulle le reste du temps. Alors (cf. [98], p. 454) :

« « la vitesse moyenne dans la direction Oy du fluide turbulent est donnée par $\overline{V} = \overline{\upsilon\delta}/\overline{\delta}$ ».

Ce faisant, Townsend est aussi le premier à introduire un nouvel opérateur[37] dit de « *moyenne conditionnelle pondérée par l'intermittence* ».

4.3.3. Moyenne en référence de phase

Comme nous l'avons vu (cf. § 2.2.6), de nombreuses observations ont révélé qu'en dépit d'un comportement chaotique d'ensemble, l'agitation turbulente pouvait présenter des éléments d'organisation à grande échelle, liés notamment à l'existence de structures à caractère spatio-temporel quasi périodique. La moyenne statistique s'avère alors inapte à rendre compte d'une telle organisation, car la régularité déterministe d'un signal parfaitement périodique et d'amplitude constante, mais de phase aléatoire, échappe à toute moyenne de ce type opérant sur l'ensemble de toutes les phases possibles.[38]

Il semble qu'il ait fallu attendre 1970 pour que Hussain et Reynolds [99] proposent un opérateur adapté à l'identification « en moyenne » du caractère périodique de champs turbulents. La « *moyenne de phase* » introduite à cet effet est définie par

$$\mathbf{A}\left(x_j, t-\theta\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} a\left(x_j, t-\theta_n\right)$$

où $a\left(x_j, t-\theta_n\right),\ j = 1$ à N représente une collection d'échantillons pour chacun desquels un critère temporel a permis d'effectuer un recalage de phase θ_n sur une même valeur de phase à l'origine θ.

5. Déterminisme statistique

Nous présentons dans cette dernière section quelques réflexions sur le contenu cognitif du traitement en moyenne des équations de Navier–Stokes en turbulence. Toujours en référence à une perspective historique, il s'agit de dégager quelques traits généraux du cadre explicatif introduit par un tel traitement.

Cela nous conduira, en premier lieu, à revenir sur la question du sens des équations moyennées dans l'espace physique (§ 5.1.1). Nous examinerons ensuite les questions relatives à une physique probabiliste de la turbulence (§ 5.2).

5.1. Sens physique des équations moyennées

5.1.1. Moyenne et déterminisme

Quelle qu'en soit la définition précise, la notion de moyenne, adossée au syndrome de turbulence, conduit, tout bien considéré, à un contournement de la perte de déterminisme expérimental[39] qui se rattache aux détails aléatoires de l'agitation.

Cette question de la perte de déterminisme des écoulements de fluides surgit dès l'Antiquité, comme le révèle le fragment 91 d'un écrit d'Héraclite [101] :

> « On ne peut pas entrer une seconde fois dans le même fleuve, car c'est une autre eau qui vient à vous ; elle se dissipe et s'amasse de nouveau ; elle recherche et abandonne, elle s'approche et s'éloigne. »

Un tel constat apparaît *a priori* totalement inconciliable avec le principe fondamental des sciences expérimentales tel que défini par Claude Bernard dans son *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale* [102] :

> « L'esprit de l'homme ne peut concevoir un effet sans cause, de telle sorte que la vue d'un phénomène éveille toujours en lui une idée de causalité. »

Il est permis de considérer que ce jugement traduit avant tout une opinion d'ordre philosophique, très proche de celle exprimée par Leibniz dès 1734 [103]. Mais, chez Claude Bernard, il conduit à postuler une conséquence qui, elle, semble scientifiquement incontournable :

---

[37] La fonction indicatrice d'intermittence est construite sur un signal temporel, de sorte que la moyenne afférente (symbole surligné) est une moyenne temporelle. La question de l'existence mathématique d'une telle moyenne n'est pas tranchée par Townsend.

[38] La régularité périodique du détachement tourbillonnaire derrière un cylindre à section circulaire pour des nombres de Reynolds compris entre 45 à 160 et sous des conditions limites stationnaires est paradoxalement le premier signe de « désorganisation » de l'écoulement, par l'irruption du caractère « naturellement» instationnaire de l'écoulement, c'est-à-dire non forcé de l'extérieur par des conditions aux limites variables dans le temps. Dans ce cas, la désorganisation réside entièrement dans la phase aléatoire du déclenchement du phénomène. Si l'on détermine un champ moyen de lignes de courant sans référence à l'alternance de phase, on aboutit à une configuration symétrique autour du plan passant l'axe du cylindre et parallèle à la direction de la vitesse du fluide à l'infini.

[39] Comme mentionné en début de cette section, la discussion de la question du déterminisme en turbulence n'est pas centrée ici sur des considérations fondamentales, *i.e.* touchant à l'essence même du phénomène. Pour plus d'éclaircissements sur cet aspect du sujet, on pourra consulter l'ouvrage collectif, publié sous la direction de Marcel Lesieur, *Turbulence et Déterminisme* [100].

« le principe absolu des sciences expérimentales est un déterminisme nécessaire et conscient dans les conditions des phénomènes. »

5.1.2. Le concept d'écoulement moyen

L'idée qu'en dépit des irrégularités de l'agitation, des relations « en moyenne » puissent être établies dans des écoulements turbulents, est présente, comme nous l'avons vu, dans les travaux d'origine de Saint-Venant [6] et Boussinesq [59], notamment. En langage moderne, et en référence à un signal délivré par un capteur sensible aux fluctuations, elle s'exprime, par exemple selon Frisch [56], en disant que

« bien que le détail des propriétés apparaisse imprévisible, ses propriétés statistiques sont reproductibles. »

La question de la « reproduction » de telles propriétés statistiques d'un écoulement turbulent donné mérite cependant quelques éclaircissements.

Il faut noter tout d'abord qu'il ne se trouvera aucune expérience dans laquelle les champs de vitesse et de pression d'un écoulement turbulent, fut-il stationnaire en moyenne, s'identifieront à chaque instant aux seules valeurs moyennes mesurées, *i.e.* sans la moindre fluctuation.

Ensuite, si l'on prend en considération ces fluctuations, il existera une infinité de réalisations d'un *même écoulement*[40] fournissant des valeurs moyennes identiques.

Ces simples remarques suffisent amplement à justifier le jugement de Boussinesq selon lequel l'écoulement turbulent, ayant pour valeurs les valeurs moyennes, est celui d'un *fluide fictif* (cf. [59], p. 26).

En résumé, et d'un point de vue physique, raisonner sur le « mouvement moyen » consiste à travailler sur une « réalité mesurable », expérimentalement reproductible, sans que ce « mouvement moyen » puisse être assimilé à un « objet physique », *i.e.* pourvu d'une « réalité existentielle ».[41]

5.1.3. Écoulement moyen et équations moyennées

La question que nous examinons ici est très généralement passée sous silence dans la plupart des exposés didactiques du sujet, où il est considéré « naturel » — et donc tacitement admis — que tout traitement en moyenne des équations de Navier–Stokes fournisse un modèle représentatif de l'évolution d'un « objet moyen » ayant une réalité physique distinctement identifiable.

Outre le fait déjà mentionné qu'aucune expérience ne peut jamais permettre d'observer « la réalisation de l'écoulement moyen » parmi toutes le réalisations possibles d'une configuration turbulente donnée, il n'existe, au plan théorique, aucun théorème assurant que, sans changement d'échelle, la « moyenne d'un système » définisse un « système moyen »[42] doté d'une existence physique propre.

Cette remarque préliminaire est souvent occultée par une présentation « rapide » du résultat remarquable de la formulation, par Reynolds lui-même, des équations moyennées [10]. Examinons donc brièvement ce qu'il en est en reprenant simplement, en notations modernes, les développements de Reynolds[43] :

- équations initiales « instantanées » (cf. [10], p. 131, eq. (1))

$$\rho \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij} + \rho\, u_i u_j\right) \tag{5.1}$$

- équations finales « moyennées » (cf. [10], p. 141, eq. (15))

$$\rho \frac{\mathrm{d}\overline{u}_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\sigma}_{ij} + \rho\, \overline{u_i}\overline{u}_j + \rho\, \overline{u_i' u'}_j\right) \tag{5.2}$$

Dans le texte de Reynolds, ces dernières équations sont directement qualifiées d'équations du mouvement moyen, *« equations of the mean-mean-motion »*, selon sa terminologie, et sont établies avec toute la rigueur souhaitée, comme cela a déjà été mentionné, par Horace Lamb dans son ouvrage *Hydrodynamics*, en sa quatrième édition.[44]

Les aspects mathématiques relatifs à l'établissement de ces équations ont été discutés notamment par Richardson en 1922 (cf. § 4.2.4) et Kampé de Fériet (cf. § 4.2.10). Voyons donc ce qu'il en est des interprétations fournies par différents auteurs.

[40] La question de la répétabilité expérimentale consiste à définir des conditions initiales et aux limites considérées comme "identiques à l'échelle de l'opérateur". En régime turbulent elles ne garantissent en aucune manière la reproduction à l'identique du phénomène à toutes les échelles d'agitation.

[41] Il s'agit là d'une spécificité du traitement statistique appliqué à la turbulence, qui tient au fait qu'il s'effectue sans changement d'ordre des échelles significatives de l'agitation et du mouvement moyen.

[42] Jouant à pile ou face avec une pièce normale, et en affectant la valeur $+1$ à la réalisation du côté « pile » et -1 à celle du côté « face », la moyenne statistique (arithmétique) sur l'ensemble d'un très grand nombre de réalisations est sensiblement égale à 0. Aucune expérience ne permettra jamais d'observer cette valeur. Cet exemple, bien que très grossier, voire caricatural, n'en est pas moins révélateur de ce qui se passe dans le traitement en moyenne plus sophistiqué des réalisations d'un écoulement turbulent.

[43] Chez Reynolds, les équations sont écrites en composantes pour un mouvement sans forces extérieures de volume.

[44] La première édition de cet ouvrage [104] date de 1895, année même de la publication de l'article de Reynolds [105]. En p. 579, Lamb y fait néanmoins mention, la lecture de l'article ayant été donnée le 24 mai 1894.

• *Reynolds, 1895* — Les équations (5.1) et (5.2) sont formellement identiques, si l'on ajoute aux forces de surface des premières les contraintes dues, en moyenne, à l'agitation turbulente, figurant dans les secondes, cf. [10], p. 147.

• *Lamb, 1916* — Même constat formel que celui de Reynolds (cf. [61], p. 661)

« Il est à remarquer que les équations dynamiques [du mouvement moyen] ont la même forme que les équations exactes (5.2), à condition d'introduire les composantes de contraintes additionnelles. »

• *Richardson, 1922* — Première tentative d'interprétation de l'équation (5.2) dans le cadre d'une analyse de « mécanique du fluide turbulent » (cf. [45], p. 66) :

« En hydrodynamique et aérodynamique il est d'usage de parler des mouvements de "portions définies" du fluide... La majuscule D dans D/Dt est couramment utilisée pour désigner un temps de différentiation en suivant un tel élément. On a l'habitude d'ignorer le fait que les molécules entrent et sortent en permanence de l'élément bien "précis". Quand nous avons affaire à des tourbillons, les échanges internes sont bien plus visibles, car les délimitations marquées par de la fumée s'estompent rapidement et se dispersent. Pourtant, il faut trouver un moyen de spécifier un élément qui suive le mouvement *moyen*. L'idée fondamentale semble être la suivante... Traçons une sphère dans le fluide. Supposons le rayon aussi grand que nécessaire pour inclure un nombre considérable de tourbillons, mais pas davantage. Supposons que la sphère se déplace de telle sorte que la quantité de mouvement totale du fluide à l'intérieur soit égale à la masse de ce même fluide multipliée par le vecteur vitesse du centre de la sphère. Le centre est ainsi qualifié de "point se déplaçant dans le mouvement moyen". Comme un symbole surligné représente des valeurs moyennes, $\overline{\mathrm{D}}/\overline{\mathrm{D}}t$ peut convenir pour noter une différentielle en suivant le mouvement moyen. »

En désignant par m une composante quelconque du vecteur instantané de quantité de mouvement, Richardson fait ensuite remarquer que (cf. [45], p. 97) $\overline{\left(\frac{\mathrm{D}m}{\mathrm{D}t}\right)}$ n'est pas égal à $\frac{\overline{\mathrm{D}}\,\overline{m}}{\overline{\mathrm{D}}t}$ en raison de termes supplémentaires dans la première expression. Puis il précise (cf. [45], p. 98) :

« Comme Reynolds l'a montré, ces termes additifs expriment des forces de volume produites par un système de contraintes tourbillonnaires. Mais si la densité varie, les composantes des contraintes ne sont plus exactement de la forme $-\rho\cdot\overline{v'_X v'_X}$, *etc.*, donnée en premier par Reynolds pour un fluide incompressible. »

Ces citations permettent d'apprécier la profondeur d'analyse de Richardson. Sa réflexion touche en effet au cœur de la question, en identifiant tous les éléments clés du raisonnement.

Pour conclure sur l'interprétation de la "dynamique moyenne du fluide turbulent", et en partant de l'analyse de Richardson, on peut retenir les points suivants.

1) Une interprétation classique de la dynamique d'un fluide *à l'échelle du milieu continu* fait référence à un bilan de quantité de mouvement sur un domaine matériel, d'ordre mésoscopique, délimité par une surface fluide évoluant au sein de l'écoulement à la vitesse locale de ce dernier en tout point coïncidant de cette surface. Il s'agit d'une approche de type lagrangien, à masse conservative, où la variation de quantité de mouvement à échelle mésoscopique s'exprime par[45]

$$\frac{\mathrm{D}(\rho U_i)}{\mathrm{D}t} \equiv \frac{\partial(\rho\, U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\, U_i U_j)}{\partial x_j} \tag{5.3}$$

Cette approche « ignore la réalité physique » des échanges moléculaires à travers la surface limite du domaine. Mais, *par changement d'échelles microscopique–mésoscopique*, les conséquences de ces échanges sont comptabilisées, au titre de transferts par agitation moléculaire, à l'aide de schématisations des flux, considérées comme lois constitutives du milieu continu. Leurs contributions[46] figurent au second membre d'une équation dont le premier n'est autre que l'expression ci-dessus.

2) Pour « transposer » cette interprétation au cas d'un écoulement turbulent isovolume[47] de fluide à masse volumique constante (ρ_0), il peut être envisagé de dresser un bilan de quantité de mouvement *moyen* ($\rho_0\overline{U}_i$) sur un domaine macroscopique dont on suit le *déplacement* par le *seul mouvement moyen* ($\overline{U}_j$). À échelle mésoscopique locale, la variation de cette *quantité de mouvement moyen* dans le *mouvement moyen* s'exprime alors par la dérivation particulaire

$$\frac{\overline{\mathrm{D}}(\rho_0\,\overline{U}_i)}{\overline{\mathrm{D}}t} \equiv \frac{\partial(\rho_0\,\overline{U}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_0\overline{U}_i\overline{U}_j)}{\partial x_j} \tag{5.4}$$

3) Au sens du bilan qui vient d'être défini, *tout se passe comme si* l'effet de l'agitation turbulente se traduisait par l'introduction de forces de surface (contraintes) additionnelles. Ce résultat remarquable tient à l'expression conservative (en

[45] Dans toute cette discussion, il faut entendre une quantité de mouvement par unité de volume.

[46] Dans le cas usuel où la schématisation de ces termes est de type gradient, ces contributions apparaissent sous forme de laplacien.

[47] On entend par là toute situation où le champ de vitesse est solénoïdal, c'est-à-dire à divergence nulle. En régime turbulent, si cette condition est vérifiée « instantanément », alors les champs de vitesse moyenne et d'agitation sont, chacun séparément, isovolumes. Rappelons que l'équation de continuité montre que la condition div$\vec{V}=0$ n'implique pas généralement $\rho = C\,t$ dans tout le champ, d'où l'hypothèse complémentaire de masse volumique constante.

divergence) du terme de transport porteur de *toute la non-linéarité* du problème par le produit tensoriel des vitesses, d'où l'unique contribution des flux dûs aux mouvements d'agitation $\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_0\,\overline{u'_i u'_j})$.

4) L'absence de découplage d'échelles entre celles de tous les mouvements d'agitation et celle du mouvement moyen soulève de sérieuses questions quant à la possibilité d'interprétation des schématisations de ces flux au titre de « lois constitutives du fluide turbulent » ; voir, par exemple, Lumley [106].
Elle pose également un problème d'interprétation physique de ces contraintes nouvelles liées à des déplacements du fluide sur des distances du même ordre que celles du « volume particulaire », en considération de l'expression de la variation (5.4). En régime turbulent, il n'est plus envisageable de procéder par passage à la limite mésoscopique, comme dans le cas laminaire. Une alternative possible peut découler d'une analyse statistique de la dispersion des positions de particules issues d'une même source d'émission, qui a été également avancée par Richardson lui-même [53], cf. § 4.2.4.
5) En régime turbulent de fluide à masse volumique variable, le terme d'advection génère des non-linéarités supplémentaires, comme le mentionne également Richardson. Dans ce cas, la question de l'interprétation de la *moyenne des équations* de la dynamique du fluide au sens d'une dynamique d'*un mouvement moyen* retrouve tout son sens. Elle peut faire l'objet de différentes propositions, qui ne sont pas détaillées ici (voit notamment les développements de Favre [60,107–109], à partir de 1958, ainsi que les propositions alternatives par Ha Minh et al. [110] en 1982 et P. Chassaing [111], en 1985).

5.2. La question d'une physique probabiliste de la turbulence

Comme nous l'avons vu, la notion de moyenne tient une place centrale dans toute démarche à visée prédictive en turbulence. L'approche probabiliste que nous abordons ici en constitue le prolongement naturel sur un objectif élargi.[48]
L'histoire a retenu la qualification de *statistique* pour la nouvelle orientation de cette recherche, ouverte en 1935 par Taylor [48]. De fait, si l'on considère que l'objet de la statistique est le recueil, l'analyse, la caractérisation et l'interprétation d'un ensemble de données, c'est bien en ce sens que Taylor a conçu initialement sa « théorie statistique de la turbulence ». Il en précise, en effet, l'objectif initial en ces termes (cf. [48], pp. 423–424) :

> « Dans toutes les applications des théories de longueur de mélange (“”), la longueur ℓ n'est déterminée qu'en fonction d'hypothèses plus ou moins arbitraires concernant l'effet de la turbulence sur le mouvement moyen...
> La difficulté de définir une longueur de mélange ou échelle de turbulence, sans recourir à quelque processus physique hypothétique donné, qui n'a aucune relation à la réalité [...] [*conduit*] à introduire l'idée[49] que l'échelle de turbulence et ses propriétés statistiques en général peuvent recevoir une interprétation exacte en considérant la corrélation entre vitesses en différents points du champ à un instant donné. »

Ce simple ancrage statistique de la caractérisation de l'agitation turbulente par des données objectives et mesurables sera cependant vite dépassé, par Taylor lui-même puis par von Kármán, avec l'ambition d'une visée prédictive des éléments issus d'une telle description. Ce faisant, de statistique, la théorie devient probabiliste, avec pour objectif de déterminer les propriétés *futures* de l'agitation à partir de la connaissance d'un état statistique à un temps donné, considéré comme *instant présent*.
C'est le développement de cette ligne de recherche en *déterminisme probabiliste* de la turbulence, que nous allons brièvement retracer dans cette section, à travers deux jalons historiques.

5.2.1. Le problème de fermeture

Il semble que l'on puisse faire remonter à 1938, avec l'article de Theodore von Kármán et Leslie Howarth [112], le constat de l'impossibilité d'obtenir, par un strict *traitement déductif* des équations de Navier–Stokes, un système fermé d'équations pour une chaîne de corrélations aux fluctuations de vitesse en *nombre fini* (cf. [112], p. 212).

> « Dans le cas général[50] $\partial f/\partial t$ [$f(r,t)$ *est la fonction de corrélation spatiale double de vitesse*] dépend aussi de la fonction de corrélation triple $h(r)$. Or une nouvelle équation peut être déduite des équations du mouvement pour $\partial h/\partial t$; cependant cette nouvelle équation contient des termes avec des corrélations quadruples et ainsi de suite. Ainsi, pour une valeur arbitraire du nombre de Reynolds, le problème est trop compliqué pour un traitement analytique. »

Cette remarque remet donc en question, sous un jour nouveau, l'aptitude prédictive de la voie probabiliste reposant sur un traitement *rigoureusement déductif* des équations. Elle suggère, dans le même temps, une alternative à caractère plus empirique, visant à *fermer* tout système aux moments statistiques d'ordre *fini* quelconque, en (*i*) retirant des inconnues, (*ii*) ajoutant des relations ou (*iii*) combinant les deux opérations.
Il n'est pas question de traiter ici de l'historique de cette démarche de fermeture, qui va se développer sur des équations exprimées tant dans l'espace physique que dans le domaine spectral. Nous nous contenterons de citer deux références, qui figurent parmi les premières à avoir abordé cette voie dans l'espace physique.

48 On se limite aux seuls développements conduits à partir d'équations formulées dans l'espace physique.
49 Dans son article de 1935, Taylor fait remonter cette idée à son étude sur la diffusion par mouvements continus de 1921 [74].
50 Les auteurs viennent de traiter le cas simplifié supposant le nombre de Reynolds de turbulence suffisamment petit pour pouvoir négliger les corrélations triples.

• **1940–1941 : l'hypothèse quasi normale**[51] Une première option de fermeture consiste à interrompre la hiérarchie des corrélations à un ordre n, et d'expliciter celles d'ordre $n+1$ à partir des précédentes, retenues comme inconnues principales. Il semble que deux propositions en ce sens aient été émises indépendamment par Pei Yuan Chou [113], en 1940, et Mikhail Dimitriovitch Millionschikov [114], en 1941. L'idée commune est que les moments statistiques ou corrélations aux fluctuations de vitesse d'ordre quatre peuvent être reliés à ceux d'ordre deux, par analogie avec la relation exacte qui existe dans le cas d'un processus aléatoire gaussien.[52]
Considérant alors, en situation de turbulence isotrope, la corrélation quadruple en deux points $Q_{ij,\,mn}(\overrightarrow{r},t) \equiv \overline{u_i u_j u'_m u'_n}$, cette hypothèse se traduit par (cf. Monin & Yaglom [115], p. 242, par exemple) :

$$\overline{u_i u_j u'_m u'}_n = \overline{u_i u_j} \cdot \overline{u'_m u'}_n + \overline{u_i u'}_m \cdot \overline{u_j u'}_n + \overline{u_i u'}_n \cdot \overline{u_j u'}_m$$

relation qui s'identifie à « l'hypothèse de Millionschikov » sous la forme :

$$Q_{ij,\,mn}(\overrightarrow{r},t) = Q_{ij}(0,t).Q_{mn}(0,t) + Q_{i,\,m}(\overrightarrow{r},t).Q_{j,\,n}(\overrightarrow{r},t) + Q_{i,\,n}(\overrightarrow{r},t).Q_{j,\,m}(\overrightarrow{r},t)$$

« L'hypothèse de Chou », relative quant à elle aux corrélations en un point, s'exprime par (cf. Chou & Chou [116], p. 9) :

$$\overline{u_i u_j u_m u}_n = c(\overline{u_i u_j} \cdot \overline{u_m u}_n + \overline{u_i u}_m \cdot \overline{u_j u}_n + \overline{u_i u}_n \cdot \overline{u_j u}_m)$$

dans laquelle $c = 1/2$ constitue une bonne approximation, selon son auteur.

Le bien-fondé de l'hypothèse quasi normale n'a pu être évalué du temps où elle fut émise. En 1963, Ogura [117], à partir de simulations numériques de l'évolution de la densité spectrale d'énergie en turbulence isotrope, a révélé qu'avec cette hypothèse, des valeurs négatives de l'énergie cinétique d'agitation apparaissaient au bout de temps finis lorsque les nombres de Reynolds de turbulence étaient suffisamment grands. Pour Mirabel [118], en 1969, un tel défaut ne serait cependant pas nécessairement attribuable à l'hypothèse en question, mais serait lié à la prescription initiale nulle des moments d'ordre trois (voir par exemple Mamaloukas & Mazumdar [119]).

• **1945 : la modélisation des équations de transport des corrélations** Cette seconde voie de fermeture a également été ouverte par Chou. Dans son article de 1945, il commence par reconnaître le caractère général du problème pointé par Kármán et Howarth, dans le cas de la turbulence isotrope (cf. [120], p. 38) :

> « Quand on déduit les équations différentielles pour les corrélations aux fluctuations de vitesse d'un ordre donné des équations de la fluctuation turbulente, la présence des termes d'inertie fait apparaître des corrélations de vitesses à l'ordre supérieur suivant qui sont aussi des inconnues. »

Pour aboutir à un modèle exploitable, Chou procède en trois étapes.

- La première consiste à arrêter l'ordre des corrélations retenues comme inconnues principales. Par des considérations d'ordre de grandeur, il montre que le terme de divergence des corrélations quadruples dans l'équation des corrélations triples est négligeable. Il est donc possible de s'en tenir à un système limité aux corrélations d'ordre trois.
- Ensuite, il s'agit de traiter les termes inconnus de corrélations entre fluctuations de vitesse et de pression qui figurent dans les équations restantes. En exploitant l'expression de la fluctuation de pression en solution de l'équation de Poisson, il établit une schématisation des corrélations « pression–vitesse » n'impliquant que les inconnues principales de sa formulation.
- La dernière étape concerne les termes de décroissance de turbulence, également inconnus dans les équations aux corrélations doubles et triples, pour lesquels Chou envisage une schématisation algébrique.

Au final, Chou inscrit sa démarche dans un cadre mathématique rigoureux et aboutit à un système fermé de vingt équations non linéaires aux dérivées partielles « dont les solutions sont très difficiles à déterminer ». Le « modèle de Chou » de 1945, tout comme l'hypothèse quasi normale, n'a pas fait l'objet d'évaluation du temps de sa formulation. Mais il a ouvert la voie à tout une approche nouvelle de modélisation de la turbulence par fermeture des équations de transport en un point, laquelle prit son essor au cours des années 1960–1970, grâce au développement concomitant des méthodes numériques et outils informatiques propres à les résoudre dans des cas d'intérêt pratique.

[51] Cette hypothèse est également qualifiée d'approximation d'annulation du cumulant d'ordre quatre, voir note suivante.

[52] La loi de densité de probabilité gaussienne, encore qualifiée de *loi normale*, a pour expression la fonction continue à deux paramètres, moyenne (μ) et écart type (σ) :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

La variable aléatoire x ne possède que deux moments indépendants, μ et σ. En particulier, le moment d'ordre trois est nul et pour une variable centrée ($\mu = 0$), le moment d'ordre quatre s'exprime par $\overline{x^4} = 3\,\overline{x^2}\cdot\overline{x^2}$. L'approximation *quasi gaussienne* ne retient que la dépendance du moment d'ordre quatre, sans imposer l'annulation du moment d'ordre trois. En terme de cumulant, elle correspond bien ainsi à l'annulation du cumulant d'ordre quatre.

5.2.2. Du paradoxe de l'approche statistique

Nous retiendrons deux formulations de ce paradoxe, selon que l'agitation turbulente est prise dans sa totalité (formulation forte) ou seulement en partie (formulation faible).

• *Formulation forte* – Après avoir rappelé «l'imprévisibilité [de tout écoulement turbulent] sous des conditions expérimentalement accessibles», Kraichnan, en 1961, pointe le trait paradoxal de la turbulence pleinement développée, à savoir que (cf. [121], p. 4) :

> «l'extrême sensibilité de toute réalisation individuelle à de petites perturbations s'accompagne d'une insensibilité de la distribution de probabilité à la nature et à la distribution de probabilité des perturbations.»

Faute d'une telle propriété, tout traitement probabiliste de la turbulence deviendrait extrêmement complexe, voire inextricable. Pour autant, l'avantage théorique de l'argument ne vaut qu'à condition de prendre en considération l'intégralité de la description statistique.

Ainsi, par exemple, dans le cadre de la modélisation des équations aux corrélations de vitesse en un point, les fermetures exploitées en pratique se limitent au second ordre, en opérant sur les équations de transport des tensions de Reynolds. Or, les équations ouvertes à cet ordre ne comprennent pas de termes d'interaction non linéaire de la turbulence sur elle-même, lesquels ne figurent qu'à partir de l'ordre trois (cf. Chassaing [92]). Toute troncature au second ordre se traduit donc par une perte d'information au regard de la chaîne ouverte des équations aux moments des fluctuations de vitesse.

• *Formulation faible* – Selon cette seconde version, le caractère statistiquement paradoxal de l'agitation ne concerne que les petites échelles de turbulence auxquelles il est reconnu (voir par exemple Chasnov [122], p. 188) «des caractéristiques de nature universelle», alors que «les mouvements de turbulence à grande échelle sont le plus directement affectés par la source d'instabilité, variant d'un écoulement à un autre.»

Dans ce cas le découplage d'échelles du paradoxe ne s'accompagne pas nécessairement d'un découplage énergétique «étanche»entre les deux classes d'échelles ; les paramétrisations des petites échelles envisagées à l'origine dans les simulations LES[53] ont pu de ce fait révéler quelques déficiences dans certaines situations, faute de tenir compte d'un rétro-transfert d'énergie.[54]

En définitive, il apparaît que dans toute approche en fermeture statistique limitée (en chaîne finie de moments ou en classe d'échelles résolues), il est indispensable de recourir à des considérations supplétives afin de savoir comment construire un modèle qui donne l'information statistique limitée à un niveau d'intérêt visé.

5.2.3. L'approche en fonctionnelle caractéristique

D'un strict point de vue théorique, la seule façon d'intégrer l'avantage du paradoxe statistique de Kraichnan est d'envisager une approche permettant de traiter la chaîne infinie des moments pour un nombre infini de points. Le premier à avoir conçu une telle démarche est Eberhard Hopf [123], en 1952.[55]
Dans son article *Statistical Hydromechanics and Functional Calculus*, Hopf inscrit son approche dans le cadre de ce qu'il dénomme (cf. [123], p. 88) «l'hydrodynamique statistique [qui] est la théorie des solutions "typiques" des équations de Navier–Stokes». Ce qualificatif des solutions fait écho, en mécanique statistique des gaz, à la construction de certaines distributions de phases "pertinentes" sur des mouvements "typiques" de l'espace des phases. Hopf s'attache donc, en premier lieu, à introduire un espace des phases, à l'ordre du continu, pour un écoulement turbulent isovolume (cf. [123], pp. 89–90) :

> «Désignons par R une région du x-espace, $x = (x_1, x_2, x_3)$ occupé par le fluide à tout instant et soit B sa frontière. Tout champ de vitesse suffisamment régulier $u = u(x)$ défini dans $R + B$ peut être considéré comme un état instantané ou phase du fluide pourvu qu'il soit solénoïdal dans R [...] et vérifie les valeurs à la limite prescrites sur B [...] Les phases possibles $u = u(x)$ dans $R + B$ peuvent être considérées comme les points d'une fonction d'espace, l'u-espace ou espace des phases associé avec le problème d'écoulement. On le désigne par Ω. Le mouvement du fluide dans R change la phase u, donnée à $t = 0$ en une autre phase u' bien déterminée au temps t.»

La transition dans le temps d'une phase à l'autre se fait conformément aux équations de Navier–Stokes pour un fluide incompressible ($\rho = 1$) et de viscosité dynamique μ

$$u_{\alpha,\,t} + p_{,\,\alpha} = -u_\beta\, u_{\alpha,\,\beta} + \mu\, u_{\alpha,\,\beta\beta}$$

[53] Large Eddy Simulation.
[54] Backscatter.
[55] La théorie de Hopf n'a que peu pénétré la communauté des expérimentateurs comme celle des « turbulenciers» concernés par les applications pour l'ingénieur. Ce constat a au moins deux explications. La première tient à la formulation mathématique des idées de Hopf, qui, malgré son élégance, est peu familière aux communautés mentionnées. La seconde est due à la structure fonctionnelle de l'équation, dont la résolution reste, encore en 1975, problématique pour Monin & Yaglom (cf. [115], p. 750) : «Nous devons souligner que la théorie mathématique d'intégration d'équations fonctionnelles différentielles dans des espaces de dimension infinie n'a pas été établie. Même les questions d'existence et d'unicité des solutions de telles équations n'ont pas reçu à ce jour de réponses satisfaisantes.»

qui montre que (cf. [123], p. 90) « les lois de l'écoulement plus les conditions aux limites déterminent entièrement la distribution de pression ainsi que le taux de variation de la phase à partir de la phase instantanée $u = u(x, t)$ ».
Hopf introduit ensuite ce qu'il nomme une « fonction de phase », qu'il note $F(u)$, notion sur laquelle il apporte les précisions suivantes ([123], pp. 91–92) :

> « Il est important de bien saisir la portée du concept de fonction de phase. Il s'agit d'une relation qui associe une valeur (réelle ou complexe) à chaque (ou pratiquement chaque) phase u. Il faut se rappeler que u est un symbole pour tout champ de vecteur admissible $u(x)$ défini dans la partie $R + B$ de l'x-espace occupé par le fluide. Une fonction de phase est une fonctionnelle dont l'argument est tout un champ de vecteurs $u(x)$ dans $R + B$. »

Ainsi, par exemple, l'énergie cinétique instantanée du domaine R est une fonction de phase, d'expression

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_R u^2 \,\mathrm{d}x$$

Les propriétés statistiques de telles fonctions de phase se déduisent de la loi de probabilité de l'ensemble des phases d'un écoulement donné, que Hopf appelle *distribution de phases* (cf. [123], p. 91) :

> « Une distribution de phases instantanées (ou ensemble) est complètement caractérisée par sa distribution de probabilité (ou distribution de fréquence relative) dans Ω, notant $P(A)$ la probabilité que le point de la distribution de phase [...] tombe dans la partie A de l'espace des phases Ω. »

Ainsi, par exemple (même référence),

> « la moyenne d'une fonction de phase $F(u)$ relativement à une distribution de phase donnée est définie par l'intégrale au sens de Lebesgue–Stieltjes
>
> $$\overline{F} = \int_\Omega F(u) P^t(\mathrm{d}u)$$
>
> où $P^t(\mathrm{d}u)$ désigne "l'élément différentiel" de la distribution de probabilité P^t. »

Hopf introduit ensuite l'outil majeur de son développement mathématique, à savoir la « fonctionnelle caractéristique » comme « analogue de ce que la théorie des probabilités appelle la fonction caractéristique[56] d'une distribution de probabilité $P(A)$ de dimension finie. » Pour cela, il définit le produit scalaire de deux champs de vecteurs réels $y = y(x)$ et $u = u(x)$ par

$$(y,\, u) = \int_R y{\cdot}u \,\mathrm{d}x = \int_R y_\alpha\, u_\alpha \,\mathrm{d}x$$

et (cf. [123], pp. 92–93) « considère l'expression $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y,u)} = \exp(\mathrm{i}(y, u))$, dans laquelle $y(x)$ est un champ continu arbitraire dans $R + B$ tandis que $u(x)$ est une phase de fluide arbitraire dans $R + B$ (champ vectoriel admissible). La moyenne de cette fonctionnelle relativement à une distribution de phase $P^t(A)$ est notée

$$\Phi(y,\, t) = \mathrm{e}^{\overline{\mathrm{i}(y,u)}} = \int_\Omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}(y,u)} P^t(\mathrm{d}u)$$

Nous appelons Φ, qui est une fonctionnelle d'un champ vectoriel arbitraire $y = y(x)$ dans $R + B$ et une fonction de t, la "fonctionnelle caractéristique" de la distribution de phase P^t. »

Dans la section 5 de son article, Hopf donne[57] l'équation qui gouverne la fonctionnelle caractéristique Φ (cf. [123], p. 99).

[56] Si X est une variable aléatoire (v.a.) ayant pour densité de probabilité la fonction $f(x)$, la fonction caractéristique de la v.a. X est

$$\phi_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\tau\, x} f(x) \,\mathrm{d}x$$

En développant en série l'exponentielle, on a

$$\phi_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \mathrm{i}\,\tau\, x - \frac{\tau^2 x^2}{2!} + \ldots\right) f(x) \,\mathrm{d}x = 1 + \mathrm{i}\,\tau \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) \,\mathrm{d}x - \frac{\tau^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) \,\mathrm{d}x + \ldots$$

ce qui montre que $\overline{x^n} = \mathrm{i}^n \left.\frac{\mathrm{d}^n\phi}{\mathrm{d}\tau^n}\right|_{\tau=0}$, d'où le nom de fonction génératrice des moments.

[57] Hopf n'établit pas l'équation en question, mais « l'induit » d'un cas plus simple de dimension finie. Une démonstration complète peut être trouvée dans l'ouvrage de Stanisic [124], p. 243.

« La fonctionnelle caractéristique d'une distribution de phase quelconque qui évolue conformément aux lois de l'écoulement dans la région-x R vérifie l'équation

$$(19)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int_R y_\alpha(x)\left[\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_\beta(x)\,\mathrm{d}x\partial y_\alpha(x)\,\mathrm{d}x} + \mu\Delta_x \frac{\partial \Phi}{\partial y_\alpha(x)\,\mathrm{d}x} - \frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha}\right]\mathrm{d}x,$$

$$\Delta_x = \partial^2/\partial x_\beta \partial x_\beta$$

pour toute "valeur" de ses arguments, *i.e.* pour tout champ de vecteur $y = y(x)$ dans $R + B$ et tout instant $t \geq 0$ [...] Les trois termes entre crochets proviennent clairement des termes d'inertie, de viscosité et du gradient de pression. »

Finalement, Hopf ajoute (cf. [123], p. 100) :

« L'équation de Φ fournit une description différentielle directe de l'évolution d'une distribution de phase qui évolue conformément aux lois de l'écoulement. Elle est naturellement mieux adaptée aux besoins de l'hydrodynamique statistique que les équations de l'écoulement qui décrivent seulement les mouvements d'une phase individuelle. »

Nous avons tenu à faire un exposé relativement fidèle de l'approche par fonctionnelle caractéristique de Hopf, car elle constitue le développement ultime de la théorie probabiliste de la turbulence au milieu du siècle dernier, date à laquelle nous limitons la présente revue.
On peut en conclure qu'en exploitant toutes les ressources de la description statistique, le problème de l'évolution d'une mesure de probabilité relative à un champ continu de fonctions aléatoires gouvernées par les équations de Navier–Stokes est susceptible de recevoir une « formulation mathématique » complète. En revanche, sa solution reste entièrement en devenir.

6. Conclusion

Objectivement, la première conclusion qui se dégage de cette rétrospective des recherches sur la turbulence durant la première moitié du siècle dernier est la prodigieuse accélération des connaissances acquises au cours de cette période. L'émergence progressive de la notion de moyenne en est largement responsable, par ses implications structurantes des aspects descriptifs, cognitifs et prédictifs du phénomène. Pour autant, la présente revue montre que les contributions faisant référence à ces différents aspects ne s'y distribuent pas nécessairement avec les même retombées.

C'est sans doute en matière d'identification descriptive des symptômes de l'agitation par mouvements continus que l'incidence de la moyenne est la plus contrastée. Comme initiateur de la description statistique, elle a donné accès à une caractérisation de l'agitation par des paramètres directement mesurables et fait progresser considérablement la base de données expérimentales. Pour autant, de nombreuses autres propriétés de cette même agitation échappent à une telle vision statistique « classique » qui, de ce fait, et non sans quelque paradoxe, a pu en altérer l'émergence par une sorte d'« effet paradigme ».

C'est vraisemblablement sur le volet cognitif que l'incidence de la notion de moyenne est la plus nette. Elle conduit, en effet, à élucider de nombreux éléments d'un syndrome de turbulence justifiant d'envisager l'étude d'une physique unitaire du phénomène par-delà ses diverses manifestations dans une grande variété d'écoulements.

Enfin, pour autant qu'une conception déterministe à visée prédictive puisse être avancée en turbulence, la piste du traitement en moyenne des équations de Navier–Stokes et de ses prolongements probabilistes plus avancés a fait l'objet d'explorations novatrices dans le domaine physique.[58] Sans pouvoir résoudre le problème théorique, le travail dans cette direction a ouvert la voie à des méthodes prévisionnelles d'écoulements turbulents à finalité pratique et dont l'efficience ne fit que croître par la suite.

Remerciements

L'auteur tient à exprimer sa gratitude au professeur Olivier Darrigol pour avoir contribué à l'amélioration de la version préliminaire du manuscrit par sa relecture attentive et la pertinence de ses remarques. Il est également redevable à l'Institut de mécanique des fluides de Toulouse et à l'Institut supérieur de l'aéronautique et de l'espace pour lui avoir donné accès aux ressources documentaires en ligne de ces deux établissements.

Références

[1] R.P. Feynman, La nature de la physique, Éditions du Seuil, 1980.
[2] M. Lesieur, La turbulence, Presses universitaires de Grenoble, 1994.
[3] A. Favre, H. et J. Guitton, A. Lichnerowicz, E. Wolff, De la causalité à la finalité. À propos de la turbulence, Maloine, S.A., 1988.
[4] L. da Vinci, Codex Leicester (ex. Hammer).

[58] Des avancées tout aussi remarquables ont été faites dans l'espace spectral. Elles ne sont pas considérées dans la présente revue.

[5] J.P. Richter, Scritti letterari di Leonardo da Vinci – Parte 1, Sampson Low, Marston, Searle & Rivington, London, 1883.
[6] A. Barré de Saint-Venant, Sur l'hydrodynamique des cours d'eau, C. r. hebd. séances Acad. sci. 74 (1872) 570–577, 649–657, 693–701, 770–774.
[7] O. Reynolds, An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels, Philos. Trans. R. Soc. Lond. 174 (1883) 935–982.
[8] H. Bazin, Note sur la mesure des vitesses à l'aide du tube jaugeur, Ann. Ponts Chaussées xiv, 6ème sér (46) (1887) 195–229.
[9] O. Reynolds, On the Theory of Lubrication and its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil, Philos. Trans. R. Soc. 177 (1886) 157–234.
[10] O. Reynolds, On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion, Philos. Trans. R. Soc. Lond. A 186 (1895) 123–164.
[11] S.P. Langley, The internal work of wind, Smithson. Contrib. Knowl. 884 (1893) 1–23.
[12] H.L. Dryden, A.M. Kuethe, The Measurement of Fluctuations of Air Speed by the Hot-Wire Anemometer, Tech. report, NACA – Report No. 320, 1929.
[13] P.L.G. Dubuat, Principes d'hydraulique et de pyrodynamique, vérifiés par un grand nombre d'expériences faites par ordre du gouvernement - tome deuxième, Firmin Didot, Paris, 1816.
[14] A. Rateau, Expériences et théories sur le tube de Pitot et le moulinet de Woltmann, Ann. Mines xiii (9) (1898) 331–385.
[15] H.A. Lorentz, Über die Entstehung turbulenter Flüssigkeitsbewegungen and über den Einfluss dieser Bewegungen bei der Strömung durch Röhren, Abhan. Theoret. Phys. Band 1 (1907) 58–60, Version révisée de l'article "Over den weerstand dien een vloeistofstroom in eene cilindrische buis ondervindt", Amsterdam, Zittingsverslag Akad. v. Wet. 6, 1897, p. 28.
[16] G. Hagen, Über den Einflufs der Temperatur auf die Bewegung des Wassers in Röhren, Abhand. König. Akad. Wiss. Berlin Math. Kl. (1854) 17–98.
[17] S. Corrsin, Investigation of Flow in an Axially Symmetrical Heated Jet of Air, Tech. report, NACA Wartime Report ACR No. 3L23, 1943.
[18] P.S. Klebanoff, Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient, Technical Note 3178, NACA Rep. no. 1247, July 1954, 1954.
[19] S. Corrsin, L. Kistler Alan, The Free-Stream Boundaries of Turbulent Flows, Tech. report, NACA-TN-3133, 1954.
[20] G.K. Batchelor, A.A. Townsend, The nature of turbulent motion at large wave-numbers, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 199 (1057) (1949) 238–255.
[21] A.Y.-S. Kuo, S. Corrsin, Experiments on internal intermittency and fine-structure distribution functions in fully turbulent fluid, J. Fluid Mech. 50 (2) (1971) 285–319.
[22] S.J. Kline, W.C. Reynolds, F.A. Schraub, P.W. Runstadler, The structure of turbulent boundary layers, J. Fluid Mech. 30 (4) (1967) 741–773.
[23] K. Narahari Rao, R. Narasimha, M.A. Badri Narayanan, The bursting' phenomenon in a turbulent boundary layer, J. Fluid Mech. 48 (2) (1971) 339–352.
[24] F. Zöllner, J. Nathan, Léonard de Vinci – vol. ii Lœuvre graphique, Taschen, 1980.
[25] H. Bénard, Formation des centres de giration à l'arrière d'un obstacle en mouvement, C. r. hebd. séances Acad. sci. 147 (1908) 839–842.
[26] C. Camichel, P. Dupin, M. Teissié-Solier, Sur l'application de la loi de similitude aux périodes de formation des tourbillons alternés de Bénard–Kármán, C. r. hebd. séances Acad. sci. 185 (1927) 1556–1559.
[27] A. Roshko, Experiments on the flow past a circular cylinder at very high Reynolds number, J. Fluid Mech. 10 (3) (1961) 345–356.
[28] G. Brown, A. Roshko, The effect of density differences on the turbulent mixing layer, Turbulent Shear Flows – AGARD-CP-93 (Londres), 13–15 septembre 1971, Londres, pp. 23–1, 23–12.
[29] A. Fage, H.C.H. Townend, An examination of turbulent flow with an ultramicroscope, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 135 (828) (1932) 656–677.
[30] A.S. Sharma, B.J. McKeon, On coherent structure in wall turbulence, J. Fluid Mech. 728 (2013) 196–238.
[31] S. Corrsin, Some Current Problems in Turbulent Shear Flows, Tech. Report Naval Hydrodynamics Pub. 515, Naval Hydrodynamics, 1957.
[32] J.K. Ferrell, F. Richardson, K.O. Beatty Jr, Dye displacement technique for velocity distribution measurements, Ind. Eng. Chem. 47 (1) (1955) 29–33.
[33] F.R. Hama, J.D. Long, J.C. Hegarty, On transition from laminar to turbulent flow, J. Appl. Phys. 28 (4) (1957) 388–394.
[34] T. Theodorsen, Mechanism of turbulence, in: Proceedings of the Second Midwestern Conference on Fluid Mechanics, Ohio State University, 1952, pp. 1–18.
[35] J. Kim, On the Structure of Wall-Bounded Turbulent Flows, Tech. report, NASA Technical Memorandum 84313, 1983.
[36] J. Kim, P. Moin, The structure of the vorticity field in turbulent channel flow. Part 2. Study of ensemble-averaged fields, J. Fluid Mech. 162 (1986) 339–363.
[37] S.J. Kline, Investigation of the Turbulence Producing Structures in the Boundary Layer, Tech. report, AFOSR 87-0304E, 1991.
[38] R.E. Falco, Coherent motions in the outer region of turbulent boundary layers, Phys. Fluids 20 (10) (1977) S124–S132.
[39] D. Bernoulli, Hydrodynamica – de viribus et motibus fluidorum commentarii, Opus Academicum, 1738.
[40] J.-B. Venturi, Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale du mouvement dans les fluides appliqué à l'explication de différens phénomènes hydrauliques, J. Phys. Chim. Hist. Nat. & Arts 2 (1794) 362–393.
[41] J.V. Poncelet, Introduction à la mécanique industrielle, physique ou expérimentale, Éditeur Rue de l'Esplanade, Metz – M^{me} Thiel, 1841.
[42] J. Boussinesq, Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers de fluides, J. Math. Pures Appl. III (2) (1868) 377–424.
[43] G.I. Taylor, Flow in pipes and between parallel planes, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 159 (899) (1937) 496–506.
[44] P.A. Davidson, Y. Kaneda, K. Moffatt, K.R. Sreenivasan (Eds.), A Voyage Through Turbulence, Cambridge University Press, 2011.
[45] L.F. Richardson, Wheather Prediction by Numerical Process, Cambridge University Press, 1922.
[46] G.K. Batchelor, The application of the similarity theory of turbulence to atmospheric diffusion, Q. J. R. Meteorol. Soc. 76 (1950) 133–146.
[47] G.I. Taylor, A.E. Green, Mechanism of the production of small eddies from large ones, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 158 (895) (1937) 499–521.
[48] G.I. Taylor, Statistical theory of turbulence – i, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 151 (873) (1935) 421–444.
[49] A.N. Kolmogorov, Structure locale de la turbulence dans un fluide incompressible visqueux aux très grands nombres de Reynolds, C. R. Acad. Sci. URSS 30 (4) (1941) 299–303.
[50] A.N. Kolmogorov, Selected Works of A.N. Kolmogorov – Volume II Probability Theory and Mathematical Statistics, Spinger Science+Buiseness Media, B.V., 1992.
[51] P.L.G. Dubuat, Principes d'hydraulique et de pyrodynamique, vérifiés par un grand nombre d'expériences faites par ordre du gouvernement – tome premier, Firmin Didot, Paris, 1816.
[52] L.F. Richardson, The supply of energy from and to atmospheric eddies, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 97 (686) (1920) 354–373.
[53] L.F. Richardson, Some measurements of atmospheric turbulence, Philos. Trans. R. Soc. Lond. A 221 (1921) 1–28.
[54] L.F. Richardson, Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 110 (756) (1926) 709–737.
[55] A. Favre (Ed.), Mécanique de la turbulence, Colloques Internationaux du CNRS, Éditions du Centre national de la recherche scientifique, Marseille, 20 août – 2 septembre 1961.
[56] U. Frisch, Turbulence the Legacy of a.n. Kolmogorov, Cambridge University Press, 1995.
[57] J.L. Lumley, A.M. Yaglom, A century of turbulence, Flow Turbul. Combust. 66 (2001) 241–286.
[58] T. Von Kármán, Progress in the statistical theory of turbulence, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 34 (11) (1948) 530–539.
[59] J. Boussinesq, Essai sur la théorie des eaux courantes, Mémoires présentés par divers savants à, Mém. Acad. Sci. Inst. Fr. 23 (1) (1877) 1–680.
[60] A. Favre, Équations statistiques des gaz turbulents : masse, quantité de mouvement, C. r. hebd. séances Acad. sci. 246 (1958) 2576–2579.
[61] H. Lamb, Hydrodynamics, fourth edition, Cambridge University Press, 1916.

[62] L. Keller, A. Friedmann, Differentialgleichungen für die turbulente Bewegung einer kompressibelen Flüssigkeit, in: Proceedings International Congress Delft, 1925, pp. 395–405.
[63] J. Kampé de Fériet, Problèmes mathématiques de la théorie de la turbulence homogène, in: C. Ferrari (Ed.), in : Teoria della turbolenza, Varenna, Italie, Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.), 1957, pp. 1–104.
[64] J.M. Burgers, On the application of statistical mechanics to the theory of turbulent fluid motion i, Mededeeling No. 12 – KNAW Proceedings 32 (4) (1929) 414–425.
[65] J.M. Burgers, On the application of statistical mechanics to the theory of turbulent fluid motion ii, Mededeeling No. 12 – KNAW Proceedings 32 (5) (1929) 643–657.
[66] J.M. Burgers, On the application of statistical mechanics to the theory of turbulent fluid motion iii, Mededeeling No. 12 – KNAW Proceedings 32 (6) (1929) 818–833.
[67] J.M. Burgers, On the application of statistical mechanics to the theory of turbulent fluid motion iv, Mededeeling No. 26 – KNAW Proceedings 36 (3) (1933) 276–284.
[68] J.M. Burgers, On the application of statistical mechanics to the theory of turbulent fluid motion v, Mededeeling No. 26 – KNAW Proceedings 36 (4) (1933) 390–399.
[69] J.M. Burgers, On the application of statistical mechanics to the theory of turbulent fluid motion vi, Mededeeling No. 26 – KNAW Proceedings 36 (5) (1933) 487–496.
[70] J.M. Burgers, On the application of statistical mechanics to the theory of turbulent fluid motion vii, Mededeeling No. 26 – KNAW Proceedings 36 (6) (1933) 620–628.
[71] G.I. Taylor, Statistical theory of turbulence – ii, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 151 (873) (1935) 444–454.
[72] G.I. Taylor, Statistical theory of turbulence – iii. Distribution of dissipation of energy in a pipe over its cross-section, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 151 (873) (1935) 455–464.
[73] G.I. Taylor, Statistical theory of turbulence – iv. Diffusion in a turbulent air stream, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 151 (873) (1935) 465–478.
[74] G.I. Taylor, Diffusion by continuous movements, Proc. Lond. Math. Soc. 2 (1921) 196–211.
[75] T. Von Kármán, The fundamentals of the statistical theory of turbulence, J. Aeronaut. Sci. 4 (4) (1937) 131–138.
[76] G. Dedebant, Ph. Schereschewsky, P. Wehrlé, Sur la similitude statistique dans les mouvements turbulents des fluides, C. r. hebd. séances Acad. sci. 198 (1934) 1571–1573.
[77] G. Dedebant, Ph. Wehrlé, La mécanique de l'atmosphère et des grands milieux fluides fondée sur les concepts d'échelle et de probabilité, Thalès 2 (1935) 53–81.
[78] R. Juvanon Du Vachat, La mécanique des fluides turbulents avec dedebant et wehrlé à l'office national météorologique (1934–1939), Meteorol. 8 (numéro spécial) (1995) 156–166.
[79] G. Dedebant, Ph. Wehrlé, La mécanique des fluides turbulents fondée sur des concepts statistiques, Thalès 4 (1938) 151–167.
[80] A. Demuro, Joseph Kampé de Fériet et la mécanique des fluides en France durant l'entre-deux-guerres, C. R. Mecanique 345 (2017) 556–569.
[81] J. Kampé de Fériet, Averaging processes and Reynolds equations in atmospheric turbulence, J. Meteorol. 8 (1951) 358–361.
[82] J. Kampé de Fériet, L'état actuel du problème de la turbulence, Sci. Aérienne 3 (1934) 9–34.
[83] J. Kampé de Fériet, L'état actuel du problème de la turbulence (suite), Sci. Aérienne 4 (1935) 12–52.
[84] J. Kampé de Fériet, Les fonctions aléatoires stationnaires et la théorie statistique de la turbulence homogène, Ann. Soc. Sci. Brux. 59 (1939) 145.
[85] J. Kampé de Fériet, Sur le spectre de la turbulence homogène, C. r. hebd. séances Acad. sci. 208 (1939) 722–725.
[86] J. Kampé de Fériet, Introduction to the statistical theory of turbulence – i, J. Soc. Ind. Appl. Math. 2 (1) (1954) 1–9.
[87] J. Kampé de Fériet, Introduction to the statistical theory of turbulence – ii, J. Soc. Ind. Appl. Math. 2 (3) (1954) 143–174.
[88] J. Kampé de Fériet, Introduction to the statistical theory of turbulence - iii, J. Soc. Ind. Appl. Math. 2 (4) (1954) 244–271.
[89] J. Kampé de Fériet, Introduction to the statistical theory of turbulence – iv, J. Soc. Ind. Appl. Math. 3 (2) (1955) 90–117.
[90] J. Kampé de Fériet, Fonctions aléatoires et théorie statistique de la turbulence, in: Théorie des fonctions aléatoires, Masson & C^{ie}, 1953, pp. 569–623.
[91] J. Kampé de Fériet, La notion de moyenne dans la théorie de la turbulence, Milan J. Math. 27 (1) (1957) 167–207.
[92] P. Chassaing, Turbulence en mécanique ees fluides - Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur, Éditions Cépadués (collection Polytech), 2000.
[93] J. Bass, Applications de la mécanique aléatoire à l'hydrodynamique et à la mécanique quantique, rapport technique n^{o} 227, Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'air, 1949.
[94] J. Bass, Stationary functions and their applications to the theory of turbulence I. Stationary functions, J. Math. Anal. Appl. 47 (2) (1973) 354–399.
[95] J. Bass, Stationary functions and their applications to the theory of turbulence II. Turbulent solutions of the Navier–Stokes equations, J. Math. Anal. Appl. 47 (3) (1974) 458–503.
[96] J. Bass, Principes d'une théorie non probabiliste de la turbulence, in: Mécanique de la turbulence (Marseille), in : Colloques internationaux du CNRS, vol. 108, 1962, pp. 459–465.
[97] J. Bass, Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires, Bull. Soc. Math. Fr. 87 (1959) 1–64.
[98] A.A. Townsend, The fully developed turbulent wake of a circular cylinder, Aust. J. Sci. Res., Ser. A 2 (4) (1949) 451–468.
[99] A.K.M.F. Hussain, W.C. Reynolds, The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow, J. Fluid Mech. 41 (2) (1970) 241–258.
[100] M. Lesieur (Ed.), Turbulence et déterminisme, PUG, 1998.
[101] A. Fouillée, Extraits des grands philosophes, Ch. Delagrave, Paris, 1877.
[102] C. Bernard, Introduction à l'étude de la médecine expérimentale, J.B. Baillière et fils, Paris, 1865.
[103] G.W. Leibniz, Essais de théodicée sur la bonté de dieu, la liberté de l'homme et l'origine du mal – tome premier, chez François Changuion, A Amsterdam, 1734.
[104] H. Lamb, Hydrodynamics, C.J. Clay and Sons, Cambridge University Press, 1895.
[105] A. Lhote, Biographie chalonnaise, T. Martin Châlons-sur-Marne, 1870.
[106] J.L. Lumley, Toward a turbulent constitutive relation, J. Fluid Mech. 41 (2) (1970) 413–434.
[107] A. Favre, Équations statistiques des gaz turbulents : énergie totale, énergie interne, C. r. hebd. séances Acad. sci. 246 (1958) 2723–2725.
[108] A. Favre, Équations statistiques des gaz turbulents : énergie cinétique, énergie cinétique du mouvement microscopique, énergie cinétique de la turbulence, C. r. hebd. séances Acad. sci. 246 (1958) 2839–2842.
[109] A. Favre, Équations statistiques des gaz turbulents : enthalpies, entropie, températures, C. r. hebd. séances Acad. sci. 246 (1958) 3216–3219.
[110] H. Ha Minh, B.E. Launder, J. MacInnes, The turbulence modelling of variable density flows – a mixed-weighted decomposition, in: Turbulent Shear Flows 3, Selected papers from the Third International Symposium on Turbulent Shear Flows, 1981, September 9–11, The University of California, Davis, CA, États-Unis, 1982, pp. 291–308.
[111] P. Chassaing, Une alternative à la formulation des équations du mouvement turbulent d'un fluide à masse volumique variable, J. Méc. Théor. Appl. 4 (3) (1985) 375–389.
[112] T. Von Kármán, L. Howarth, On the statistical theory of isotropic turbulence, Philos. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A 164 (917) (1938) 192–215.
[113] P.Y. Chou, On an extension of Reynolds' method of finding apparent stress and the nature of turbulence, Chin. J. Phys. 4 (1940) 1–33.

[114] M. Millionschikov, On the theory of homogeneous isotropic turbulence, Dokl. Akad. Nauk SSSR 32 (9) (1941) 611–614.
[115] A.S. Monin, A.M. Yaglom, Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence, vol. 2, The MIT Press, 1975, English edition updated, augmented and revised.
[116] P.-Y. Chou, R.-L. Chou, 50 years of turbulence research in China, Annu. Rev. Fluid Mech. 27 (1995) 1–16.
[117] Y. Ogura, A consequence of the zero-fourth-cumulant approximation in the decay of isotropic turbulence, J. Fluid Mech. 16 (1) (1963) 33–40.
[118] A.P. Mirabel, Application of Millionschikov's hypothesis to the problem of isotropic turbulence degeneration, Izv. Akad. Nauk SSSR, Meh. Židk. Gaza 4 (5) (1969) 171–175.
[119] C. Mamaloukas, H.P. Mazumdar, An overview of Millionschikov's quasi-normality hypothesis applied to turbulence, Int. J. Appl. Mech. Eng. 19 (1) (2014) 123–132.
[120] P.Y. Chou, On velocity correlations and the solution of the equations of turbulent fluctuation, Q. Appl. Math. III (1) (1945) 38–54.
[121] R.H. Kraichnan, The Closure Problem of Turbulence Theory, Tech. report, Research Report No. HSN-3, New York University, 1961.
[122] J.R. Chasnov, Simulation of the Kolmogorov inertial subrange using an improved subgrid model, Phys. Fluids A 3 (1) (1991) 188–200.
[123] E. Hopf, Statistical hydromechanics and functional calculus, Indiana Univ. Math. J. 1 (1) (1952) 87–123.
[124] M.M. Stanisic, The Mathematical Theory of Turbulence, second edition, Springer-Verlag, 1988.