



Hommage à Abraham de Moivre

L'application des nombres complexes au calcul des profils d'aile

Bruno Chanetz

Onera, chemin de la Humière, BP 80100, 91123 Palaiseau cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 23 avril 2019

Accepté le 23 avril 2019

Disponible sur Internet le 3 juillet 2019

Mots-clés :

Aérodynamique

Soufflerie

Méthode des singularités

Cuve rhéoelectrique

Équations de Navier–Stokes

Paradoxe de d'Alembert

RÉSUMÉ

Si le sujet central en est bien le calcul théorique de la forme d'une aile d'avion au moyen des nombres complexes, domaine dans lequel s'est illustré Abraham de Moivre, cet article présente quatre moyens très différents qui permettent de parvenir à établir ces résultats. Après un bref rappel de la théorie du vol, une première partie est consacrée aux travaux expérimentaux de Gustave Eiffel, puis, en poursuivant l'ordre chronologique, on traite la méthode des singularités due à Nicolai Joukovski, puis un procédé analogique développé par Joseph Pérès et Lucien Malavard, et enfin la technique contemporaine de résolution numérique des équations de Navier–Stokes. Si le recours à l'expérience en soufflerie subsiste de nos jours, les méthodes théoriques et analogiques, qui ont eu leurs heures de gloire au milieu du xx^e siècle, sont aujourd'hui abandonnées, la puissance de calcul des ordinateurs les rendant désormais désuètes. Pour autant, elles constituent des manières très élégantes de résoudre le problème.

© 2019 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND

(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

1. La théorie du vol : état de l'art au siècle d'Abraham de Moivre

Évoquer le calcul des ailes d'avion dans le cadre d'un hommage rendu à Abraham de Moivre tient de la gageure, car jamais ce dernier ne s'intéressa au problème de la sustentation. Pourtant, certains de ses contemporains contribuèrent de manière décisive à l'élaboration de la théorie du vol. Son ami Newton est à l'origine d'une formule, encore en usage de nos jours, donnant la pression au point d'arrêt d'un véhicule hypersonique. Daniel Bernoulli, fils de Jean, un autre ami de Moivre, avait énoncé que pression et vitesse variaient en sens inverse, sans toutefois trouver la formule liant ces deux grandeurs. Leibniz, qui honorait également de Moivre de son amitié, énonça le théorème de la force vive – ou de l'énergie cinétique – qui permit à Euler d'établir l'équation différentielle à laquelle il laissa son nom :

$$dp + \rho V dV = 0$$

où p est la pression, V la vitesse et ρ la masse volumique du fluide.

La version intégrée sur une ligne de courant de l'équation d'Euler est la célèbre formule de Bernoulli, qui rend hommage à son intuition :

$$p + 1/2\rho V^2 = Cste$$

Adresse e-mail : chanetz@onera.fr.

<https://doi.org/10.1016/j.crme.2019.06.005>

1631-0721/© 2019 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

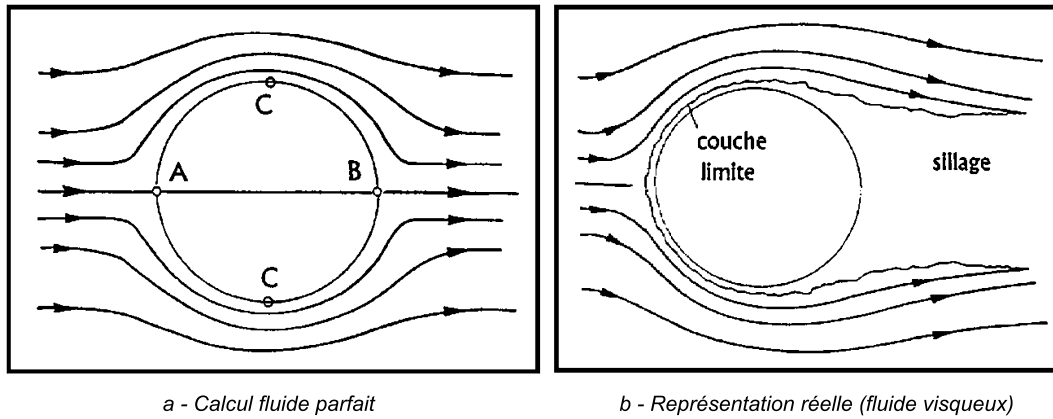


Fig. 1. Écoulement autour d'un barreau cylindrique.

Quant au calcul des profils d'aile par l'utilisation de la théorie des nombres complexes, elle suppose que l'on connaisse la solution de l'équation de Laplace. L'élégance de cette résolution réside dans l'introduction d'un potentiel des vitesses φ , dont dérive la vitesse, et d'une fonction de courant Ψ . Ces deux fonctions doivent avoir leur laplacien nul, c'est-à-dire que la somme de leurs dérivées secondes par rapport aux variables d'espace x et y est nulle. Pour la fonction de courant en coordonnées cartésiennes, l'équation de Laplace s'exprime par :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

Cette équation fut résolue par Jean Le Rond d'Alembert à la fin du xviii^e siècle, en bidimensionnel dans le cas d'un cylindre. La condition aux limites imposée à la paroi du cylindre est que le vecteur vitesse est tangent à la paroi, donc perpendiculaire à celle-ci, mais non nul. C'est l'hypothèse du fluide parfait. Dans la réalité, le fluide étant visqueux, une couche limite se développe au contact de la paroi, aboutissant à une vitesse nulle au contact de cette dernière.

Le fait de négliger les termes visqueux conduisit d'Alembert à trouver une force de traînée nulle pour un barreau cylindrique, en contradiction évidente avec la réalité qu'il observait, d'où le paradoxe qu'il énonce, resté célèbre. Le barreau cylindrique, de la même manière que la sphère, n'étant pas un corps portant, la résolution mathématique aboutissait logiquement à une portance nulle, caractérisée sur le schéma de la Fig. 1a par une symétrie haut/bas par rapport au diamètre AB. En revanche, dans la réalité, le corps est le siège d'une traînée, ce dont le calcul ne rendait pas compte, les lignes de courant en aval du corps étant symétriques aux lignes amont par rapport à l'axe vertical CC de la Fig. 1a.

On en resta là à l'époque. Ce ne fut qu'au xix^e siècle que la prise en compte des effets visqueux permit d'établir les équations de Navier–Stokes, qui régissent le mouvement du fluide réel visqueux, lequel se caractérise, dans le cas du barreau cylindrique, par l'existence d'une couche limite à la paroi du corps et d'un sillage en aval, rompant la symétrie gauche/droite, comme il est représenté sur la Fig. 1b.

2. Expérience : les essais en soufflerie de Gustave Eiffel (1909)

Au cours de la première partie du XIX^e siècle, Georges Cayley établit la théorie des corps portants, énonçant qu'un profil cambré est portant, même à incidence nulle. En 1852, le Prussien Gustav Magnus s'intéressa à l'effet de giration des boulet de canon, phénomène qu'on rencontre aussi lorsque les balles ou ballons ont de l'« effet ». Il établit ainsi que la rotation d'un boulet infléchissait la trajectoire balistique, avec pour conséquence le ratage de la cible. La force de Magnus (ou effet Magnus) n'est autre qu'une force de portance ou de déportance, selon le sens de giration. Tout était dès lors en place – ou presque – au niveau des éléments théoriques pour permettre d'appréhender le vol. Le capitaine Ferdinand Ferber qui, deux ans après les frères Wright, réussit en 1905 le premier envol d'un avion motorisé, avait joliment énoncé que *la portance est une fleur qui naît de la vitesse*.

Il fallut en effet attendre la charnière entre les xix^e et xx^e siècles, quand l'invention du moteur thermique mit à la disposition des pionniers de l'air une propulsion suffisante, pour que ceux-ci élaborent les profils cambrés dont ils allaient équiper leurs aéronefs.

Jusqu'aux travaux de Gustave Eiffel, ces inventeurs ne se doutaient pas que l'aile était plus aspirée par l'air au-dessus (extrados) que portée par l'air au-dessous (intrados). En 1909, Gustave Eiffel conçut une soufflerie au Champ-de-Mars, dans laquelle il testa des profils d'ailes à deux ou trois bosses en mesurant la répartition des coefficients de pression sur les parties intrados et extrados de l'aile (voir Fig. 2) : « Cette étude a fait ressortir l'importance prépondérante des dépressions à l'arrière et a montré que l'aile de l'aéroplane est deux fois plus aspirée par l'air qui s'écoule sur sa face dorsale qu'elle n'est poussée par l'air qui s'écoule sur sa face ventrale. Avant que ce fait ne fût mis en évidence au laboratoire du Champ-de-Mars, les constructeurs d'avions

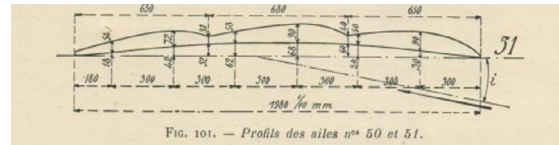
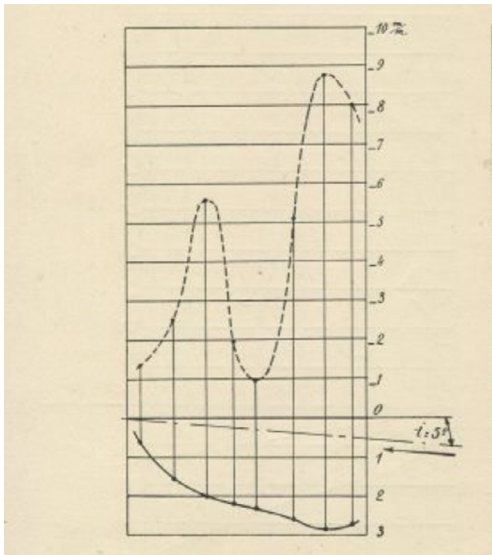
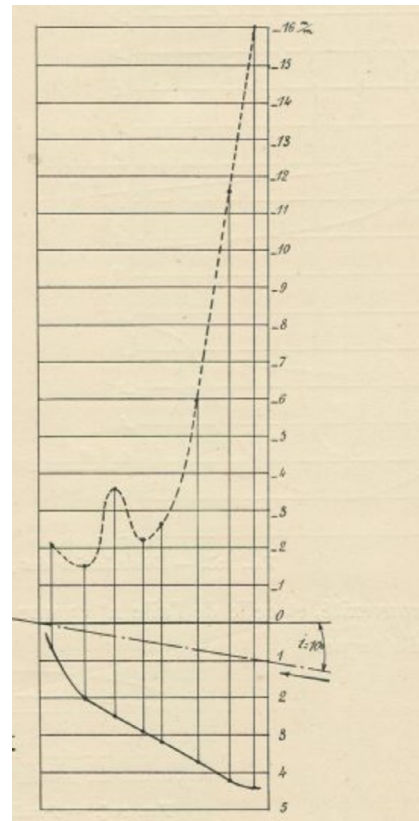


FIG. 101. — Profils des ailes n° 50 et 51.



(a) Aile n° 50 à deux bosses



(b) Aile n° 51 à trois bosses

Fig. 2. Mesures de Gustave Eiffel sur des profils à deux et trois bosses.

ne tenaient pas compte des dépressions sur la face dorsale pour l'attache des toiles des ailes, et cela a dû amener des catastrophes par déchirure inexplicables de cette toile pendant le vol. On y a remédié depuis la publication de mes travaux.» [1].

3. Théorie : la méthode de calcul des singularités due à Nikolai Joukovski (1913)

Concomitamment aux essais d'Eiffel, Erich Trefftz publie en 1913 une note sur la construction graphique de Joukovski basée sur une étude d'Otto Blumenthal. La transformation de Joukovski est une transformation conforme définie dans le plan complexe par :

$$z \rightarrow \frac{1}{2}(z + b^2/z)$$

Cette transformation conforme transpose le cercle en un profil et la résolution de l'écoulement autour du profil est ramenée à celle de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire (voir Fig. 3).

Cette astuce est géniale, à condition que l'on sache résoudre l'écoulement autour du cercle. Ainsi, la méthode des singularités repose tout d'abord sur la résolution de l'équation de Laplace déjà évoquée. Nous avons vu que cette résolution mathématiquement juste, mais avec des hypothèses non réalistes, est insuffisante à rendre compte de la réalité. Néanmoins, elle sert de cadre à l'élaboration d'une remarquable méthode de résolution mathématique, dite méthode des singularités. Elle tire son nom des singularités mathématiques qui sont additionnées au cas de base de l'écoulement calculé par d'Alembert afin de rendre compte mathématiquement de la réalité des écoulements fluides.

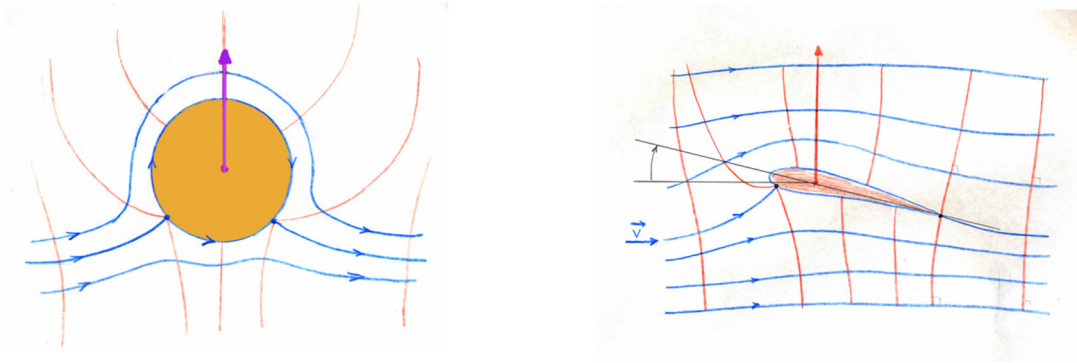


Fig. 3. La transformation conforme permettant de passer du cercle au profil d'aile.

L'équation de Laplace étant une équation linéaire, la combinaison de n solutions linéairement indépendantes sera également une solution de l'équation. Ainsi, la superposition de solutions élémentaires permet de construire des solutions plus complexes. Parmi les solutions élémentaires de l'équation de Laplace, quelques-unes sont très intéressantes :

- l'écoulement de vitesse uniforme V_∞ ;
- la source, caractérisée par des vitesses radiales dirigées vers l'extérieur et inversement proportionnelles à la distance au point source ;
- le puits, caractérisé par des vitesses radiales dirigées vers le centre et inversement proportionnelles à la distance au puits ;
- le doublet, combinaison d'une source et d'un puits infiniment rapprochés ;
- le tourbillon, caractérisé par des vitesses radiales nulles et des vitesses tangentielles dont le module est inversement proportionnel à la distance au centre.

Ainsi, il appert que la superposition d'un écoulement uniforme, d'un doublet et d'un tourbillon permet de créer un écoulement portant autour d'un cercle en détruisant la symétrie haut/bas (voir Fig. 4). La présence d'un tourbillon crée un effet de rotation similaire à celui observé par Magnus et permet de conférer une portance au barreau cylindrique, représenté en coupe par un cercle. Le calcul permet d'exprimer le coefficient de pression en chaque point du cercle et d'en déduire par intégration le coefficient de portance.

Par intégration, on obtient aussi le coefficient de traînée, qui est encore nul du fait de la symétrie gauche/droite. En revanche, on obtient un coefficient de portance C_Z non nul.

Grâce à ce subterfuge, Joukovski put calculer des profils d'aile portants, qui équipèrent les avions russes durant la Première Guerre mondiale. Cependant, l'impasse faite sur le calcul de la traînée eut des répercussions néfastes, ces profils ayant une forte traînée qui rendait nécessaire une importante motorisation, si bien qu'ils furent abandonnés dès la fin de la guerre. Il s'agissait néanmoins d'une élégante résolution, toujours enseignée [2], car riche au niveau de la compréhension de la théorie du vol.

4. Analogie : résolution au moyen de la cuve rhéométrique de Lucien Malavard (1910–1990) et Joseph Pérès (1915–1998)

Cette méthode analogique [3] repose sur l'identité des équations qui régissent :

- la distribution du potentiel électrique dans un milieu conducteur (bassin électrique [voir Fig. 5]) ;
- l'écoulement des fluides parfaits incompressibles irrotationnels.

Suivant les conditions aux limites imposées aux frontières du domaine, on pourra assimiler le potentiel électrique :

- soit au potentiel des vitesses φ ,
- soit à la fonction de courant Ψ .

5. Calcul : résolution numérique par discrétisation des équations de Navier–Stokes (depuis 1980)

Au début du XIX^e siècle, il appartient à Adhémar Barré de Saint-Venant et Henri Navier, avec la contribution ultérieure de George Stokes, de proposer ce qui deviendront les célèbres équations de Navier–Stokes afin de tenir compte du caractère visqueux de l'air. Ces équations, qui contiennent toute la richesse du fluide de base qu'est l'air, sont des équations aux dérivées partielles, auxquelles on n'a toujours pas trouvé de solution théorique.

En 1903, Ludwig Prandtl présente au congrès de mathématiques d'Heidelberg la théorie de la couche limite. Il s'agit d'une simplification des équations de Navier–Stokes dans la zone de proche paroi où se développe une couche où sont concentrés

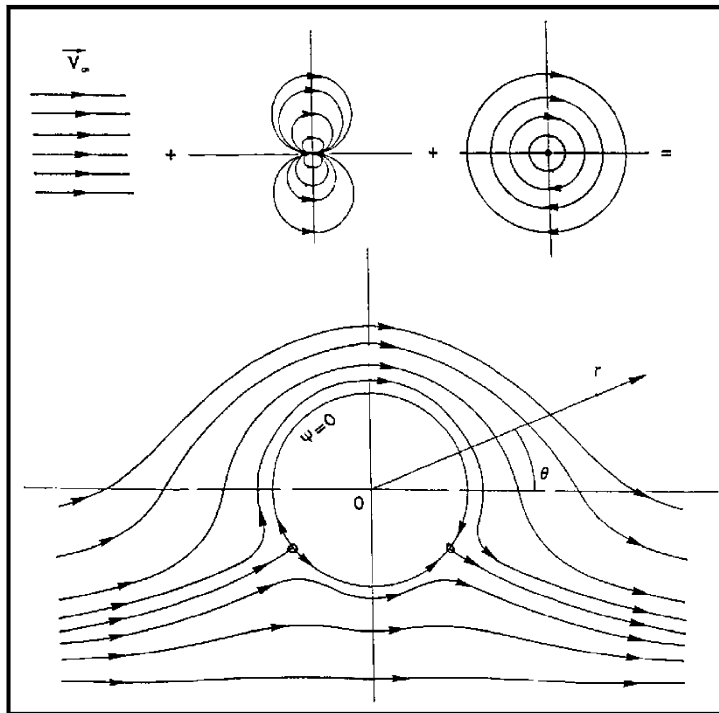


Fig. 4. Superposition de solutions élémentaires (écoulement uniforme, doublet et tourbillon) de l'équation de Laplace.

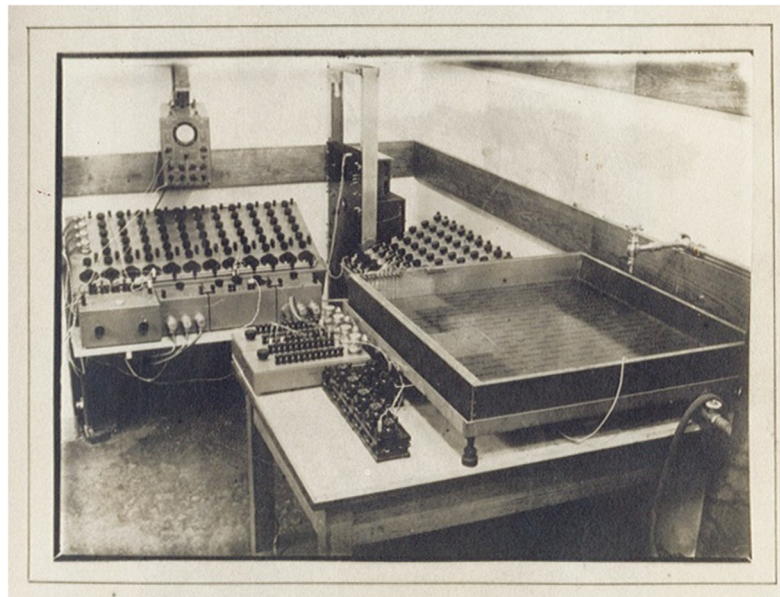


Fig. 5. Le calculateur d'aile rhéoelectrique de l'Onera.

les effets visqueux, les gradients de température dans cette zone étant responsables du flux thermique à la paroi et les gradients de vitesse du frottement pariétal. Dans les décennies suivantes se font jour des méthodes de calcul séparant les problèmes avec résolution des équations de Prandtl à la paroi et, dans le champ extérieur à la couche limite, des équations d'Euler, qui sont les équations de Navier–Stokes sans les termes visqueux. Ces méthodes de couplage deviendront caduques dès lors que la puissance des ordinateurs permettra la résolution des équations complètes.

Mais c'est seulement dans les années 1970–1980 que s'impose cette résolution numérique des équations de Navier–Stokes. La forte progression des ordinateurs, en termes de stockage mémoire comme de réduction des temps de calcul, rend alors possible la résolution des équations de Navier–Stokes en s'affranchissant du découpage antérieur en deux zones [4].

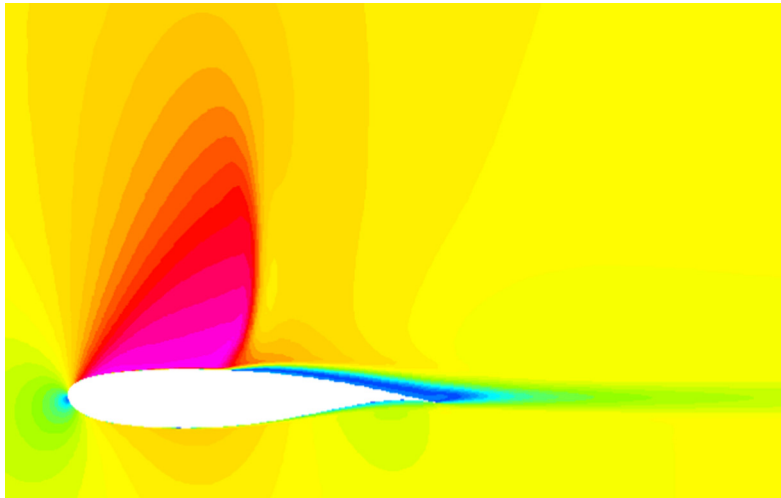


Fig. 6. Répartition du nombre de Mach autour d'un profil transsonique obtenue par calcul Navier–Stokes.

La Fig. 6 montre la répartition du nombre de Mach autour d'un profil en transsonique mettant en évidence l'onde de choc se formant à l'extrados.

6. Conclusion

Ce panorama des différentes méthodes de calcul des profils d'aile a permis d'éclairer le cheminement de la recherche depuis une centaine d'années dans un domaine qui a fortement évolué. Les expériences de Gustave Eiffel ont permis d'apporter la preuve de l'aspiration de l'aile par la dépression à l'extrados de l'aile, dépression consécutive à l'accélération de la vitesse sur cet extrados, elle-même due à la configuration d'aile cambrée. La résolution par la méthode des singularités, sur laquelle a principalement porté notre propos, est très bien menée et didactique. Elle montre tout l'intérêt des mathématiques pour la résolution de problèmes physiques. La méthode analogique met en valeur l'astuce des physiciens qui l'ont conçue. Elle est également un hommage rendu aux mathématiques, puisqu'elle repose sur une identité d'équations entre deux problèmes physiques distincts. Enfin, la résolution numérique des équations de Navier–Stokes est la solution qui prévaudra jusqu'à ce que ces équations soient résolues théoriquement. L'institut de mathématiques Clay, fondé en septembre 1998 par Landon Clay, a proposé en l'an 2000 sept problèmes mathématiques, dits *du millénaire*, et a promis un million de dollars à quiconque en résoudrait un. L'un de ces problèmes, la conjecture de Poincaré, a déjà été résolu par un mathématicien russe Grigori Perelman. Parmi les problèmes restant à résoudre, les équations de Navier–Stokes. Il est permis de rêver...

Références

- [1] B. Chanetz, M. Peter, Eiffel, pioneer of aerodynamics, *Int. J. Eng. Syst. Model. Simul.* 5 (1–3) (2013) 3–7.
- [2] J. Délerly, *Traité d'aérodynamique théorique*, vol. 1, Éditions Lavoisier, Paris, 2008, <https://www.lavoisier.fr/livre/physique/traite-d-aerodynamique-compressible-volume-1/delery/descriptif-9782746220027>.
- [3] P. Marty, Le Strand, un système de transmission analogique de données en avance sur son temps, in: *Les histoires de l'Histoire*, Association aéronautique et astronautique de France, Paris, 2007, https://www.3af.fr/sites/default/files/lettre_3af_n_8_2007.pdf.
- [4] B. Chanetz, J. Délerly, J.-P. Veuillot, *Aérodynamique*, Encyclopaedia Universalis, <http://www.universalis-edu.com/encyclopedie/aerodynamique/>.