C. R. Mecanique 347 (2019) 535–543

Contents lists available at ScienceDirect

Comptes Rendus Mecanique

www.sciencedirect.com

Hommage à Abraham de Moivre

De Moivre, précurseur des mathématiques modernes

Piotr Graczyk[a,*], Emmanuelle Guernier[b], Jean-Jacques Loeb[a]

[a] *Laboratoire Angevin de Recherche en Mathematiques (LAREMA), Faculté des Sciences, Université d'Angers, 2, bd Lavoisier, 49045 Angers, France*

[b] *Lycée Duplessis-Mornay, 1, rue Duruy, 49408 Saumur, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 23 avril 2019
Accepté le 23 avril 2019
Disponible sur Internet le 2 juillet 2019

Mots-clés :
De Moivre
Loi binomiale
Loi normale
Théorème central limite
Exponentielle complexe

RÉSUMÉ

De Moivre est l'auteur de deux livres de mathématiques : *The Doctrine of Chances* (« La Théorie du hasard ») et *Miscellanea Analytica*, dans lesquels il pose les fondations des probabilités modernes. Y apparaît pour la première fois la loi normale (associée à la fameuse courbe en cloche) qui aura le succès que l'on connaît. Il est aussi l'auteur d'une formule « magique » associant trigonométrie et nombres imaginaires. Développée par Euler et ses successeurs, cette formule est le premier chaînon de la théorie des fonctions analytiques.

Le nom d'Abraham de Moivre apparaît ainsi en terminale des lycées (Théorème de Moivre–Laplace) et en première année de cursus universitaire (formule de Moivre trigonométrique).

1. De Moivre, la trigonométrie et les nombres imaginaires

1.1. Introduction

De Moivre (Fig. 1) est le premier mathématicien à avoir établi un lien entre les formules de trigonométrie et les nombres imaginaires (appelés aujourd'hui nombres complexes). Cette idée a été considérablement développée par d'autres mathématiciens, notamment Euler. Nous allons successivement parler des angles et de la trigonométrie, des nombres complexes, et de la « synthèse » initiée par de Moivre.

1.2. Angles et trigononométrie

La notion d'angle est certainement fondamentale dans notre saisie visuelle de l'espace. La *mesure* d'un angle dessiné peut se faire à l'aide d'un rapporteur échelonné en degrés (on divise un cercle en 360 parties égales). Le degré a été probablement introduit par les Babyloniens dans leurs mesures astronomiques, le soleil tournant autour de la Terre, comme on le croyait à l'époque, décrivant très approximativement un degré en un jour.

* Auteur correspondant.
Adresses e-mail : graczyk@univ-angers.fr (P. Graczyk), emmanuelle.guernier@ac-nantes.fr (E. Guernier), loeb@univ-angers.fr (J.-J. Loeb).

https://doi.org/10.1016/j.crme.2019.06.007
1631-0721/

Fig. 1. Portrait d'Abraham de Moivre par John Faber (1736).

1.3. *Trigononométrie*

Comment calculer la hauteur du sommet d'une tour à 100 m d'ici et dont l'angle avec le sol pris à partir d'ici mesure 30 degrés (un tiers d'angle droit) ? Ce problème et beaucoup d'autres font appel aux fonctions trigonométriques. Comme on le sait, dans un triangle rectangle, le cosinus (respectivement le sinus) d'un angle est le rapport de la longueur du côté adjacent (respectivement opposé) sur la longueur de l'hypothénuse.

Notons que, bien avant de Moivre, des tables trigonométriques avaient été élaborées.

1.4. *Formules d'addition*

Quel est le cosinus de la somme de deux angles ? On connaissait depuis longtemps (Ptolémée, deux siècles avant Jésus-Christ) les formules suivantes :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
  (en particulier, si $a = b$, $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$) ;
  on a aussi une formule pour le sinus, pas trop facile à retenir :
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

1.5. *Nombres complexes*

Les nombres complexes ont été introduits par Cardan pour résoudre des problèmes d'équations algébriques. Du temps d'Abraham de Moivre, on savait faire des calculs avec eux, mais ils gardaient un statut obscur.

Pour les décrire succintement, on part d'un symbole « i » tel que $\mathrm{i}^2 = -1$, et les nombres complexes sont des expressions de la forme $a + \mathrm{i}b$ avec a, b des nombres réels (c'est-à-dire les nombres habituels, positifs et négatifs). Ensuite, on les ajoute et on les multiplie comme d'habitude. Par exemple : $(2+3\mathrm{i}) + (5-7\mathrm{i}) = 7 - 4\mathrm{i}$ et $(2+3\mathrm{i})(5-7\mathrm{i}) = 2 \cdot 5 + 2(-7\mathrm{i}) + (3\mathrm{i})5 + (3\mathrm{i})(-7\mathrm{i}) = 31 + \mathrm{i}$. Il faut se souvenir que $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$.

1.6. *Une meilleure formule d'addition*

Quel lien avec la trigonométrie ? Le voici :

- $(\cos a + \mathrm{i}\sin a)(\cos b + \mathrm{i}\sin b) = \cos(a+b) + \mathrm{i}\sin(a+b)$
  C'est la « vraie » formule de Moivre, essentiellement démontrée par Euler.
  Schématisons ce qu'a fait de Moivre sur un exemple. On prend $a = b$ dans la formule précédente. On obtient la formule de Moivre :

Fig. 2. Portrait d'Euler. La Poste (Suisse), 2007.

- $(\cos a + \mathrm{i} \sin a)^2 = \cos 2a + \mathrm{i} \sin 2a$
  Partant du membre gauche, ceci permet, par extraction de racine carrée, de calculer le membre de droite. Autrement dit, de calculer le cosinus d'un angle moitié à partir du cosinus de l'angle. Ceci apparaît de manière un peu obscure dans les œuvres d'Abraham de Moivre.

1.7. Formule de Moivre selon Euler (Fig. 2)

En posant $f(a) = \cos a + \mathrm{i} \sin a$, on a : $f(a) f(b) = f(a+b)$ et on voit que f a les mêmes propriétés que la fonction exponentielle qui figure dans le chapitre suivant. L'extraordinaire coup de génie d'Euler est de poser $\exp(\mathrm{i}a) = \cos a + \mathrm{i} \sin a$, et alors la formule d'addition devient presque évidente et facile à retenir :

- $\exp(\mathrm{i}a) \exp(\mathrm{i}a) = \exp(2\mathrm{i}a) \quad \exp(\mathrm{i}a) \exp(\mathrm{i}b) = \exp(\mathrm{i}(a+b))$

2. De Moivre, l'un des pères fondateurs des probabilités

Les pères fondateurs des probabilités :
Ce sont :

- Cardano [Jérôme Cardan] (1501–1576) ;
- Pierre de Fermat (?–1665) ;
- Blaise Pascal (1623–1662) ;
- Christiaan Huygens (1629–1695) ;
- Jakob Bernoulli (1654–1705) : loi binomiale, théorème (loi) des grands nombres ;
- Abraham de Moivre (1667–1754) : théorème de Moivre–Laplace ;
- Pierre-Simon de Laplace (1749–1827) : théorème de la limite centrale ;
- Andrei Kolmogorov (1903–1987) : axiomatisation des probabilités.

Le théorème de Moivre–Laplace est enseigné sous ce nom dans le monde entier. Par exemple, le livre de J. Jakubowski et R. Sztencel, *Probabilités* (2001), destiné aux étudiants de l'Université de Varsovie, est utilisé dans les universités et écoles polytechniques en Pologne. Ainsi, les étudiants polonais apprennent que de Moivre étudiait à Saumur !

Le théorème de Moivre–Laplace concerne la *loi binomiale*.

Une variable « binomiale » X compte le nombre de succès dans une série d'épreuves avec deux issues possibles : *succès (1) ou échec (0)*.

Exemple 1. Sondage avant le deuxième tour de l'éléction présidentielle française, avec les candidats M et P. *Le Monde* interroge 2000 personnes quant à leur choix : candidat M (succès) ou candidat P (échec) X = nombre de personnes (parmi les 2000) qui voteront pour M.

X suit la loi binomiale $B(2000, p)$;

p = le taux des partisans de M parmi *tous* les électeurs.

X peut être égal à $0, 1, \ldots, 2000$. Soit $p = 55\%$.

La probabilité que $X > 1000$ est 99,9996 %. La probabilité que $X \geq 1050$ est 98,69 %.

Le sondage a donné $X = 1030$. Cela est très peu probable si $p = 55\%$!

Exemple 2 *(étudié par de Moivre).* Cinq cents lancers d'une pièce : pile (succès) ou face (échec). X = nombre des piles obtenues.

X suit la loi binomiale $B(500, \frac{1}{2})$.

Il s'agit d'un cas symétrique : $P(X = 249) = P(X = 251) = 3{,}55\%$.

Exemple 3 *(étudié par de Moivre et par 126 participants de la Fête de la science 2017 à Saumur).* Un participant lance 12 dés. Il lance la face 6 (succès, on obtenait les bonbons !) ou une autre face : 1, 2, 3, 4 ou 5 (échec).

$X =$ le nombre de faces 6 lancées peut être égal à $0, 1, 2, \dots, 11$ ou 12.

X suit la loi binomiale $B(12, \frac{1}{6})$.

M. le Maire de Saumur a eu 1 succès. Il a lancé 1 3 5 4 3 6 2 2 1 4 5 3.

Loi binomiale $B(12, \frac{1}{6})$

Nombre des faces 6 sur 12 lancers	Probabilité	Nombre théorique d'apparitions sur 126 lancers
0	0,112	14
1	0,269	**34**
2	0,296	**37**
3	0,197	25
4	0,089	11
5	0,028	4
6	0,006	1
7	0,001	1 fois sur 1000
8	0,0001	1 fois sur 10 000
9	0,00001	1 fois sur 100 000
10	≈ 0	≈ 0
11	≈ 0	≈ 0
12	≈ 0	≈ 0

Les probabilités de la loi binomiale $B(n, p)$ sont données par la formule

$$P(k \text{ succès en } n \text{ épreuves}) = B(n, k, p) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

où $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots (n-1) \times n$. Cette formule est facile à justifier, mais difficile à utiliser quand n et k sont grands.

Preuve de la formule pour la probabilité binomiale

Prenons le résultat de M. le maire : 1 3 5 4 3 6 2 2 1 4 5 3, donc (avec E pour échec) E E E E E 6 E E E E E E.

La probabilité de succès pour « 6 » est de 1/6, d'échec E est de 5/6. Donc, par l'indépendance,

$$\text{Prob(E E E E E 6 E E E E E E)} = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{11}$$

Mais le seul succès 6 peut avoir 12 emplacements.

Donc $P(1 \text{ succès en 12 épreuves}) = 12 \times \frac{1}{6} (\frac{5}{6})^{11}$.

Le théorème de Moivre–Laplace local dit que le calcul compliqué de la loi binomiale $P(k \text{ succès en } n \text{ épreuves}) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$ peut être approché, quand n, k sont grands, par la fonction $c\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, facile à calculer ($c = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$, $q = 1-p$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\mathrm{e} = 2{,}718\ldots$).

Plus tard, on a reconnu dans cette fonction la densité d'une loi normale de Gauss (Fig. 3).

Soit $h = 1/\sqrt{npq}$, $c = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}, x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \mathrm{e} = 2{,}718\ldots$.

Le théorème de Moivre–Laplace local. Si $n, k \to \infty$ de sorte que $hx^3 \to 0$, alors

$$P(k \text{ succès en } n \text{ épreuves}) \approx c\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

Le théorème de Moivre–Laplace intégral. Soit X une variable de loi $B(n, p)$ et $Z = (X - np)/\sqrt{npq}$ la variable binomiale centrée réduite associée. Alors, si $n \to \infty$,

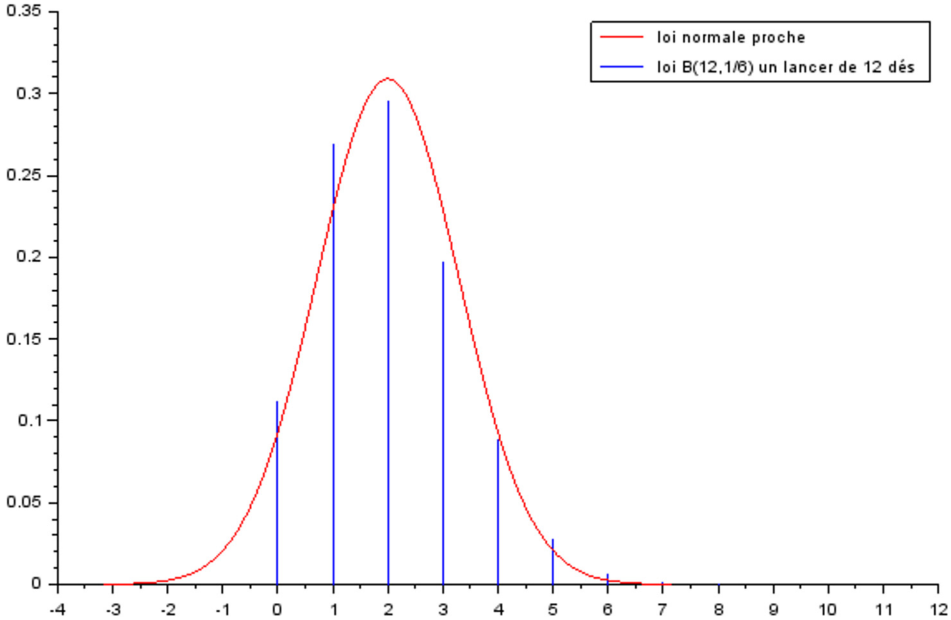
$$Prob(Z \in [a, b]) \approx Prob(N(0,1) \in [a, b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x$$

En particulier, les fonctions de répartition s'approchent par (Fig. 4) :

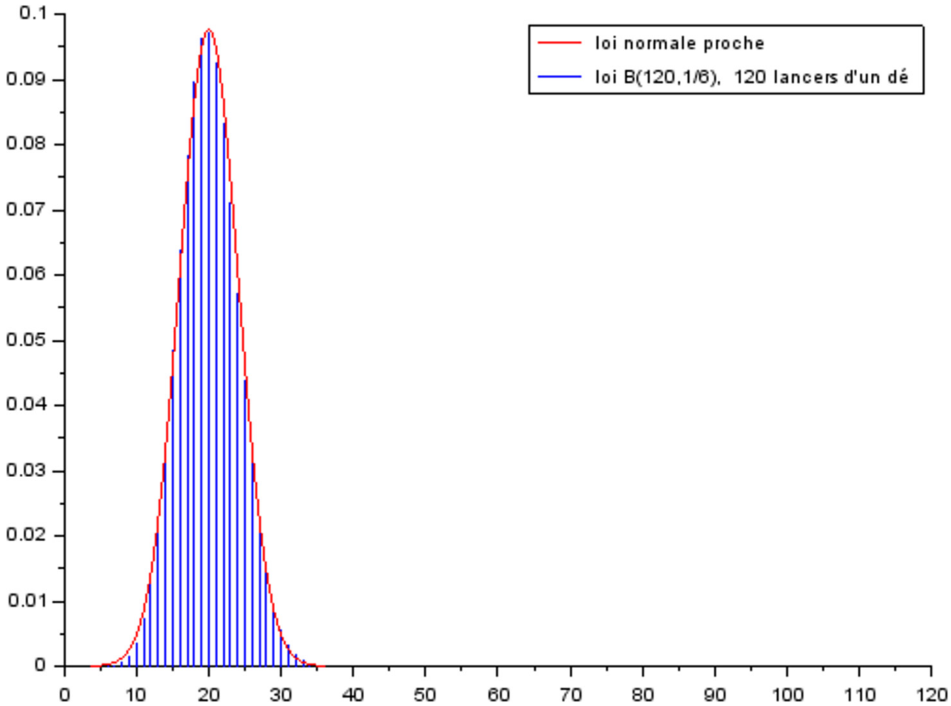
$$Prob(Z \le b) \approx Prob(N(0,1) \le b)$$

La preuve d'Abraham de Moivre (1730) est basée sur la formule qu'il a découverte et qu'on nomme « formule de Stirling » aujourd'hui (Stirling a seulement prouvé que $C = \sqrt{2\pi}$) :

$$n! \approx C \times n^{n+\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{-n}$$

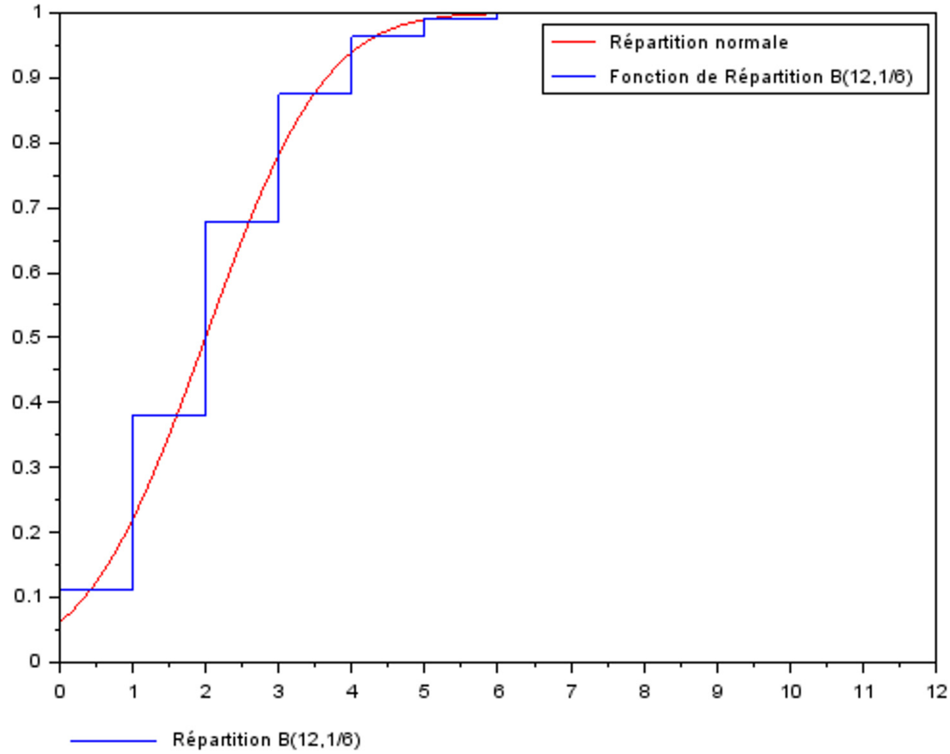


(a)

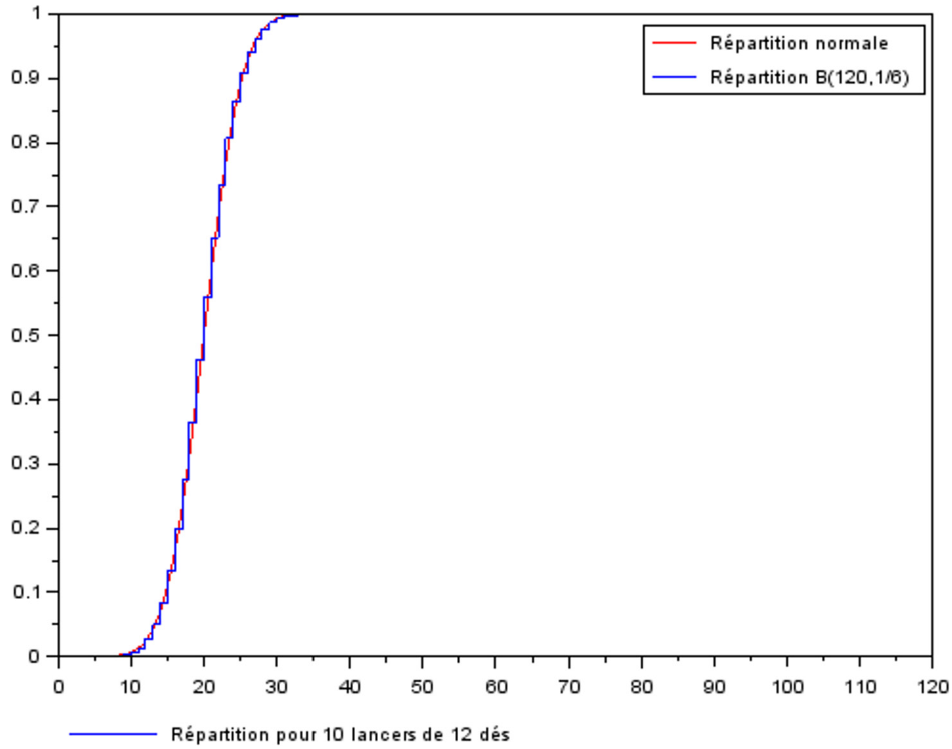


(b)

Fig. 3. Approximation de l'histogramme de la loi binomiale par la courbe de Gauss : (a) $B(12, 1/6)$ (b) $B(120, 1/6)$.



(a)



(b)

Fig. 4. Approximation de la fonction de répartition binomiale par normale (a) $B(12, 1/6)$ (b) $B(120, 1/6)$.

Fig. 5. Marc Yor sur la Loire (cliché par un photographe anonyme).

2.1. Les probabilités du XXI[e] *siècle*

Elles sont en grand essor et ont de multiples applications : statistiques, finance, économie, biologie et médecine... .

Un des pères fondateurs des probabilités du XXI[e] siècle est Marc Yor (1949–2014), qui séjournait régulièrement dans sa jeunesse (Fig. 5) à Chênehutte, à 7 km de Saumur.

3. Les mathématiques d'Abraham de Moivre au collège et au lycée en 2019

L'importance et la modernité de l'œuvre probabiliste de Moivre est attestée en France par la récente apparition du théorème de Moivre–Laplace dans les programmes des lycées et collèges. Sans les travaux de Moivre, pas de big data non plus !

Une lente émergence. On sait que les statistiques sont aujourd'hui omniprésentes ; pourtant, leur mise en œuvre dans les programmes scolaires a émergé difficilement.

Dans son rapport de 2002, la Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques insiste sur l'importance d'une formation en probabilités et statistiques, qui enrichit le langage et fonde un mode de pensée « pertinent, rassurant, remarquablement efficace ».

Pour ce qui est des horaires, la majeure partie du programme est dévolue à l'analyse et, dans une moindre mesure, à la géométrie ; viennent ensuite les statistiques et probabilités, sur lesquelles il convient de passer environ un mois de l'année, quel que soit le niveau de l'élève (Fig. 6).

Au collège. Au collège, seule la statistique exploratoire est abordée et l'aspect descriptif constitue l'essentiel de l'apprentissage : par exemple, lire et interpréter des données sous forme de données brutes, de tableau, de diagramme. Savoir utiliser un tableur grapheur. Familiariser les élèves avec les indicateurs de position (moyenne, médiane), ou de dispersion (étendue). Au niveau des probabilités, faire acquérir le vocabulaire de base et aborder les questions relatives au hasard à partir de problèmes simples (Fig. 7).

Deux principes pédagogiques fondamentaux au départ :

1) partir d'une évaluation des conceptions à priori sur le hasard ;
2) recourir à une approche empiriste et théorique des probabilités.

33 Jeu de dés

Un jeu sans mise au départ consiste à lancer deux dés parfaitement équilibrés 20 fois de suite. On gagne 10 € à chaque sortie d'un « double six ».

1 Quelle est la probabilité de gagner au moins 10 € sur les vingt lancers ?

2 Quelle somme peut-on espérer gagner en moyenne par jeu si l'on joue un grand nombre de fois à ce jeu ?

Fig. 6. Extrait du livre *Déclic mathématiques 1reS*, édition 2011.

23 Dans une classe de troisième de 29 élèves dont 14 sont des filles, on a décidé de tirer au sort les responsables des cahiers de classe. On a inscrit le nom de chaque élève sur un papier et on les a mis dans une urne.

a. Est-il plus probable que le premier tiré au sort soit un garçon plutôt qu'une fille ?

b. Paul est tiré au sort et est le premier responsable. Mathilde se dit que maintenant elle a autant de chance qu'un garçon d'être tirée au sort. A-t-elle raison ?

Fig. 7. Extrait du manuel *Sesamath cycle 4* du collège.

Exemples.

1. Faire comprendre que les probabilités sont relatives à des proportions.
   Soient deux urnes A et B.
   A contient 3 boules blanches et B contient 500 boules blanches et une boule rouge.
   Dans laquelle a-t-on le plus de chances de tirer une boule blanche ?
2. Construction d'une notion scientifique du hasard par la réflexion et l'expérimentation. Cette démarche avait été initiée par les « pères fondateurs » des probabilités : Pascal, de Moivre... .
   Exemples « Un dé n'a pas de mémoire. »
   On lance un dé. Le 6 est sorti. On relance le dé. A-t-on plus de chances d'obtenir la prochaine fois un 5 qu'un 6 ?
3. Classer du plus au moins probable certains événements (par exemple, « gagner le gros lot », « faire face avec une pièce », « avoir moins de quinze degrés en hiver »).

Au lycée. Le programme actuellement enseigné est déroulé ci-dessous.

• Lois de Bernoulli et binomiales. Reconnaître des situations relevant de ces lois. Coefficients binomiaux. Tester une hypothèse. Utilisation d'arbres, en relation avec les probabilités conditionnelles.

Par exemple, est-ce qu'une urne contient bien 3 boules blanches et 7 boules noires comme c'est annoncé ? Je fais 100 tirages avec remise et j'obtiens 38 boules blanches. Qu'en conclure ?

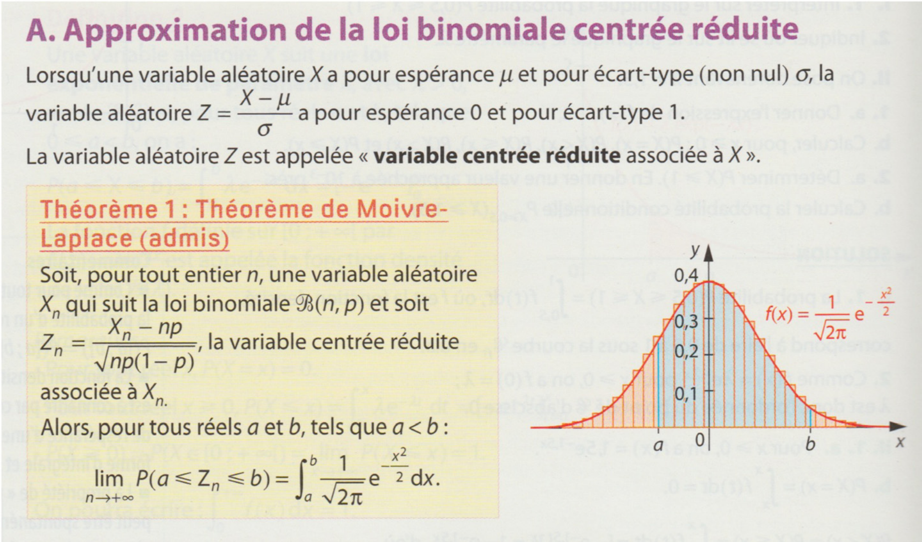
• Utilisation de l'intervalle de fluctuation avec un seuil donné (et d'une calculatrice) pour montrer la plausibilité de l'hypothèse.

• Notions de variable aléatoire, espérance, variance.

• En terminale, introduction des lois continues, en particulier la loi normale.

• Énoncé du *théorème de Moivre–Laplace* d'approximation des lois binomiales par la loi normale (Fig. 8). Utilisation pratique de cette approximation.

• En statistique, analyser les données. Utiliser la calculatrice ou un logiciel pour déterminer la variance et l'écart type d'une série statistique. Comparer deux séries statistiques.



A. Approximation de la loi binomiale centrée réduite

Lorsqu'une variable aléatoire X a pour espérance μ et pour écart-type (non nul) σ, la variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ a pour espérance 0 et pour écart-type 1.

La variable aléatoire Z est appelée « **variable centrée réduite** associée à X ».

Théorème 1 : Théorème de Moivre-Laplace (admis)

Soit, pour tout entier n, une variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et soit $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, la variable centrée réduite associée à X_n.

Alors, pour tous réels a et b, tels que $a < b$:

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Fig. 8. Extrait du livre de terminale S, collection Math'x, Éditions Didier, 2016.

Remerciements

Nous remercions MM. Gino Blandin et Hideto Nakashima pour l'aide apportée à la rédaction de cet article.