



INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus

Mécanique

Jean-Jacques Marigo

**La mécanique de l'endommagement au secours de la mécanique de la rupture :
l'évolution de cette idée en un demi-siècle**

Volume 351, Numéro spécial S3 (2023), p. 43-63

En ligne depuis le 28 avril 2023

Numéro publié le 26 août 2024

Numéro spécial : L'année de la mécanique : quelques points de vue sur des avancées récentes en mécanique des solides et des fluides

Rédacteurs en chef invités : Francisco Chinesta (PIMM, UMR CNRS 8006, Arts et Métiers Institute of Technology, Paris, France) et Aziz Hamdouni (LaSIE, UMR CNRS 7356, La Rochelle Université, France)

<https://doi.org/10.5802/crmeca.156>



Cet article est publié sous la licence

CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION 4.0 INTERNATIONAL.

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



*Les Comptes Rendus. Mécanique sont membres du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte*
www.centre-mersenne.org — e-ISSN : 1873-7234



Article de recherche / *Research article*

L'année de la mécanique : quelques points de vue sur des avancées récentes en mécanique des solides et des fluides / *The French "Année de la Mécanique": some views on recent advances in solid and fluid mechanics*

La mécanique de l'endommagement au secours de la mécanique de la rupture : l'évolution de cette idée en un demi-siècle

Damage mechanics to the aid of fracture mechanics: evolution of this idea during in half a century

Jean-Jacques Marigo ^a

^a Institut Jean le Rond d'Alembert (UMR 7190), Sorbonne Université & CNRS, 75005 Paris, France

Courriel: jjmarigo@yahoo.fr

Résumé. Cet article retrace les grandes lignes de l'évolution des idées qui ont prévalu et des choix qui ont été faits dans la modélisation de la rupture des matériaux et des structures depuis un siècle. En particulier l'accent est mis sur la création et le développement de la mécanique de l'endommagement avec son ambition première de remédier aux lacunes de la théorie de la rupture de Griffith. On souligne les succès de cette entreprise et les avancées qu'elle a permises en insistant sur le rôle clé qu'a joué *l'approche variationnelle*, mais on montre aussi ses limites.

Abstract. This article traces the main lines of the evolution of the ideas that have prevailed and the choices that have been made in modelling the fracture of materials for a century. In particular, the emphasis is on the creation and development of damage mechanics with its primary ambition to remedy the shortcomings of Griffith's fracture theory. We underline the successes of this enterprise and the advances it has allowed by insisting on the key role played by *the variational approach*, but we also show its limits.

Mots-clés. Endommagement, Rupture, Calcul des Variations, stabilité, discontinuités libres.

Keywords. Damage, Fracture, Calculus of Variations, stability, free discontinuities.

Manuscrit reçu le 15 novembre 2022, accepté le 25 novembre 2022.

Abridged English Version

Griffith published, a century ago, an article [1] laying the foundations of a fracture theory designed for brittle materials which will influence all works devoted to this topics. It is based on two key assumptions, both of an energetic nature: (i) the energy required to create new cracked

surfaces is proportional to these surfaces; (ii) the cracks propagate in a structure according to an energy minimization principle.

It turns out that the (too) simple assumption on the surface energy leads to unrealistic scaling effects and does not allow to account for the nucleation of cracks in a healthy body. The main reason is that the resulting fracture theory does not contain the concept of critical stress but allows infinite stresses. We must therefore abandon this hypothesis and complete the theory. On the other hand, the second hypothesis which postulates that the cracks propagate in such a way as to minimize the total energy of the body will be the mainstay of the revisited theory (the so-called variational approach to fracture), providing fundamental tools both from a theoretical and numerical point of view.

To correct the defects of Griffith's theory, one could simply have changed the form of the surface energy density, as advocated by Barenblatt [2], by no longer assuming it equal to a constant G_c but by making it dependent on the jump of the displacements. One would thus have introduced not only a critical stress but also a characteristic length which would have corrected the effects of scale. But the community preferred to take a completely different path by developing the damage mechanics. Following the idea of Kachanov [3], in this approach a scalar variable D which quantifies in a collective way the set of micro-defects contained in a volume element is introduced into the constitutive relations via the concept of effective stress. But this concept was rapidly abandoned because of its too weak physical justification and therefore the damage variable will be considered as an internal state variable in the framework of the thermodynamics of irreversible processes. In the case of a brittle material and rate independent processes, it can be proved [4] from the Drucker–Ilyushin postulate of stability, that the criterion of damage is necessarily of the form $-\partial\psi/\partial D(\boldsymbol{\varepsilon}, D) \leq k(D)$, where $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, D)$ is the damage-dependent elastic potential and $k(D)$ is a positive damage-dependent constant. That fundamental result gives to the damage law a variational structure that will play a fundamental role. But it turns out that even if this type of standard damage models are thermodynamically consistent, they have bad mathematical properties as soon as they give rise to a stress softening behaviour and hence cannot be used to model fracture. The reason is that it becomes possible to break a body without spending any energy as in the case of the notched specimen of Figure 1, because the localisation of damage is not controlled. This ill-posed character is confirmed by numerical simulations, the results being strongly dependent on the mesh. Accordingly, many types of non-local damage models have been proposed but without a rigorous link with the Griffith fracture theory was established. The solution came from Ambrosio and Tortorelli who proved in [5, 6] that, in the context of image segmentation, the Mumford–Shah functional, which is similar to the mechanical energy in Griffith theory, can be approximated by a functional which can be interpreted as an energy of a damage model with an additional term containing the damage gradient. This fundamental result is established by Gamma-convergence where the small parameter corresponds to a length which fixes the size of the damage localisation. It was possible to actually transpose this idea in damage and fracture mechanics, which required in particular to take into account the irreversibility of the damage process. Finally, a typical energy functional which is used is the so-called AT1 model. It reads as $\mathcal{E}_t(\mathbf{u}, D) = \int_{\Omega} W_t(\boldsymbol{\varepsilon}, D, \nabla D) dx - \mathbf{f}_t(\mathbf{u})$ where \mathbf{f}_t denotes the given exterior forces at time t and W_t is the energy density given by

$$W_t(\boldsymbol{\varepsilon}, D, \nabla D) = \frac{1}{2} (1 - D)^2 \mathbf{A}_0 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_t^0) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_t^0) + \frac{3G_c}{8} \left(\frac{D}{\ell} + \ell \nabla D \cdot \nabla D \right)$$

(where \mathbf{A}_0 is the stiffness tensor of the sound material, $\boldsymbol{\varepsilon}_t^0$ is the given pre-strain at time t and ℓ is a length). From a theoretical point of view, starting from this form of the energy, the damage evolution process is governed by an irreversibility condition, a stability criterion and an energy

balance [7–9]. In particular the stability criterion is the heir of Griffith's energy minimisation principle and reads as

$$\mathcal{E}_t(\mathbf{u}_t, D_t) \leq \mathcal{E}(\mathbf{u}^*, D^*), \quad \forall (\mathbf{u}^*, D^*) \text{ close to } (\mathbf{u}_t, D_t), 1 \geq D^* \geq D_t$$

where the notion of neighbourhood is given by the $H^1(\Omega)$ norm. By standard arguments of the calculus of variations, one deduces that the local damage criterion reads now

$$\frac{1}{(1-D_t)^3} S_0 \boldsymbol{\sigma}_t \cdot \boldsymbol{\sigma}_t + \frac{3G_c \ell}{4} \Delta D_t \leq \frac{3G_c}{8\ell},$$

where S_0 is the sound compliance tensor and $\boldsymbol{\sigma}_t$ is the current stress. So it contains the additional term in laplacian D which comes from the damage gradient terms of the energy. Therefore, the maximal uniaxial stress that the material can sustain is given by $\sigma_c = \sqrt{\frac{3G_c E_0}{8\ell}}$, and it can be shown that the optimal damage profile to create a crack is parabolic with a width equal to 4ℓ [10]. The variational formulation is also very useful from a numerical point of view. Specifically, after a time discretisation, the displacement and damage state at time step i is obtained by an alternate minimisation algorithm: the energy at time step i is minimised with respect to \mathbf{u} at given D , then with respect to D (under the constraint of irreversibility) at fixed \mathbf{u} up to convergence [11]. Moreover each minimisation admits a unique solution and is easy to implement by virtue of the convexity and the quadratic character of the energy with respect to each variable.

In a first time, the gradient damage model was used as an approximation of Griffith model, in the spirit of Ambrosio–Tortorelli. In that case, the length has a purely numerical meaning and can be chosen as small as desired. The advantage with respect to the original Griffith formulation is that it becomes possible to manage arbitrary crack paths in space and time with classical finite elements. Several examples have illustrated those qualities [11–13]. But by considering the length ℓ as an arbitrary small parameter one falls in the defect of the Griffith theory and one cannot explain the nucleation of a crack because the critical stress tends to infinity as $1/\sqrt{\ell}$. Therefore it becomes necessary to consider that the length ℓ is a characteristic length of the *material* which can be identified from the measurement of E_0 , σ_c and G_c by virtue of the relation coming from the optimal damage profile:

$$\ell = \frac{3G_c E_0}{8\sigma_c^2}.$$

And even if the Gamma-convergence result can no more be used because one does no more pass to the limit in ℓ , one practically recovers the Griffith theory as soon as the characteristic material length is small by comparison with the length of the crack [14].

The thermal shock experiment is an illuminating example of application of the variational approach to fracture, see [15, 16] for the details. One considers a rectangular specimen at the initial temperature T_0 the upper side of which is submitted to a colder temperature T_1 from time $t = 0$ whereas the normal displacement of the lateral sides are prohibited. The resulting problem is solved numerically by the alternate minimisation algorithm with the model AT1. The computed evolution of the damage field is shown in Figure 2: (i) The damage is initiated from time 0 on the upper side of the sample $x_2 = 0$, then gradually propagates inwards while remaining uniform in x_1 until a critical time where a bifurcation appears with a periodic bifurcation mode; (ii) The damage becomes dependent on x_1 and while increasing is gradually localised at the center of each period to finally give rise to cracks; (iii) Once the network of cracks has been established, and their length and spacing are sufficiently large compared to the characteristic length of the material ℓ , these cracks propagate by practically following Griffith's law: they grow by always reproducing the same parabolic profile of damage which corresponds to a dissipated energy G_c per unit length. A period doubling phenomenon is observed at regular intervals: one out of two cracks stopping while the other continues to propagate. The comparison with the experimental tests on ceramics made by [17] is shown in Figure 3 for $T_0 - T_1 = 380^\circ\text{C}$. The length

L of the sample is 50 mm whereas the measurement of the material parameters gives $\ell = 46\mu\text{m}$. The agreement is really excellent, but it concerns only the last phase of the damage process, when the network of cracks is established, because the experimental data are not precise enough for the two first phases.

The problem of the nucleation of a crack at the tip of a notched specimen is another fundamental test for the ability of gradient damage models to predict with a good precision the critical load at which the phenomenon occurs. If we consider again the notched specimen of Figure 1, the issue of a crack nucleation can be treated neither by Griffith's theory nor by local damage models, as it has been seen above. But it becomes possible with gradient damage models. That has been done in [18] by using the AT1 model where the numerical predictions are compared with experiments made for several materials and a range of notch angles $\omega \in [0, \pi/2]$. Here also the agreement is very good.

To conclude, it seems possible to correct some fundamental defects of Griffith's fracture theory by using gradient damage models coupled with a variational approach. At the present time, this ability has been checked only in the (too) restricted context of the quasi-static behaviour of brittle materials. Some extensions to a dynamic context, to ductile fracture, to fatigue or to incompressible materials have been proposed, but it remains to check their validity by comparing their predictions with fundamental experimental results. However this approach, which is essentially based on the phenomenological concept of a damage variable representing collectively micro-defects, cannot explore the nucleation and the propagation of defects at a micro-scale. Therefore it must be complemented by an approach capable of doing so. A good candidate could be the cohesive force models which have all the required qualities.

1. La théorie de la rupture fragile de Griffith : son apport et ses lacunes

Griffith publia, il y a maintenant un siècle, un article [1] jetant les bases d'une théorie de la rupture conçue pour les matériaux fragiles qui dès lors influencera tous les travaux de modélisation qui seront entrepris sur cette problématique. Elle s'appuie sur deux hypothèses clés, toutes deux de nature énergétique : (i) l'énergie à apporter pour créer de nouvelles surfaces fissurées est proportionnelle à ces surfaces; (ii) les fissures se propagent dans une structure suivant un principe de minimisation d'énergie.

- (1) *L'hypothèse de proportionnalité de l'énergie de surface à la surface des fissures.* Cette hypothèse a évidemment le mérite d'être simple puisqu'elle permet de n'introduire qu'une constante matériau supplémentaire dans le cas d'un milieu isotrope : la densité d'énergie de surface G_c (qui dépend du point matériel dans le cas d'un milieu hétérogène). Elle peut partiellement se justifier à l'échelle atomique à partir de potentiels interatomiques et correspond en première approximation à l'énergie de surface fournie par deux plans atomiques infiniment éloignés l'un de l'autre. Mais il va s'avérer que cette hypothèse simplificatrice s'accompagne d'effets secondaires néfastes en ne permettant pas d'expliquer des phénomènes fondamentaux comme la nucléation de nouvelles fissures et la propagation par fatigue de fissures existantes, ou en prédisant des effets d'échelle manifestement irréalistes. C'est elle qui va conduire à développer la mécanique de l'endommagement pour pallier aux lacunes de la théorie de Griffith.
- (2) *Le principe de minimisation de l'énergie.* Cette deuxième hypothèse, bien qu'énoncée de façon vague dans [1], généralise à un cadre dissipatif le théorème bien connu de l'énergie potentielle pour les milieux conservatifs, à condition de rajouter l'énergie de surface dissipée à l'énergie potentielle. (Ce n'est bien sûr plus un théorème mais une hypothèse sur la loi d'évolution de la fissuration.) Elle ne sera utilisée dans un premier temps que pour traiter quelques exemples académiques simples, faute d'outils disponibles pour

la mettre en oeuvre dans un cadre général. Mais son principe même se prêtait à une généralisation et allait permettre de construire les outils nécessaires à son application. Toutefois, cela pris du temps et il y eut des périodes où l'on oublia le principe énergétique pour développer d'autres approches.

En particulier, on se focalisa longtemps sur le concept de facteur d'intensité des contraintes associé à la présence de singularités en fond de fissure [19]. (Rappelons que ces singularités sont dues à l'hypothèse sur l'énergie de surface qui implique l'absence de forces cohésives entre les lèvres des fissures et donc au bout du compte autorise des contraintes infinies.) Cette propriété prit tellement d'importance qu'il était et est encore fréquent de voir des cours d'introduction à la mécanique de la rupture (fragile) commencer par la description des fameux modes singuliers I, II et III alors qu'ils sont spécifiques à l'élasticité linéaire, homogène et isotrope. Les singularités changent (et on ne sait pas toujours les caractériser) dans d'autres situations (interfaces, coins, anisotropie, élasticité non linéaire, ...). Il est donc difficile de bâtir une théorie générale en se basant sur ce concept. Pourtant, c'est ce qu'on fut tenter de faire en introduisant un critère de propagation basé sur le concept de ténacité, autrement dit de facteur d'intensité des contraintes critique. En première lecture, il est pour le moins curieux d'un point de vue physique de postuler qu'une fissure se propage quand un coefficient de singularité des contraintes dépasse une valeur caractéristique du matériau. Bien sûr, le lien peut être fait avec les concepts énergétiques via la formule dite d'Irwin, mais tout ceci ne vaut que dans un cadre trop restreint.

Venons-en à une formulation plus précise de la loi d'évolution de la fissuration. En suivant l'idée de Griffith et en se limitant au cadre quasi-statique de matériaux isotropes fragiles en petites déformations, on peut associer, à chaque instant t , à un champ de déplacement \mathbf{u} et à un état de fissuration Γ l'énergie $\mathcal{E}_t(\mathbf{u}, \Gamma)$ de la structure Ω soumise à des forces extérieures (surfaiques ou volumiques) caractérisées par la forme linéaire \mathbf{f}_t :

$$\mathcal{E}_t(\mathbf{u}, \Gamma) = \mathcal{P}_t(\mathbf{u}, \Gamma) + \mathcal{S}(\Gamma),$$

$\mathcal{P}_t(\mathbf{u}, \Gamma)$ et $\mathcal{S}(\Gamma)$ étant respectivement l'énergie potentielle et l'énergie de surface,

$$\mathcal{P}_t(\mathbf{u}, \Gamma) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \frac{1}{2} \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}_t^0) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}_t^0) dx - \mathbf{f}_t(\mathbf{u}), \quad \mathcal{S}(\Gamma) = \int_{\Gamma} G_c dS$$

où \mathbf{A} désigne le tenseur de rigidité, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ le gradient symétrisé du champ de déplacement \mathbf{u} et $\boldsymbol{\varepsilon}_t^0$ la prédéformation imposée localement à l'instant t (typiquement la déformation thermique via la température). En supposant connu l'état de fissuration Γ et à condition bien sûr que les efforts extérieurs et l'état de fissuration soient compatibles avec l'équilibre, on peut déterminer le champ de déplacement réalisant l'équilibre à l'instant t , ce champ $\mathbf{u}_t(\Gamma)$ dépendant à la fois de t et de Γ . Ce faisant, l'énergie devient une fonctionnelle de l'état de fissuration Γ :

$$\widehat{\mathcal{E}}_t(\Gamma) = \mathcal{E}_t(\mathbf{u}_t(\Gamma), \Gamma).$$

Il reste à préciser le principe de minimisation. Un choix fort, dans l'esprit de [20] ou [21] mais aussi de [1], serait de choisir l'état de fissuration à l'instant t correspondant à la plus petite énergie de la structure parmi tous les états possibles qui respectent la condition d'irréversibilité. Cette condition dite de stabilité *globale* s'écrirait alors : $\widehat{\mathcal{E}}_t(\Gamma_t) \leq \widehat{\mathcal{E}}_t(\Gamma), \forall \Gamma \supset \Gamma_t$. (Rappelons qu'il faudrait lui adjoindre en plus un bilan d'énergie pour compléter la formulation, mais nous n'en aurons pas besoin ici, cf. [7].) Des résultats d'existence de solution à ce problème d'évolution ont été obtenus [22] mais uniquement dans le cas de conditions aux limites de type Dirichlet (autrement dit avec $\mathbf{f}_t = 0$). Et il n'y a aucun espoir de pouvoir les généraliser aux cas où les efforts extérieurs donnés ne sont pas nuls, car alors l'énergie n'est plus bornée inférieurement. (Dit de façon grossière, il suffit d'envisager des Γ qui coupent la structure en deux et d'envoyer un des morceaux à l'infini.) Mais même dans le cas où \mathbf{f}_t est nul et où l'énergie est donc bornée inférieurement, ce choix de minimum global est discutable car, pour « sauter » d'un état de

fissuration à un autre de moindre énergie, la structure pourrait avoir à franchir des barrières d'énergie. Il est donc plus raisonnable de n'introduire qu'une condition de stabilité « locale » qui prend la forme suivante :

$$\widehat{\mathcal{E}}_t(\Gamma_t) \leq \widehat{\mathcal{E}}_t(\Gamma), \quad \forall \Gamma \supset \Gamma_t, \Gamma \text{ voisin de } \Gamma_t.$$

Maintenant, toute la difficulté réside dans le choix de ces voisinages. En s'en tenant à l'approche minimaliste qui a longtemps prévalu, on n'utilise ce critère de stabilité qu'en envisageant des trajets de fissure prédéfinis. Par exemple, en déformations planes et en supposant que la fissure se propage de façon rectiligne dans un milieu homogène, les énergies (par unité d'épaisseur) deviennent des fonctions de ℓ à t fixé, soit $\widehat{\mathcal{E}}_t(\ell) = \widehat{\mathcal{P}}_t(\ell) + G_c \ell$ et le critère de stabilité s'écrit

$$\widehat{\mathcal{E}}_t(\ell_t) \leq \widehat{\mathcal{E}}_t(\ell_t + h), \quad \forall h > 0, h \text{ assez petit}.$$

En dérivant par rapport à h en $h = 0$ on obtient le critère de Griffith : $G_t \leq G_c$, G_t représentant le taux de restitution d'énergie potentielle : $G_t = -\frac{d\widehat{\mathcal{P}}_t}{d\ell}(\ell_t)$. On voit donc que le critère de Griffith n'est qu'un critère de stabilité d'ordre 1 (par rapport au petit paramètre de perturbation) obtenu en n'envisageant qu'une famille particulière de perturbations. C'est dans ce cadre restreint du principe de minimisation de l'énergie de Griffith que s'est développée et a été utilisée à la fin du vingtième siècle la théorie de la mécanique de la rupture fragile, une partie importante des travaux d'innovation s'étant focalisée sur la mise au point de méthodes robustes du calcul du taux de restitution de l'énergie potentielle [23–25]. Toutefois, ce cadre restreint suffit pour montrer les deux principaux défauts de la théorie de Griffith :

- (1) Des effets d'échelle irréalistes aux petites échelles;
- (2) L'impossibilité de rendre compte de la nucléation de nouvelles fissures.

Comme nous allons le mettre en évidence sur un exemple simple, ces défauts sont essentiellement dus au choix de l'énergie de surface. Considérons une bande (faite d'un matériau isotrope, linéairement élastique) infinie dans la direction 1 et de largeur $2L$ dans la direction 2 contenant une fissure centrée de longueur 2ℓ et d'orientation 2. Si on la soumet à une contrainte de traction σ à l'infini dans la direction 1, la fissure se trouve en mode I et le facteur d'intensité des contraintes à chaque pointe se calcule explicitement et vaut

$$K_I = \sigma \sqrt{\frac{\pi \ell}{\cos \frac{\pi \ell}{2L}}}.$$

En utilisant la formule d'Irwin (en déformation plane) on en déduit le taux de restitution d'énergie $G = (1 - \nu^2) \frac{\pi \ell}{\cos \frac{\pi \ell}{2L}} \frac{\sigma^2}{E}$, et en utilisant le critère de Griffith, on en déduit que la contrainte σ_r d'amorçage de la propagation (qui dans le cas présent sera aussi la contrainte de rupture) vaut

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{EG_c}{1 - \nu^2} \frac{\cos \frac{\pi \ell}{2L}}{\pi \ell}}.$$

Par conséquent à rapport ℓ/L constant, la contrainte à rupture varie en fonction de la largeur de la bande comme $1/\sqrt{L}$. Cet effet d'échelle est bien conforme à ce que l'on observe dans de nombreux matériaux fragiles pour de grandes valeurs de L , mais est manifestement irréaliste pour des petites valeurs de L , σ_r tendant vers l'infini quand L tend vers 0. De plus, si on raisonne à L fixé et si on fait tendre ℓ vers 0, on voit que G tend vers 0 comme ℓ et σ_r tend vers l'infini comme $1/\sqrt{\ell}$. On ne peut donc créer de fissure si on suit le critère de Griffith. Ces mauvaises propriétés ne sont pas spécifiques à l'exemple choisi et peuvent être considérées comme intrinsèques à la théorie de Griffith.

2. La mécanique de l'endommagement : son ambition et ses réalisations

Il manque dans la théorie de Griffith une contrainte critique que le matériau ne peut pas dépasser. Une façon simple d'introduire cette contrainte critique est d'abandonner l'hypothèse sur l'énergie surface et de tenir compte des forces cohésives qui existent tant que les lèvres ne sont pas suffisamment séparées (ce qui revient à faire dépendre la densité d'énergie de surface du saut des déplacements et non plus à la considérer comme une constante). C'est par essence l'idée de Barenblatt [2], mais cette voie ne fut que partiellement explorée. Ce fut la mécanique de l'endommagement qui apparut comme la plus à même de fournir un cadre général pour rendre compte de la nucléation des fissures « macroscopiques ». Sous l'impulsion de Lemaître et Chaboche [26], qui s'appuyèrent sur les travaux de Kachanov [3], se développa le concept de contrainte effective définie comme la contrainte réelle divisée par $1 - D$, D étant la variable caractéristique de l'endommagement. Cette définition s'accompagnait d'une règle de substitution dans les lois de comportement des matériaux, la contrainte effective remplaçant formellement la contrainte réelle dans les relations où cette dernière apparaissait. Quant à l'interprétation de la variable d'endommagement, elle était censée représenter des microfissures et des microvides en fournissant le degré de développement. On peut trouver paradoxale la démarche qui consiste à vouloir rendre compte de l'apparition de macrofissures tout en supposant l'existence d'un réseau de microfissures dont l'état et l'évolution ne sont traités que de façon collective. En fait, il faut y voir là une forme de renoncement à comprendre la nucléation aux petites échelles. Comme la théorie de Griffith ne fonctionne pas à ces échelles-là, on fait le pari qu'il existe une loi capable de justifier l'apparition et la croissance progressive de ces micro-défauts avant qu'ils ne coalescent en macrofissures, mais on n'ambitionne pas de découvrir cette loi. Les conséquences de ce renoncement est qu'il faut en contrepartie faire des choix : sur la ou les variables d'endommagement (leur nombre, leur caractère tensoriel, leur caractère local ou non local, ...), sur leur influence sur le comportement du matériau et sur leur évolution, avec pour seul guide quelques essais expérimentaux. Autrement dit, l'approche devient purement phénoménologique. Il y eut bien quelques tentatives comme dans [27, 28] pour construire des lois d'endommagement en partant de mécanismes microstructuraux, mais ce fut toujours au prix de grandes simplifications et une large part d'arbitraire demeurait quant au choix de la loi d'évolution. Cette absence de lien explicite avec les mécanismes physiques sous-jacents s'avèrera être une des principales faiblesses de l'approche.

Le concept de contrainte effective fut progressivement abandonné vu son manque de justification physique et on s'orienta vers la construction de modèles d'endommagement s'appuyant sur la thermodynamique des processus irréversibles comme il était alors la coutume de faire pour rendre compte des autres aspects dissipatifs du comportement des matériaux. La ou les variables d'endommagement prenaient donc le statut de variables internes intervenant dans les relations constitutives et auxquelles on devait rajouter une loi d'évolution. Il apparut très vite [29] qu'on pouvait utiliser le cadre du formalisme des matériaux standards généralisés [30] pour écrire ces lois, ce qui permettait de mettre dans un moule unique les lois de comportement usuelles des matériaux en y incluant l'endommagement. Il s'avère que les lois standards du type *rate independent* peuvent se justifier sans passer par ce formalisme aux bases physiques incertaines grâce au postulat de Drucker-Ilyushin qui requiert que le travail de déformation de l'élément de volume soit non négatif lorsque celui-ci est soumis à un cycle en déformation. En effet, rappelons qu'en plasticité parfaite on montre [4], moyennant des hypothèses très faibles sur le critère de plasticité et la loi d'écoulement plastique, que ce postulat est « équivalent » au principe du travail maximal de Hill et donc qu'il impose la convexité du domaine d'élasticité et la règle de normalité de l'écoulement. Dans le cas des lois d'endommagement fragile à seuil décrites à l'aide d'une variable « scalaire », on obtient également [4] un résultat très fort qui est rattaché ci-dessous.

(Dans le cas de plusieurs variables d'endommagement scalaires ou de variables d'endommagement vectorielles ou tensorielles, les conséquences du postulat sont moins spectaculaires. Mais comme la grande majorité des travaux réalisés à ce jour l'ont été dans le cadre scalaire, nous limiterons désormais notre exposé à ce cas-là.)

Soit $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, D)$ le potentiel élastique du matériau fragile, dépendant uniquement de la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et de la variable d'endommagement scalaire D , dont on déduit les contraintes $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, D)$. En exigeant que $\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} \geq 0$ pour tout cycle en déformation \mathcal{C} , on en déduit, moyennant des hypothèses très faibles sur le critère d'endommagement, que ce dernier doit nécessairement s'écrire

$$-\frac{\partial \psi}{\partial D}(\boldsymbol{\varepsilon}, D) \leq k(D),$$

où $k(D)$ est une fonction positive arbitraire de D . Ce faisant, le travail de déformation devient une « fonction d'état », ne dépendant que de l'état $(\boldsymbol{\varepsilon}, D)$, s'écrivant

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, D) = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, D) + w(D),$$

où $w(D)$, la primitive de $k(D)$ nulle en $D = 0$, représente l'énergie dissipée lorsque l'élément de volume passe de l'état sain à l'état endommagé D . En rajoutant la condition d'irréversibilité et le fait que l'endommagement n'évolue que quand la déformation est au seuil, on a donc obtenu une loi d'évolution « standard » :

$$\dot{D} \geq 0, \quad \frac{\partial W}{\partial D}(\boldsymbol{\varepsilon}, D) \leq 0, \quad \frac{\partial W}{\partial D}(\boldsymbol{\varepsilon}, D) \dot{D} = 0.$$

En n'envisageant que des modèles où l'énergie dissipée après endommagement total de l'élément de volume prend une valeur finie $w_1 > 0$, moyennant un changement de variable d'endommagement, on peut supposer que $w(D) = w_1 D$ et $D \in [0, 1]$ représente alors la fraction actuelle d'énergie dissipée. Les modèles d'endommagement fragile se distinguent donc seulement par la dépendance en D de l'énergie élastique $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, D)$ et par la valeur de w_1 . Dans le cas d'un matériau à comportement linéairement élastique à état d'endommagement fixé, il ne reste plus alors qu'à identifier ou à choisir la dépendance en D du tenseur de rigidité $A(D)$ ou de son inverse le tenseur de souplesse $S(D)$ (le premier étant une fonction décroissante de D alors que le deuxième en est une fonction croissante). De plus, le domaine d'élasticité est nécessairement un ellipsoïde variant avec D , aussi bien dans l'espace des déformations ($-A'(D)\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \leq 2w_1$) que dans l'espace des contraintes ($S'(D)\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \leq 2w_1$). Les propriétés d'écrouissage se déduisent des signes des dérivées secondes de $A(D)$ et $S(D)$. En particulier, les matériaux adoucissants (ceux dont les contraintes au seuil décroissent quand D augmente alors que les déformations au seuil croissent) correspondent à $A''(D) < 0$ et $S''(D) > 0$ (ces deux inégalités devant se comprendre au sens des formes quadratiques).

Les années 80 ont été essentiellement occupées à justifier et à construire des modèles d'endommagement « locaux », le cadre « standard » permettant, comme on vient de le souligner, de réduire considérablement les choix. Si ces modèles permettaient, par construction, d'envisager la rupture de l'élément de volume par perte de rigidité totale ($A(1) = 0$), le lien avec la mécanique de rupture restait à faire. Et c'est là que les difficultés commencèrent à apparaître. Il était clair que seuls les modèles adoucissants où les contraintes décroissent progressivement vers 0 au fur et à mesure que l'endommagement augmente étaient susceptibles de rendre compte de la nucléation de fissures, mais surgissait alors une difficulté d'ordre mathématique que l'on n'avait pas rencontrée jusqu'ici dans les modèles de comportement usuels : celle de la perte de monotonie de la relation contrainte-déformation lors des phases d'endommagement. Il avait été déjà noté en plasticité parfaite que la perte de la stricte monotonie pouvait s'accompagner de phénomènes de charges limites, de localisations de la déformation et de non unicités de la réponse en déplacements, mais on conservait un résultat d'unicité des contraintes (du moins dans le cadre des lois « standards »). Mais pour les modèles d'endommagement adoucissants les choses empirent :

on risque toujours la non existence de solutions du fait que les contraintes sont bornées (c'est la notion de charges limites), mais quand il y a existence de solutions, il n'y a généralement plus unicité ni en déplacements ni en contraintes. Il est par exemple facile de construire une infinité de solutions au problème unidimensionnel d'une barre en traction sous déplacement contrôlé aux extrémités. De plus, l'endommagement peut se localiser sans que cela coûte de l'énergie. De ce point de vue l'exemple bidimensionnel d'une éprouvette entaillée est des plus instructifs, cf. figure 1.

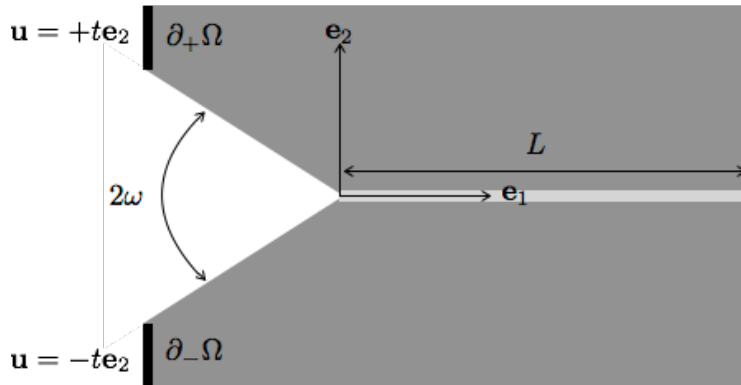


FIGURE 1. Eprouvette entaillée dont le demi-angle d'entaille $\omega \in (0, \pi/2)$ et dont les bords $\partial_{\pm}\Omega$ sont soumis à des déplacements $\pm t\mathbf{e}_2$, t représentant le paramètre de chargement, les autres bords étant libres. La bande en gris clair partant du fond d'entaille représente la zone où $D = 1$, ailleurs $D = 0$.

Considérons le champ d'endommagement où D vaut 1 sur une bande de longueur L et d'épaisseur h partant du fond d'entaille et séparant les parties supérieure et inférieure de l'éprouvette, alors que D vaut 0 ailleurs. Les déplacements d'équilibre correspondent aux translations $\pm t\mathbf{e}_2$ des parties supérieure et inférieure, les contraintes sont donc partout nulles et il n'y a pas d'énergie élastique dans l'éprouvette. Et comme l'énergie dissipée pour créer cette zone endommagée est proportionnelle au volume, elle vaut donc ici $w_1 Lh$. Par conséquent, en faisant tendre h vers 0, elle tend vers 0. On peut donc rompre cette éprouvette sans que cela coûte de l'énergie et ce, quelle que soit l'intensité du chargement t . Notons le singulier contraste avec la théorie de Griffith. En effet si l'on considère cette même éprouvette soumise au même chargement dans la théorie de Griffith (avec un comportement linéairement élastique du matériau), il n'y aura jamais nucléation d'une fissure en fond d'entaille car, bien que les contraintes y soient singulières en $r^{-\alpha}$, la singularité est faible ($\alpha > 1/2$ du fait que $\omega > 0$) et le taux de restitution d'énergie d'une fissure de longueur ℓ tend vers 0 quand ℓ tend vers 0. Donc avec la théorie de Griffith il n'y a pas nucléation car il n'y a pas assez d'énergie potentielle à restituer pour créer l'énergie de surface, mais avec un modèle d'endommagement local adoucissant il y a rupture dès la mise en charge car comme on autorise la localisation de l'endommagement dans des bandes d'épaisseur arbitrairement petites la création de zone endommagée ne coûte pas d'énergie. Ces modèles d'endommagement contiennent bien la notion de contrainte bornée, mais en contrepartie ils donnent lieu à des énergies de surface nulles. Il manque donc un ingrédient si l'on veut faire le lien avec la rupture.

Remarque. À ce stade, il est bon de souligner qu'il ne suffit pas qu'un modèle satisfasse tous les canons de la thermodynamique pour qu'il soit pertinent. La communauté a perdu beaucoup de temps en se référant à ce seul dogme. Dans le cas d'espèce, on ne pouvait pas déduire sa

pertinence en se contentant de raisonner sur l'élément de volume, il fallait aussi étudier les problèmes aux limites auxquels ils conduisent. Ce qui avait été vrai jusqu'ici où on avait toujours travaillé dans l'univers paradisiaque des fonctionnelles convexes, ne l'était plus dès lors que l'on avait franchi les portes de l'enfer du non convexe. Faute d'outils d'analyse mathématique disponibles (et peut-être aussi à cause de la perte progressive de compétences dans ce domaine par la communauté internationale des mécaniciens du solide), on s'en remit aux simulations numériques pour tester les modèles. Si cela suffit à exhiber quelques défauts, ce ne fut pas suffisant pour qu'on en trouvât l'issue.

Avec le développement des ordinateurs et la possibilité de faire du calcul de structures avec de plus en plus de degrés de liberté, les défauts de ces modèles d'endommagement locaux apparurent assez vite : on constata que les résultats numériques étaient très sensibles au maillage et en particulier à sa finesse, plus le maillage était fin et plus les zones endommagées se localisaient. Pour pallier cette difficulté certains proposèrent que la longueur de maille devînt un paramètre du modèle, mais cette position saugrenue n'était pas tenable et il fallut se résoudre à changer le modèle physique de façon à limiter la localisation de l'endommagement. C'est ainsi qu'apparurent les modèles non locaux (et de nombreuses autres variantes) [31] où sont utilisées des intégrales pour « délocaliser » le champ d'endommagement. Mais s'ils jouaient bien le rôle de limiteur de la localisation et rendaient les résultats numériques dans une certaine mesure indépendants du maillage, leur lien précis avec la rupture et la théorie de Griffith n'était toujours pas établi car l'on ne peut se contenter de règles formelles d'équivalence entre endommagement et fissuration [32]. La lumière vint de l'école italienne de Calcul des Variations dont le père spirituel était De Giorgi et des articles d'Ambrosio et Tortorelli [5, 6]. Dans le cadre de la segmentation d'image, les auteurs montrèrent que la fonctionnelle de Mumford–Shah qui en dimension 3 s'écrit

$$\mathcal{E}(u, \Gamma) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} (\nabla u \cdot \nabla u + \alpha(u - f)^2) dx + \beta \text{aire}(\Gamma),$$

(où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^3 , f est une fonction donnée, α et β sont des constantes positives, u est un champ scalaire qui peut être discontinu sur la surface Γ) pouvait être approchée, au sens de la Gamma-convergence [33], par la fonctionnelle régularisée

$$\mathcal{E}_\eta(u, D) = \int_{\Omega} ((1 - D)^2 \nabla u \cdot \nabla u + \alpha(u - f)^2) dx + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{D^2}{\eta} + \eta \nabla D \cdot \nabla D \right) dx,$$

(où η est un petit paramètre, le champ u est maintenant régulier dans Ω et le champ D est scalaire, prenant ses valeurs entre 0 et 1). Ce résultat de Gamma-convergence signifie en particulier que les minima de \mathcal{E}_η convergent vers le minimum de \mathcal{E} et que les minimiseurs (u_η, D_η) de la fonctionnelle régularisée convergent (dans un sens approprié) vers les minimiseurs (u, Γ) de la fonctionnelle d'origine quand η tend vers 0. Le lien avec la rupture est clair : les champs u et D représentent les champs de déplacement et d'endommagement, les surfaces de discontinuité Γ représentent les fissures, l'énergie $\beta \text{aire}(\Gamma)$ représente l'énergie de Griffith et donc le terme $\frac{\beta}{2} \int_{\Omega} (\frac{D^2}{\eta} + \eta \nabla D \cdot \nabla D) dx$ représenterait l'énergie dissipée par endommagement. On voit qu'il contient le terme régularisé en gradient d'endommagement affecté du petit paramètre de convergence. C'est l'ingrédient qui manquait : un terme supplémentaire dans l'énergie qui interdit une localisation excessive de l'endommagement et qui exige la dépense d'une énergie finie pour amener l'endommagement à 1. Notons que ce résultat s'appuie de façon essentielle sur une approche variationnelle et un principe de minimisation d'énergie. Toutes les autres approches de régularisation, faute d'outils comparables, n'avaient pas été capables de fournir des preuves irréfutables de leur prétendu bien-fondé.

Il restait à transposer effectivement ce résultat établi en segmentation d'image au cadre de l'endommagement et de la rupture. Pour cela il fallait (i) considérer des champs \mathbf{u} vectoriels

et non scalaires; (ii) tenir compte de l'irréversibilité de l'endommagement; (iii) envisager des chargements et des conditions aux limites plus générales. Tout ceci ne constituait pas des difficultés insurmontables (du moins en principe) même si chaque étape de cette transposition fit apparaître de nouvelles difficultés techniques [11, 34]. Il s'avéra même nécessaire de ne pas s'en tenir à la fonctionnelle d'Ambrosio–Tortorelli mais d'envisager des modèles d'endommagement plus généraux [8, 9], tout en conservant la propriété de convergence vers le modèle de Griffith. Par exemple, le modèle d'endommagement à gradient (baptisé AT1 alors que celui d'Ambrosio–Tortorelli était appelé AT2) caractérisé par la densité d'énergie suivante

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, D, \nabla D) = \frac{1}{2}(1-D)^2 A_0(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) + \frac{3G_c}{8} \left(\frac{D}{\ell} + \ell \nabla D \cdot \nabla D \right)$$

(où A_0 est le tenseur de rigidité du matériau sain, $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ est la prédéformation et ℓ la dimension d'une longueur) possède les propriétés requises. Il diffère de l'original simplement par le terme linéaire en D qui remplace le terme quadratique (d'où leur nom) et le coefficient multiplicatif de G_c . L'énergie totale de la structure dans l'état (\mathbf{u}, D) s'écrit donc à un instant donné

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, D) = \int_{\Omega} W(\boldsymbol{\varepsilon}, D, \nabla D) dx - \mathbf{f}(\mathbf{u}),$$

avec une dépendance en temps de $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ et \mathbf{f} . Bien sûr, le résultat de Gamma-convergence qui s'appuie sur la minimisation globale de l'énergie ne peut pas s'appliquer en présence de forces données non nulles, ni la fonctionnelle de Griffith ni sa régularisée n'étant alors bornées inférieurement. Il faut affaiblir le principe de minimisation et introduire comme dans le cas de la théorie de Griffith une condition plus faible de stabilité locale tenant compte de l'irréversibilité de l'endommagement :

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, D) \leq \mathcal{E}(\mathbf{u}^*, D^*), \quad \forall (\mathbf{u}^*, D^*) \text{ voisin de } (\mathbf{u}, D), D^* \geq D$$

avec la norme $H^1(\Omega)$ comme choix naturel de la norme fixant la notion de voisinage. En y adjoignant un bilan d'énergie on a donc obtenu une formulation variationnelle du problème d'évolution de l'endommagement qui est formellement la même que celle qui était utilisée dans les modèles locaux (et qui s'appuie sur les mêmes principes d'irréversibilité, de stabilité et de bilan d'énergie que le modèle de Griffith), à ceci près que l'énergie contient maintenant le terme supplémentaire en gradient d'endommagement, *cf.* [8–10, 35]. De ce fait, le critère d'endommagement local qui correspond à la condition de stabilité d'ordre 1 devient

$$\frac{1}{(1-D)^3} S_0 \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{3G_c \ell}{4} \Delta D \leq \frac{3G_c}{8\ell},$$

où S_0 est le tenseur de souplesse du matériau sain. Dans les zones encore saines où $D = 0$, on retrouve le critère en contraintes du modèle local (dans AT1, $w_1 = 3G_c/8\ell$) et on peut vérifier que l'on a bien une réponse adoucissante qui suit une phase élastique, la contrainte uniaxiale maximale que le matériau peut supporter étant

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{3G_c E_0}{8\ell}}.$$

(C'est cette phase élastique suivie d'un adoucissement qui le distingue du modèle initial d'Ambrosio–Tortorelli, qui lui ne possède pas de phase élastique, mais une phase durcissante suivie d'une phase adoucissante. Cette absence de phase élastique fait que toute la structure s'endommage immédiatement, ce qui constitue une pollution d'un point de vue numérique. Le modèle AT1 corrige ce défaut.) Dans les zones endommagées par contre apparaît le terme non local en laplacien D dû à l'introduction des termes en gradient d'endommagement dans l'énergie. On

déduit du critère modifié le profil de la zone endommagée qui accompagne la création d'une fissure, l'endommagement valant 1 sur les lèvres de la fissure et décroissant vers 0 dans la direction normale. Dans le cas de AT1, ce profil est parabolique avec une demi-largeur égale à 2ℓ .

Dans un premier temps, ces modèles d'endommagement à gradient vont être utilisés comme modèles régularisés de Griffith. Autrement dit, le modèle de Griffith est alors considéré comme le bon modèle physique, le modèle d'endommagement en constituant simplement une approximation via le petit paramètre ℓ et le résultat de Gamma-convergence. C'était d'ailleurs dans cet esprit-là qu'Ambrosio et Tortorelli avaient conçu leur régularisation elliptique. Ceci permettait de simplifier substantiellement le traitement numérique de la segmentation d'image. De la même façon, le modèle d'endommagement allait permettre de traiter la propagation des fissures sans hypothèse *a priori* sur leur trajet spatio-temporel et sans avoir à gérer le délicat problème de surfaces de discontinuités libres. De plus, sa formulation variationnelle se prêtait à un algorithme de minimisation alternée qui consiste à un pas de temps donné à minimiser par rapport à \mathbf{u} à D fixé, puis par rapport à D à \mathbf{u} fixé, jusqu'à convergence. Dans le cas du modèle AT1 où l'énergie est une fonction quadratique (et convexe) de chaque champ pris séparément (alors que l'énergie n'est pas une fonction convexe du couple (\mathbf{u}, D)), ces problèmes de minimisation admettent une solution unique et sont faciles à implémenter : pour \mathbf{u} cela revient à résoudre un problème d'élasticité linéaire, alors que pour D il faut tenir compte de la condition d'irréversibilité ce qui conduit à la minimisation d'une fonctionnelle quadratique sous contrainte. De plus, c'est un algorithme de descente, l'énergie décroissant à chaque itération, ce qui n'assure pas la convergence vers un état stable mais s'avère très robuste en pratique. C'est dans cet esprit de se servir des modèles d'endommagement à gradient pour régulariser le modèle de Griffith que les premiers tests numériques ont été faits et ont permis de mettre en valeur la capacité de l'approche à rendre compte de trajets de fissuration complexes [11–13].

Toutefois, en procédant ainsi et en considérant que la longueur ℓ est purement numérique on perd la possibilité de rendre compte correctement de la nucléation des fissures puisqu'alors la contrainte critique σ_c tend vers l'infini comme $1/\sqrt{\ell}$ et on retombe sur les défauts de la théorie de Griffith. On passe à côté de l'opportunité qui nous est offerte d'en combler une des lacunes, alors que c'était la vocation première de la mécanique de l'endommagement et que l'on a désormais tous les ingrédients pour y parvenir. Il faut donc changer de point de vue et considérer que le modèle d'endommagement est le modèle physique et que le modèle de Griffith n'en est qu'une approximation « aux grandes échelles ». Ce faisant, la longueur ℓ devient une longueur caractéristique du « matériau » (après les changements de variable et les normalisations qui ont conduit à la forme finale du modèle d'endommagement). Dans le cas du modèle AT1, cette longueur se déduit donc de la mesure du module d'Young du matériau sain, de la densité d'énergie de surface G_c et de la contrainte uniaxiale maximale σ_c que le matériau peut supporter :

$$\ell = \frac{3G_c E_0}{8\sigma_c^2}.$$

Cette longueur étant désormais fixée, on ne peut plus utiliser directement le résultat de Gamma-convergence pour faire le lien avec la théorie de Griffith. Toutefois, en considérant des structures dont la taille caractéristique L est grande devant la longueur caractéristique du matériau ℓ , on introduit le petit paramètre ℓ/L dans le problème d'évolution de l'endommagement et le lien avec la théorie de Griffith réapparaît [14, 36].

Le problème du choc thermique traité avec ce type de modèles à gradient en montre toute la richesse et la pertinence. Rappelons brièvement les points marquants qui sont développés dans [15, 16]. On se place en contraintes planes et on considère une éprouvette rectangulaire de largeur L dont la température est T_0 . Elle est soumise à un choc thermique à partir de l'instant $t = 0$, le bord supérieur $x_2 = 0$ étant dès lors maintenu à la température $T_1 < T_0$. Par diffusion thermique et en supposant que l'endommagement ne perturbe pas cette propagation,

le chargement est donc donné par le champ de déformation thermique dépendant du temps $\boldsymbol{\varepsilon}_t^0 = \alpha(T_1 - T_0)\text{Erfc}(\frac{x_2}{2\sqrt{kt}})\mathbf{I}$ où α et k sont les coefficients de dilatation et de diffusion thermiques, Erfc étant la fonction d'erreur complémentaire. Le déplacement normal u_1 des bords latéraux $x_1 = \pm L/2$ étant bloqué, ce refroidissement induit une contrainte de traction σ_{11} dans le matériau qui, s'il restait élastique, vaudrait $\sigma_T = E_0\alpha(T_0 - T_1)$ en $x_2 = 0$. Par conséquent si le choc thermique est assez grand, *i.e.* si la contrainte σ_T est plus grande que la contrainte critique σ_c du matériau, alors le bord supérieur de l'éprouvette va s'endommager dès l'instant 0. En se plaçant dans cette situation, on décrit dans la figure 2 ci-dessous l'évolution de l'endommagement prédit par l'algorithme de minimisation alternée en utilisant le modèle AT1 avec un maillage triangulaire non structuré et en partant d'une éprouvette saine.

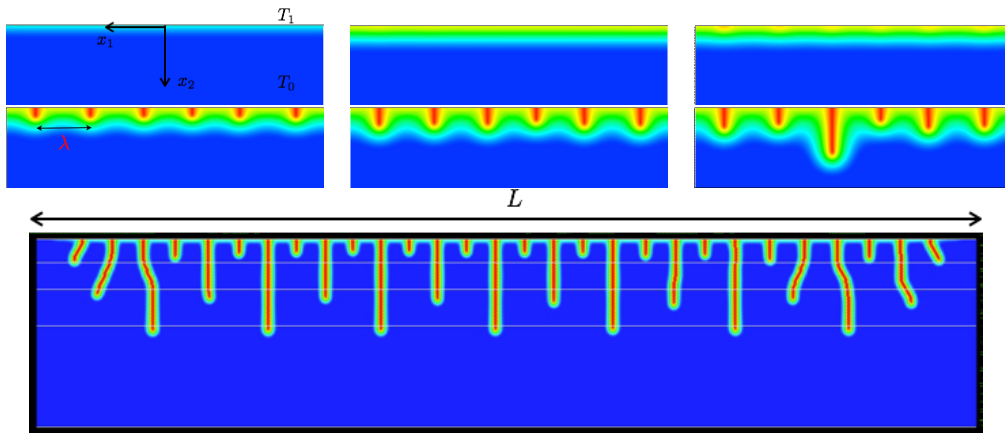


FIGURE 2. Différentes phases de l'évolution de l'endommagement lors du choc thermique lorsque ce choc est suffisamment important : (i) L'endommagement s'initie dès l'instant 0 sur le bord supérieur de l'échantillon $x_2 = 0$, puis se propage progressivement vers l'intérieur tout en restant uniforme en x_1 jusqu'à un instant critique où apparaît une bifurcation avec un mode de bifurcation périodique; (ii) L'endommagement devient dépendant de x_1 et tout en augmentant se localise progressivement au centre de chaque période pour donner finalement naissance à des fissures; (iii) Une fois que le réseau de fissures a été établi, et que leur longueur et leur espacement sont suffisamment grands par rapport à la longueur caractéristique du matériau ℓ , ces fissures se propagent en suivant pratiquement la loi de Griffith : elles avancent en reproduisant toujours le même profil parabolique d'endommagement qui correspond à une énergie dissipée G_c par unité de longueur. On observe un phénomène de doublement de période à intervalles réguliers : une fissure sur deux s'arrêtant alors que la voisine continue à se propager.

Ces résultats appellent quelques commentaires :

- (1) C'est la présence d'une contrainte critique qui déclenche le processus d'endommagement.
- (2) La fin de la première phase est donnée par un problème de bifurcation, la solution uniforme en x_1 cessant alors d'être unique (grâce au caractère adoucissant du modèle d'endommagement). Ce problème de bifurcation est traité analytiquement dans [16] sous l'hypothèse que la taille de l'éprouvette L est grande devant la longueur caractéristique du matériau ℓ . On montre alors, par minimisation d'un quotient de Rayleigh, que le mode de bifurcation du champ d'endommagement est périodique (en fait sinusoïdal) en x_1 avec une période λ qui est proportionnelle à ℓ , le coefficient de proportionnalité

ne dépendant que du coefficient de Poisson et de l'intensité du choc thermique par le rapport σ_T/σ_c . La présence des termes en gradient d'endommagement dans l'énergie est évidemment essentielle. Si l'on ne considérait que des modèles locaux, il y aurait bifurcation dès l'instant 0 avec un mode de bifurcation arbitraire. Ce sont les termes de régularisation qui forcent la périodicité avec une période finie.

- (3) Dans la deuxième phase, celle durant laquelle les fissures se mettent en place par localisation contrôlée de l'endommagement, tous les paramètres du modèle interviennent, aussi bien σ_c que ℓ , on ne peut pas encore se contenter d'utiliser uniquement le modèle de Griffith. C'est évidemment la phase la plus délicate à résoudre. Ce n'est que dans la dernière phase que le modèle de Griffith prévaut [14], seul G_c joue un rôle, σ_c non. Il est d'ailleurs remarquable de constater que l'on a besoin ni d'invoquer la minimisation globale, ni de passer à la limite pour établir un lien fort entre les modèles d'endommagement à gradient et le modèle de Griffith durant cette dernière phase.
- (4) Il est tout aussi remarquable de constater que l'algorithme de minimisation alternée arrive à capter tous les phénomènes importants : il capte l'instant de bifurcation et le mode de bifurcation de la fin de la première phase, il fait avancer les fissures suivant la loi de Griffith durant la troisième phase et il capte le phénomène de doublement de période qui nécessite un « dialogue » entre les fissures.

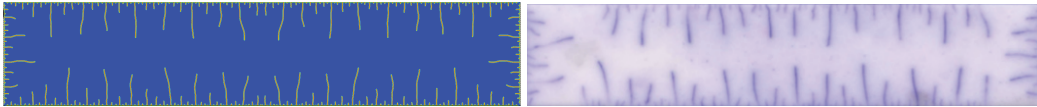


FIGURE 3. Comparaison entre les résultats numériques (à gauche) et les essais expérimentaux (à droite, issus de [17]) pour une éprouvette de céramique, dont les dimensions sont (largeur $L=50$ mm, hauteur = 9.8 mm, épaisseur = 1 mm), soumise à un choc thermique de 380 °C. La longueur caractéristique ℓ est obtenue à partir des mesures de E_0 , σ_c et G_c , ce qui donne ici $\ell = 46\mu\text{m}$. C'est ℓ qui fixe la taille du maillage de façon à ce que l'on puisse calculer précisément les profils d'endommagement, ce qui conduit ici à un nombre d'éléments de quelques millions.

La comparaison avec des résultats expérimentaux est esquissée dans la figure 3, cf. [15] pour plus de détails. Notons toutefois que cette comparaison ne peut se faire que pour la troisième phase, celle où le réseau des fissures est établi, faute de résultats expérimentaux assez précis pour ce qui concerne la phase de nucléation. Il n'en demeure pas moins que ce modèle d'endommagement qui ne comporte que quatre paramètres matériau (en comptant le coefficient de Poisson) est capable de gérer toutes les phases de développement de l'endommagement en partant d'une éprouvette saine et sans aucune hypothèse *a priori* sur l'évolution.

Le problème de la nucléation d'une fissure en fond d'entaille traité en considérant que le modèle d'endommagement à gradient est le modèle physique et comparé avec des résultats expérimentaux va constituer un bon test sur la capacité de ces modèles à être quantitativement prédictifs sur l'occurrence de ce phénomène essentiel pour l'Ingénieur. Considérons donc à nouveau une éprouvette entaillée comme celle de la figure 1, initialement saine et soumise à un chargement croissant (ici à déplacement contrôlé, mais on obtiendrait la même chose à force contrôlée). Nous avons vu que ni le modèle de Griffith, ni les modèles d'endommagement locaux n'étaient aptes à rendre compte correctement de la nucléation d'une fissure en fond d'entaille, le premier ne prévoyant aucune nucléation parce qu'il exige un apport d'énergie trop grand, les deuxièmes prédisant la nucléation immédiate parce qu'ils n'exigent aucun apport d'énergie du tout. Utilisons donc le modèle AT1, en prenant pour longueur caractéristique ℓ celle issue

des mesures de E_0 , σ_c et G_c lors des confrontations avec les résultats expérimentaux comme on l'avait fait pour le problème du choc thermique. Plaçons-nous dans la situation où cette longueur ℓ est petite devant la longueur caractéristique L de l'éprouvette entaillée, ce qui est généralement le cas en pratique. On peut alors utiliser une approche à deux échelles qui simplifie le calcul de la charge de nucléation d'une fissure macroscopique (quantité qui est la seule qui nous intéresse ici). Jusqu'à cette charge de nucléation, si on prend pour longueur de référence ℓ , la zone endommagée va rester localisée en fond d'entaille et en se plaçant assez loin du fond on devrait retrouver une réponse élastique. Par conséquent, en se plaçant à l'échelle macroscopique de la structure, on obtient une bonne approximation du champ de déplacement par un calcul purement élastique. Ce champ de déplacement élastique présente une singularité de la forme : $\mathbf{u}^{\text{sing}}(r, \theta) = K r^\lambda \mathbf{U}(\theta)$, où l'exposant de la singularité $\lambda \in (1/2, 1)$ et la fonction angulaire normalisée sont connus pour un angle d'entaille donnée, alors que le facteur d'intensité des contraintes généralisé K est une quantité globale dépendant de la géométrie et du chargement. On peut donc déduire du calcul élastique la valeur K_t de K pour une intensité t du chargement (la relation entre K_t et t est évidemment linéaire en t). En se plaçant maintenant au voisinage du fond d'entaille et en utilisant ℓ comme échelle de longueur, on devrait retrouver le champ singulier précédent comme approximation du champ des déplacements à l'infini (à cette échelle). On est donc amené à résoudre un problème d'endommagement qui est posé sur un secteur angulaire infini dans lequel les bords de l'entaille sont libres alors que le déplacement à l'infini est donné par la forme de la singularité, le facteur K jouant le rôle de paramètre de chargement pour ce problème local. Ce problème ne dépend que de l'angle d'entaille et du modèle d'endommagement, il est indépendant du reste de la structure et peut donc être résolu une fois pour toutes.

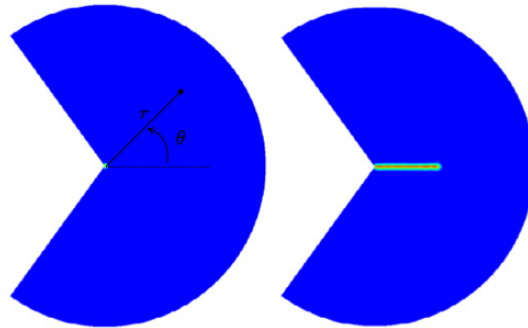


FIGURE 4. Zones endommagées calculées en fond d'entaille juste avant et juste après la valeur critique K_c du facteur d'intensité des contraintes généralisé.

Le problème est résolu numériquement sur un secteur angulaire de rayon fini R grand devant ℓ , en imposant le déplacement $\mathbf{u} = K R^\lambda \mathbf{U}(\theta)$ en $r = R$ avec K comme paramètre de chargement croissant depuis 0. Les calculs sont faits avec les modèles AT1 et AT2 en utilisant l'algorithme de minimisation alternée pour différents angles d'entaille. Typiquement, on observe une réponse comme celle qui est décrite figure 4. Tant que K reste en dessous d'une valeur critique K_c (dépendant de l'angle d'entaille ω), la zone endommagée reste confinée en fond d'entaille. Puis brusquement, aussitôt que K dépasse la valeur K_c , une bande endommagée de taille de l'ordre de R , avec $D = 1$ au centre, se développe en fond d'entaille. Ce saut de la zone endommagée est caractéristique d'un point limite (alors qu'il s'agissait d'un point de bifurcation dans le choc thermique) : il faudrait diminuer K lorsqu'il a atteint K_c tout en essayant de contrôler la taille de la zone endommagée pour obtenir une réponse « continue ». Toutefois, seule la valeur de K_c est intéressante car caractéristique de l'entaille. En effet, la longueur de la fissure

créée lors du saut est une quantité globale qui dépend de la géométrie de toute l'éprouvette et de son chargement. La valeur fournie par le calcul effectué sur le secteur angulaire de taille finie n'est pas représentative. Une fois que la valeur K_c a été obtenue, on déduit du calcul élastique fait sur la structure complète la valeur du chargement critique t_c à partir duquel la fissure macroscopique apparaît. C'est cette valeur de t_c calculée qui est comparée aux valeurs expérimentales. Ceci a été fait pour une série de matériaux, pour plusieurs types d'éprouvette et pour une famille de valeurs de demi-angle d'entaille ω allant de 0 (cas d'une fissure), à $\pi/2$ (bord droit). L'accord est toujours excellent, cf. [18], et comme cette valeur de t_c fait clairement intervenir tous les paramètres du modèle d'endommagement le test est probant : l'approche a réussi là où les autres avaient jusqu'ici échoué. Notons que ce problème a été traité avec exactement le même modèle que celui qui a été utilisé dans le choc thermique, ce qui aurait tendance à prouver que l'on n'a pas besoin d'invoquer des critères spécifiques (qui d'ailleurs parfois relèvent de la pure science-fiction) pour expliquer ce qui est observé dans ces différentes situations : un critère de stabilité et un bilan d'énergie faisant intervenir une contrainte critique et une énergie de surface suffisent.

3. Bilan et perspectives

Essayons de faire un premier bilan en s'appuyant sur les discussions et les présentations qui ont précédé. La mécanique de l'endommagement via l'approche variationnelle et les modèles à gradient est capable, mais dans un cadre très restreint jusqu'ici, de traiter le problème complet de la nucléation des fissures jusqu'à leur propagation et la rupture complète, palliant ainsi les défauts majeurs de la théorie de Griffith tout en restant en accord avec elle lorsque celle-ci fonctionne. De plus, cette approche s'appuie sur une formulation du problème d'évolution qui est basée sur les principes physiques généraux d'irréversibilité, de stabilité et de bilan d'énergie, ce qui a permis d'obtenir des résultats mathématiques importants et qui constituera un avantage certain lorsqu'il s'agira d'élargir son cadre d'application. Sa facilité de mise en oeuvre alliée à sa capacité à rendre compte de phénomènes variés et complexes sans changer de modèle, ce qui paraissait jusqu'alors impossible, en a fait incontestablement son succès. Il suffit pour s'en convaincre de compter le nombre d'articles qui paraissent chaque semaine dans les revues spécialisées et qui comportent les mots clés *fracture* et *phase field* (car la communauté des physiciens a réussi à imposer sa terminologie en occultant le mot endommagement, la communauté des mécaniciens ayant finalement cédé à cet affichage plus médiatique en renonçant à faire valoir sa primauté conceptuelle pour ce qui concerne la rupture). (Si l'on en croit le Web of Science, ce nombre s'élevait à 1 136 pour la seule année 2021.) Peut-on pour autant parler de victoire définitive, les modèles d'endommagement à gradient s'imposant comme les seuls capables de traiter le problème complet de la rupture? Rien n'est moins sûr comme le fera apparaître la discussion qui suivra sur l'élargissement de son cadre d'application. Pour préparer cette discussion, revenons sur la construction des modèles à gradient et des ingrédients introduits.

Pour qu'ils fonctionnent dans le cadre quasi-statique, isotrope et fragile, on a vu qu'un modèle comme AT1 qui ne contient que quatre paramètres matériaux suffit : E_0 , ν (qui est supposé invariant), σ_c et G_c . (Dans le cas de chargement thermique, il faut y ajouter le coefficient de dilatation qui est également supposé invariant.) Mais évidemment des choix implicites ont été faits comme celui de l'invariance du coefficient de Poisson et du coefficient de dilatation : ainsi l'exposant 2 dans le facteur $(1 - D)^2$ qui affecte la rigidité, ou encore la dépendance quadratique en le gradient d'endommagement. Ces choix ont été essentiellement guidés par des soucis de simplicité de mise en oeuvre. Comment les justifier plus solidement ou comment procéder s'il s'avère qu'il faut les abandonner? On se heurte ici clairement au défaut originel de la mécanique

de l'endommagement : l'abandon de son lien explicite avec les mécanismes physiques sous-jacents. Quand on va aborder la question de leur extension à un cadre plus général, seules des considérations phénoménologiques pourront servir de critère discriminant.

Commençons par considérer le cas de matériaux fragiles « incompressibles ». Comme il a été judicieusement remarqué dans [37], on ne peut plus utiliser un modèle comme AT1 ou tout autre modèle qui suppose que le coefficient de Poisson reste constant, car dans ce cas un matériau initialement incompressible restant toujours incompressible son énergie élastique ne dépendrait jamais de la pression hydrostatique et donc le critère d'endommagement qui s'en déduit par dérivation ne pourrait pas en dépendre. Or cette dépendance est essentielle si l'on veut expliquer des résultats expérimentaux comme ceux de l'essai de Gent–Park (*cf.* [37]). Si l'on veut rester dans un cadre variationnel, il faut donc faire dépendre le coefficient de Poisson ou de façon équivalente le module de compressibilité de l'endommagement, ce qui d'un point de vue physique est tout à fait raisonnable puisqu'il est bien connu que si l'on introduit des microfissures dans un matériau incompressible le comportement effectif du matériau microfissuré est celui d'un matériau compressible. Donc choisissons par exemple pour énergie élastique duale la fonction $\psi^*(\boldsymbol{\sigma}, D)$ des contraintes et de l'endommagement suivante :

$$\psi^*(\boldsymbol{\sigma}, D) = \frac{1}{2}k(D)(Tr\boldsymbol{\sigma})^2 + \frac{1}{2}m(D)\boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D$$

où $k(D)$ et $m(D)$ sont des coefficients de souplesse (liés aux inverses des modules de compressibilité et de cisaillement), $\boldsymbol{\sigma}^D$ étant le déviateur de $\boldsymbol{\sigma}$. Le critère d'endommagement exprimé en contraintes s'écrit alors (sans faire apparaître le terme en laplacien D et en conservant une dépendance linéaire en D pour la densité d'énergie dissipée $w(D) = w_1 D$) :

$$\frac{1}{2}k'(D)(Tr\boldsymbol{\sigma})^2 + \frac{1}{2}m'(D)\boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D \leq w_1.$$

Par conséquent, si on choisit la fonction $k(D)$ de façon à ce que $k(0) = 0$ et $k'(0) > 0$, on aura construit un modèle dans lequel un matériau initialement incompressible deviendra compressible et dont le critère d'endommagement dépend de la pression. On n'est pas obligé d'abandonner le cadre variationnel. Est-ce le bon choix? Il en est fait un totalement différent dans [37], les auteurs préférant abandonner le cadre confortable d'une approche variationnelle. Une position aussi radicale est-elle nécessaire?

De façon plus générale, si on suppose le matériau linéairement élastique à endommagement fixé, alors le critère d'endommagement est nécessairement quadratique en contraintes ou en déformation et donc implique une symétrie de comportement en traction et en compression. C'est manifestement contraire à ce qui est observé. Si l'on veut rester dans le cadre variationnel, il faut donc envisager des potentiels élastiques non quadratiques en $\boldsymbol{\varepsilon}$ ou en $\boldsymbol{\sigma}$. On peut les prendre homogènes de degré deux de façon à conserver un comportement directionnel linéaire. C'est par exemple ce qui avait été proposé dans [38] où l'on prenait un potentiel élastique de la forme

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, D) = \frac{K_0}{2}(Tr^-\boldsymbol{\varepsilon})^2 + (1-D)^2 \left(\frac{K_0}{2}(Tr^+\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}^D \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^D \right)$$

où $Tr^\pm \boldsymbol{\varepsilon} = (|Tr\boldsymbol{\varepsilon}| \pm Tr\boldsymbol{\varepsilon})/2$, ce qui rend le comportement asymétrique car dépendant du signe de $Tr\boldsymbol{\varepsilon}$. Mais une infinité d'autres choix sont possibles. Réciproquement, étant donné un critère de résistance « raisonnable » donné, peut-on construire un potentiel élastique « endommageable » redonnant ce critère? Ce genre de questions est abordé dans [39] et les auteurs y étudient un certain nombre de cas en restant toujours dans un cadre variationnel.

On peut utiliser un modèle d'endommagement à gradient comme le modèle AT1 en dynamique, en conservant pour l'essentiel sa structure variationnelle. Il suffit d'ajouter les termes d'inertie dans les équations d'équilibre [36, 40]. C'est ce qui a été fait dans [40] pour modéliser la fragmentation dynamique d'un anneau circulaire en extension uniforme. Ce problème est un

des problèmes fondamentaux pour étudier tant expérimentalement que théoriquement la fragmentation des matériaux. Il a la particularité, comme l'essai de traction simple en quasi-statique, de présenter une forte symétrie, tous les points matériels se trouvant dans la même situation. (Il n'existe de ce fait à ce jour aucun modèle « déterministe » entièrement satisfaisant capable de prédire le nombre de fragments.) Mais alors qu'en quasi-statique on montre facilement à partir du critère de stabilité que la réponse homogène est instable dès l'apparition du premier endommagement (pourvu que la structure soit suffisamment grande par rapport à la longueur caractéristique du matériau), ce résultat n'est plus vrai en dynamique. Bien que la démonstration précise n'ait jamais été faite, il semble que la solution dynamique soit unique et donc que pour le problème de l'anneau, en l'absence d'imperfection, la solution axi-symétrique soit la seule possible. (C'est le fait que les méthodes classiques de recherche de bifurcation échouent qui fait penser que la solution est unique.) Par conséquent, l'endommagement devrait rester uniforme et on ne devrait pas voir de fragmentation. En fait, quand on traite numériquement le problème, les inévitables erreurs d'arrondi induisent des imperfections et au bout d'un certain temps (dépendant des paramètres de l'essai) la solution homogène laisse place à une solution où l'endommagement se localise pour finalement donner lieu à un certain nombre de fragments. Ce nombre est pour une large part indépendant de la vitesse d'expansion et essentiellement donné par le rapport entre le périmètre de l'anneau et la longueur caractéristique du matériau. Ces résultats numériques sont confirmés par une étude de stabilité dynamique où on détermine l'imperfection la plus défavorable et le temps qu'elle met pour atteindre une amplitude critique. Les essais expérimentaux ne confirment que partiellement ces résultats, l'indépendance par rapport à la vitesse d'expansion n'étant vraie que pour des valeurs assez faibles de celle-ci. Rendre compte de cette dépendance exigerait de changer le modèle en y incluant éventuellement des effets visqueux. On voit donc que l'utilisation de tels modèles en dynamique va demander un gros travail de réflexion tant du point de vue théorique que dans le choix des ingrédients à incorporer dans les modèles.

Le modèle de rupture fragile de Griffith ne permet pas de rendre compte de la fatigue, *i.e.* de la propagation de fissures sous chargement cyclique de faible amplitude, car il donne lieu à une adaptation en un cycle (la fissure peut évoluer durant le premier cycle mais plus après). C'est ce qui a obligé les ingénieurs à proposer des lois empiriques de fatigue, telle la loi de Paris qui s'appuie sur la notion de singularités des contraintes et de taux de restitution d'énergie mais qui abandonne le critère de Griffith au profit d'une loi d'évolution de la fissure cycle par cycle. Malheureusement les modèles d'endommagement fragiles comme AT1 possèdent le même défaut. Il manque dans ces modèles une variable « cumulative » qui ferait croître l'endommagement jusqu'à 1 après un certain nombre de cycles même si l'amplitude du chargement est faible. C'est en partant de ce constat et en faisant fonctionner cette idée dans [41] que les auteurs sont arrivés à rendre compte de la fatigue (et même à retrouver des lois de Paris) en utilisant des modèles d'endommagement à gradient enrichis d'une variable interne cumulative. Dans cette approche, ce sont clairement les considérations phénoménologiques qui ont prévalu : que représente cette variable cumulative et d'où vient-elle sont des questions qui exigeraient une analyse des mécanismes de dégradation aux petites échelles pour pouvoir y répondre.

Si l'on considère que l'objet de la mécanique de la rupture ductile est d'étudier la propagation de fissures en interaction forte avec un comportement élasto-plastique du matériau (par opposition aux situations où la zone plastique reste confinée en fond de fissure et qui peut être traitée par simple ajout de termes correctifs dans la loi de Griffith) et si l'on veut utiliser des modèles d'endommagement pour rendre compte de la nucléation des fissures, il faut nécessairement introduire un couplage entre ces deux phénomènes dissipatifs. Il s'avère que cela peut se faire facilement tout en restant dans un cadre variationnel, car les deux phénomènes séparément peuvent être traités avec cette approche. Considérons pour simplifier le cas où la loi de plasti-

cité est une loi standard régie par le critère de plasticité de Von Mises, sans écrouissage, avec la règle de normalité pour la loi d'écoulement plastique. Dans ce cas, la densité d'énergie du matériau (somme de l'énergie élastique et de l'énergie dissipée) est

$$W = \frac{1}{2}A(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \sigma_Y p,$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ est la déformation plastique, p la déformation plastique cumulée et σ_Y la contrainte seuil de Von Mises. La façon la plus simple d'introduire un couplage est de faire dépendre le tenseur de rigidité et la contrainte seuil de l'endommagement, les deux devenant des fonctions décroissantes de D , cf. [42, 43]. (Mais on pourrait bien sûr faire des choix différents de couplage.) En ajoutant le terme d'énergie dissipée spécifique à l'endommagement, on obtient ainsi une densité d'énergie qui s'écrit

$$W = \frac{1}{2}A(D)(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \sigma_Y(D)p + w(D) + w_1 \ell^2 \nabla D \cdot \nabla D.$$

En utilisant la condition d'irréversibilité et le critère de stabilité, on en déduit deux critères, un pour chaque variable dissipative. Celui pour la plasticité est simplement le critère de Von Mises avec le seuil dépendant de l'endommagement : $\sqrt{3\boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D}/2 \leq \sigma_Y(D)$, alors que le critère d'endommagement fait apparaître un couplage avec la plasticité du fait de la dépendance de σ_Y en D . Exprimé en contraintes, il s'écrit

$$\frac{1}{2}S'(D)\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} + 2w_1 \ell^2 \Delta D \leq w'(D) + \sigma'_Y(D)p,$$

S désignant le tenseur de souplesse. (En utilisant le bilan d'énergie, on obtient de plus la règle de normalité pour l'écoulement plastique et une condition de consistance pour \dot{D} .) On voit donc qu'il y a interaction et compétition entre les deux critères (ce qui rend cette approche totalement différente de ce qui est habituellement fait en rupture ductile). Du fait de l'adoucissement aussi bien pour l'endommagement que pour le seuil de plasticité, on obtient le phénomène remarquable suivant : la localisation de l'endommagement (contrôlée par les termes en gradient) force la déformation plastique à se concentrer au centre des bandes d'endommagement créant ainsi des bandes de cisaillement où les déplacements sont discontinus alors que les contraintes ne sont pas encore nulles. Autrement dit on crée des fissures « cohésives ». La loi cohésive peut se calculer, c'est donc un sous-produit du modèle d'élasto-plasticité endommageable, cf. [42, 43]. Il a été montré dans [44], par Gamma-convergence, que ce modèle convergerait (quand la longueur caractéristique tend vers 0 et moyennant une mise à l'échelle appropriée des paramètres) vers un modèle de rupture cohésif (du type Barenblatt donc, la densité d'énergie de surface dépendant du saut de déplacement). Même si la démonstration est faite dans le cadre restreint de problèmes anti-plan avec minimisation globale sans prise en compte de l'irréversibilité, le résultat n'en est pas moins remarquable et montre toute la richesse de l'approche. Notons d'ailleurs que ce modèle contenant en la déformation plastique cumulée une variable cumulative peut, sans ajout supplémentaire, rendre compte de la fatigue. Comme de plus sa mise en oeuvre numérique ne présente aucune difficulté car on peut toujours procéder par minimisation alternée sur les 3 champs $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, D)$ (la minimisation par rapport à $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ étant une simple projection), on peut s'attendre à ce qu'il connaisse autant de succès que son homologue sans plasticité, vu toutes les possibilités qu'il offre.

Il ressort de ce parcours rétrospectif et anticipatif de la mécanique de l'endommagement qu'elle fonctionne, ce qui était après tout ce que l'on attendait d'elle. Mais on ne peut pas s'en contenter car elle le fait essentiellement par procuration : on insère la variable D qui cristallise notre ignorance aux quatre coins des lois constitutives (ou de l'énergie si on s'en tient à une approche variationnelle) au gré des besoins. À charge à elle et à ses excroissances d'assurer que les prédictions des modèles sont conformes à l'observation. On peut voir dans cette souplesse et cette capacité d'adaptation une force de cette approche. Mais elle risque de devenir une faiblesse,

si par confort ou par paresse on oublie que la mécanique de l'endommagement est née d'un aveu d'impuissance à décrire la genèse et la croissance des défauts à petite échelle. Il faut résolument s'attaquer à ce problème. Les modèles cohésifs sont une voie possible car ils sont physiquement bien étayés (tout du moins tant qu'on n'aborde pas la question de l'irréversibilité) et possèdent les ingrédients requis avec une contrainte critique et une longueur caractéristique. Un certain nombre de résultats fondamentaux déjà établis montrent que cette voie mérite d'être revisitée.

En conclusion, la rupture est probablement le phénomène le plus important mais aussi le plus complexe que l'on rencontre en mécanique des solides, comprendre les lois qui le régissent doit être une priorité du mécanicien. Il n'a fait qu'un bout du chemin. Il doit mener ce travail à caractère fondamental à son terme sans en laisser la charge à d'autres s'il veut que sa discipline conserve son rang de discipline fondamentale et s'il ne veut pas que l'on fasse appel à lui que comme le technologue de service.

Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

Remerciements

Cet article est rédigé en français pour plusieurs raisons : (i) parce que la revue l'autorise. Qu'elle en soit ici remerciée; (ii) parce que c'est la langue dans laquelle l'auteur a le plus de chances d'exprimer clairement sa pensée et d'éviter les ambiguïtés. (iii) parce qu'il n'y a pas de raison que ce soit toujours les mêmes qui soient frustrés; (iv) parce que ce texte s'adresse en priorité à la communauté des mécaniciens français qui a joué un rôle important dans l'évolution des mécaniques de la rupture et de l'endommagement. Parfois pour le meilleur, parfois pour le pire.

Références

- [1] A. A. Griffith, « The Phenomena of Rupture and Flow in Solids », *Philos. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A* **221** (1921), p. 163-198.
- [2] G. I. Barenblatt, « The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture », *Advances in Applied Mechanics*, vol. 7, Elsevier, 1962, p. 55-129.
- [3] L. M. Kachanov, *Introduction to continuum damage mechanics*, Mechanics of Elastic Stability, vol. 10, Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
- [4] J.-J. Marigo, « Constitutive relations in Plasticity, Damage and Fracture Mechanics based on a Work Property », *Nucl. Eng. Des.* **114** (1989), n° 3, p. 249-272.
- [5] L. Ambrosio, V. M. Tortorelli, « Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functional via Gamma-Convergence », *Commun. Pure Appl. Math.* **43** (1990), n° 8, p. 999-1036.
- [6] L. Ambrosio, V. M. Tortorelli, « On the approximation of free discontinuity problems », *Boll. Unione Mat. Ital., VII. Ser., B* **6** (1992), n° 1, p. 105-123.
- [7] A. Mielke, « Evolution of rate-independent systems », in *Evolutionary equations. Vol. II*, Handbook of Differential Equations, North-Holland, 2005, p. 461-559.
- [8] K. Pham, J.-J. Marigo, « Approche variationnelle de l'endommagement : I. Les concepts fondamentaux », *C. R. Méc. Acad. Sci. Paris* **338** (2010), n° 4, p. 191-198.
- [9] K. Pham, J.-J. Marigo, « Approche variationnelle de l'endommagement : II. Les modèles à gradient », *C. R. Méc. Acad. Sci. Paris* **338** (2010), n° 4, p. 199-206.
- [10] J.-J. Marigo, C. Maurini, K. Pham, « An overview of the modelling of fracture by gradient damage models », *Meccanica* **51** (2016), n° 12, p. 3107-3128.
- [11] B. Bourdin, G. A. Francfort, J.-J. Marigo, « The variational approach to fracture », *J. Elasticity* **91** (2008), n° 1-3, p. 5-148.
- [12] B. Bourdin, G. A. Francfort, J.-J. Marigo, « Numerical experiments in revisited brittle fracture », *J. Mech. Phys. Solids* **48** (2000), n° 4, p. 797-826.
- [13] B. Bourdin, « Numerical implementation of the variational formulation for quasi-static brittle fracture », *Interfaces Free Bound.* **9** (2007), n° 3, p. 411-430.

- [14] P. Sicsic, J.-J. Marigo, « From gradient damage laws to Griffith's theory of crack », *J. Elasticity* **113** (2013), n° 1, p. 55-74.
- [15] B. Bourdin, J.-J. Marigo, C. Maurini, P. Sicsic, « Morphogenesis and Propagation of Complex Cracks Induced by Thermal Shocks », *Phys. Rev. Lett.* **112** (2014), n° 1, article no. 014301 (5 pages).
- [16] P. Sicsic, J.-J. Marigo, C. Maurini, « Initiation of a periodic array of cracks in the thermal shock problem : a gradient damage modeling », *J. Mech. Phys. Solids* **63** (2014), p. 256-284.
- [17] Y. Shao, Y. Zhang, X. Xu, Z. Zhou, W. Li, B. Liu, « Effect of crack pattern on the residual strength of ceramics after quenching », *J. Am. Ceram. Soc.* **94** (2011), n° 9, p. 2804-2807.
- [18] E. Tanné, T. Li, B. Bourdin, J.-J. Marigo, C. Maurini, « Crack nucleation in variational phase-field models of brittle fracture », *J. Mech. Phys. Solids* **110** (2018), p. 80-99.
- [19] G. R. Irwin, « Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate », *J. Appl. Mech.* **24** (1957), n° 3, p. 361-364.
- [20] G. A. Francfort, J.-J. Marigo, « Stable damage evolution in a brittle continuous medium », *Eur. J. Mech., A, Solids* **12** (1993), n° 2, p. 149-189.
- [21] G. A. Francfort, J.-J. Marigo, « Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem », *J. Mech. Phys. Solids* **46** (1998), n° 8, p. 1319-1342.
- [22] A. Chambolle, V. Crismale, « Existence of strong solutions to the Dirichlet problem for the Griffith energy », *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* **58** (2019), n° 4, article no. 136 (27 pages).
- [23] J. R. Rice, « A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks », *J. Appl. Mech.* **35** (1968), n° 2, p. 379-386.
- [24] J. R. Rice, « Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture », in *Fracture : An Advanced Treatise* (H. Liebowitz, éd.), Mathematical Fundamentals, vol. 2, Academic Press Inc., 1968, p. 191-311.
- [25] P. Destuynder, M. Djaoua, « Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile », *Math. Methods Appl. Sci.* **3** (1981), n° 1, p. 70-87.
- [26] J. Lemaître, J.-L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 1985.
- [27] S. Andrieux, Y. Bamberger, J.-J. Marigo, « A model of micro-cracked material for concretes and rocks », *J. Méc. Théor. Appl.* **5** (1986), n° 3, p. 471-513.
- [28] J.-J. Marigo, « Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids », *Eng. Fract. Mech.* **21** (1985), n° 4, p. 861-874.
- [29] J.-J. Marigo, « Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique », *C. R. Acad. Sci., Sér. IIA Earth Planet. Sci.* **292** (1981), n° 19, p. 1309-1312.
- [30] B. Halphen, N. Q. Son, « Sur les matériaux standards généralisés », *J. Méc., Paris* **14** (1975), p. 39-63.
- [31] G. Pijaudier-Cabot, Z. P. Bažant, « Non-local damage theory », *J. Eng. Mech.* **113** (1987), n° 10, p. 1512-1533.
- [32] J. Mazars, G. Pijaudier-Cabot, « From damage to fracture mechanics and conversely : a combined approach », *Int. J. Solids Struct.* **33** (1996), n° 20-22, p. 3327-3342.
- [33] A. Braides, *Γ -convergence for Beginners*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 22, Oxford University Press, 2002.
- [34] G. Dal Maso, F. Iurlano, « Fracture models as Γ -limits of damage models », *Commun. Pure Appl. Anal.* **12** (2013), n° 4, p. 1657-1686.
- [35] K. Pham, H. Amor, J.-J. Marigo, C. Maurini, « Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture », *Int. J. Damage Mech.* **20** (2011), n° 4, p. 618-652.
- [36] T. Li, J.-J. Marigo, « Crack tip equation of motion in dynamic gradient damage models », *J. Elasticity* **127** (2017), n° 1, p. 25-57.
- [37] A. Kumar, G. A. Francfort, O. Lopez-Pamies, « Fracture and healing of elastomers : A phase-transition theory and numerical implementation », *J. Mech. Phys. Solids* **112** (2018), p. 523-551.
- [38] H. Amor, J.-J. Marigo, C. Maurini, « Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact : Numerical experiments », *J. Mech. Phys. Solids* **57** (2009), n° 8, p. 1209-1229.
- [39] L. De Lorenzis, C. Maurini, « Nucleation under multi-axial loading in variational phase-field models of brittle fracture », *Int. J. Fract.* **237** (2022), n° 1-2, p. 61-81, Special Issue : Phase-Field Approaches in the 3rd Millenium.
- [40] A. G. Fischer, J.-J. Marigo, « Gradient damage models applied to dynamic fragmentation of brittle materials », *Int. J. Fract.* **220** (2019), n° 2, p. 143-165.
- [41] P. Carrara, M. Ambati, R. Alessi, L. de Lorenzis, « A framework to model the fatigue behavior of brittle materials based on a variational phase-field approach », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **361** (2020), article no. 112731 (29 pages).
- [42] R. Alessi, J.-J. Marigo, S. Vidoli, « Gradient Damage Models Coupled with Plasticity and Nucleation of Cohesive Cracks », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **214** (2014), n° 2, p. 575-615.
- [43] R. Alessi, J.-J. Marigo, S. Vidoli, « Gradient damage models coupled with plasticity : variational formulation and main properties », *Mech. Mater.* **80** (2015), p. 351-367.
- [44] G. Dal Maso, G. Orlando, R. Toader, « Fracture models for elasto-plastic materials as limits of gradient damage models coupled with plasticity : the antiplane case », *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* **55** (2016), n° 3, article no. 45 (39 pages).