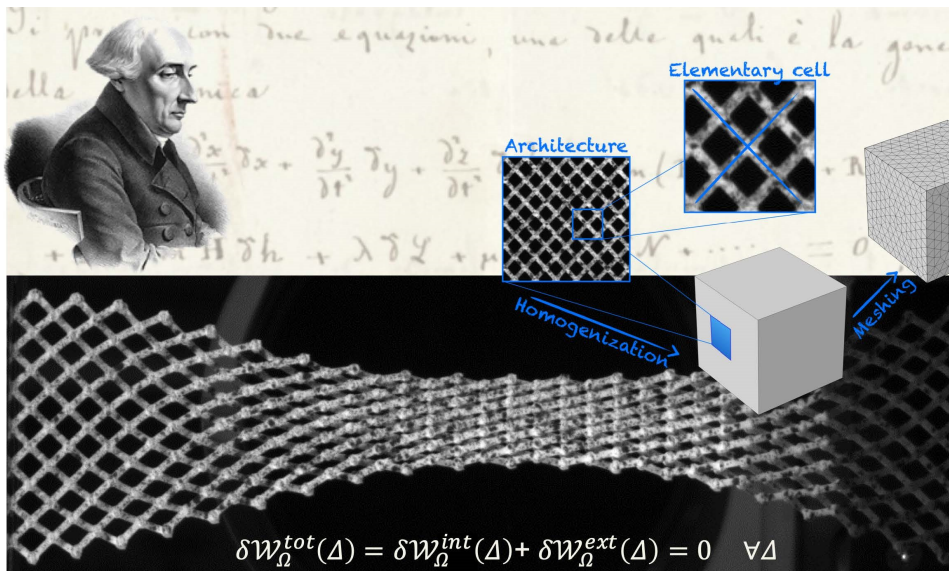


# COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

1873-7234 (electronic)

## *Mécanique*



Volume 351, Special Issue S3, 2023

### **Special issue / Numéro spécial**

The French “Année de la Mécanique”: some views on recent advances in solid and fluid mechanics / *L'année de la mécanique : quelques points de vue sur des avancées récentes en mécanique des solides et des fluides*

### **Guest editors / Rédacteurs en chef invités**

Francisco Chinesta, Aziz Hamdouni

# *Comptes Rendus*

---

## *Mécanique*

### **Objective of the journal**

*Comptes Rendus Mécanique* is an internationally peer-reviewed electronic journal covering all areas of the discipline. It publishes original research articles, review articles, historical perspectives, pedagogical texts, and conference proceedings of unlimited length, in English or French. *Comptes Rendus Mécanique* is published according to a virtuous policy of diamond open access, free of charge for authors (no publication fees) as well as for readers (immediate and permanent open access).

**Editorial director:** Étienne Ghys

**Editor-in-Chief:** Jean-Baptiste Leblond

**Editorial board:** Olga Budenkova, Francisco Chinesta, Jean-Michel Coron, Luc Dormieux, Florian Gosselin, Nicolas Moës, Léo Morin, Benoit Perthame, Guillaume Ribert, Géry de Saxcé, Emmanuel Villermaux

**Editorial secretary:** Adenise Lopes

### **About the journal**

All journal's information, including the text of published articles, which is fully open access, is available from the journal website at <https://comptes-rendus.academie-sciences.fr/mecanique/>.

### **Author enquiries**

For enquiries relating to the submission of articles, please visit this journal's homepage at <https://comptes-rendus.academie-sciences.fr/mecanique/>.

### **Contact**

Académie des sciences

23, quai de Conti, 75006 Paris, France

[CR-Mecanique@academie-sciences.fr](mailto:CR-Mecanique@academie-sciences.fr)



The articles in this journal are published under the license  
Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.en>



---

## Contents / Sommaire

<b>Aziz Hamdouni</b>	
Préface .....	1-2
<b>François Charru</b>	
La mécanique des fluides en France dans la première moitié du xx <sup>e</sup> siècle .....	3-41
<b>Jean-Jacques Marigo</b>	
La mécanique de l'endommagement au secours de la mécanique de la rupture : l'évolution de cette idée en un demi-siècle .....	43-63
<b>Francesco dell'Isola, Anil Misra</b>	
Principle of Virtual Work as Foundational Framework for Metamaterial Discovery and Rational Design .....	65-89
<b>Francesco dell'Isola, Roberto Fedele</b>	
Irreducible representation of surface distributions and Piola transformation of external loads sustainable by third gradient continua .....	91-120
<b>Francisco Chinesta, Elias Cueto</b>	
Conciliating accuracy and efficiency to empower engineering based on performance: a short journey .....	121-133
<b>Géry de Saxcé, Dina Razafindralandy</b>	
Lie groups and continuum mechanics: where do we stand today? .....	135-159





Avant-propos / Foreword

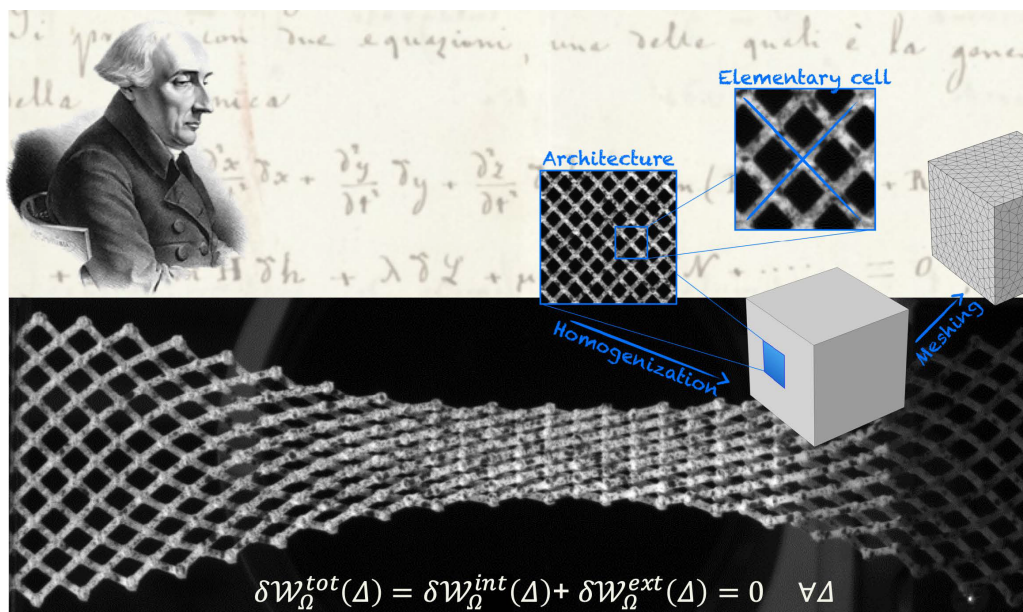
L'année de la mécanique : quelques points de vue sur des avancées récentes en mécanique des solides et des fluides / *The French "Année de la Mécanique": some views on recent advances in solid and fluid mechanics*

## Préface

### Preface

Aziz Hamdouni

Courriel : [aziz.hamdouni@univ-lr.fr](mailto:aziz.hamdouni@univ-lr.fr)



Ce numéro spécial a été réalisé à l'occasion de l'année de la mécanique en France. Cette année a été l'occasion pour des mécaniciens français de mener des actions de diffusion scientifique destinées à un large public. En particulier à cette occasion un grand colloque a été organisé à

l'académie des sciences autour des contributions scientifiques des chercheurs de l'école mécanique française. La réalisation d'un numéro spécial ciblé sur l'évolution de quelques recherches en mécanique vient en complémentarité avec ce colloque. Il ne reprend pas les sujets qui ont été abordés lors de cette rencontre. Il est focalisé sur quelques thèmes spécifiques.

Ce numéro spécial est constitué de six articles traçant l'évolution de quelques domaines de mécanique au cours de ce siècle ou encore plus anciennement. Ce numéro ne couvre pas l'ensemble des disciplines de mécanique, une telle tâche est nécessaire et importante et devra faire l'objet d'un autre travail futur. Les papiers s'articulent essentiellement autour de la mécanique des solides, où des sujets sur la théorie de la rupture, de la mécanique des milieux continus généralisés ou des modèles numériques pour les problèmes complexes sont traités. Le numéro contient aussi un papier d'histoire des sciences portant sur la mécanique des fluides en France dans la première moitié du XXème siècle ainsi qu'un article sur les applications des groupes de Lie en mécanique des milieux continus. Ce papier couvre à la fois la mécanique des solides et des fluides.

Aziz Hamdouni  
Guest editor  
aziz.hamdouni@univ-lr.fr



---

Article de recherche / *Research article*

L'année de la mécanique : quelques points de vue sur des avancées récentes en mécanique des solides et des fluides / *The French "Année de la Mécanique": some views on recent advances in solid and fluid mechanics*

La mécanique des fluides en France dans la première moitié du xx<sup>e</sup> siècle

*Fluid mechanics in France in the first half of the 20<sup>th</sup> century*

François Charru <sup>\*,a</sup>

<sup>a</sup> Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse – CNRS-Université de Toulouse –

31400 Toulouse, France

*Courriel* : francois.charru@imft.fr

**Résumé.** Les mécaniciens des fluides français de la première moitié du vingtième siècle, contrairement à leurs illustres prédécesseurs, apparaissent peu cités dans les bibliographies des ouvrages et revues de synthèse. Les contributions françaises aux deux questions majeures et les plus débattues de la période, la couche limite et la turbulence semblent très modestes. Cette impression de retrait ne rend pas justice aux travaux alors réalisés en France par des personnalités scientifiques de premier plan, travaux rapportés dans des thèses de doctorat, publications et correspondances aujourd'hui oubliées mais conservées dans les bibliothèques et les archives. Elle n'explique pas non plus le rôle déterminant joué par la France dans la création, en 1946 à Paris, de l'Union internationale de mécanique théorique et appliquée (IUTAM). L'objet de cet article est de rendre compte des plus remarquables de ces travaux, de les situer dans leur contexte national et international – marqué par deux guerres mondiales et par l'internationalisation de la discipline – et de rappeler le rôle majeur qu'y a joué le ministère de l'Air. Les institutions créées par ce dernier dans les facultés des sciences auront structuré la mécanique des fluides française et préparé la place de premier plan que celle-ci jouera, au niveau international, dans la seconde moitié du siècle.

**Abstract.** French fluid mechanics of the first half of the Twentieth Century, unlike their illustrious predecessors, appear scarcely mentioned in textbooks and reviews. In particular, French contributions to the boundary layer and turbulence theories – major breakthroughs of the period – seem quite modest. However, contemporary PhD theses, journals and correspondence reveal remarkable works undertaken by outstanding personalities. From 1929, a key instigator of these achievements was the Air Ministry, which, with great open-mindedness, created and financed four institutes of fluid mechanics and five teaching centers in faculties of science. This reveals a fruitful interwar period, which prepares the prominent role played by France in the creation in 1946 of the International Union of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM). This paper recounts this story, with attention paid to the connection between scientific questions and social and cultural issues, in a period marked by two world wars and great strengthening of international relationships.

---

\*Auteur correspondant

**Mots-clés.** mécanique des fluides, histoire, vingtième siècle, France, aéronautique.

**Keywords.** fluid mechanics, history, twentieth century, France, aeronautics.

*Manuscrit reçu le 1<sup>er</sup> septembre 2022, accepté le 20 juin 2023.*

## 1. Introduction

La première moitié du xx<sup>e</sup> siècle est une période d'avancées majeures pour la mécanique des fluides, notamment avec les théories de la portance et de la couche limite, et la modélisation statistique de la turbulence. Un rapprochement s'opère ainsi entre l'hydrodynamique des théoriciens et l'hydraulique des ingénieurs, dans le contexte stimulant du développement de l'aéronautique. Ces avancées sont réalisées pour une large part en Allemagne et en Angleterre, dans les centres très créatifs de Göttingen et de Cambridge, puis aux États-Unis à partir des années trente. La France, qui avait tant brillé au siècle précédent, de Navier à Boussinesq, semble alors en retrait comme en témoigne le faible nombre de travaux français cités dans les revues de synthèse, celles par exemple de Hugh Dryden en 1955 et de Sydney Goldstein en 1969 [44, 45], ou dans les panoramas historiques de Davidson *et al.* et de Bloor [46, 47].

Cette impression de retrait que laissent les bibliographies ne rend cependant pas justice aux travaux remarquables alors réalisés en France par des personnalités scientifiques de premier plan, travaux dont témoignent des publications aujourd'hui oubliées dans les bibliothèques et les correspondances internationales conservées dans les archives. L'objet de cet article est de rendre compte des plus marquants de ces travaux – sans prétendre les avoir tous repérés –, de les situer dans leur contexte national et international (marqué par deux guerres mondiales), et de rappeler le rôle majeur qu'y a joué le ministère de l'Air créé en 1928. La vitalité de la mécanique des fluides française de l'entre-deux-guerres se manifestera après la Seconde Guerre mondiale notamment par le rôle important que joueront les mécaniciens dans la croissance du jeune CNRS, dans la création de l'ONERA, et dans la création de l'Union internationale de la mécanique théorique et appliquée (IUTAM).

La section suivante (§ 2) situe l'organisation des universités françaises au tournant du xx<sup>e</sup> siècle et l'introduction dans ces universités de la mécanique des fluides, dans le contexte déterminant de l'essor de l'aéronautique. On présente ensuite les grandes questions de mécanique des fluides alors en débat (§ 3) puis les contributions françaises avant 1930 (§ 4). Les sections suivantes sont consacrées aux quatre instituts de mécanique des fluides créés dans les facultés des sciences en 1929 et 1930 à l'instigation du ministère de l'Air (§ 5-8) et aux centres annexes d'enseignement créés dans cinq autres facultés (§ 9) – auxquels on a ajouté le foyer émergent de Grenoble. On termine par une discussion de la situation de la mécanique des fluides française au seuil des années soixante (§ 10). Des compléments à cette histoire ainsi que les références complètes seront trouvés dans un ouvrage récent de l'auteur [48].

## 2. La mécanique des fluides en France au tournant du xx<sup>e</sup> siècle

### 2.1. Organisation de l'université française

Au début du xx<sup>e</sup> siècle, les quinze universités françaises créées par la Troisième République sont des groupements de facultés (droit, médecine, sciences et lettres) elles-mêmes structurées autour de chaires professorales [49]. Les chaires, définies par une discipline académique, ont pour mission d'assurer l'enseignement supérieur et la diffusion du savoir vers le grand public, et de mener – avec de très faibles moyens – quelques travaux de recherche. Le « laboratoire » associé

à la chaire est en général le lieu des travaux pratiques des étudiants. La recherche proprement dite est l'apanage de quelques institutions essentiellement parisiennes comme l'École normale supérieure, le Muséum national d'histoire naturelle, ou l'École pratique des hautes études. Quelques laboratoires de province ont cependant une renommée internationale, tel celui de Pierre Weiss sur le magnétisme à Strasbourg, ou celui de Paul Sabatier sur la chimie catalytique à Toulouse.

Les facultés des sciences des universités régionales, loin de se tenir isolées dans des tours d'ivoire, montrent alors un fort intérêt pour les sciences appliquées dans une perspective d'utilité sociale – la Sorbonne se montrant quant à elle plus soucieuse d'une science « pure et désintéressée » dégagée des contingences [50–52]. Cet intérêt se manifeste en particulier par la création de nombreux instituts techniques (électrotechnique, chimie, agriculture, etc.) avec le concours actif des municipalités, des conseils départementaux et des chambres de commerce. Une idée alors largement partagée est en effet que le progrès scientifique et technique est une condition du progrès économique et social, lequel est même susceptible d'entraîner un progrès moral. L'industrie de son côté reste en retrait : elle manifeste peu d'intérêt pour la recherche scientifique et considère que la meilleure formation des ingénieurs reste celle que l'on acquiert « sur le tas », au sein de l'usine, par l'expérience du métier.

## 2.2. *Essor de l'aviation et premières initiatives universitaires*

Un événement majeur des premières années du siècle est la naissance de l'aviation, marquée notamment par les envols des frères Wright aux États-Unis et par celui d'Henri Farman en France. En janvier 1908, ce dernier accomplit le premier vol en boucle fermée, remportant ainsi le prix offert par Henry Deutsch de la Meurthe, industriel du pétrole et fondateur de l'Aéroclub de France (figure 1). Theodore von Kármán, jeune ingénieur hongrois et future figure majeure de la mécanique, assiste alors à son premier vol [53, p. 347]. Quelques mois plus tard, à l'occasion d'une tournée en France des frères Wright, le mathématicien Paul Painlevé (1863-1933), membre de l'Académie des Sciences, effectue son baptême de l'air. Enthousiasmé, et bientôt engagé dans une riche carrière politique, Painlevé sera un ardent prosélyte de l'aéronautique dans les milieux ministériels et parlementaires [54].

L'entrée de la mécanique des fluides dans l'enseignement supérieur est le fait d'initiatives privées, par le biais de l'aéronautique. C'est ainsi que Jean-Baptiste Roche, colonel à la retraite, fonde en 1909 l'École supérieure d'aéronautique et des constructions mécaniques (future Sup'Aéro devenue ISAE). Basil Zaharoff, marchand d'armes cosmopolite et magnat du pétrole, fonde l'année suivante une chaire d'Aviation à la Sorbonne. Lucien Marchis, physicien et collaborateur de Pierre Duhem à Bordeaux, en est nommé titulaire et organise le premier certificat de technique aéronautique. Henry Deutsch de la Meurthe fonde de son côté un institut aérotechnique (IAT) à Saint-Cyr-l'École (à l'ouest de Paris), rattaché à la Sorbonne. La direction de cet institut est attribuée au physicien Charles Maurain assisté par Albert Toussaint, ingénieur de l'École centrale de Paris. L'IAT est notamment équipé d'une voie ferrée sur laquelle sont réalisés des essais de profils d'aile instrumentés par des tubes de Pitot et montés sur des balances aérodynamiques. Toussaint y reproduit après la Première Guerre mondiale les essais réalisés à Göttingen, essais dont il a obtenu les rapports (les *Technische Berichte*) au titre des réparations de guerre. Au-delà de son activité scientifique et technique, l'IAT de Maurain est alors un lieu de rencontre entre savants, gens de lettres et hommes politiques, que font revivre les mémoires de Camille Marbo romancière et épouse du mathématicien Émile Borel [55].

L'aviation, qui dans ses premières années est un sport dangereux ou un loisir coûteux, démontre son importance militaire lors de la Première Guerre mondiale. La paix revenue, se pose



**FIGURE 1.** Henry Farman franchit la ligne d'arrivée du premier vol français en boucle fermée, le 13 janvier 1908, au-dessus du terrain de manœuvres d'Issy-les-Moulineaux. *L'Aérophile*, fonds Gallica.

la question de sa reconversion en activité civile, question à l'origine de la création d'un sous-secrétariat d'État à l'Aéronautique et au Transport aérien. Avec le soutien de Painlevé, ce secrétariat fonde en 1923, à la Sorbonne, une chaire de Mécanique des fluides et Applications. Painlevé lui-même en devient titulaire, assisté par Albert Métral, maître de conférences, et par Dimitri Riabouchinsky, fondateur en 1904 d'un institut aérotechnique près de Moscou avant son émigration en France.

Ces initiatives témoignent d'une reprise en main par l'État, dans les années vingt, du secteur aéronautique. Elles n'enrayent cependant pas un net déclin de l'aviation française, lié à la difficulté pour les glorieux pionniers à structurer leur activité d'inventeur-constructeur en véritable industrie. Dans un rapport établi à la demande du Conseil national économique, Raoul Dautry, ingénieur des Ponts et Chaussées, dresse un état alarmant de la situation [56]. Une nouvelle et vigoureuse stratégie est nécessaire, ce sera la mission d'un nouveau ministère de l'Air.

### 2.3. *Le ministère de l'Air et son programme pour la mécanique des fluides*

Le ministère de l'Air créé en 1928 est doté d'une puissante Direction générale technique, confiée à un polytechnicien énergique et visionnaire, Albert Caquot (1881-1976). Celui-ci a dirigé pendant la guerre la Section technique de l'Aéronautique militaire après s'être distingué pour son invention d'aérostats (ballons d'observation attachés au sol) très stables dans le vent [57]. Engagé ensuite dans une carrière d'ingénieur dans le génie civil, il est devenu un spécialiste des ouvrages en béton armé. Caquot sera élu à l'Académie des Sciences en 1934.

Le programme de Caquot au ministère de l'Air, ambitieux, vise plusieurs objectifs : concentrer et rationaliser l'industrie, doter le pays d'une soufflerie géante où pourront être réalisés des essais d'avions en vraie grandeur, doter le ministère de l'Air d'un service des recherches, nationaliser l'École supérieure d'aéronautique, et développer l'enseignement et la recherche en mécanique des fluides dans les facultés des sciences. Il est ainsi décidé, avec l'accord de ces facultés et avec des soutiens locaux, la création de quatre instituts de mécanique des fluides – à Paris, Lille, Marseille et Toulouse – et de cinq centres annexes d'enseignement – à Strasbourg, Poitiers,

Nantes, Caen et Lyon. Jean Villey (1885-1948), maître de conférences de mécanique physique à la Sorbonne, est nommé chef de service au ministère de l'Air afin de faciliter les relations avec les facultés.

Les instituts et centres annexes commencent à fonctionner au cours de l'année universitaire 1929-1930, un an à peine après les premières prises de contact. Ils sont dotés de moyens considérables : création de chaires, de maîtrises de conférences et d'emplois de chef des travaux et d'assistant, financement de « collaborateurs scientifiques » pour des thèses de doctorat, construction de grandes souffleries et incitation des constructeurs à y réaliser leurs essais, et création d'une collection de *Publications Scientifiques et Techniques du ministère de l'Air* (PST) où seront publiés les thèses et travaux entrepris. Chaque faculté concernée crée un certificat d'enseignement supérieur en mécanique des fluides – la licence correspond alors à l'obtention de trois certificats. Le programme de ce certificat, national, conjugue à parts égales enseignement théorique (par un mathématicien), enseignement expérimental (par un physicien) et enseignement pratique (par un ingénieur). Un concours national annuel récompense les meilleurs étudiants. Outre l'ampleur des moyens accordés, l'ouverture d'esprit du ministère de l'Air, réaffirmée dans de nombreux courriers et rapports, apparaît tout à fait remarquable. À propos des recherches susceptibles d'être financées, il est ainsi déclaré, dans la lettre de cadrage adressée en juin 1929 aux doyens des facultés des sciences :

Les sujets pourront en être choisis dans un esprit très large : elles visent à l'obtention de tout progrès intéressant dans les divers domaines des applications aéronautiques, même si l'échéance n'en apparaît que lointaine.

### 3. La mécanique des fluides en trois questions

#### 3.1. *La résistance à l'avancement*

Au début du xx<sup>e</sup> siècle, la mécanique des fluides est confrontée à trois grandes questions. La première est celle de la résistance à l'avancement – ou « traînée » – d'un corps solide dans un fluide. Pour des corps de dimension métrique se déplaçant dans l'air ou dans l'eau (véhicule, bateau, avion), c'est-à-dire à grand nombre de Reynolds, les effets visqueux sont *a priori* très faibles. Or, on sait depuis Euler et d'Alembert que les équations qui gouvernent les écoulements sans viscosité prédisent une résistance nulle, résultat en contradiction avec l'expérience la plus élémentaire [58, § 1.3]. Ce « paradoxe de d'Alembert » a pu être contourné par Helmholtz par l'introduction à l'aval de l'obstacle de « surfaces de discontinuité » séparant un écoulement externe potentiel d'un « sillage » de fluide au repos. Les écoulements plans (bidimensionnels) peuvent ainsi être calculés en faisant intervenir des transformations conformes (Kirchhoff, Rayleigh, Levi-Civita, Brillouin, Villat).

Cette approche n'est cependant pas satisfaisante à plusieurs points de vue, du fait notamment de l'extension du sillage jusqu'à l'infini aval, de l'instabilité de la surface de discontinuité, et d'une sous-estimation importante de la traînée. L'instabilité de la surface de discontinuité, en particulier, se manifeste par l'apparition de tourbillons alternés advectés vers l'aval, tourbillons étudiés notamment par Henri Bénard et Theodore von Kármán.

#### 3.2. *La portance*

Une autre question est celle de l'origine de la force qui maintient un oiseau en vol et serait susceptible de porter un avion. La question devient aiguë lorsque dans les années 1905-1910 s'envolent les premiers avions, dont les performances (vitesse, altitude, charge emportée) s'améliorent de façon fulgurante, sur des bases essentiellement empiriques. Il apparaît dans les mêmes années

que la circulation de la vitesse du fluide autour d'un obstacle engendre une portance importante (Lanchester, Kutta, Joukovsky), circulation dont l'origine peut être trouvée, comme le montre Prandtl, dans l'advection dans le sillage de la vorticité générée dans une fine « couche limite » au voisinage immédiat de l'obstacle [58, 59]. La théorie de la couche limite de Prandtl renouvelle du même coup les questions de la traînée et du détachement de l'écoulement dans un sillage. Cette théorie, présentée par Prandtl en 1904 dans un congrès de mathématiques, passe cependant à peu près inaperçue. Développée dans les années suivantes par Prandtl et ses étudiants, elle ne sera pleinement reconnue par la communauté scientifique que deux décennies plus tard [44].

### 3.3. *La turbulence*

La troisième question est celle de la turbulence qui affecte un grand nombre d'écoulements naturels et industriels, et dont le caractère désordonné, tant dans l'espace que dans le temps, résiste à toute analyse. Les propriétés de mélange de la turbulence ont mis Saint-Venant et Boussinesq sur la piste d'une « viscosité effective » ou turbulente, très supérieure à la viscosité moléculaire, qui interviendrait dans la dynamique de l'écoulement moyen. Les équations de ce mouvement moyen ont été établies par Osborne Reynolds en 1895, mais le lien entre les moyennes des produits de fluctuations (les « contraintes de Reynolds ») et la physique de la viscosité turbulente échappe : c'est le problème de la « fermeture » des équations de Reynolds. Deux pistes s'ouvrent dans les années 1915 à 1930, inspirées par la mécanique statistique : l'analyse statistique de la turbulence à petite échelle, dont les bases sont posées par Geoffroy I. Taylor, et, à plus grande échelle, le concept de longueur de mélange introduit par von Kármán et Prandtl et qui, pour l'écoulement au voisinage d'une paroi, conduit au profil logarithmique de la vitesse [60, chaps. 6-7].

## 4. Contributions françaises avant 1930

Les contributions françaises à l'éclaircissement des questions ci-dessus sont, jusqu'en 1930, essentiellement le fait de quelques personnalités scientifiques dont les plus marquantes sont présentées ci-dessous.

### 4.1. *Gustave Eiffel*

Au début des années 1890, Gustave Eiffel (1832-1923), ingénieur mondialement réputé pour ses constructions métalliques, décide de consacrer la dernière partie de sa vie – il est alors   g   de soixante ans –    la question de la résistance au vent des corps solides [61, chap. 7]. Son premier laboratoire est installé dans sa tour sur le Champ-de-Mars    Paris. Le corps qu'il s'agit d'étudier (plaque, sphère, etc.) est placé dans une cage chutant le long d'un câble tendu sur les 115 mètres entre le premier étage de la tour et le sol. La vitesse de chute peut atteindre 40 m/s. Un dispositif mécanique, récupéré à l'issue de la chute, enregistre sur un cylindre tournant la vitesse du corps et la force aérodynamique s'exerçant sur lui.

Afin de s'affranchir des aléas météorologiques, un second laboratoire est installé en 1909 au pied de la tour. Il s'agit d'une soufflerie logée dans un bâtiment fermé, où l'objet maintenant immobile est placé dans le courant d'air créé à l'aval par un ventilateur (plutôt un aspirateur) et monté sur une balance de mesure des forces aérodynamiques. Trois ans plus tard, un nouveau laboratoire est installé à Auteuil. Eiffel apporte deux innovations majeures à la conception des souffleries qui alors se développent en Europe : (i) la veine d'air traverse librement la chambre d'essais (sans être contrainte par des parois latérales), facilitant ainsi grandement les mesures ;



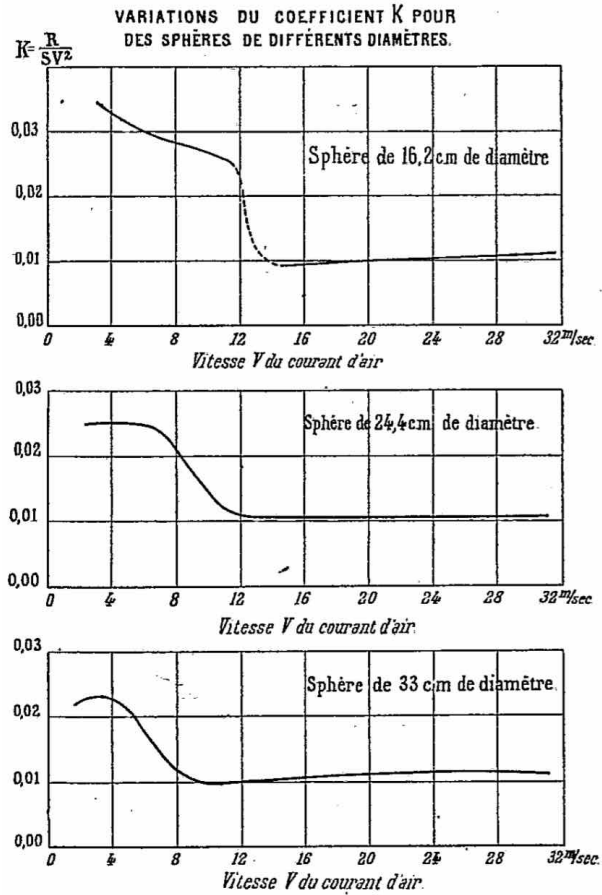


FIGURE 2. Variation du coefficient de traînée d'une sphère en fonction de la vitesse de l'air, mettant en évidence une « crise de traînée » [2].

(ii) un divergent à faible angle d'ouverture est interposé entre la chambre d'essai et le ventilateur, diminuant fortement la puissance nécessaire au ventilateur. La réputation d'Eiffel et la qualité de ses expériences conduisent les constructeurs aéronautiques à lui confier leurs essais, avec comme condition posée par Eiffel que les résultats devront pouvoir être publiés librement. Quatre mille essais sont ainsi réalisés entre 1909 et 1912 [1]. Une synthèse de ses travaux est régulièrement publiée dans des ouvrages traduits en plusieurs langues.

Une observation majeure d'Eiffel, publiée en 1912 dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, est la chute brutale, au-delà d'une certaine valeur de la vitesse du vent, de la traînée sur une sphère (figure 2). Intrigué, Prandtl rend visite à Eiffel pour se convaincre d'un phénomène qui a échappé à ses propres investigations. Faisant le lien avec des mesures de traînée sur une plaque plane réalisées par Blasius et qui ne restituent pas la loi en  $U^{3/2}$  attendue, Prandtl comprend bientôt la raison de cette « crise de traînée » : la couche limite devenue turbulente décolle de la sphère plus loin en aval, autorisant une remontée de la pression sur son culot. Le phénomène obéit à la similitude de Reynolds, mais la valeur critique du nombre de Reynolds dépend du niveau de turbulence de l'écoulement incident. Le phénomène a des implications pratiques importantes ; il est à l'origine, en particulier, d'une méthode d'estimation du niveau de turbulence d'une soufflerie.

#### 4.2. Henri Bénard

Henri Bénard (1874-1939) est sans doute le plus connu des mécaniciens français de la première moitié du xx<sup>e</sup> siècle [62, 63]. On lui doit deux découvertes d'une grande portée : les cellules thermoconvectives dans une couche de fluide chauffée par le bas (cellules de Rayleigh–Bénard), et les tourbillons alternés dans le sillage d'un corps solide (allées tourbillonnaires de Bénard–von Kármán). La première découverte fait l'objet de sa thèse soutenue en 1901 à la faculté des sciences de Paris [3]. Rayleigh en fait une théorie en 1916 qu'il introduit ainsi : « *The present is an attempt to examine how far the interesting results obtained by Bénard in his careful and skilful experiments can be explained theoretically.* » [4]. Cette théorie, qui attribue l'origine de l'instabilité à la force d'Archimède, ne rend cependant pas bien compte des observations de Bénard : elle prédit en particulier une valeur trop élevée du seuil de l'instabilité. Bénard a bien conscience du désaccord sans parvenir à en déterminer l'origine. Le problème ne sera résolu que dans les années cinquante lorsqu'il sera compris que l'origine des cellules de Bénard ne réside pas dans la force d'Archimède mais plutôt dans la tension de surface [64, p. 75-78].

La seconde découverte, des tourbillons de sillage, est réalisée à la faculté des sciences de Lyon où Bénard débute sa carrière universitaire, puis à Bordeaux où il obtient un poste de professeur, et enfin à Paris à partir de 1922. Une grande originalité de Bénard est son utilisation de la caméra comme instrument d'investigation scientifique, associée à un système optique lui permettant d'accéder à une résolution spatiale de quelques micromètres [62, 65]. La théorie non visqueuse de von Kármán (lequel réalise aussi quelques expériences, moins poussées que celles de Bénard) ne prédit pas bien la fréquence des tourbillons, en particulier au voisinage du seuil de l'instabilité du sillage stationnaire où les effets visqueux sont importants.

#### 4.3. Charles Camichel

Charles Camichel (1871-1966), normalien comme Bénard, est nommé en 1900 maître de conférences à la faculté des sciences de Toulouse après avoir exercé cinq ans à Lille. Il y crée un enseignement d'électricité industrielle et, soutenu par le doyen Paul Sabatier et par la municipalité, il fonde en 1907 un institut électrotechnique, fondation de la Ville [66]. En 1913, Camichel adjoint à son institut un laboratoire d'hydraulique afin de répondre aux sollicitations de la Compagnie des chemins de fer du Midi. Celle-ci déploie en effet l'hydroélectricité dans les Pyrénées afin d'électrifier son réseau ferroviaire, et rencontre de nombreux problèmes d'hydraulique dans ses installations. Les études de Camichel, sur les coups de bélier en particulier, assoient sa réputation et lui valent de fortes subventions du ministère des Travaux publics. La nécessité d'étudier en laboratoire, sur modèles réduits, les phénomènes observés en usine, l'orienta vers l'étude des conditions de similitude des écoulements. À titre d'illustration, la figure 3 montre la chute de pression normalisée dans un coude à angle droit en fonction du nombre de Reynolds. Notons que ce dernier y varie sur plus de cinq ordres de grandeur. Le quasi-plateau observé pour  $Re \gtrsim 1000$  définit le domaine où doivent être menées, selon Camichel, les études sur modèle réduit : l'indépendance vis-à-vis du nombre de Reynolds permet alors à une autre condition de similitude d'être satisfaite, par exemple sur le nombre de Froude pour les ouvrages à surface libre.

Camichel, qui a fait sa thèse au Collège de France sous la direction de Marcel Brillouin, double ses études d'hydraulique de recherches plus fondamentales en mécanique des fluides. Il développe en particulier la chronophotographie qui lui permet de visualiser la structure des écoulements (figure 4). Il en détermine ainsi, par exemple, les régions potentielles par la mise en œuvre du théorème de Stokes. Il étudie en détail les tourbillons de sillage, et publie en 1927, avec ses étudiants Max Teissié-Solier et Pierre Dupin, la première courbe donnant la fréquence des tourbillons (nombre de Strouhal) en fonction du nombre de Reynolds (figure 5).

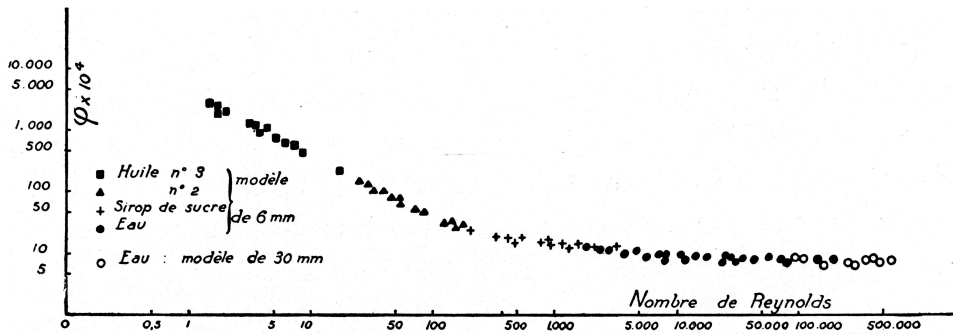


FIGURE 3. Chute de pression normalisée  $\varphi = \Delta p / \rho V^2$  dans des coudes à angle droit, fonction du nombre de Reynolds; la viscosité des fluides couvre une gamme dont les valeurs extrêmes sont dans un rapport de 373 [5].

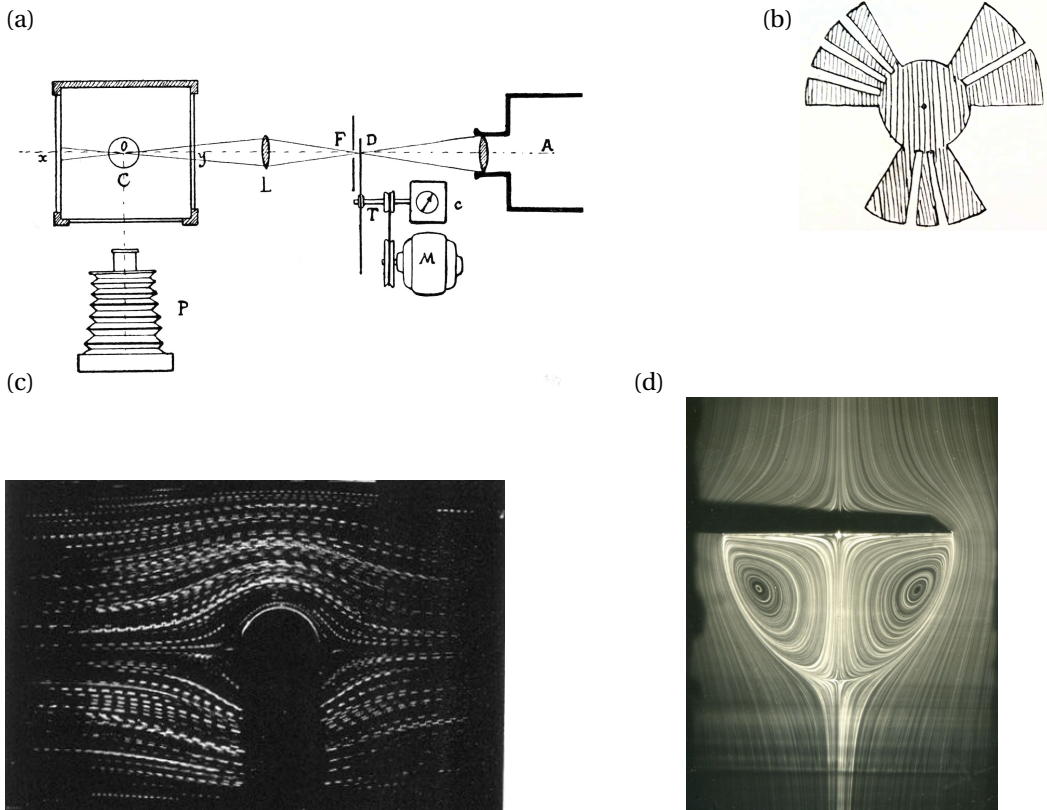
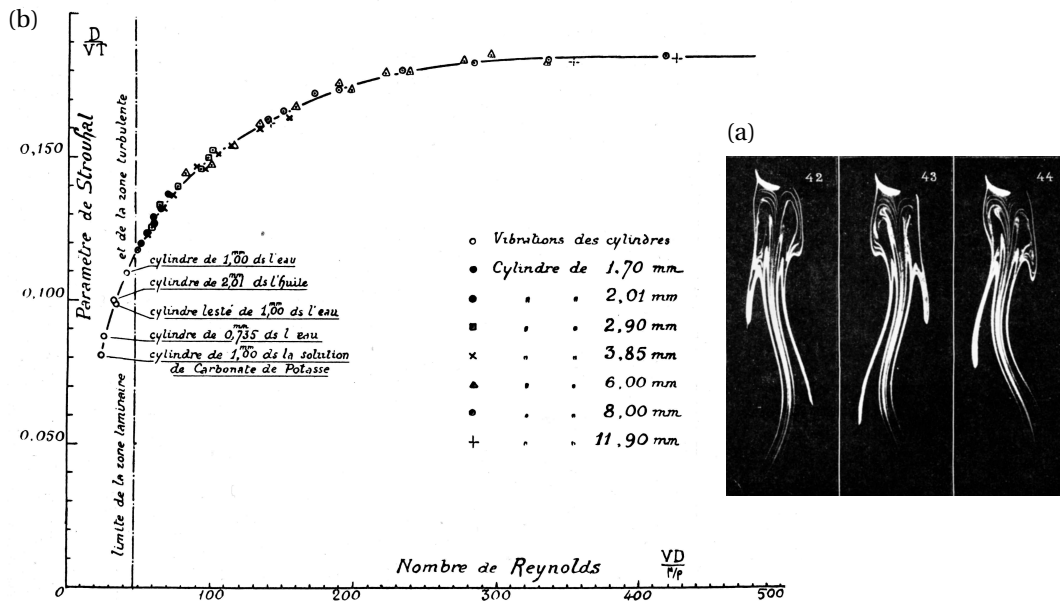


FIGURE 4. (a) Montage chronophotographique de Camichel : le faisceau lumineux issu de  $A$  est intercepté par le disque tournant denté  $D$ ; le faisceau émergent de la fente  $F$  éclaire le plan  $xOy$  de l'écoulement dans la conduite  $C$ , photographié par l'appareil  $P$  [6]. (b) Disque denté pour l'étude des écoulements instationnaires [7]. (c) Écoulement autour d'un cylindre à petit nombre de Reynolds [8]. (d) Écoulement autour d'une plaque ( $Re = 91$ ) [9].

La fréquence des tourbillons est mesurée par chronophotographie, par stroboscopie ou par vélocimétrie par fil chaud.



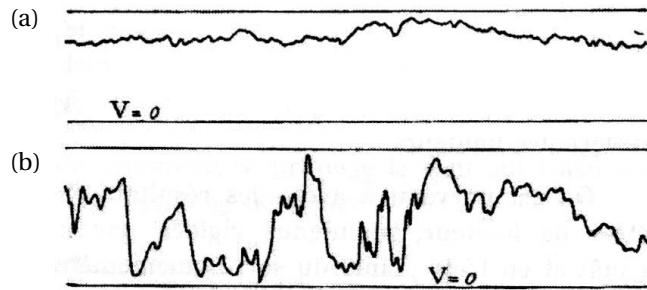
**FIGURE 5.** (a) Sillage d'un barreau cylindrique à trois instants différents, visualisé par un précipité chimique. (b) Fréquence des tourbillons (nombre de Strouhal) en fonction du nombre de Reynolds; les points en dessous de  $Re_c \approx 48$  correspondent aux oscillations transitoires provoquées par une perturbation localisée au voisinage du barreau [10].

Sept thèses de doctorat d'État sont soutenues entre 1919 et 1931, sur l'hydraulique des conduites et des déversoirs (D. Eydoux, A. Foch, C. Ledoux, C. Boujon), sur la similitude (L. Escande), et sur la chronophotographie rapide et les tourbillons de sillage (P. Dupin, M. Teissier-Solier).

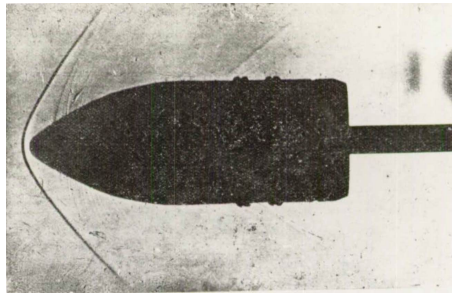
#### 4.4. Antoine Magnan

Antoine Magnan (1881-1938), médecin et physiologiste, professeur à l'École pratique des hautes études, est l'auteur inattendu de contributions originales à la mécanique des fluides et la turbulence atmosphérique. Magnan s'intéresse à la nage des poissons et au vol des oiseaux qu'il étudie à l'aide de la « cinémित्रailleuse » d'Étienne-Jules Marey et d'instruments arrimés sur l'animal – tels des accéléromètres enregistreurs sur le dos des oiseaux. Afin de mieux connaître la vitesse du vent et sa variation avec l'altitude, Magnan et ses collègues Eugène Huguenard et André Planiol mettent au point à partir de 1923 l'anémométrie par fil chaud [11] – dans les mêmes années que Burgers aux Pays-Bas et Dryden et Kuethé aux États-Unis. Le signal mesuré au sommet de perches est renvoyé au sol par ondes radio. Magnan caractérise ainsi les accélérations de l'air, les effets thermiques, l'effet d'obstacles (végétation, bâtiments) et de la rugosité du sol. La figure 6 montre deux enregistrements réalisés en 1925 sur l'île de Ré : celui d'un vent de mer, régulier, et celui d'un vent de terre, beaucoup plus turbulent.

Magnan pratique par ailleurs le vol à voile et participe à des conférences internationales sur le sujet. En 1926, le ministère de l'Air fonde pour lui, au Collège de France, une chaire



**FIGURE 6.** Mesure de vent par un anémomètre à fil chaud sur l'île de Ré (1925); (a), brise marine W-SW à 2 m au-dessus du sol; (b) brise de terre N-E à 10 m au-dessus du sol. La durée des enregistrements est 20 s, l'échelle verticale entre les tirets est (a) 12 m/s, (b) 15 m/s [13].



**FIGURE 7.** Visualisation en ombroscopie d'une onde de choc stationnaire à l'avant d'un projectile de 37 mm [14].

de mécanique animale appliquée à l'aviation. Les publications de Magnan, dans les *Comptes rendus* de l'Académie des sciences, dans *La Technique Aéronautique* et dans les *Publications* du ministère de l'Air, sont connues à l'étranger [12] et traduites en américain par le NACA. Dans un autre domaine, les travaux de Huguenard sur les écoulements compressibles et les ondes de choc (figure 7), dans les années vingt, sont également traduits par le NACA.

#### 4.5. Henri Villat

Henri Villat (1879-1972), mathématicien intrigué par le « paradoxe de d'Alembert », vient à la mécanique des fluides par des échanges avec Boussinesq et Brillouin [67]. Sa thèse, soutenue en 1911, porte sur le problème de l'écoulement non visqueux autour d'un obstacle, dans le cadre des surfaces de discontinuité d'Helmholtz–Kirchhoff. Prolongeant les travaux de Tullio Levi-Civita pour les obstacles courbes, où la forme de l'obstacle n'intervient que de façon implicite, Villat élabore une méthode de calcul pour un obstacle de forme prescrite. Il est nommé maître de conférences à Montpellier, puis professeur à Strasbourg dans les « provinces recouvrées ». Ses talents d'organisateur lui valent de présider en 1920, à Strasbourg, le Congrès international de mathématiques. Lorsqu'en 1927 Painlevé démissionne de la chaire de mécanique des fluides à la Sorbonne, Villat lui succède.

Villat, virtuose des fonctions spéciales, s'attache à la recherche de solutions exactes aux équations de Navier–Stokes. Il accorde peu de valeur à la théorie de la couche limite de Prandtl

dont le caractère approché ne le satisfait pas. Dans le fil des travaux de Carl Oseen à Stockholm, il cherche plutôt une solution intégrale sur tout le domaine fluide, à partir de laquelle, faisant tendre la viscosité vers zéro de la bonne façon, on obtiendrait la solution à viscosité faible ou nulle. Élu membre de l'Académie des sciences en 1932, Villat s'impose dans l'entre-deux-guerres comme l'une des figures majeures des mathématiques françaises [68]. C'est vers lui que se tourne naturellement Caquot, en 1928, pour définir un programme de développement de la mécanique des fluides française.

#### 4.6. *Internationalisation de la mécanique des fluides*

La naissance d'une communauté internationale de la mécanique des fluides peut être située en 1922, où, à l'initiative de von Kármán, est organisée à Innsbruck une conférence internationale [69]. Au vu du succès de cette conférence, une nouvelle rencontre est organisée deux ans plus tard à Delft aux Pays-Bas, territoire resté neutre dans le conflit mondial qui vient de se terminer et où les anciens belligérants sont censés pouvoir se retrouver. Mais le contexte international reste tendu, et Français et Allemands refusent d'y participer. En dépit de ces absences, la rencontre de Delft s'institue première Conférence Internationale de Mécanique Appliquée (ICAM). La situation se détend en 1926, où le Conseil International de la Recherche (IRC) lève les sanctions qui frappaient l'Allemagne. La deuxième ICAM qui se tient cette année-là à Zurich compte dans son comité d'organisation quatre Français (Henri Villat, Émile Jouguet, Ernest-Paul Hahn et Gabriel Koenigs). Deux Français sont invités à y donner une conférence plénière, Camichel sur la théorie des coups de bélier, et Jouguet sur la théorie thermodynamique de la propagation des explosions [69]. Les ICAM seront désormais quadriennales – la suivante se tiendra en 1930 à Stockholm.

La montée du national-socialisme en Allemagne dans les années trente entraîne un regain de tension et l'émigration de nombreux universitaires allemands. Von Kármán émigre ainsi au *California Institute of Technology* (CalTech) où il fonde un laboratoire d'aérodynamique, le Galcit. De nombreux chercheurs européens y seront accueillis – dont le français Charles Sadron (*cf. ci-après*) financé par la fondation Rockefeller.

### 5. **L'institut de mécanique des fluides de Paris**

Le développement de l'enseignement et de la recherche en mécanique des fluides est, à partir de 1928, l'un des grands objectifs du ministère de l'Air et de son directeur général technique Albert Caquot. L'institut de mécanique des fluides de Paris en est la première réalisation.

#### 5.1. *Création et premières évolutions*

L'institut parisien créé en 1929 regroupe trois chaires : une chaire théorique (Villat professeur et Henri Beghin maître de conférences, tous deux mathématiciens), une chaire expérimentale (Bénard et Adrien Foch, physiciens), et la chaire d'Aviation (Marchis et Albert Toussaint, physiciens). L'institut aérotechnique de Saint-Cyr y est absorbé et en devient son « laboratoire d'aérodynamique ». Villat est nommé directeur du nouvel institut et Dimitri Riabouchinsky directeur adjoint sur un poste d'ingénieur. La Sorbonne souffrant cruellement d'une pénurie de locaux, Caquot offre à Bénard d'installer son laboratoire dans un bâtiment du ministère de l'Air, rue de la Porte d'Issy.

Trois ans plus tard, l'institut absorbe le laboratoire de mécanique physique de la Sorbonne et son intitulé devient « institut de mécanique ». La chaire de mécanique physique, vacante au

départ à la retraite de Gabriel Kœnig, est attribuée à Henri Beghin. La maîtrise de conférences qu’occupait Beghin est alors attribuée à Joseph Pérès. (Notons que Foch et Pérès, antérieurement professeurs à Bordeaux et Marseille, respectivement, sont déqualifiés au rang de maître de conférences, mais avec la perspective d’une carrière parisienne plus prestigieuse.)

### 5.2. *Recherches de Henri Villat*

Les travaux de Villat à l’institut de mécanique de Paris s’inscrivent dans la continuité de ses travaux antérieurs sur l’hydrodynamique non visqueuse (les sillages d’Helmholtz-Kirchhoff), les tourbillons visqueux plans, et la recherche de solutions intégrales aux équations de Navier-Stokes. Le leader de la mécanique des fluides française continue d’ignorer la théorie de la couche limite, tant dans ses recherches que dans ses enseignements et ouvrages, de même qu’il ignore les théories statistiques de la turbulence. Quant à l’expérimentation, Villat s’y intéresse peu, ses ouvrages n’en parlent pas « par souci de concision ». Une lettre de von Kármán à Jerome Hunsaker, organisateur de l’ICAM de 1938 à Cambridge (Massachusetts) situe sa réputation à l’échelle internationale [70] :

Concerning Levi-Civita’s recommendation of French representatives of Applied Mechanics, I agree that Villat and Pérès are excellent men; however, Villat is far beyond the line of what we would call the frontier of useful or applied mechanics. I really believe that the man we could use best for a general lecture is Kampé de Fériet, director of the Institute for fluid mechanics, in Lille. In the last years, he published two reviews on recent progress concerning waves and turbulence. Both reports were excellent and just on the limit between the practical and theoretical viewpoint as we like it. Besides that, he follows the experimental research, whereas Villat, in spite of the fact that he is director of an experimental institution, has no idea of experimental questions.

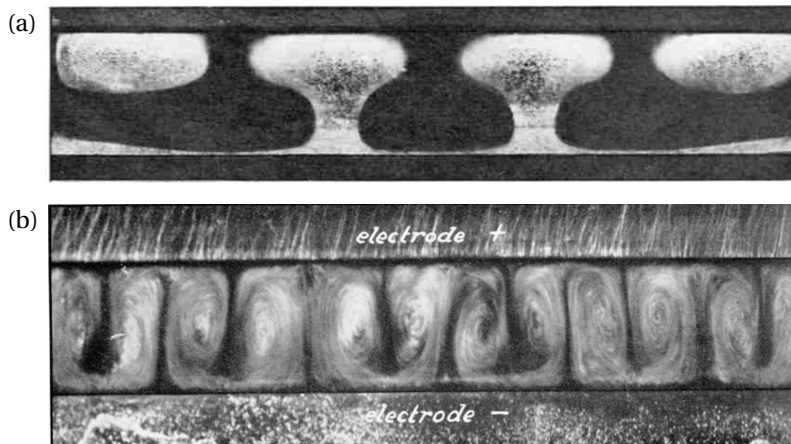
Villat n’en est pas moins une personnalité brillante et cultivée, homme de pouvoir, hautement respecté par ses collègues mathématiciens. Dans les années trente, il dirige six thèses (A. Gay, H. Poncin, M. Sédille, J. Leray, M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Jacob). Jean Leray, le plus brillant de ses élèves, sera professeur au collège de France. Dans les années quarante, Villat dirige encore quatre thèses sur les écoulements potentiels plans et les sillages de Helmholtz (J. Kravtchenko, A. Oudart, I. Carstoiu et R. Huron), et une cinquième, codirigée avec Pérès, sur les écoulements compressibles transsoniques (H. Cabannes).

### 5.3. *Le laboratoire de mécanique expérimentale des fluides*

Nommé en 1929 sur la nouvelle chaire de mécanique expérimentale des fluides, Henri Bénard poursuit dans les années trente l’investigation des tourbillons thermoconvectifs et des tourbillons de sillage. Son laboratoire, installé rue de la Porte d’Issy dans un bâtiment prêté par le ministère de l’Air, bénéficie du concours de nombreux « collaborateurs scientifiques » financés par le ministère de l’Air.

À partir de 1935, les travaux de Bénard sur la thermoconvection s’inscrivent dans le cadre de la Commission de la turbulence atmosphérique créée cette année-là par le ministère de l’Air. Cette commission, présidée par Philippe Wehrlé, directeur de l’Office national météorologique, a pour mission de coordonner les travaux des ingénieurs de l’Aéronautique et de scientifiques tels le météorologue Paul Idrac et le mathématicien Joseph Kampé de Fériet [15]. Bénard y poursuit l’idée que certaines formations nuageuses, notamment les « nuages en bandes », résultent d’une instabilité de même nature que celle qu’il étudie à petite échelle en laboratoire [16].

Les expériences, menées notamment avec son étudiant Dusan Avsec, visent notamment à augmenter l'épaisseur de la couche fluide – elle atteint la dizaine de centimètres sur la figure 8 (a) – afin de se rapprocher de situations atmosphériques. Bénard et Avsec montrent également qu'un champ électrique peut induire des mouvements convectifs (figure 8 (b)) et expliquer certains phénomènes atmosphériques – le phénomène est étudié à la même époque par G. I. Taylor à Cambridge.



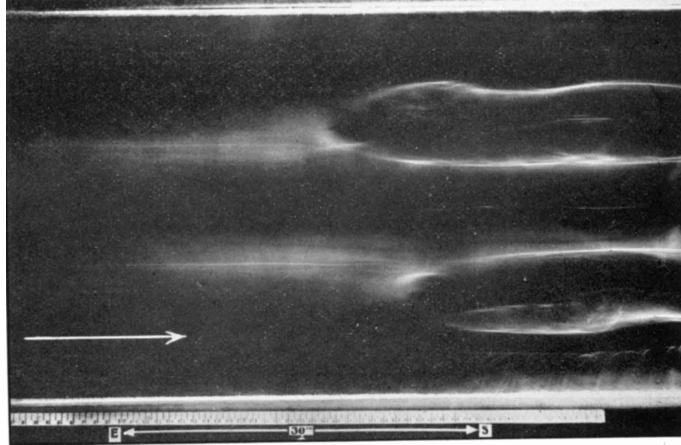
**FIGURE 8.** (a) Cellules thermoconvectives dans de l'air, visualisées par la condensation de vapeur d'eau au voisinage de la paroi supérieure plus froide. (b) Électroconvection dans une couche huile d'épaisseur 28 mm [17].

Dans l'idée de reproduire en laboratoire l'effet du vent sur les mouvements thermoconvectifs, Bénard et Avsec superposent un écoulement horizontal au forçage thermique vertical. Ils montrent que les tourbillons s'orientent alors dans le sens de l'écoulement, et que la longueur d'onde transverse peut être contrôlée par une indentation périodique des parois à l'entrée du canal. Si la longueur d'onde imposée à l'entrée s'écarte trop d'une certaine longueur naturelle, elle relaxe à l'aval vers cette longueur naturelle (figure 9) – phénomène analysé dans les années soixante par Viktor Eckhaus. Bénard et Avsec étudient également l'effet d'une stratification en densité – situation fréquente dans l'atmosphère – en superposant de l'air sec au-dessus d'une couche plus dense de fumée de tabac. Ils montrent que les cellules convectives s'orientent longitudinalement ou transversalement selon que domine l'instabilité thermique ou l'instabilité d'Helmholtz.

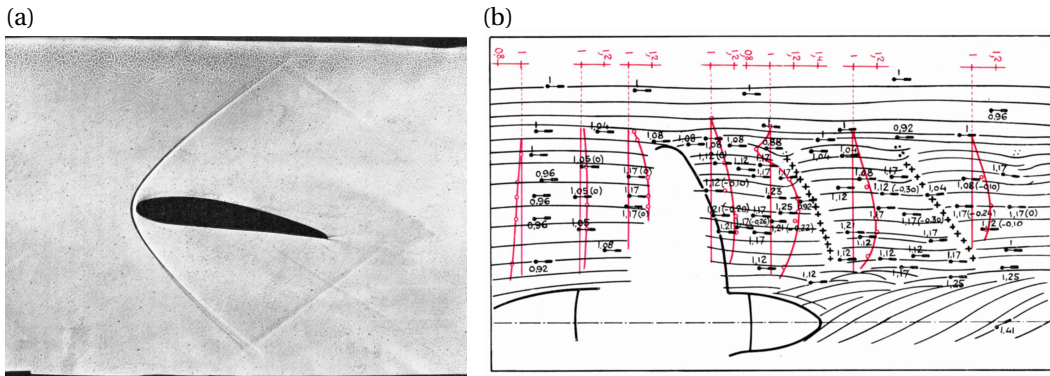
Une autre direction de recherche, objet de la thèse F.-J. Bourrières, porte sur « l'instabilité du tuyau d'arrosage », instabilité fluide-structure qui induit des oscillations de l'extrémité libre d'un tuyau souple parcouru par de l'eau.

Les travaux de Foch, maître de conférences associé à la chaire de Bénard, portent sur l'aérodynamique à grande vitesse, la visualisation des écoulements, et la physique des fluides. Une soufflerie supersonique est mise en service en 1931. Des techniques de visualisation par strioscopie ou par interférométrie, objet des thèses de R. Tremblot et L. Santon, sont mises au point en collaboration avec Charles Fabry à l'École polytechnique. La figure 10 (a) montre une onde de choc formée à l'avant d'un profil d'aile. Charles Chartier, autre étudiant de Foch, améliore la visualisation d'écoulements instationnaires par chronophotographie (figure 10 (b)) et met au point un dispositif stéréoscopique de mesure de champs de vitesses tridimensionnels. Dans le domaine de





**FIGURE 9.** Rouleaux thermoconvectifs longitudinaux dans un écoulement de Poiseuille de largeur 335 mm : la longueur d'onde initiale forcée par des indentations sur les parois (sur la gauche,  $\lambda/H \approx 2.8$ ), relaxe à l'aval vers une valeur plus faible ( $\lambda/H \approx 1.7$ ) [17].

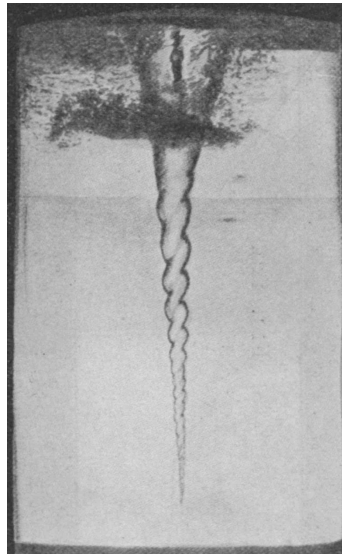


**FIGURE 10.** (a) Onde de choc formée à l'amont d'un cylindre, visualisée par strioscopie [18]; (b) Écoulement autour d'une hélice marine à trois pales, pour une vitesse de rotation correspondant à la puissance propulsive maximale [19].

la physique des fluides, André Fortier réalise des mesures de viscosité dont la précision permet d'accéder à une détermination des dimensions moléculaires.

Riabouchinsky, expérimentateur éclectique, aborde de son côté divers problèmes de dynamique tourbillonnaire, de formation de bulles de cavitation, et d'écoulements compressibles. La figure 11 montre un tourbillon de surface hélico-conique formé sur l'axe d'un cylindre tournant rempli d'eau. Dans un autre registre, Riabouchinsky joue un rôle important à l'institut de mécanique dans l'invitation de conférenciers étrangers. Il entretient des relations privilégiées avec la Russie (dont il demeure citoyen) et dirige plusieurs thèses de ses compatriotes. Il résumera ses travaux dans trois articles de synthèse [20–22].

Bénard meurt prématurément en 1939. Sa chaire est alors attribuée à Foch, et la maîtrise de conférences libérée est attribuée au physicien Yves Rocard. Ce dernier réalise de nombreuses expertises pour le ministère de l'Air, montrant notamment que les accidents d'avions de chasse survenant à grande vitesse résultent d'une résonance des oscillations de vibration et de flexion



**FIGURE 11.** Tourbillon hélico-conique formé sur l'axe d'un cylindre tournant [21].

des ailes [71, p. 40-43]. Rocard quitte l'institut de mécanique de Paris en 1941 (où il est remplacé par Edmond Brun), et poursuivra sa carrière à l'École normale supérieure de Paris.

#### 5.4. *Le laboratoire d'analogies électriques*

Joseph Pérès (1890-1962), nommé à Paris en 1932, arrive de l'institut de mécanique des fluides de Marseille qu'il a dirigé pendant deux ans. Il est accompagné de l'un de ses étudiants, Lucien Malavard (1910-1990), avec lequel il reprend, par la méthode des analogies électriques, l'étude des écoulements potentiels autour de profils d'ailes. Il convainc les constructeurs et le Service technique de l'Aéronautique de l'intérêt de leur « calculateur d'ailes » qui remplace de longs et coûteux essais en soufflerie. Les analogies électriques permettent également d'étudier, au-delà de l'aérodynamique, de nombreux problèmes régis par l'équation de Laplace ou par des équations du même type, dans le domaine de l'élasticité, de l'électrostatique, du magnétisme, et des écoulements en milieux poreux. À l'étroit dans le laboratoire de Bénard où il s'est initialement installé, il obtient du ministère de l'Air, en 1937, l'attribution de locaux propres mitoyens de ceux de Bénard.

Lors de l'invasion du pays en 1940, le ministère de l'Air est occupé par les Allemands et les installations expérimentales de Bénard et Pérès sont détruites ou emportées en Allemagne. Pérès et Malavard parviennent cependant à poursuivre, à l'École normale supérieure, une activité clandestine pour les constructeurs français. Pérès obtient en 1941 la chaire de mécanique rationnelle à la Sorbonne, cédant la maîtrise de conférences à Jean Leray, ancien étudiant de Villat.

#### 5.5. *Le laboratoire d'aérodynamique*

Lucien Marchis (1863-1941), titulaire de la chaire d'Aviation intégrée en 1929 à l'institut de mécanique de Paris, maintient de nombreux contacts avec les constructeurs aéronautiques, mais ne mène pas véritablement de recherches. La direction du laboratoire d'aérodynamique, à Saint-Cyr, est assurée par Albert Toussaint (1885-1956), maître de conférences, assisté par

deux ingénieurs, Frédéric Gruson et Jean Lacaine. Toussaint encadre, dans les années trente, cinq thèses de doctorat portant sur divers problèmes relatifs aux ailes monoplanes et biplanes, aux ailerons et empennages, aux interactions aile-hélice, et à la sensibilité des structures à la turbulence atmosphérique. Henry Girerd, l'un des étudiants de Toussaint, sera après la guerre conseiller de l'ONERA et titulaire de la chaire de technique aéronautique du CNAM. Robert Silber sera maître de conférences à l'université de Grenoble. Élie Carafoli, autre chercheur du laboratoire, deviendra membre de l'Académie des sciences de Roumanie.

Le peu d'intérêt manifesté par Villat pour le laboratoire d'aérodynamique conduira Painlevé, ministre de l'Air en 1933, à sortir ce laboratoire de l'institut de mécanique pour le placer sous la tutelle du CNAM. L'année suivante, Toussaint obtiendra la chaire de navigation aérienne du CNAM – sans pour autant quitter sa maîtrise de conférences à la Sorbonne.

## 6. L'institut de mécanique des fluides de Lille

### 6.1. *Installation et organisation*

Lille est dans le premier tiers du XIX<sup>e</sup> siècle la capitale d'une région industrielle dynamique, où s'est notamment installé le constructeur aéronautique Henry Potez. De grands scientifiques y ont laissé leurs marques, tels Louis Pasteur (qui y a créé la faculté des sciences), Joseph Boussinesq, Pierre Duhem et Paul Painlevé. Le projet d'institut de mécanique des fluides présenté par le recteur de l'université au ministère de l'Air, bien argumenté, convainc celui-ci en dépit de la proximité de la cité de la frontière allemande.

L'institut est créé en novembre 1929. La nouvelle chaire de mécanique des fluides est attribuée, sur la recommandation de Villat, au mathématicien Joseph Kampé de Fériet (1893-1982). Celui-ci s'est notamment illustré pendant la Première Guerre mondiale à la Commission d'artillerie de Gâvres pour ses études de balistique et pour la mise au point d'un système de suivi de projectile par cinématographie. La maîtrise de conférences associée à la chaire est attribuée au physicien André Martinot-Lagarde (1903-1986), normalien, qui prépare alors une thèse au service technique de l'Aéronautique à Issy-les-Moulineaux.

Avec le soutien du doyen de la faculté et du recteur, des crédits du plan d'outillage national sont obtenus pour la construction, sur un terrain cédé à l'université par la municipalité, d'un important bâtiment comportant notamment un amphithéâtre, une soufflerie aérodynamique, un canal hydrodynamique, et une station d'essais de machines hydrauliques. Ce bâtiment est inauguré en avril 1934 à l'occasion d'un colloque national de mécanique des fluides, le premier du genre en France, organisé par Kampé de Fériet. En 1938, une soufflerie verticale est adjointe au bâtiment, pour l'étude des vrilles d'avion. L'institut accueille un service de l'Office national de météorologie (ONM), opéré par des militaires, pour des relevés météorologiques et la couverture des vols commerciaux, en liaison avec les stations environnantes (Le Bourget, Londres, Cologne et Bruxelles).

### 6.2. *Activités d'enseignement et de formation*

L'institut dispense les enseignements d'un certificat de mécanique des fluides suivi par une dizaine d'étudiants. Ces étudiants se classent parmi les meilleurs au concours annuel organisé par le ministère de l'Air. Les conférences et travaux pratiques associés à ce certificat sont ouverts aux étudiants de l'Institut Industriel du Nord (IDN) et de l'École nationale des arts et métiers. L'institut délivre également un certificat d'aérodynamique et d'hydrodynamique supérieures, ouvert aux étudiants préparant l'agrégation ou se destinant à la préparation d'une thèse, où

Kampé de Fériet présente l'état des recherches dans un domaine particulier : couche limite, turbulence, dynamique de l'atmosphère, et mécanique statistique.

Des formations sont également organisées pour les enseignants du primaire supérieur et du secondaire, avec du matériel pédagogique spécialement conçu par Henri Guillemet, assistant. L'institut est enfin très investi dans la « propagande aéronautique ». Il organise des conférences de vulgarisation, anime des stands dans les expositions, offre des actions de formation dans les aéoclubs (Kampé de Fériet est lui-même féru de vol à voile), événements largement relayés par la presse locale.

### 6.3. Réalisations scientifiques

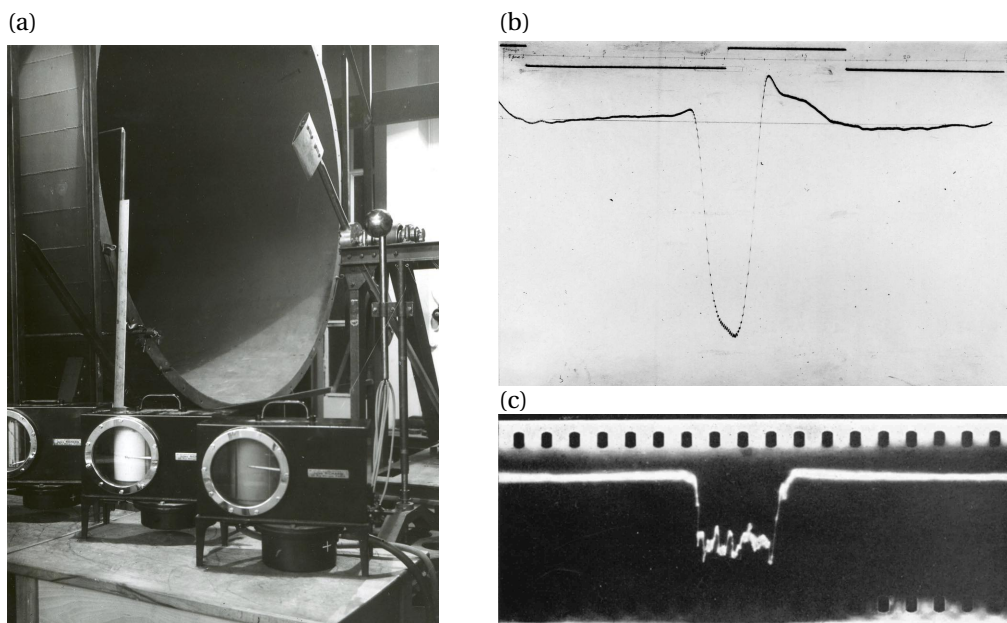
L'institut connaît dès sa création une activité importante en relation avec l'industrie régionale. Les études portent sur la caractérisation d'écoulements dans les pompes et turbines, sur la résistance au vent et le tirage de cheminées, et sur des essais d'éoliennes, d'échangeurs thermiques, de ventilateurs, ou de systèmes d'aération de voitures de tramway.

Une autre part de l'activité intéresse le constructeur aéronautique Potez et le service des recherches du ministère de l'Air. Les études d'aérodynamique sont réalisées dans la grande soufflerie de l'institut où la vitesse de l'air atteint 60 m/s dans une veine d'essai de diamètre 2,20 m (visible sur la figure 12 (a)). Des balances permettent la détermination de polaires de profils d'ailes (portance et traînée en fonction de l'incidence) et la mesure des moments de tangage, de giration et de roulis. Un appareil émetteur de fumée et un éclairage stroboscopique permettent de visualiser l'écoulement autour des maquettes. L'effet de la turbulence sur les forces aérodynamiques, contrôlée par des grilles à l'amont de la maquette, est l'objet d'une attention croissante. Un tapis roulant permet de prendre en compte l'effet du sol sur la traînée aérodynamique des véhicules terrestres (une première en France). En 1937, l'institut compte 28 personnes.

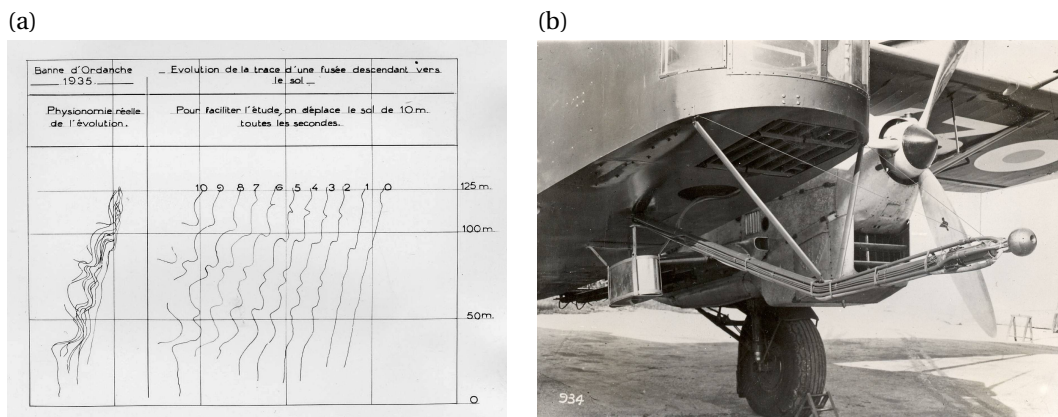
Sur le plan scientifique, Kampé de Fériet porte un intérêt croissant pour la turbulence. Du point de vue expérimental, il s'agit de mieux caractériser la dynamique des anémomètres (tubes de Pitot, fils chauds). La figure 12 (a) montre une installation dédiée à l'étude des temps de réponse, par l'interruption périodique de l'écoulement par une pale en rotation placée juste à l'amont de la mesure. Le signal est enregistré sur un tambour tournant (figure 12 (b)) ou photographié sur l'écran d'un oscilloscope (figure 12 (c)).

En liaison avec la station météorologique installée à l'institut et avec la Commission de la turbulence atmosphérique (cf. § 5.3), les études de dynamique atmosphérique se développent. La figure 13 (a) montre le résultat d'une étude du profil vertical de la vitesse du vent, sur la première centaine de mètres, par suivi du panache de fumée émis par une fusée. Un instrument de mesure des trois composantes de la vitesse du vent (arrangement de tubes de Pitot sur une sphère) est mis au point et breveté sous le nom d'anémoclinomètre [24]. L'appareil équipe un avion-laboratoire de l'ONM (figure 13 (b)) et il est diffusé à l'étranger. Des campagnes de mesure sont organisées dans les Alpes et dans le Puy-de-Dôme, auxquelles Kampé de Fériet et Martinot-Lagarde prennent une part active : observation cinématographique stéréoscopique du mouvement des nuages, appréciation des effets thermiques, estimation de l'hypothèse de Taylor de « transport gelé » de la turbulence. En 1939, Kampé de Fériet effectue une mission au Sahara afin d'étudier la couche limite atmosphérique et le phénomène d'inversion thermique.

Sur le plan théorique, Kampé de Fériet s'attache à préciser la notion de moyenne turbulente (temporelle, statistique), et s'intéresse à la diffusion turbulente. La figure 14 (a) montre le schéma d'une installation d'étude, en soufflerie, de la diffusion de petites bulles de savon emportées par un écoulement d'air. La figure 14 (b) montre la distribution radiale des bulles à trois distances du point d'émission. L'évolution vers l'aval de l'écart-type de cette distribution permet de tester

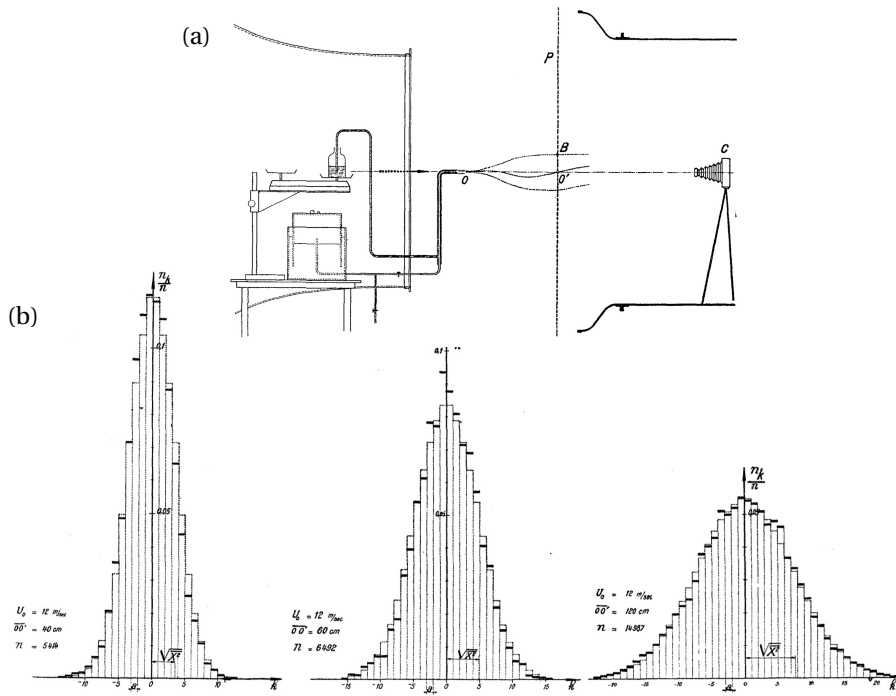


**FIGURE 12.** (a) Pale coupe-vent pour l'étude du temps de réponse des anémomètres; sur la table, trois enregistreurs à tambour tournant. (b) réponse d'un anémomètre Papillon pour un temps d'interruption de 2,2 secondes. (c) réponse d'un anémomètre à fil chaud photographiée sur l'écran d'un oscilloscope [23].



**FIGURE 13.** (a) Dérive du panache de fumée émis par une fusée, photographiée à intervalles d'une seconde; une discontinuité de la vitesse du vent est visible à la hauteur de 100 m (1935); (b) anémoclinomètre monté à l'avant de l'avion-laboratoire (Potez 54) de la Commission pour la turbulence atmosphérique [23].

les théories de Taylor. Kampé de Fériet participe aux conférences internationales ICAM et entretient des relations étroites avec Taylor, von Kármán et Dryden. Il est membre de l'*Institute for Aeronautical Sciences* américain et, bon germanophone, membre étranger de la société allemande d'aéronautique, la *Lilienthal Gesellschaft für Luftfahrtforschung*.



**FIGURE 14.** (a) Installation d'étude, dans la soufflerie, de la diffusion de petites bulles de savon dans un écoulement turbulent; (b) distribution radiale des bulles à trois distances en aval du point d'émission [25].

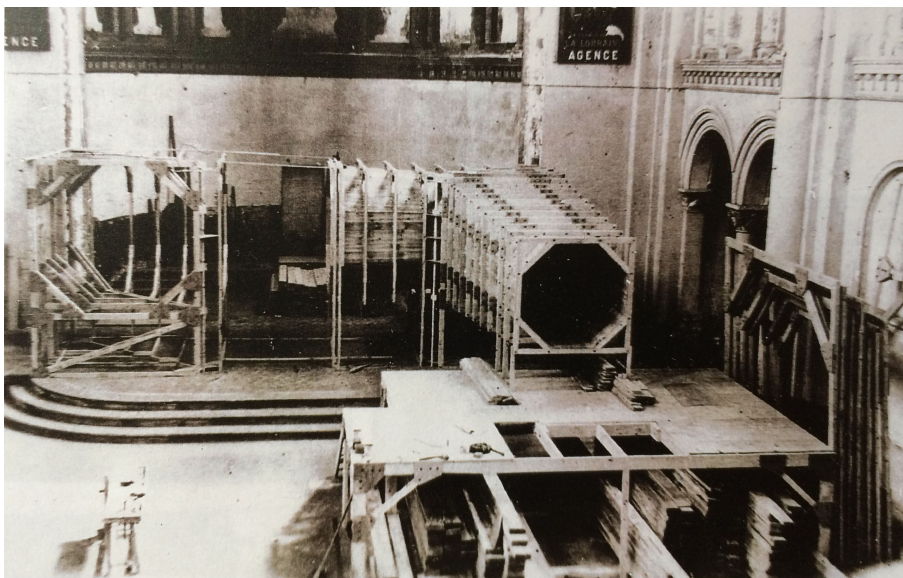
Trois thèses de doctorat sont soutenues en 1936 et 1937, sur l'écoulement dans un divergent (J. Demontis), sur le mouvement d'une sphère dans un liquide visqueux (J. Vagner), et un travail théorique sur l'écoulement plan visqueux autour d'un cylindre (R. Berker, futur doyen de la faculté des sciences d'Istanbul et organisateur de l'ICTAM en 1952).

Fort de ses succès, l'IMFL compte en 1938 une quarantaine de personnels. Seulement trois d'entre eux, cependant, appartiennent à la faculté des sciences, auxquels incombent la direction de l'institut et la lourde gestion de son fonctionnement. Aussi Kampé de Fériet accueille-t-il avec soulagement, en 1938, que l'institut passe sous la gérance du Groupement français pour le développement des Recherches Aéronautiques (GRA), fondation que les sociétés de construction aéronautique, nationalisées par le Front populaire, ont créé pour mutualiser leurs efforts de recherche. Ce soulagement est cependant associé à une perte d'autonomie scientifique de l'institut et à la perte de son contrôle par la faculté des sciences. Des tensions liées à cette nouvelle situation ne tarderont pas à se manifester.

#### 6.4. Repli à Toulouse durant la guerre

Le 17 mai 1940, face à l'imminence de l'invasion allemande, les personnels de l'IMFL sont enjoins par le GRA de quitter Lille et de se replier à Orléans. L'installation dans cette ville – dans un hôtel dont la salle de bal est transformée en bureau d'études – est de courte durée : trois semaines plus tard, l'IMFL est contraint de fuir à nouveau l'avancée allemande. C'est dans un château vacant dans les environs de Toulouse, trouvé par Kampé de Fériet, que la vie se réorganise : vie communautaire avec les familles et reprise d'une activité scientifique.





**FIGURE 15.** Soufflerie en construction dans « La Chapelle » mitoyenne de l'Institut électrotechnique de Toulouse. Arch. de l'Institut Pprime de Poitiers.

Des essais réalisés à Lille avant le départ sont dépouillés, des conférences sur la météorologie sont organisées dans le parc, des profils d'ailes sont testés sur les routes avoisinantes, arrimés sur le toit d'une voiture Citroën.

Une organisation plus pérenne devient possible à l'automne avec la cession par la Ville de Toulouse, par l'intermédiaire de Charles Camichel, d'une chapelle désaffectée mitoyenne de l'institut électrotechnique. L'espace offert par cette chapelle permet la construction, au cours des années suivantes, de trois souffleries. La plus grande, en bois, à retour guidé et à section octogonale, apparaît en construction sur la figure 15. Elle est mise en service en 1943.

L'activité de l'IMFL pendant la guerre est pilotée par le GRA, qui finance l'aménagement de la Chapelle, ordonne des études pour des constructeurs aéronautiques, et recrute le personnel nécessaire – l'IMFL compte quatre-vingts personnes en 1944. Une certaine activité se maintient en effet dans les sociétés nationales « épurées » par le gouvernement de Vichy – le constructeur Marcel Bloch, alias Marcel Dassault, qui refuse de collaborer, est interné puis déporté à Buchenwald. Cette activité est encadrée par un programme aéronautique « commun » franco-allemand négocié en 1941 par le secrétaire d'État à l'Aviation, le général Bergeret. Le programme devient purement allemand à partir de novembre 1942 [72].

Dans ce contexte, encore alourdi par le fonctionnement très bureaucratique imposé par le GRA à l'IMFL, les relations entre les deux partenaires se tendent [73]. Le 5 novembre 1942 – six jours avant l'invasion de la zone libre – Kampé de Fériet adresse au directeur du GRA une lettre de quatre pages dénonçant une situation qui lui interdit toute activité de recherche, et demande la résiliation de la convention liant l'IMFL au GRA. Les circonstances ne permettront pas cette résiliation, mais Kampé de Fériet démissionnera de la direction de son institut quelques mois après la Libération.

Parmi les personnels de l'IMFL repliés à Toulouse se trouve un certain François Naftali Frenkiel (1910-1986), ingénieur polonais en thèse avec Kampé de Fériet sur l'analyse statistique de la turbulence. Frenkiel achève sa thèse à Toulouse (il réalise quelques expériences dans la soufflerie de l'IMFT), mais, de confession juive, il est congédié par le GRA – son employeur – et harcelé

par l'administration française. Ses demandes de visa pour émigrer aux États-Unis avec sa femme Malka ayant échoué, malgré le soutien de son entourage, le couple décide en mars 1943 de fuir en Italie. Arrêtés à la frontière, ils sont tous deux déportés en camp de concentration. Malka, enceinte, y meurt. Naftali survit. Après un an de convalescence dans un hôpital parisien, il soutient sa thèse à Lille le 3 juillet 1946 – une thèse d'université car il n'a pas obtenu la dispense de la licence nécessaire pour une thèse d'État. Cette thèse porte sur les spectres de Fourier et les relations entre fonctions de corrélation des fluctuations, et sur les coefficients de diffusion; elle est résumée dans cinq articles des *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* et publiée dans un rapport pour le GRA plus tard traduit en anglais par le NACA [26, 27]. Quelques mois après sa soutenance, Frenkiel émigre aux États-Unis où il deviendra une figure de premier plan de la mécanique des fluides américaine. Il fondera notamment, en 1958, le journal *The Physics of Fluids*.

### 6.5. L'après-guerre

Après sa démission en 1945, Kampé de Fériet se consacre pleinement à ses recherches sur la turbulence et les phénomènes aléatoires. Il effectue de nombreux séjours dans les universités américaines où ses travaux sont bien reconnus – ils sont cités dans les ouvrages de référence sur la turbulence. Il est élu en 1953 correspondant de l'Académie des sciences de Paris. Martinot-Lagarde lui succède à la direction de l'IMFL, maître de conférences non docteur – il ne soutiendra sa thèse qu'en 1958. Privé de véritable leader scientifique, l'institut traverse dans les années suivantes une histoire mouvementée, ballotté entre l'ONERA (qui se substitue au GRA comme gérant de l'IMFL) et l'université de Lille.

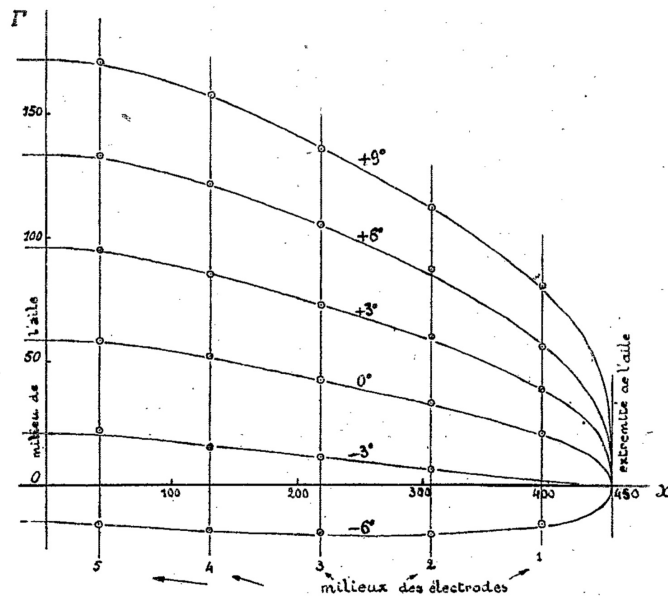
## 7. L'institut de mécanique des fluides de Marseille

### 7.1. Les années trente

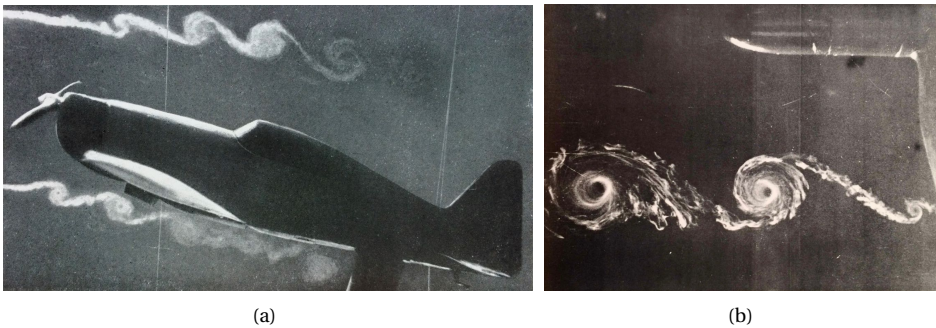
Troisième ville française, Marseille est au début du xx<sup>e</sup> siècle un port important et une grande cité universitaire. Son histoire aéronautique est marquée par le premier vol d'un hydravion, réalisé en 1910 par Henri Fabre sur l'étang de Berre. Plusieurs constructeurs aéronautiques se sont ensuite installés dans la région, et la « gare aérienne » de Marignane, inaugurée en 1922, offre des liaisons commerciales vers Alger, Beyrouth et Saïgon. Cette situation lui vaut d'être retenue par le ministère de l'Air, en 1930, pour la création d'un institut de mécanique des fluides. Joseph Pérès, titulaire de la chaire de mécanique rationnelle et appliquée, en est nommé directeur. Un poste de chef de travaux fondé par le ministère de l'Air est attribué à Jacques Valensi (1903-1992), ingénieur de l'École centrale de Paris. Lucien Malavard, étudiant à la faculté des sciences, est nommé collaborateur scientifique du ministère de l'Air, faisant fonction d'assistant. Un certificat de mécanique des fluides est ouvert, suivi dans les années suivantes par une douzaine d'étudiants. L'institut de Marseille, comme celui de Lille, participe à de nombreuses manifestations publiques de promotion de l'aéronautique.

Installés dans l'immeuble de l'ancienne faculté des sciences, sur la Canebière, Pérès et Malavard initient des recherches sur l'analogie rhéoelectrique des écoulements potentiels autour d'obstacles. Ils résolvent en particulier, pour une aile d'envergure finie, l'écoulement secondaire dans le plan normal à l'écoulement principal – problème où doit être traduite électriquement une condition à la limite sur l'aile, intégrée-différentielle, établie par Prandtl. La figure 16 montre, pour différentes incidences, la distribution de la portance le long de l'aile [28]. Valensi poursuit de son côté des recherches sur l'aérodynamique des hélices au service des recherches de l'Aéronautique à Issy-les-Moulineaux, et engage à Marseille la construction d'une soufflerie et d'un tunnel hydrodynamique.





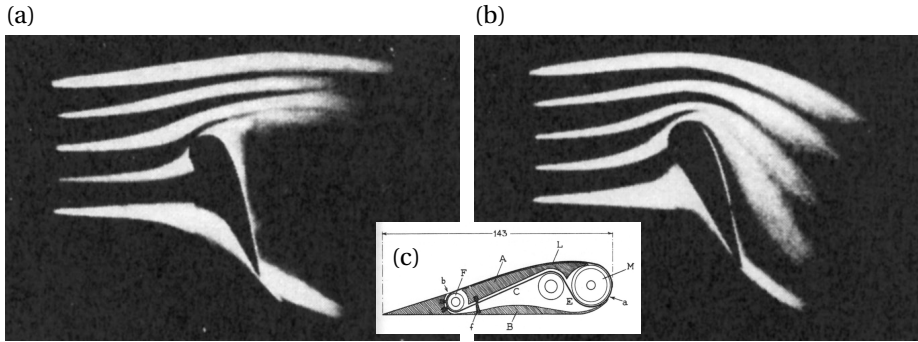
**FIGURE 16.** Distribution de la circulation selon l'envergure d'une aile, pour six incidences, déterminée par la méthode rhéoelectrique (—) et par le calcul (o) [28].



**FIGURE 17.** (a) Tourbillons marginaux générés à l'extrémité de l'hélice d'une maquette de Morane 406; (b) Tourbillons générés par une hélice marine [29].

Pères quitte Marseille en 1932 pour la Sorbonne (*cf.* § 5.4), accompagné de Malavard. Son successeur à la direction de l'IMFM, le mathématicien André Marchaud, obtient un terrain et les subventions nécessaires pour établir l'institut dans des locaux propres, à proximité de la gare Saint-Charles. Valensi poursuit ses travaux sur la visualisation en soufflerie d'écoulements autour de maquettes (ailes et hélices aériennes, avions complets) en collaboration avec les constructeurs aéronautiques (figure 17), et soutient sa thèse à la Sorbonne en 1935. Son poste de chef des travaux est alors transformé en maîtrise de conférences.

Alexandre Favre (1911-2005), nouvel assistant, travaille à la détermination détaillée du champ des vitesses autour d'obstacles placés dans un « tunnel hydrodynamique de Toussaint-Carafoli » réalisant un écoulement plan [30]. Le champ des vitesses est obtenu à partir de filets de colorant émis par une rampe oscillante à l'amont de l'obstacle. À partir de ces vitesses et de leurs



**FIGURE 18.** (b) Écoulement autour d'un aileron à paroi d'extrados mobile pour une incidence de  $60^\circ$  ; (a) vitesse de la courroie nulle ; (b) vitesse de la courroie égale à celle de l'air ; (c) schéma de l'aileron [31].

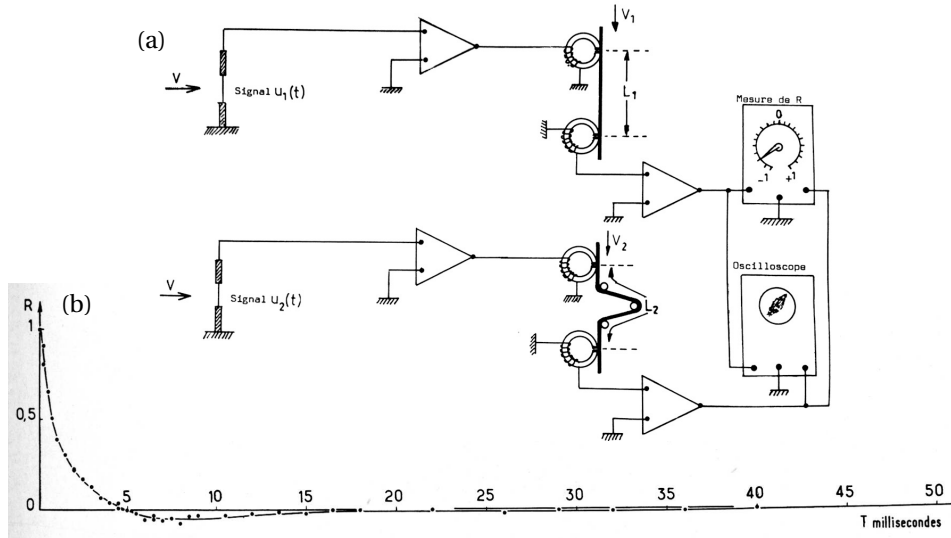
gradients, Favre peut ainsi évaluer aux différents points (près de 600!) la valeur numérique de chacun des termes de l'équation de Navier–Stokes. Une autre partie de sa thèse porte sur un procédé « hypersustentateur » destiné à prévenir le décollement de l'écoulement, mettant en œuvre, sur l'extrados de l'aile, une paroi mobile à la vitesse de l'écoulement (figure 18 (b)). Des forces de portance élevées peuvent ainsi être obtenues. Favre soutient sa thèse en 1938 [31]. Dans l'attente d'un poste universitaire, il travaille ensuite pour la société nationale de construction de moteurs à Argenteuil (usines Hispano-Suiza). Il y conçoit un compresseur centrifuge supersonique résolvant le problème de l'alimentation des premiers turboréacteurs d'avion. La guerre avec l'Allemagne déclarée, l'invention est envoyée en Angleterre pour éviter qu'elle ne tombe entre les mains de l'ennemi. On la retrouvera après la guerre dans les premiers turboréacteurs britanniques ainsi que dans les séparateurs isotopiques du CEA à Pierrelatte.

Nommé recteur, Marchaud quitte Marseille en 1938, remplacé à la direction de l'institut par le mathématicien René Thiry (1886-1968). Celui-ci arrive de Strasbourg où, après une thèse sous la direction de Villat, il a monté un centre d'enseignement de la mécanique des fluides à la faculté des sciences. Thiry achève pendant la guerre, avec le soutien du GRA, l'installation de l'institut à Saint-Charles et la construction de la grande soufflerie. Valensi, de confession juive, est démis de son emploi de maître de conférences par le gouvernement de Vichy en décembre 1940. Il poursuit néanmoins, bénévolement, l'installation de la soufflerie pendant une année. Recherché par la Gestapo, il émigre ensuite à Londres. Il est remplacé sur son poste par Louis Sackmann, ancien collaborateur de Thiry à Strasbourg. Favre, de retour à Marseille après l'Armistice, oriente son enseignement et ses recherches vers la turbulence et la mécanique de l'atmosphère, avec le concours de l'ONM. Il noue des relations avec le Centre de Recherches Scientifiques, Industrielles et Maritimes de Marseille (CRSIM, qui deviendra le laboratoire de mécanique et d'acoustique).

## 7.2. L'après-guerre

À la Libération, Valensi est réintégré dans sa maîtrise de conférences, transformée en 1947 en chaire de mécanique des fluides toujours financée par le ministère de l'Air. Il prend la direction de l'institut suite au départ de Thiry à la Sorbonne. L'emploi de chef de travaux associé à la chaire est attribué à Claire Clarion qui soutient en 1954 une thèse sur les oscillations d'un fluide dans un tube en U, travail réalisé en collaboration avec Théodore Vogel du CRSIM (Claire Clarion sera chercheuse au CNRS puis professeure).

La grande soufflerie entre en service en 1948 – sa veine d'essai elliptique a pour section  $3,3 \times 2,2 \text{ m}^2$ . L'activité de l'institut, fortement soutenue par l'ONERA et par l'industrie, s'oriente vers



**FIGURE 19.** (a) Schéma du dispositif de calcul de la corrélation entre deux signaux  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$ . (b) Coefficient de corrélation temporelle des fluctuations longitudinales de vitesse dans une couche limite [32].

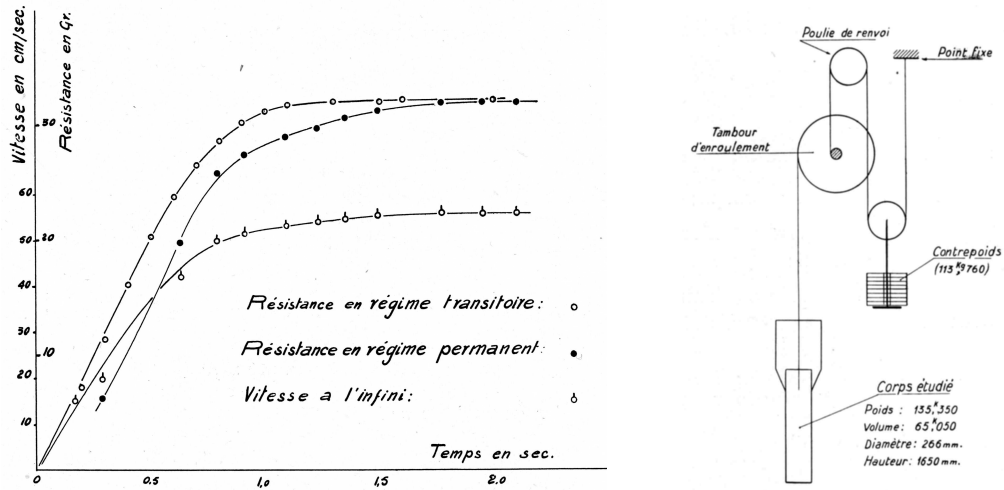
les écoulements instationnaires (grilles d'aubes de compresseurs, turbomachines, pales d'hélicoptères) et vers les écoulements supersoniques. Un service de calcul sur machines électriques est créé par André Papon, assistant. Une collaboration avec le CRSIM porte sur la métrologie par ultra-sons.

Favre crée en 1947 un nouveau laboratoire de mécanique de l'atmosphère et météorologie, installé dans une chapelle désaffectée cédée par la préfecture et située à proximité du CRSIM. Sa maîtrise de conférences est transformée en chaire, financée par le ministère de L'Air. La turbulence devient sa thématique principale de recherche. Soutenu par l'ONERA et le CNRS, il développe avec Jean Gaviglio le calcul des corrélations de vitesse à partir d'anémomètres à fil chaud. La figure 19(a) en montre le principe : les deux signaux à corrélérer (mesurés au même point ou en deux points différents) sont enregistrés sur bande magnétique et relus avec un retard  $L_1/V_1$  et  $L_2/V_2$ , où  $V_1$  et  $V_2$  sont les vitesses des bandes et  $L_1$  et  $L_2$  les distances entre les têtes d'enregistrement et de lecture. Les signaux sont ensuite multipliés et intégrés électroniquement. La variation du décalage temporel est obtenue en déplaçant un galet entre les têtes magnétiques. La figure 19 (b) montre le coefficient de corrélation ainsi obtenu pour les fluctuations longitudinales de vitesse dans une couche limite.

## 8. L'institut de mécanique des fluides de Toulouse

### 8.1. Création

La création d'un institut de mécanique des fluides à Toulouse est motivée par deux raisons. La première est la présence dans cette ville des constructeurs aéronautiques Latécoère et Dewoitine et du siège de la célèbre *Compagnie générale aéropostale* (où s'est notamment illustré l'aviateur et romancier Antoine de Saint-Exupéry). La seconde tient à la réputation du laboratoire d'hydraulique de l'institut électrotechnique de la faculté des sciences (cf. § 4.3). Le nouvel institut aura pour mission particulière l'étude des coques d'hydravions – spécialité de Latécoère qui inaugure alors une liaison aérienne régulière entre New York et l'étang de Biscarosse sur la côte Aquitaine.



**FIGURE 20.** (a) Dynamique d'un corps accéléré par la gravité dans l'eau : vitesse du corps ( $\circ$ ), traînée instantanée mesurée ( $\circ$ ), et traînée en écoulement stationnaire à la même vitesse ( $\bullet$ ). (b) Machine d'Atwood permettant la variation du poids apparent et de la vitesse terminale de l'obstacle [33].

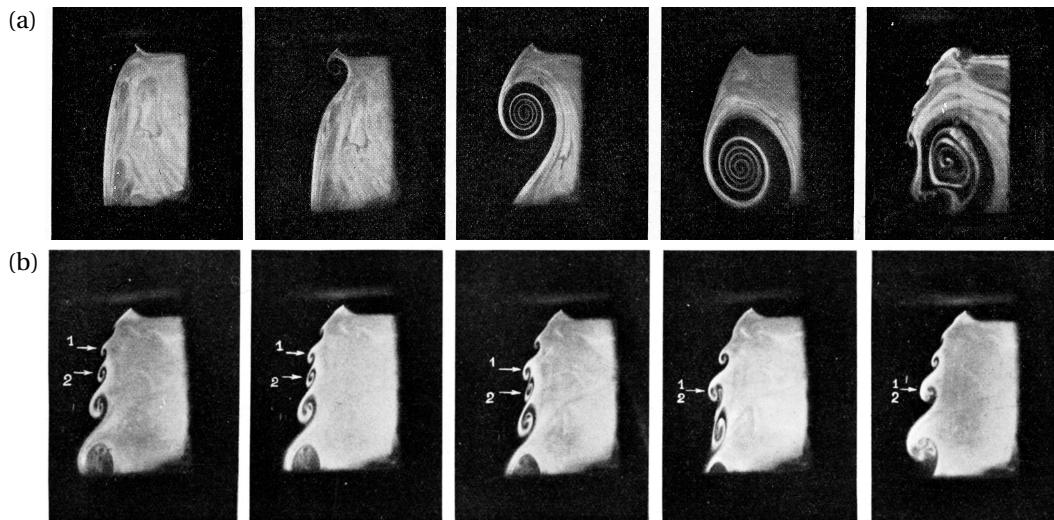
L'institut est créé en novembre 1930 et sa direction est confiée à Charles Camichel, directeur de l'Institut électrotechnique (IET). Une maîtrise de conférences de mécanique des fluides, fondée par le ministère de l'Air, est attribuée à Léopold Escande (1902-1980), brillant étudiant de l'IET. L'Air finance également un ouvrier mécanicien et un ingénieur, Jean Baubiach, qui s'engage dans la préparation d'une thèse de doctorat. Pour l'enseignement, un certificat de mécanique des fluides est ouvert aux étudiants de la faculté, comme dans les autres instituts, tandis qu'une mention mécanique des fluides est créée dans le diplôme d'ingénieur mécanicien de l'IET.

## 8.2. Recherches

En dépit de la crise économique du début des années trente et de la chute du nombre d'étudiants, le nouvel institut démontre un dynamisme scientifique dans la continuité de celui de l'ancien laboratoire d'hydraulique. Aux cinq thèses de doctorat ès sciences soutenues entre 1929 et 1931 (*cf.* § 4.3), viennent s'ajouter deux autres thèses en 1936, sur les sillages des corps immergés (J. Baubiach) et sur les phénomènes transitoires et oscillatoires en mécanique des fluides (É. Crausse, boursier de la Caisse nationale des sciences). Une dernière thèse est soutenue avant la guerre sur les allées tourbillonnaires de Bénard-Kármán (L. Castagnetto).

La figure 20 illustre l'effet d'une accélération d'un corps immergé sur la force de traînée. Le corps, ici un cylindre de masse 135 kg et de longueur 1,65 m, est lâché d'un radeau installé sur un lac Pyrénéen profond, une machine d'Atwood permettant de modifier son poids apparent (lequel commande la vitesse terminale). Il apparaît qu'à un instant  $t$  du mouvement où la vitesse est  $V(t)$ , la traînée est supérieure à celle que subirait l'obstacle à la même vitesse  $V$  constante (contrôlée par la machine d'Atwood). Cette expérience illustre de façon frappante l'effet « de masse ajoutée » lié à l'inertie du fluide.

La figure 21 montre le développement de tourbillons dans le sillage d'une plaque normale à l'écoulement. La partie supérieure de la figure montre la croissance du tourbillon de démarrage puis l'apparition de « tourbillons secondaires » (de Kelvin-Helmholtz) sur la « surface de discontinuité », fortement cisailée, séparant le sillage de l'écoulement externe. La partie inférieure de



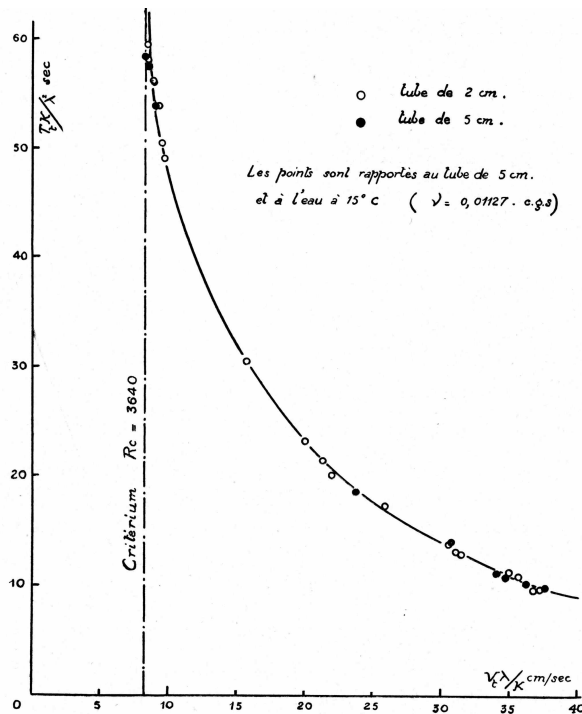
**FIGURE 21.** (a) Développement d'un tourbillon de démarrage dans le sillage d'une plaque, et apparition des « tourbillons secondaires »; (b) appariement des tourbillons secondaires [34, 35].

la figure montre la croissance vers l'aval des tourbillons secondaires, et l'avalement de l'un d'eux par celui qui le suit (phénomène d'appariement).

La figure 22 est relative à la question de la transition à la turbulence de l'écoulement dans un tube. La transition étant provoquée par un incrément soudain du débit au-delà de sa valeur critique, on s'intéresse au temps de relaxation vers sa valeur terminale de la vitesse moyenne sur l'axe. Il apparaît sur la figure que ce temps de relaxation est d'autant plus grand que le nombre de Reynolds terminal est proche de sa valeur critique. Ainsi que l'explique Baubiac, cette divergence du temps de relaxation offre une définition précise de la transition. L'analyse est ici menée dans des termes très proches de ceux avec lesquels, plus tard, on rendra compte des phénomènes critiques.

La dynamique transitoire des oscillations de sillage fait l'objet du même type d'études. La croissance et la saturation de l'amplitude des oscillations sont interprétées dans le cadre de l'équation de Van der Pol (publiée en 1927 pour rendre compte des auto-oscillations électriques). D'autres études portent sur la vibration, induite par un écoulement transverse, de fils tendus ou de tiges encastrées à une extrémité. Ces vibrations, couplées au lâcher de tourbillons dans le sillage, font apparaître des phénomènes de quasi-périodicité et d'accrochage de fréquence. Mentionnons pour terminer ce bref panorama la vérification expérimentale à grande échelle, dans le canal d'amenée d'une usine hydroélectrique ( $Re \approx 10^7$ ), du profil logarithmique de vitesse établi en 1930 par Prandtl et von Kármán.

Charles Camichel, correspondant de l'Académie des Sciences depuis 1922, en est élu membre en 1936. La maîtrise de conférences d'Escande est transformée l'année suivante en chaire de mécanique des fluides. Un panorama des recherches menées dans l'entre-deux-guerres est présenté par Camichel et Escande en 1938, dans un volumineux mémoire (356 pages) des *Publications Scientifiques et Techniques* (PST) du ministère de l'Air [36]. Un trait commun remarquable de ces recherches est, d'une part, le fil conducteur de l'analyse dimensionnelle (la similitude), et d'autre part la finesse de l'expérimentation, qui permet d'atteindre une résolution spatiale inférieure au millimètre et une résolution temporelle de quelques microsecondes.



**FIGURE 22.** Transition à la turbulence en tube : temps de relaxation de la vitesse moyenne sur l'axe du tube, suite à un incrément du débit à partir d'une valeur sous-critique, fonction du nombre de Reynolds terminal. Les mesures pour le tube de 2 cm sont mises à l'échelle du tube de 5 cm selon la similitude de Reynolds ( $\lambda$  et  $\kappa$  sont les rapports des diamètres et des viscosités cinématiques) [33].

### 8.3. Études aérodynamiques en soufflerie

Une grande soufflerie aérodynamique, dont la construction a été décidée par le ministère de l'Air en 1935, est mise en service en 1938 sur une nouvelle parcelle de terrain cédée par la Ville. Sa veine d'essai a un diamètre de 2,4 m et la vitesse de l'air y atteint 40 m/s. Dans le contexte de l'imminence de la guerre, cette soufflerie connaît immédiatement une importante activité, pour les constructeurs Latécoère et Dewoitine et pour le service de recherches de l'Aéronautique. L'activité croît considérablement en 1940 avec le repliement à Toulouse des services de l'Aéronautique et de l'institut aérotechnique de Saint-Cyr (deux équipes se relaient quotidiennement pour les essais). Cette activité se maintient au début de la guerre et pendant l'occupation allemande après novembre 1942 (la soufflerie produit cette année-là 150 rapports d'études). Les essais sont cependant interrompus en juillet 1943 par la destruction du ventilateur – vraisemblablement une action de la Résistance. Les essais ne reprennent que dix mois plus tard.

L'institut de mécanique des fluides de Lille, réinstallé à proximité de l'institut électrotechnique (cf. § 6.4), semble avoir eu peu de relations avec son homologue toulousain (la semi-clandestinité de l'institut de Lille n'a laissé quasiment aucune trace dans les archives toulousaines). Ces relations semblent s'être limitées à deux conférences de Kampé de Fériet sur la turbulence, et à quelques expériences de diffusion turbulente réalisées par Frenkiel à la soufflerie de Banlève.

Camichel prend sa retraite en 1941 et Escande lui succède à la direction de l'institut électrotechnique et de l'institut de mécanique des fluides. L'équipe réunie par Camichel alors se dis-

perse. En 1943, Escande, pressé de répondre aux sollicitations du ministère des Ponts et Chaussées, obtient de la municipalité une nouvelle extension du terrain de Banlève. Il y établit, avec son assistant Louis Castex, un « laboratoire plat » en plein air pour les études d'ouvrages sur modèles réduits.

#### 8.4. *L'après-guerre*

L'hydroélectricité, qui représente dans l'après-guerre la moitié de la production nationale d'électricité, est alors une industrie en plein essor. Escande, devenu un spécialiste des ouvrages hydrauliques pour cette industrie (chambres d'équilibre des conduites forcées, déversoirs, évacuateurs de crues, prises d'eau, barrages mobiles, etc.), y engage toute l'activité de l'IMFT durant deux décennies. Sa réputation déborde les frontières nationales et il multiplie les études et expertises sur les cinq continents. Il est secondé par deux ingénieurs de l'IET, Louis Castex (1913-1986), directeur technique, et Jean Nougaro (1922-2008). Celui-ci soutient en 1952 une thèse de doctorat sur les vagues déferlantes dans les canaux à surface libre.

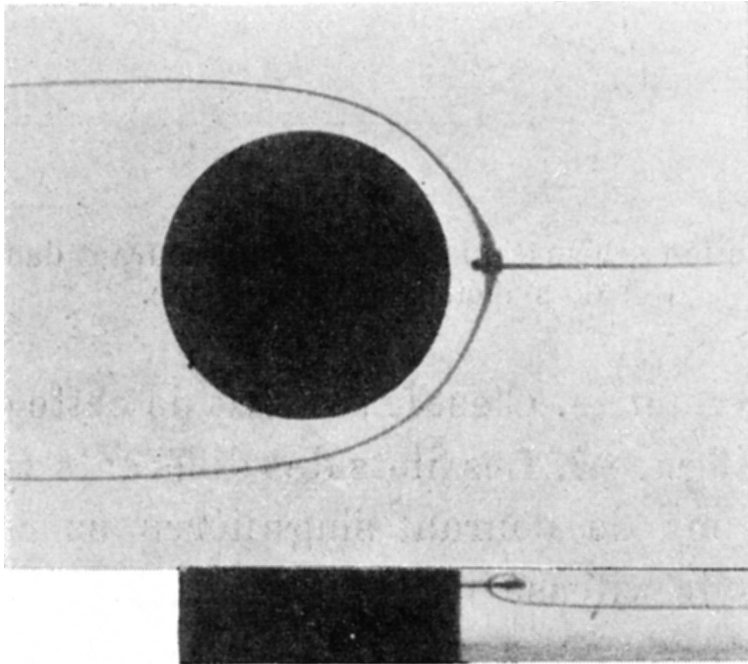
À la création des Écoles nationales supérieures d'ingénieurs (ENSI) en 1947, Escande obtient la transformation de l'institut électrotechnique en École Nationale Supérieure d'Électrotechnique et d'Hydraulique de Toulouse (ENSEHT). Honoré de nombreuses distinctions académiques (de *docteur honoris causa* en particulier), il est élu membre de l'Académie des sciences en 1954. Revers de la médaille, l'orientation technique donnée par Escande à l'IMFT entraîne la disparition de la culture scientifique, plus ouverte aux questions fondamentales, construite par Camichel, et la perte associée du savoir-faire expérimental. Un net renouveau scientifique se manifesterà à la fin des années soixante avec l'arrivée d'une jeune génération qui renouvellera les thématiques de recherche, autour des transferts dans les milieux poreux, des écoulements environnementaux, et des écoulements diphasiques.

### 9. Les centres annexes d'enseignement

Le programme du ministère de l'Air, de développement de la mécanique des fluides universitaire, va permettre l'émergence, en plus des instituts discutés ci-dessus, de « centres annexes d'enseignement » dans cinq facultés des sciences. Il n'y aura dans ces centres ni fondation de chaire ni construction de grande soufflerie, au moins jusqu'à la guerre, mais des financements d'enseignements complémentaires et d'emplois de collaborateurs scientifiques dont beaucoup soutiendront une thèse de doctorat.

#### 9.1. *Le centre de Strasbourg*

Au lendemain de la Première Guerre mondiale, Strasbourg redevenue française est l'objet de toutes les attentions nationales, et devient en particulier un important centre universitaire pour les mathématiques. La ville accueille en 1920 le Congrès international de mathématiques, dont l'organisation est confiée à Henri Villat. Entre 1918 et 1930, la faculté de Strasbourg décerne quatre des sept doctorats en mathématiques préparés en province [74, § 3.1]. Ce dynamisme engage le ministère de l'Air à y créer en 1930 un centre d'enseignement de mécanique des fluides. René Thiry (1886-1968), ancien étudiant de Villat et titulaire de la chaire de mécanique rationnelle, correspondant de l'Académie des sciences, prend la responsabilité du centre, assisté par Louis-André Sackmann (1905-1990). Charles Sadron (1902-1993), agrégé de physique préparant une thèse sous la direction de Pierre Weiss, est nommé collaborateur scientifique et dispense les enseignements de mécanique expérimentale. Thiry, mathématicien ouvert à l'expérimentation,



**FIGURE 23.** Visualisation, par Sackmann et Thiry, de l'écoulement confiné entre deux plaques à l'amont d'un obstacle cylindrique. On notera, sur la photo du bas, l'enroulement sur elle-même de la ligne de colorant avant sa division en deux branches [37].

se dit « passionné par les questions de mécanique, à condition que celles-ci soient envisagées sous leur véritable aspect réel et physique et ne servent pas de simples prétextes à des développements mathématiques ». Il participe ainsi activement, avec ses deux collègues, à l'installation d'un laboratoire de mécanique des fluides dans le vaste Palais universitaire qui abrite la faculté des sciences.

Les travaux de Sackmann, qui soutient une thèse d'État en 1936, portent sur la structure des écoulements confinés autour d'obstacles. La figure 23 montre, à titre d'exemple, l'enroulement d'une ligne de courant sur elle-même à l'amont d'un cylindre, puis sa division en deux branches à l'aval du point d'arrêt. Sackmann monte ensuite, avec Sadron, une petite soufflerie pour des essais aérodynamiques sur des maquettes.

Sadron quant à lui soutient sa thèse en 1932, puis, ayant obtenu une bourse de la fondation Rockefeller, rejoint le nouveau laboratoire de von Kármán au *California institute of technology*. Il y participe à l'étude des couches limites turbulentes et met au point une technique optique de vélocimétrie fondée sur la biréfringence de certains liquides placés dans un gradient de vitesse. Il découvre alors les propriétés avantageuses, du point de vue de la biréfringence, des macromolécules. De retour à Strasbourg en 1932, il est recruté comme chargé de recherche par la Caisse nationale de la recherche scientifique (CaNRS), au laboratoire de mécanique des fluides, et publie la première étude française sur la couche limite turbulente [38–40]. Dans une lettre à von Kármán, il se plaint à ce propos du « torpillage » de son projet d'ouvrage sur la turbulence par « des hommes influents dans l'université française » [63, p. 463] où l'on devine sans peine une allusion à Villat. Sadron s'orientera par la suite vers la physique des macromolécules et des colloïdes dont il sera un pionnier français.



Thiry quitte Strasbourg en 1938 pour prendre la direction de l'institut de mécanique des fluides de Marseille. Il y est rejoint l'année suivante par Sackmann, tandis que Sadron accompagne le repli général à Clermont-Ferrand de l'université de Strasbourg.

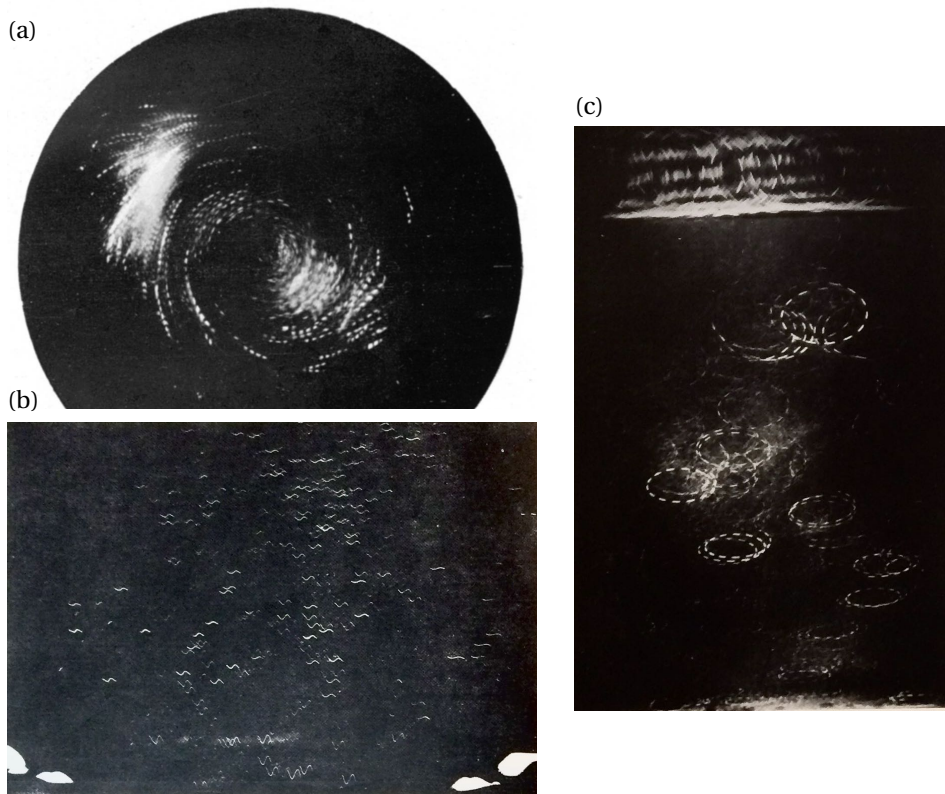
De retour à Strasbourg à la Libération, Sackmann réinstalle le laboratoire de mécanique des fluides dans de nouveaux locaux rue Boussingault (l'immeuble d'une École du pétrole transférée dans la région parisienne). Il y oriente les recherches vers l'hydraulique des canalisations et des fonds érodables (un dispositif anti-affouillement au pied des piles de pont est breveté), et vers le sujet plus fondamental de la transition à la turbulence étudiée selon une approche statistique novatrice des bouffées turbulentes. Son assistant F. Debeauvais étudie la pulvérisation des carburants dans les carburateurs [41, p. 167-198]. Le laboratoire est par la suite transformé en institut de mécanique des fluides. Dans les années soixante, l'activité de Sackmann porte principalement sur les transferts en milieux poreux, l'hydrologie et la pollution des eaux souterraines. Il réalise d'importantes études sur la nappe phréatique rhénane [42].

## 9.2. *Le centre de Poitiers*

L'université de Poitiers est réputée dans les années vingt pour les mathématiques, dominées par la personnalité de Georges Bouligand (1889-1979), titulaire de la chaire de mécanique rationnelle et appliquée [74, § 3.2]. Ce contexte décide le ministère de l'Air à y implanter en 1930 un centre d'enseignement de la mécanique des fluides. Le conseil général de la Vienne, la municipalité et la chambre de commerce apportent des subventions. Les enseignements théoriques sont dispensés par Bouligand puis par Louis Got, la mécanique expérimentale des fluides par le professeur de physique Albert Grumbach, et les travaux pratiques sont encadrés par un collaborateur scientifique du ministère de l'Air.

Bouligand parti à la Sorbonne, il est remplacé en 1938 par Henri Poncin (1904-1994), ancien étudiant de Villat, qui obtient l'année suivante la chaire de mécanique rationnelle et appliquée. Un nouveau poste de chef des travaux, financé par l'Air, est attribué à Charles Chartier (né en 1905), ancien étudiant de Foch au laboratoire de Bénard. Poncin et Chartier montent en 1942 un laboratoire de mécanique des fluides, bientôt équipé d'un canal hydrodynamique, d'une soufflerie Eiffel et d'une soufflerie supersonique. Chartier y poursuit ses travaux sur la chronophotographie stéréoscopique en les orientant vers les applications aéronautiques.

En 1945, Poncin fédère les deux laboratoires de mécanique des fluides et de mécanique des solides dans un même Institut de Mécanique et d'Aéronautique de Poitiers (IMAP). Ces laboratoires sont dirigés par Chartier et par Raymond Jacquesson, tous deux promus professeurs en 1949. Dans le mouvement de création des ENSI, Poncin fonde en 1948 l'École Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aéronautique (ENSMA) – une vingtaine de places est offerte au concours d'entrée dans les années suivantes. La même année, Poncin obtient la maîtrise de conférences de mécanique théorique des fluides à la Sorbonne, sans quitter l'ENSMA qu'il continue de diriger. Robert Mazet le remplace sur la chaire de mécanique rationnelle et prend la direction de l'IMAP. L'ENSMA, qui forme des ingénieurs, et l'IMAP, qui subsiste comme institut de faculté, sont relogés dans les bâtiments de l'ancienne caserne Dalesme. Ces bâtiments, rénovés, hébergent également un nouvel Institut de recherches scientifiques et techniques du Centre-Ouest, à vocation plus appliquée. C'est dans cet institut qu'est remontée, en 1948, la grande soufflerie à section octogonale construite à Toulouse par l'institut de Lille (*cf.* § 6.4) – cette soufflerie, aujourd'hui installée à l'institut Pprime y fonctionne toujours. Du côté de l'enseignement, le certificat de mécanique des fluides est suivi dans l'après-guerre par une quarantaine d'étudiants avec un taux de réussite de l'ordre de 50 %.



**FIGURE 24.** Visualisations d'écoulements par chronophotographie au laboratoire de mécanique des fluides de Poitiers : (a) section d'un tourbillon de bout d'aile en soufflerie; (b) champ de vitesses au voisinage d'un haut-parleur avec flou de bougé latéral; (c) mouvement orbital sous une onde de surface. [41, p. 139-165].

Joseph-Maurice Bourot, étudiant de Chartier, soutient en 1949 une thèse sur la chronophotographie des champs aérodynamiques. Il intègre le CNRS comme chargé de recherche et oriente ses travaux vers la dynamique des particules en suspension dans les gaz et vers les écoulements à grande vitesse. La figure 24 (a) montre la section d'un tourbillon de bout d'aile, visualisé par de puissantes lampes à décharge et un temps de pose photographique très court – une fraction de milliseconde. L'expérience est réalisée dans une grande soufflerie cédée par le constructeur aéronautique Nieuport. Bourot travaille également sur la visualisation des ondes acoustiques. La figure 24 (b) montre l'écoulement au voisinage d'une membrane de haut-parleur, où un flou de bougé latéral permet d'étaler le mouvement des particules traceuses et d'accéder ainsi à leur dynamique. D'autres études du laboratoire portent sur les écoulements à surface libre (figure 24 (c)). Pierre Couvertier, autre étudiant de Chartier, assistant, soutient en 1953 une thèse d'État sur l'application des décharges électriques à l'exploration des écoulements gazeux aux grandes vitesses.

En 1949, Raymond Siestrunck (1919-2005), ancien étudiant de Pérès, est nommé maître de conférences à l'ENSMA où il poursuit ses études sur les écoulements hélicoïdaux dans les turbomachines. Son camarade Paul Germain (1920-2009), nommé lui aussi maître de conférences, mène des études sur les écoulements supersoniques et transsoniques, en collaboration avec Pérès et l'ONERA. En 1953, Germain obtient un poste de professeur à Lille où il a noué des relations avec Gérard Gontier [75]. Jean-Jacques Moreau (1923-2015), chercheur au CNRS, poursuit des recherches d'hydrodynamique théorique avec singularités. Nommé professeur à Montpellier en 1958, il y fonde le Groupe d'analyse convexe qui préfigure le Laboratoire de mécanique

et génie civil (LMGC). Moreau sera une grande figure de la mécanique « non régulière » traitant de lois de comportement non différentiables pour des problèmes de contact unilatéral, de contact avec frottement, de chocs ou de plasticité [76].

À l'Institut de recherches du Centre-Ouest, se développent des études d'aérodynamique et d'aérothermique avec Henri Cordier, adjoint au directeur de l'ENSMA, Adrien Saigne, directeur technique, et Raymond Goethals, assistant arrivé de l'IAT de Saint-Cyr. Le développement des laboratoires d'aérodynamique et d'aérothermique entraîne la création en 1953 d'une annexe sur un vaste terrain à l'ouest de Poitiers, à proximité de l'aérodrome, pour les études techniques et pour la formation pratique des élèves-ingénieurs. Cette annexe voit ses moyens d'essais et son budget croître considérablement, au point d'être en 1962 détachée de l'ENSMA et constituée en institut d'université, sous le nom de Centre d'Études Aérodynamiques et Thermiques (CEAT) de Poitiers [77]. Goethals en sera l'un de ses directeurs.

### 9.3. *Le centre de Nantes*

Le centre de Nantes créé en 1930 est appuyé sur l'Institut polytechnique de l'Ouest (IPO) [78]. Cet institut a été fondé par la Ville en 1919 à l'initiative de Aymé Poirson, ingénieur de l'École supérieure de l'aéronautique, et a été rattaché en 1922 à la faculté des sciences de Rennes – l'université de Nantes, supprimée en 1793 par la Convention comme toutes les universités françaises, ne sera réouverte qu'en 1962. L'IPO forme des techniciens et des ingénieurs dans les domaines de la mécanique, de l'électricité, de la chimie, et des travaux publics. Une année de spécialisation en construction navale est ouverte en 1925 pour les ingénieurs diplômés (correspondant à une quatrième année d'études), en relation avec les besoins de l'industrie régionale – restée jusqu'à assez indifférente à la question de la formation de ses ingénieurs. L'industrie de la construction navale connaît alors un virage vers l'aéronautique, lié, d'une part, à une chute de l'activité navale, et d'autre part à l'essor de compagnies aériennes cherchant à calquer leur organisation sur celle de leurs homologues maritimes (L'Association technique maritime devient ainsi en 1924 l'Association technique maritime et aéronautique, et Louis Breguet, notamment, entre dans son conseil d'administration).

Les enseignements de mécanique des fluides créés en 1930 sont assurés par Marcel Légaut, maître de conférences de mathématiques à la faculté des sciences de Rennes, et par Paul Le Rolland, maître de conférences en mécanique physique affecté à l'IPO. Émile Ravilly, ingénieur IPO dans la spécialité des constructions navales, y est nommé collaborateur scientifique du ministère de l'Air, faisant fonction d'assistant, sur un programme de recherche portant sur la photoélasticité. L'Aéroclub de l'Atlantique est associé aux enseignements et fournit en particulier du matériel pour les travaux pratiques.

Les recherches engagées portent sur les structures aéronautiques et leurs assemblages, et sur les propriétés mécaniques et physico-chimiques des matériaux (verniss, caoutchoucs, bois, alliages légers). L'industrie régionale demeure cependant peu impliquée [78, chap. 9]. Dans les années trente, deux thèses sont soutenues sous la direction de Le Rolland, sur les dislocations dans les cristaux induites par la fatigue de torsion, et sur l'anisotropie de dureté des cristaux. Jean Luneau, chef d'un nouveau laboratoire de mécanique des fluides, travaille sur la résistance aérodynamique et développe la vélocimétrie par fil chaud. Ravilly monte un bassin pour l'étude des carènes de navires.

À la veille de la Seconde Guerre mondiale, les études s'orientent vers la défense nationale à la demande du Centre national de la recherche scientifique appliquée (CNRSA). Dirigé par Le Rolland depuis 1934, l'IPO devient dès 1940 un foyer de la Résistance à l'occupant allemand. Après la guerre, l'IPO est l'un des huit instituts universitaires transformés en ENSI et devient l'École nationale supérieure de mécanique (ENSM). Entre 1950 et 1954, quatre maîtrises de conférences

y sont créées, en mathématiques appliquées, mécanique des fluides, chimie appliquée, et physique. La recherche, gravement affectée au lendemain de la guerre par le départ de Le Rolland et de Pierre Liénard, reprend avec la création, en 1957, d'une chaire de mécanique des fluides (Ravilly) et de deux maîtrises de conférences en mécanique appliquée (Yves Pironneau, précédemment à Poitiers) et en électrotechnique (Romane Mézencev, précédemment à Toulouse). Le calcul numérique fait son entrée en 1959 avec l'acquisition par Ravilly d'un ordinateur IBM 650. Pierre Guével (1929-2007), ingénieur de l'ENSEH de Toulouse et auteur d'une thèse sur les écoulements dans les milieux poreux, succède à Ravilly en 1975 à la tête du laboratoire de mécanique des fluides.

#### 9.4. *La mécanique des fluides à Caen, Lyon, et Grenoble*

##### 9.4.1. *Caen*

La faculté des sciences de Caen, contactée par le ministère de l'Air en 1929, crée un enseignement de mécanique des fluides l'année suivante. Cet enseignement est pris en charge par Ludovic Zoretti, professeur de mécanique rationnelle et appliquée et fondateur de l'institut technique de Normandie. Zoretti est secondé par J. Lemains, collaborateur scientifique de l'Air, qui soutient en 1934 une thèse de doctorat d'État sur les pertes de charges au travers de grilles et de filtres. Les cours sont suivis par les élèves-ingénieurs de l'institut technique de Normandie, et quelques certificats de mécanique des fluides sont délivrés. À la fin des années trente, Zoretti, leader socialiste de la SFIO et syndicaliste CGT, dérive vers le fascisme; condamné à la Libération pour collaboration avec l'Allemagne, il meurt en prison en 1948.

##### 9.4.2. *Lyon*

La faculté des sciences de Lyon, contactée par le ministère de l'Air, ne semble pas avoir saisi l'opportunité offerte, ainsi que le déplore Jean Villey dans un rapport pour le ministère de l'Air en 1935 [43]. Ce ne sera que trois décennies plus tard, en 1962, que sera créé un laboratoire de mécanique des fluides à Lyon, sous l'impulsion du directeur de l'École centrale [79]. Jean Mathieu, directeur du laboratoire, y initie des recherches sur la turbulence, bientôt rejoint par Geneviève Comte-Bellot qui y développe l'acoustique.

##### 9.4.3. *Grenoble*

La géographie régionale étant peu favorable au développement de l'aéronautique, l'université de Grenoble n'avait pas été retenue par le ministère de l'Air, en 1930, pour la création d'un centre de mécanique des fluides. La discipline y est cependant enseignée à l'institut électrotechnique de la faculté des sciences, créé en 1901 dans le contexte de l'essor de l'hydroélectricité [80]. Un cours d'hydraulique y a été dispensé par Georges Routin (1871-1937), polytechnicien et ingénieur en chef des ateliers Neyret-Brenier. Deux laboratoires d'essais, extérieurs à l'institut mais avec lesquels les enseignants collaborent, ont été créés en 1922 : le Laboratoire dauphinois d'hydraulique de la société Neyret-Beylier et Piccard-Pictet (NBPP, dirigée par Maurice Gariel), et celui de la Société hydrotechnique de France (SHF) dirigé par Routin.

Un laboratoire d'hydraulique proprement universitaire est créé en 1928 sous l'impulsion de René Gosse, nouveau directeur de l'institut – devenu entretemps polytechnique –, création contemporaine de celle de l'école d'ingénieurs hydrauliciens au sein du même institut. Le laboratoire prend véritablement son essor à partir de 1935, sous la direction de Pierre Danel. Les premières études, commanditées par les Ponts et Chaussées et par la Compagnie nationale du Rhône, portent sur l'ensablement du Rhône et sur l'aménagement hydroélectrique du fleuve. La société NBPP ordonne des études de vannes, de cheminées d'équilibre, et de cavitation. Le projet

d'ouverture du tunnel routier de la Croix-Rousse, à Lyon, entraîne la création par André Fortier d'une section d'aérodynamique pour l'étude sur modèle réduit de la ventilation du tunnel. Une soufflerie supersonique est mise en service en 1946 par Lucien Santon – ancien étudiant de Foch à Paris comme Fortier – avec le soutien du ministère de l'Air et du ministère de l'Armement [41, p. 3-6]. Santon (1904-1993) dirigera de 1955 à 1971 la section hydraulique de l'institut polytechnique de Grenoble [80, p. 72-73].

Après la guerre, une petite équipe se met en place autour de Julien Kravtchenko (1911-1994), ancien étudiant de Villat, pour des études plus fondamentales sur la turbulence. En 1952, les laboratoires d'hydraulique et d'aérodynamique sont réunis dans un même laboratoire, dirigé par Kravtchenko et rattaché à la faculté des sciences et à l'École nationale supérieure d'électrotechnique et d'hydraulique (école issue de la transformation en ENSI de l'institut polytechnique). Les recherches portent sur l'hydraulique fluviale (études sur modèles réduits d'évacuateurs de crue, etc.), sur les infiltrations sous les barrages et les digues (par analogie rhéoelectrique), et sur la mesure du débit des rivières en crue par une méthode chimique de suivi d'un soluté (Robert Silber, maître de conférences). Les premières thèses grenobloises apparaissent, dont celles sur la turbulence d'Antoine Craya (1957) et, sous la direction de ce dernier, de Jean Mathieu (1959) [81]. Le laboratoire de mécanique des fluides est intégré en 1970 dans un nouvel institut de mécanique de Grenoble (IMG) [80, p. 259-263].

## 10. Tentative de bilan, histoire longue et recompositions

La mécanique des fluides en France pendant la première moitié du xx<sup>e</sup> siècle se présente donc, comme s'est attaché à le montrer cet article, sous un jour plus heureux que ne le laisserait penser le peu de citations de travaux français dans les bibliographies. Un retour vers les publications, thèses et rapports de la période, montre qu'au côté de personnalités bien reconnues telles que Henri Bénard et Gustave Eiffel, des scientifiques de premier plan participent, dès avant 1930, à l'avancée de la discipline. Rappelons seulement ici l'étude des tourbillons de sillage par Charles Camichel, ou le développement de l'anémométrie à fil chaud pour l'étude de la turbulence atmosphérique par Antoine Magnan. Ces travaux s'attachent autant à améliorer une hydraulique utile aux ingénieurs (pour l'hydroélectricité, la météorologie, etc.) qu'à faire progresser les connaissances générales « désintéressées ». Un autre trait caractéristique de ces travaux est la forte culture expérimentale dont ils témoignent, dans le fil d'une tradition française vouant un véritable culte à la belle expérience et à l'instrumentation [82]. *A contrario*, les observations expérimentales suscitent peu de réflexion théorique, et restent largement découplées des travaux de « mécanique rationnelle » que poursuit, pour le coup sans grand souci des observations, un mathématicien comme Henri Villat.

C'est dans ce contexte, associé à une conjoncture aéronautique préoccupante, que se présente en 1930 le vaste programme du ministère de l'Air en faveur de la mécanique des fluides. Albert Caquot, artisan majeur de ce programme, obtient des moyens considérables distribués avec une ouverture d'esprit exceptionnelle – dont on voudrait voir s'inspirer nos dirigeants actuels! – pour quatre instituts et cinq centres annexes d'enseignement. Conscient du penchant universitaire au cloisonnement et à l'individualisme, Caquot promeut des organisations où devront collaborer étroitement les différents acteurs mathématiciens, physiciens et ingénieurs. On a rappelé ci-dessus quelques-uns des résultats obtenus, notamment autour de Pérès et Malavard sur les analogies rhéoelectriques et le calcul scientifique, autour de Bénard sur les instabilités thermoconvectives, de Kampé de Fériet sur la turbulence, ou de Camichel sur les tourbillons de sillage et les régimes instationnaires. Notons l'attachement de ces chercheurs à la bonne formation de leurs étudiants, pour l'irrigation des laboratoires et de l'industrie. Les théoriciens Jean Leray et Jean-Jacques Moreau ainsi que les physiciens Yves Rocard et Charles Sadron, auront eux aussi

bénéficié du ministère de l'Air dans le lancement de leur carrière. Les travaux et les thèses sont alors publiés, pour l'essentiel, dans les *Publications scientifiques et techniques du ministère de l'Air* – source de documentation très riche dont la numérisation serait bienvenue.

Au-delà des résultats proprement scientifiques, la vitalité de la mécanique des fluides française apparaît dans le rôle joué par la France dans la création, à Paris en 1946, de l'Association Internationale de Mécanique Théorique et Appliquée (IUTAM). Pérès en est le premier président de 1948 à 1952. Pérès, alors directeur adjoint du CNRS, participe également de près à la création de l'Office National des Études et Recherches Aéronautiques (ONERA), à la vie duquel il sera ensuite étroitement associé, avec Malavard et Germain. En 1961, Pérès, Malavard, Germain et Siestrunck fondent le *Journal de Mécanique*, qui formera plus tard le noyau du *European Journal of Mechanics*. Au niveau plus institutionnel du Comité national de la recherche scientifique, la mécanique des fluides relève alors de la section de mécanique générale et mathématiques appliquées, où elle se trouve bien représentée ; ainsi dans la mandature 1960-1963, neuf de ses vingt membres sont liés aux instituts ou centres annexes [83].

D'un point de vue plus général, la décennie qui suit la Seconde Guerre mondiale n'est pas favorable à la recherche scientifique française. La tonalité des actes du colloque de mécanique des fluides organisé à Marseille en 1952, sous l'égide du CNRS, en témoigne [41]. Mais des recompositions sont à l'œuvre qui préparent le renouveau des années soixante. Le laboratoire créé par Bénard, détruit par les Allemands, est remonté dans l'après-guerre par Foch à Saint-Cyr-l'École. En 1962, André Fortier (1907-1996), qui a succédé à Foch sur la chaire de mécanique expérimentale des fluides, réinstalle le laboratoire à Orsay sur une extension de la faculté des sciences de Paris. Il y est secondé par son étudiant Raymond Comolet bientôt professeur. Le laboratoire devient en 1983 le FAST (Fluides, Automatique et Systèmes Thermiques). Pérès et Malavard créent en 1946 un grand centre de mathématiques appliquées, l'Institut Blaise Pascal du CNRS, lequel engendre en 1971 le Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences pour l'Ingénieur (LIMSI). À Marseille, Favre crée l'Institut de mécanique statistique de la turbulence, inauguré en 1961 à l'occasion d'un colloque international resté fameux, premier du genre entièrement consacré à la turbulence [60, chap. 13]. L'institut de Toulouse dirigé par Escande obtient en 1966 le nouveau label de laboratoire associé au CNRS, et voit ses thématiques de recherche renouvelées par l'arrivée d'une nouvelle génération. L'institut de Lille dirigé par Martinot-Lagarde, scientifiquement affaibli par le départ de Kampé de Fériet, survit d'études pour l'industrie, entravé par les indécisions de l'ONERA et de la faculté des sciences qui s'en renvoient la tutelle. Les centres annexes d'enseignement de Poitiers, Strasbourg et Nantes poursuivent leur développement, en association avec des formations d'ingénieur, tandis qu'à Lyon – où la marche avait été ratée en 1930 – se constitue en 1962, au sein de l'École centrale, le futur Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA). Enfin, le laboratoire de mécanique des fluides de Grenoble, avec Julien Kravtchenko et Antoine Craya en particulier, s'annonce comme l'un des futurs grands centres de mécanique des fluides, notamment dans le domaine de la turbulence.

Concluons sur un effet à long terme du programme du ministère de l'Air, programme qui peut être considéré, par son envergure, comme une première politique nationale pour la recherche. Cette politique aura eu la clairvoyance d'associer étroitement, avec des moyens à la hauteur de ses ambitions, le développement de la recherche et celui de l'enseignement. Lorsque dans les années soixante le pays devra répondre à une forte demande d'ingénieurs que des écoles trop malthusiennes ne pourront satisfaire, et dans le contexte d'une croissance considérable de la population étudiante, les formations universitaires en mécanique des fluides alors en place sauront jouer leur rôle tant vis-à-vis de l'industrie que vis-à-vis des laboratoires de recherche. La mécanique des fluides française s'en trouvera placée, pour les décennies suivantes, en excellente position au niveau international.

## Références

- [1] G. Eiffel, *Nouvelles Recherches sur la Résistance de l'Air et l'Aviation faites au laboratoire d'Auteuil*, vol. 1, Dunod & Pinat, Paris, 1914.
- [2] G. Eiffel, « Sur la résistance des sphères dans l'air en mouvement », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **155** (1912), p. 1597-1599.
- [3] H. Bénard, « Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent », *Ann. Chim. Phys.* **23** (1901), p. 62-144, thèse de doctorat ès sciences de la faculté des sciences de Paris.
- [4] L. Rayleigh, « On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side », *Phil. Mag.* **32** (1916), p. 529-546.
- [5] C. Camichel, J. Leclerc du Sablon, L. Escande, « Recherches sur la similitude (suite et fin) », *Le Génie Civil* **98** (1931), n° 17, p. 420-424.
- [6] C. Camichel, « Sur le régime permanent dans les chambres d'eau », *Revue Générale de l'Électricité* **8** (1920), n° 11, p. 331-338.
- [7] C. Camichel, « Applications des lois de similitude à l'étude des phénomènes qui se produisent à l'aval d'un corps immergé dans un fluide visqueux en mouvement », *La Technique Aéronautique* **49** (1925), p. 322-333.
- [8] C. Camichel, L. Escande, M. Ricaud, « Sur les lois de la similitude et la technique des modèles réduits », *Revue Générale de l'Électricité* **20** (1926), n° 2, p. 54-60.
- [9] C. Camichel, P. Dupin, « Sur les divers modes de contraction des filets à l'entrée d'un ajutage », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **193** (1931), n° 2, p. 102.
- [10] P. Dupin, *Étude expérimentale sur les tourbillons alternés de Bénard-Kármán*, thèse de doctorat ès sciences phys., université de Paris, France, 1930.
- [11] E. Huguenard, A. Magnan, A. Planiol, « Sur une méthode de mesure de la vitesse et de la direction instantanées du vent », *La Technique Aéronautique* **15** (1923), also published as ["A method for the instantaneous determination of the velocity and direction of the wind"] *NACA Technical Memorandum series*, **264** (1924).
- [12] H. L. Dryden, A. M. s. Kuethe, « The measurement of fluctuations of air speed by the hot-wire anemometer », in *Fifteenth Annual Report of the National Advisory Committee for Aeronautics*, U.S. Government Printing Office, 1929, p. 357-382.
- [13] A. Magnan, « Méthodes de mesure des variations rapides du vent », *Jahrbuch des Forschungs-Institutes der Rhön-Rossitten-Gesellschaft* **4** (1929), p. 92-100, also published in *NACA Technical Memorandum series*, **692** (1932).
- [14] E. Huguenard, « Les souffleries à grande vitesse. leur application à la balistique, l'aérodynamique et l'aéronautique », *La Technique Aéronautique* (1924), also published as ["High velocity wind tunnels. Their application to ballistics, aerodynamics and aeronautics"] *NACA Technical Memorandum series*, **318** (1925).
- [15] P. Wehrlé, « L'œuvre de la commission de la turbulence atmosphérique », *La science aérienne et l'aérotechnique, organe de la Société française de navigation aérienne* **8** (1940), p. 37-58.
- [16] H. Bénard, D. Avsec, « Travaux récents sur les tourbillons cellulaires et les tourbillons en bande. Applications à l'astrophysique et à la météorologie », *J. Physique* **11** (1938), p. 486-500.
- [17] D. Avsec, *Tourbillons thermoconvectifs dans l'air. Application à la météorologie*, Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air, vol. 155, E. Blondel La Rougery, Paris, 1939.
- [18] L. Santon, *Contribution expérimentale à l'étude des souffleries supersoniques*, Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air, vol. 68, E. Blondel La Rougery, Paris, 1935.
- [19] C. Chartier, *Chronophotogrammétrie plane et stéréoscopique. Application à l'étude cinématique d'écoulements autour d'obstacles : hélices, hangar, sphère*, Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air, E. Blondel La Rougery, Paris, 1937.
- [20] D. P. Riabouchinsky, « Thirty years of theoretical and experimental research in fluid mechanics », *The Journal of the Royal Aeronautical Society* **39** (1935), n° 292, p. 282-348.
- [21] D. P. Riabouchinsky, *The Journal of the Royal Aeronautical Society* **39** (1935), n° 293, p. 377-441.
- [22] D. P. Riabouchinsky, « Twenty-five years more of theoretical and experimental research in fluid mechanics », *The Journal of the Royal Aeronautical Society* **66** (1962), n° 620, p. 473-488.
- [23] J. Kampé de Fériet, « Visite de la Commission Aéronautique de la Chambre des Députés le jeudi 11 mars 1937 », 1937, Arch. IMFL.
- [24] J. Kampé de Fériet, A. Martinot-Lagarde, G. Rollin, « Sur un appareil permettant de déterminer le module et la direction de la vitesse dans un fluide », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **207** (1938), p. 772-774.
- [25] J. Kampé de Fériet, « The spectrum of turbulence », *J. Aeron. Sci.* **7** (1940), n° 12, p. 518-519.
- [26] F. N. Frenkiel, « Analyse statistique de la turbulence : corrélation et spectres dans un écoulement homogène », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **222** (1946), p. 367, 473, 585, 1331, 1474.
- [27] F. N. Frenkiel, *Étude statistique de la turbulence : fonctions spectrales et coefficients de corrélation*, Rapport technique, vol. 34, Office National d'Études et de Recherches Aéronautiques, 1958, also published as ["Statistical theory of turbulence - Spectral functions and correlation coefficients"], *NACA Technical Memorandum series*, **1436** (1958).

- [28] L. Malavard, « Sur le problème fondamental concernant l'aile d'envergure finie », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **195** (1932), p. 733-736.
- [29] J. Valensi, *Application de la méthode des filets de fumée à l'étude des champs aérodynamiques (maquettes, ailes d'avions)*, Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air, vol. 128, E. Blondel La Rougery, Paris, 1938.
- [30] A. Toussaint, É. Carafoli, « Contribution à l'étude de l'écoulement plan des fluides », *La Technique Aéronautique* **63** (1927), p. 25-27.
- [31] A. Favre, *Contribution à l'étude expérimentale des mouvements hydrodynamiques à deux dimensions*, Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air, vol. 137, E. Blondel La Rougery, Paris, 1938.
- [32] A. Favre, J. Gaviglio, R. Dumas, « Mesures, dans la couche limite, des intensités de turbulence et des corrélations dans le temps; spectres », in *Journées de mécanique des fluides – Marseille 1952. Colloque national no 1 du CNRS*, Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air, vol. 296, E. Blondel La Rougery, Paris, 1955, p. 243-275.
- [33] J. Baubiac, *Étude expérimentale, en régime transitoire, du sillage et de la résistance des corps immergés*, Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air, vol. 98, E. Blondel La Rougery, Paris, 1936.
- [34] E. Crausse, J. Baubiac, « Sur les tourbillons secondaires se produisant à l'aval d'un obstacle immergé dans un liquide », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **192** (1931), n° 24, p. 1529-1531.
- [35] E. Crausse, *Contribution à l'étude expérimentale de phénomènes transitoires et de phénomènes périodiques se produisant dans les liquides en mouvement*, Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air, E. Blondel La Rougery, Paris, 1936.
- [36] C. Camichel, L. Escande, *Similitude hydrodynamique et technique des modèles réduits*, Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air, vol. 127, E. Blondel La Rougery, Paris, 1938.
- [37] R. Thiry, L. Sackmann, « Sur les liens qui existent entre les écoulements entre glaces parallèles et les écoulements théoriques à deux dimensions », in *Journées scientifiques et techniques de Mécanique des fluides de Lille. Tome 2*, É. Chiron, Paris, 1935, p. 167-174.
- [38] C. Sadron, « Turbulence et frottement turbulent. Théorie de Kármán », **65** (1935).
- [39] C. Sadron, « Lois du frottement lisse et du frottement rugueux en régime turbulent. Coefficient intrinsèque de frottement rugueux », *J. Phys. Radium* **6** (1935), n° 3, p. 117-122.
- [40] C. Sadron, « Lois du frottement pour les conduites rugueuses », *J. Phys. Radium* **6** (1935), n° 6, p. 263-273.
- [41] J. Pérès, *Journées de mécanique des fluides – Marseille 1952. Colloque national no 1 du CNRS*, Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air, vol. 296, E. Blondel La Rougery, Paris, 1955.
- [42] L.-A. Sackmann, « Protection des nappes souterraines : contrôle de la nappe phréatique rhénane. Moyen de lutte contre sa pollution », *La Houille Blanche* **57** (1971), n° 8, p. 717-722.
- [43] J. Villey, *Rapport sur les Instituts et les Enseignements de Mécanique des Fluides, créés par diverses Universités sur l'Initiative du Ministère de l'Air*, 1935.

## Références secondaires

- [44] H. L. Dryden, « Fifty years of boundary-layer theory and experiment », *Science* **121** (1955), p. 375-380.
- [45] S. Goldstein, « Fluid mechanics in the first half of this century », *Annu. Rev. Fluid Mech.* **1** (1969), n° 1, p. 1-29.
- [46] P. A. Davidson, Y. Kaneda, K. Moffatt, K. R. Sreenivasan, *A Voyage Through Turbulence*, Cambridge University Press, 2011.
- [47] D. Bloor, *The enigma of the aerofoil - Rival theories in aerodynamics, 1909–1930*, University of Chicago Press, 2011.
- [48] F. Charru, *Ailes, Nuages et Tourbillons. La mécanique des fluides en France de 1900 à 1950 – Une politique nationale*, Science Networks. Historical Studies, Birkhäuser; Springer, 2021.
- [49] A. Prost, *Histoire de l'enseignement en France – 1800-1967*, Armand Colin, 1968.
- [50] M. Grossetti, *Rapport final du programme Villes et institutions scientifiques*, PIR-Villes CNRS, 1996.
- [51] R. Fox, G. Weisz, *The organization of science and technology in France 1808-1914*, Cambridge University Press; Maison des Sciences de l'Homme, 1980.
- [52] A. Grelon, « Les universités et la formation des ingénieurs en France (1870-1914) », *Formation Emploi* **27-28** (1989), p. 65-88.
- [53] H. L. Dryden, *Theodore von Kármán. 1881–1963. A Biographical Memoir*, National Academy of Sciences, Washington D.C., 1965.
- [54] C. Fontanon, R. Frank, *Paul Painlevé (1863–1933) – Un savant en politique*, Presses Universitaires de Rennes, 2005.
- [55] C. Marbo, *A travers deux siècles. Souvenirs et rencontres (1883-1967)*, Grasset, Paris, 1967.
- [56] C. Fontanon, « La mécanique des fluides à la Sorbonne entre les deux guerres », *C. R. Méc. Acad. Sci. Paris* **345** (2017), n° 8, p. 545-555.
- [57] J. Kerisel, *Albert Caquot 1881-1976 – Savant, soldat et bâtisseur*, Presses de l'ENPC, 2001.
- [58] O. Darrigol, *Worlds of flow. A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University Press, 2005.
- [59] M. Eckert, *The dawn of fluid dynamics – A discipline between science and technology*, John Wiley & Sons, 2006.



- [60] M. Eckert, *Turbulence – an Odyssey. Origins and Evolution of a Research Field at the Interface of Science and Engineering*, History of Physics, Springer, 2022.
- [61] J. D. Anderson, *A History of Aerodynamics*, Cambridge University Press, 1997.
- [62] J. E. Wesfreid, « Scientific biography of Henri Bénard (1874–1939) », in *Dynamics of Spatio-Temporal Cellular Structures. Henri Bénard Centenary Review*, Springer Tracts in Modern Physics, vol. 207, Springer, 2006, p. 9-37.
- [63] J. E. Wesfreid, « Henri Bénard : Thermal convection and vortex shedding », *C. R. Méc. Acad. Sci. Paris* **345** (2017), n° 7, p. 446-466.
- [64] F. Charru, *Hydrodynamic Instabilities*, Cambridge University Press, 2011.
- [65] D. Aubin, « The memory of life itself’ : Bénard’s cells and the cinematograph of self-organization », *Studies in the History and Philosophy of Science* **39** (2008), n° 3, p. 359-369.
- [66] F. Charru, « Une histoire de l’Institut de mécanique des fluides de Toulouse de 1913 à 1970 », *C. R. Méc. Acad. Sci. Paris* **345** (2017), n° 8, p. 505-544.
- [67] D. Aubin, « “Audacity and Precision” : the paradoxes of Henri Villat’s fluid mechanics in interwar France », *preprint*, Hal-00639877, 2010.
- [68] H. Gispert, J. Leloup, « Des patrons des mathématiques en France dans l’entre-deux-guerres », *Revue d’histoire des sciences* **62** (2009), p. 39-117.
- [69] G. Battimelli, « About the early international congresses of applied mechanics », in *IUTAM – A short history*, Springer, 2016, p. 21-30.
- [70] R. Tazzioli, « The eyes of French mathematicians on Tullio Levi-Civita - the case of hydrodynamics (1900-1930) », in *Images of Italian mathematics in France : The Latin Sisters, from Risorgimento to Fascism*, Trends in the History of Science, Springer, 2016, Hal-01436973, p. 255-288.
- [71] Y. Rocard, *Mémoires sans concessions*, Grasset, Paris, 1988.
- [72] C. d’Abzac-Epezy, « L’industrie aéronautique française pendant la Seconde Guerre mondiale : histoire et communication historique », *Nacelles* **1** (2016), <http://interfas.univ-tlse2.fr/nacelles/159>.
- [73] F. Charru, A. Demuro, « La mécanique des fluides à Toulouse durant la Seconde Guerre mondiale : entre opportunités et concurrences disciplinaires », in *Actes du colloque international Science et culture en temps de guerre, Toulouse 2020*, Éditions midi-pyrénéennes, 2022, p. 201-218.
- [74] J. Leloup, *L’entre-deux-guerres mathématique à travers les thèses soutenues en France*, Thèse, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 2009.
- [75] P. Suquet, « Paul Germain (1920–2009) », *C. R. Méc. Acad. Sci. Paris* **338** (2010), n° 2, p. 63-66.
- [76] E. Villermaux, P. Suquet, « The legacy of a deep thinker : Jean-Jacques Moreau », *C. R. Méc. Acad. Sci. Paris* **346** (2018), n° 3, p. 153-155.
- [77] A. Bernard, *Le CEAT – Histoire d’un centre de recherches (1963–2003)*, Institut Pprime, Poitiers, 2003.
- [78] V. Fonteneau-Champeau, *De l’I.P.O. à l’E.N.S.M. (1919-1969) : les oscillations d’une école d’ingénieurs en quête de son identité entre industrie et recherche sur les matériaux dans la région nantaise*, Thèse, Université de Nantes, 2001.
- [79] M. Lance, « Le laboratoire de mécanique des fluides et d’acoustique », *Histoire de l’École Centrale de Lyon* (2009), <https://histoire.ec-lyon.fr/index.php?id=768>.
- [80] É. Robert, *L’ingénieur moteur de l’innovation – un siècle de formation d’ingénieurs à Grenoble (sous la dir. de R. Moret)*, Éditions des Vignes-l’Éditeur-INPG, Grenoble, 2001.
- [81] C. Cambon, « L’héritage de Craya, pour une approche statistique à points multiples de la turbulence homogène anisotrope », *C. R. Méc. Acad. Sci. Paris* **345** (2017), n° 9, p. 627-641.
- [82] D. Pestre, *Physique et physiciens en France, 1918–1940*, 2nd éd., Éditions des Archives contemporaines, Paris, 1992.
- [83] P.-E. Mounier-Kuhn, *L’informatique en France de la seconde guerre mondiale au Plan Calcul*, Presses de l’université Paris-Sorbonne, 2010.





---

Article de recherche / *Research article*

L'année de la mécanique : quelques points de vue sur des avancées récentes en mécanique des solides et des fluides / *The French "Année de la Mécanique": some views on recent advances in solid and fluid mechanics*

La mécanique de l'endommagement au secours de la mécanique de la rupture : l'évolution de cette idée en un demi-siècle

*Damage mechanics to the aid of fracture mechanics: evolution of this idea during in half a century*

Jean-Jacques Marigo <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Institut Jean le Rond d'Alembert (UMR 7190), Sorbonne Université & CNRS, 75005 Paris, France

Courriel: [jjmarigo@yahoo.fr](mailto:jjmarigo@yahoo.fr)

**Résumé.** Cet article retrace les grandes lignes de l'évolution des idées qui ont prévalu et des choix qui ont été faits dans la modélisation de la rupture des matériaux et des structures depuis un siècle. En particulier l'accent est mis sur la création et le développement de la mécanique de l'endommagement avec son ambition première de remédier aux lacunes de la théorie de la rupture de Griffith. On souligne les succès de cette entreprise et les avancées qu'elle a permises en insistant sur le rôle clé qu'a joué *l'approche variationnelle*, mais on montre aussi ses limites.

**Abstract.** This article traces the main lines of the evolution of the ideas that have prevailed and the choices that have been made in modelling the fracture of materials for a century. In particular, the emphasis is on the creation and development of damage mechanics with its primary ambition to remedy the shortcomings of Griffith's fracture theory. We underline the successes of this enterprise and the advances it has allowed by insisting on the key role played by *the variational approach*, but we also show its limits.

**Mots-clés.** Endommagement, Rupture, Calcul des Variations, stabilité, discontinuités libres.

**Keywords.** Damage, Fracture, Calculus of Variations, stability, free discontinuities.

*Manuscrit reçu le 15 novembre 2022, accepté le 25 novembre 2022.*

### Abridged English Version

Griffith published, a century ago, an article [1] laying the foundations of a fracture theory designed for brittle materials which will influence all works devoted to this topics. It is based on two key assumptions, both of an energetic nature: (i) the energy required to create new cracked

surfaces is proportional to these surfaces; (ii) the cracks propagate in a structure according to an energy minimization principle.

It turns out that the (too) simple assumption on the surface energy leads to unrealistic scaling effects and does not allow to account for the nucleation of cracks in a healthy body. The main reason is that the resulting fracture theory does not contain the concept of critical stress but allows infinite stresses. We must therefore abandon this hypothesis and complete the theory. On the other hand, the second hypothesis which postulates that the cracks propagate in such a way as to minimize the total energy of the body will be the mainstay of the revisited theory (the so-called variational approach to fracture), providing fundamental tools both from a theoretical and numerical point of view.

To correct the defects of Griffith's theory, one could simply have changed the form of the surface energy density, as advocated by Barenblatt [2], by no longer assuming it equal to a constant  $G_c$  but by making it dependent on the jump of the displacements. One would thus have introduced not only a critical stress but also a characteristic length which would have corrected the effects of scale. But the community preferred to take a completely different path by developing the damage mechanics. Following the idea of Kachanov [3], in this approach a scalar variable  $D$  which quantifies in a collective way the set of micro-defects contained in a volume element is introduced into the constitutive relations via the concept of effective stress. But this concept was rapidly abandoned because of its too weak physical justification and therefore the damage variable will be considered as an internal state variable in the framework of the thermodynamics of irreversible processes. In the case of a brittle material and rate independent processes, it can be proved [4] from the Drucker–Ilyushin postulate of stability, that the criterion of damage is necessarily of the form  $-\partial\psi/\partial D(\boldsymbol{\varepsilon}, D) \leq k(D)$ , where  $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, D)$  is the damage-dependent elastic potential and  $k(D)$  is a positive damage-dependent constant. That fundamental result gives to the damage law a variational structure that will play a fundamental role. But it turns out that even if this type of standard damage models are thermodynamically consistent, they have bad mathematical properties as soon as they give rise to a stress softening behaviour and hence cannot be used to model fracture. The reason is that it becomes possible to break a body without spending any energy as in the case of the notched specimen of Figure 1, because the localisation of damage is not controlled. This ill-posed character is confirmed by numerical simulations, the results being strongly dependent on the mesh. Accordingly, many types of non-local damage models have been proposed but without a rigorous link with the Griffith fracture theory was established. The solution came from Ambrosio and Tortorelli who proved in [5, 6] that, in the context of image segmentation, the Mumford–Shah functional, which is similar to the mechanical energy in Griffith theory, can be approximated by a functional which can be interpreted as an energy of a damage model with an additional term containing the damage gradient. This fundamental result is established by Gamma-convergence where the small parameter corresponds to a length which fixes the size of the damage localisation. It was possible to actually transpose this idea in damage and fracture mechanics, which required in particular to take into account the irreversibility of the damage process. Finally, a typical energy functional which is used is the so-called AT1 model. It reads as  $\mathcal{E}_t(\mathbf{u}, D) = \int_{\Omega} W_t(\boldsymbol{\varepsilon}, D, \nabla D) dx - \mathbf{f}_t(\mathbf{u})$  where  $\mathbf{f}_t$  denotes the given exterior forces at time  $t$  and  $W_t$  is the energy density given by

$$W_t(\boldsymbol{\varepsilon}, D, \nabla D) = \frac{1}{2} (1 - D)^2 \mathbf{A}_0 (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_t^0) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_t^0) + \frac{3G_c}{8} \left( \frac{D}{\ell} + \ell \nabla D \cdot \nabla D \right)$$

(where  $\mathbf{A}_0$  is the stiffness tensor of the sound material,  $\boldsymbol{\varepsilon}_t^0$  is the given pre-strain at time  $t$  and  $\ell$  is a length). From a theoretical point of view, starting from this form of the energy, the damage evolution process is governed by an irreversibility condition, a stability criterion and an energy

balance [7–9]. In particular the stability criterion is the heir of Griffith's energy minimisation principle and reads as

$$\mathcal{E}_t(\mathbf{u}_t, D_t) \leq \mathcal{E}(\mathbf{u}^*, D^*), \quad \forall (\mathbf{u}^*, D^*) \text{ close to } (\mathbf{u}_t, D_t), 1 \geq D^* \geq D_t$$

where the notion of neighbourhood is given by the  $H^1(\Omega)$  norm. By standard arguments of the calculus of variations, one deduces that the local damage criterion reads now

$$\frac{1}{(1-D_t)^3} S_0 \boldsymbol{\sigma}_t \cdot \boldsymbol{\sigma}_t + \frac{3G_c \ell}{4} \Delta D_t \leq \frac{3G_c}{8\ell},$$

where  $S_0$  is the sound compliance tensor and  $\boldsymbol{\sigma}_t$  is the current stress. So it contains the additional term in laplacian  $D$  which comes from the damage gradient terms of the energy. Therefore, the maximal uniaxial stress that the material can sustain is given by  $\sigma_c = \sqrt{\frac{3G_c E_0}{8\ell}}$ , and it can be shown that the optimal damage profile to create a crack is parabolic with a width equal to  $4\ell$  [10]. The variational formulation is also very useful from a numerical point of view. Specifically, after a time discretisation, the displacement and damage state at time step  $i$  is obtained by an alternate minimisation algorithm: the energy at time step  $i$  is minimised with respect to  $\mathbf{u}$  at given  $D$ , then with respect to  $D$  (under the constraint of irreversibility) at fixed  $\mathbf{u}$  up to convergence [11]. Moreover each minimisation admits a unique solution and is easy to implement by virtue of the convexity and the quadratic character of the energy with respect to each variable.

In a first time, the gradient damage model was used as an approximation of Griffith model, in the spirit of Ambrosio–Tortorelli. In that case, the length has a purely numerical meaning and can be chosen as small as desired. The advantage with respect to the original Griffith formulation is that it becomes possible to manage arbitrary crack paths in space and time with classical finite elements. Several examples have illustrated those qualities [11–13]. But by considering the length  $\ell$  as an arbitrary small parameter one falls in the defect of the Griffith theory and one cannot explain the nucleation of a crack because the critical stress tends to infinity as  $1/\sqrt{\ell}$ . Therefore it becomes necessary to consider that the length  $\ell$  is a characteristic length of the *material* which can be identified from the measurement of  $E_0$ ,  $\sigma_c$  and  $G_c$  by virtue of the relation coming from the optimal damage profile:

$$\ell = \frac{3G_c E_0}{8\sigma_c^2}.$$

And even if the Gamma-convergence result can no more be used because one does no more pass to the limit in  $\ell$ , one practically recovers the Griffith theory as soon as the characteristic material length is small by comparison with the length of the crack [14].

The thermal shock experiment is an illuminating example of application of the variational approach to fracture, see [15, 16] for the details. One considers a rectangular specimen at the initial temperature  $T_0$  the upper side of which is submitted to a colder temperature  $T_1$  from time  $t = 0$  whereas the normal displacement of the lateral sides are prohibited. The resulting problem is solved numerically by the alternate minimisation algorithm with the model AT1. The computed evolution of the damage field is shown in Figure 2: (i) The damage is initiated from time 0 on the upper side of the sample  $x_2 = 0$ , then gradually propagates inwards while remaining uniform in  $x_1$  until a critical time where a bifurcation appears with a periodic bifurcation mode; (ii) The damage becomes dependent on  $x_1$  and while increasing is gradually localised at the center of each period to finally give rise to cracks; (iii) Once the network of cracks has been established, and their length and spacing are sufficiently large compared to the characteristic length of the material  $\ell$ , these cracks propagate by practically following Griffith's law: they grow by always reproducing the same parabolic profile of damage which corresponds to a dissipated energy  $G_c$  per unit length. A period doubling phenomenon is observed at regular intervals: one out of two cracks stopping while the other continues to propagate. The comparison with the experimental tests on ceramics made by [17] is shown in Figure 3 for  $T_0 - T_1 = 380^\circ\text{C}$ . The length

$L$  of the sample is 50 mm whereas the measurement of the material parameters gives  $\ell = 46\mu\text{m}$ . The agreement is really excellent, but it concerns only the last phase of the damage process, when the network of cracks is established, because the experimental data are not precise enough for the two first phases.

The problem of the nucleation of a crack at the tip of a notched specimen is another fundamental test for the ability of gradient damage models to predict with a good precision the critical load at which the phenomenon occurs. If we consider again the notched specimen of Figure 1, the issue of a crack nucleation can be treated neither by Griffith's theory nor by local damage models, as it has been seen above. But it becomes possible with gradient damage models. That has been done in [18] by using the AT1 model where the numerical predictions are compared with experiments made for several materials and a range of notch angles  $\omega \in [0, \pi/2]$ . Here also the agreement is very good.

To conclude, it seems possible to correct some fundamental defects of Griffith's fracture theory by using gradient damage models coupled with a variational approach. At the present time, this ability has been checked only in the (too) restricted context of the quasi-static behaviour of brittle materials. Some extensions to a dynamic context, to ductile fracture, to fatigue or to incompressible materials have been proposed, but it remains to check their validity by comparing their predictions with fundamental experimental results. However this approach, which is essentially based on the phenomenological concept of a damage variable representing collectively micro-defects, cannot explore the nucleation and the propagation of defects at a micro-scale. Therefore it must be complemented by an approach capable of doing so. A good candidate could be the cohesive force models which have all the required qualities.

## 1. La théorie de la rupture fragile de Griffith : son apport et ses lacunes

Griffith publia, il y a maintenant un siècle, un article [1] jetant les bases d'une théorie de la rupture conçue pour les matériaux fragiles qui dès lors influencera tous les travaux de modélisation qui seront entrepris sur cette problématique. Elle s'appuie sur deux hypothèses clés, toutes deux de nature énergétique : (i) l'énergie à apporter pour créer de nouvelles surfaces fissurées est proportionnelle à ces surfaces; (ii) les fissures se propagent dans une structure suivant un principe de minimisation d'énergie.

- (1) *L'hypothèse de proportionnalité de l'énergie de surface à la surface des fissures.* Cette hypothèse a évidemment le mérite d'être simple puisqu'elle permet de n'introduire qu'une constante matériau supplémentaire dans le cas d'un milieu isotrope : la densité d'énergie de surface  $G_c$  (qui dépend du point matériel dans le cas d'un milieu hétérogène). Elle peut partiellement se justifier à l'échelle atomique à partir de potentiels interatomiques et correspond en première approximation à l'énergie de surface fournie par deux plans atomiques infiniment éloignés l'un de l'autre. Mais il va s'avérer que cette hypothèse simplificatrice s'accompagne d'effets secondaires néfastes en ne permettant pas d'expliquer des phénomènes fondamentaux comme la nucléation de nouvelles fissures et la propagation par fatigue de fissures existantes, ou en prédisant des effets d'échelle manifestement irréalistes. C'est elle qui va conduire à développer la mécanique de l'endommagement pour pallier aux lacunes de la théorie de Griffith.
- (2) *Le principe de minimisation de l'énergie.* Cette deuxième hypothèse, bien qu'énoncée de façon vague dans [1], généralise à un cadre dissipatif le théorème bien connu de l'énergie potentielle pour les milieux conservatifs, à condition de rajouter l'énergie de surface dissipée à l'énergie potentielle. (Ce n'est bien sûr plus un théorème mais une hypothèse sur la loi d'évolution de la fissuration.) Elle ne sera utilisée dans un premier temps que pour traiter quelques exemples académiques simples, faute d'outils disponibles pour

la mettre en oeuvre dans un cadre général. Mais son principe même se prêtait à une généralisation et allait permettre de construire les outils nécessaires à son application. Toutefois, cela pris du temps et il y eut des périodes où l'on oublia le principe énergétique pour développer d'autres approches.

En particulier, on se focalisa longtemps sur le concept de facteur d'intensité des contraintes associé à la présence de singularités en fond de fissure [19]. (Rappelons que ces singularités sont dues à l'hypothèse sur l'énergie de surface qui implique l'absence de forces cohésives entre les lèvres des fissures et donc au bout du compte autorise des contraintes infinies.) Cette propriété prit tellement d'importance qu'il était et est encore fréquent de voir des cours d'introduction à la mécanique de la rupture (fragile) commencer par la description des fameux modes singuliers I, II et III alors qu'ils sont spécifiques à l'élasticité linéaire, homogène et isotrope. Les singularités changent (et on ne sait pas toujours les caractériser) dans d'autres situations (interfaces, coins, anisotropie, élasticité non linéaire, ...). Il est donc difficile de bâtir une théorie générale en se basant sur ce concept. Pourtant, c'est ce qu'on fut tenter de faire en introduisant un critère de propagation basé sur le concept de ténacité, autrement dit de facteur d'intensité des contraintes critique. En première lecture, il est pour le moins curieux d'un point de vue physique de postuler qu'une fissure se propage quand un coefficient de singularité des contraintes dépasse une valeur caractéristique du matériau. Bien sûr, le lien peut être fait avec les concepts énergétiques via la formule dite d'Irwin, mais tout ceci ne vaut que dans un cadre trop restreint.

Venons-en à une formulation plus précise de la loi d'évolution de la fissuration. En suivant l'idée de Griffith et en se limitant au cadre quasi-statique de matériaux isotropes fragiles en petites déformations, on peut associer, à chaque instant  $t$ , à un champ de déplacement  $\mathbf{u}$  et à un état de fissuration  $\Gamma$  l'énergie  $\mathcal{E}_t(\mathbf{u}, \Gamma)$  de la structure  $\Omega$  soumise à des forces extérieures (surfaiques ou volumiques) caractérisées par la forme linéaire  $\mathbf{f}_t$  :

$$\mathcal{E}_t(\mathbf{u}, \Gamma) = \mathcal{P}_t(\mathbf{u}, \Gamma) + \mathcal{S}(\Gamma),$$

$\mathcal{P}_t(\mathbf{u}, \Gamma)$  et  $\mathcal{S}(\Gamma)$  étant respectivement l'énergie potentielle et l'énergie de surface,

$$\mathcal{P}_t(\mathbf{u}, \Gamma) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \frac{1}{2} \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}_t^0) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}_t^0) dx - \mathbf{f}_t(\mathbf{u}), \quad \mathcal{S}(\Gamma) = \int_{\Gamma} G_c dS$$

où  $\mathbf{A}$  désigne le tenseur de rigidité,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  le gradient symétrisé du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_t^0$  la prédéformation imposée localement à l'instant  $t$  (typiquement la déformation thermique via la température). En supposant connu l'état de fissuration  $\Gamma$  et à condition bien sûr que les efforts extérieurs et l'état de fissuration soient compatibles avec l'équilibre, on peut déterminer le champ de déplacement réalisant l'équilibre à l'instant  $t$ , ce champ  $\mathbf{u}_t(\Gamma)$  dépendant à la fois de  $t$  et de  $\Gamma$ . Ce faisant, l'énergie devient une fonctionnelle de l'état de fissuration  $\Gamma$  :

$$\widehat{\mathcal{E}}_t(\Gamma) = \mathcal{E}_t(\mathbf{u}_t(\Gamma), \Gamma).$$

Il reste à préciser le principe de minimisation. Un choix fort, dans l'esprit de [20] ou [21] mais aussi de [1], serait de choisir l'état de fissuration à l'instant  $t$  correspondant à la plus petite énergie de la structure parmi tous les états possibles qui respectent la condition d'irréversibilité. Cette condition dite de stabilité *globale* s'écrirait alors :  $\widehat{\mathcal{E}}_t(\Gamma_t) \leq \widehat{\mathcal{E}}_t(\Gamma), \forall \Gamma \supset \Gamma_t$ . (Rappelons qu'il faudrait lui adjoindre en plus un bilan d'énergie pour compléter la formulation, mais nous n'en aurons pas besoin ici, cf. [7].) Des résultats d'existence de solution à ce problème d'évolution ont été obtenus [22] mais uniquement dans le cas de conditions aux limites de type Dirichlet (autrement dit avec  $\mathbf{f}_t = 0$ ). Et il n'y a aucun espoir de pouvoir les généraliser aux cas où les efforts extérieurs donnés ne sont pas nuls, car alors l'énergie n'est plus bornée inférieurement. (Dit de façon grossière, il suffit d'envisager des  $\Gamma$  qui coupent la structure en deux et d'envoyer un des morceaux à l'infini.) Mais même dans le cas où  $\mathbf{f}_t$  est nul et où l'énergie est donc bornée inférieurement, ce choix de minimum global est discutable car, pour « sauter » d'un état de

fissuration à un autre de moindre énergie, la structure pourrait avoir à franchir des barrières d'énergie. Il est donc plus raisonnable de n'introduire qu'une condition de stabilité « locale » qui prend la forme suivante :

$$\widehat{\mathcal{E}}_t(\Gamma_t) \leq \widehat{\mathcal{E}}_t(\Gamma), \quad \forall \Gamma \supset \Gamma_t, \Gamma \text{ voisin de } \Gamma_t.$$

Maintenant, toute la difficulté réside dans le choix de ces voisinages. En s'en tenant à l'approche minimaliste qui a longtemps prévalu, on n'utilise ce critère de stabilité qu'en envisageant des trajets de fissure prédéfinis. Par exemple, en déformations planes et en supposant que la fissure se propage de façon rectiligne dans un milieu homogène, les énergies (par unité d'épaisseur) deviennent des fonctions de  $\ell$  à  $t$  fixé, soit  $\widehat{\mathcal{E}}_t(\ell) = \widehat{\mathcal{P}}_t(\ell) + G_c \ell$  et le critère de stabilité s'écrit

$$\widehat{\mathcal{E}}_t(\ell_t) \leq \widehat{\mathcal{E}}_t(\ell_t + h), \quad \forall h > 0, h \text{ assez petit}.$$

En dérivant par rapport à  $h$  en  $h = 0$  on obtient le critère de Griffith :  $G_t \leq G_c$ ,  $G_t$  représentant le taux de restitution d'énergie potentielle :  $G_t = -\frac{d\widehat{\mathcal{P}}_t}{d\ell}(\ell_t)$ . On voit donc que le critère de Griffith n'est qu'un critère de stabilité d'ordre 1 (par rapport au petit paramètre de perturbation) obtenu en n'envisageant qu'une famille particulière de perturbations. C'est dans ce cadre restreint du principe de minimisation de l'énergie de Griffith que s'est développée et a été utilisée à la fin du vingtième siècle la théorie de la mécanique de la rupture fragile, une partie importante des travaux d'innovation s'étant focalisée sur la mise au point de méthodes robustes du calcul du taux de restitution de l'énergie potentielle [23–25]. Toutefois, ce cadre restreint suffit pour montrer les deux principaux défauts de la théorie de Griffith :

- (1) Des effets d'échelle irréalistes aux petites échelles;
- (2) L'impossibilité de rendre compte de la nucléation de nouvelles fissures.

Comme nous allons le mettre en évidence sur un exemple simple, ces défauts sont essentiellement dus au choix de l'énergie de surface. Considérons une bande (faite d'un matériau isotrope, linéairement élastique) infinie dans la direction 1 et de largeur  $2L$  dans la direction 2 contenant une fissure centrée de longueur  $2\ell$  et d'orientation 2. Si on la soumet à une contrainte de traction  $\sigma$  à l'infini dans la direction 1, la fissure se trouve en mode I et le facteur d'intensité des contraintes à chaque pointe se calcule explicitement et vaut

$$K_I = \sigma \sqrt{\frac{\pi \ell}{\cos \frac{\pi \ell}{2L}}}.$$

En utilisant la formule d'Irwin (en déformation plane) on en déduit le taux de restitution d'énergie  $G = (1 - \nu^2) \frac{\pi \ell}{\cos \frac{\pi \ell}{2L}} \frac{\sigma^2}{E}$ , et en utilisant le critère de Griffith, on en déduit que la contrainte  $\sigma_r$  d'amorçage de la propagation (qui dans le cas présent sera aussi la contrainte de rupture) vaut

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{EG_c}{1 - \nu^2} \frac{\cos \frac{\pi \ell}{2L}}{\pi \ell}}.$$

Par conséquent à rapport  $\ell/L$  constant, la contrainte à rupture varie en fonction de la largeur de la bande comme  $1/\sqrt{L}$ . Cet effet d'échelle est bien conforme à ce que l'on observe dans de nombreux matériaux fragiles pour de grandes valeurs de  $L$ , mais est manifestement irréaliste pour des petites valeurs de  $L$ ,  $\sigma_r$  tendant vers l'infini quand  $L$  tend vers 0. De plus, si on raisonne à  $L$  fixé et si on fait tendre  $\ell$  vers 0, on voit que  $G$  tend vers 0 comme  $\ell$  et  $\sigma_r$  tend vers l'infini comme  $1/\sqrt{\ell}$ . On ne peut donc créer de fissure si on suit le critère de Griffith. Ces mauvaises propriétés ne sont pas spécifiques à l'exemple choisi et peuvent être considérées comme intrinsèques à la théorie de Griffith.



## 2. La mécanique de l'endommagement : son ambition et ses réalisations

Il manque dans la théorie de Griffith une contrainte critique que le matériau ne peut pas dépasser. Une façon simple d'introduire cette contrainte critique est d'abandonner l'hypothèse sur l'énergie surface et de tenir compte des forces cohésives qui existent tant que les lèvres ne sont pas suffisamment séparées (ce qui revient à faire dépendre la densité d'énergie de surface du saut des déplacements et non plus à la considérer comme une constante). C'est par essence l'idée de Barenblatt [2], mais cette voie ne fut que partiellement explorée. Ce fut la mécanique de l'endommagement qui apparut comme la plus à même de fournir un cadre général pour rendre compte de la nucléation des fissures « macroscopiques ». Sous l'impulsion de Lemaître et Chaboche [26], qui s'appuyèrent sur les travaux de Kachanov [3], se développa le concept de contrainte effective définie comme la contrainte réelle divisée par  $1 - D$ ,  $D$  étant la variable caractéristique de l'endommagement. Cette définition s'accompagnait d'une règle de substitution dans les lois de comportement des matériaux, la contrainte effective remplaçant formellement la contrainte réelle dans les relations où cette dernière apparaissait. Quant à l'interprétation de la variable d'endommagement, elle était censée représenter des microfissures et des microvides en fournissant le degré de développement. On peut trouver paradoxale la démarche qui consiste à vouloir rendre compte de l'apparition de macrofissures tout en supposant l'existence d'un réseau de microfissures dont l'état et l'évolution ne sont traités que de façon collective. En fait, il faut y voir là une forme de renoncement à comprendre la nucléation aux petites échelles. Comme la théorie de Griffith ne fonctionne pas à ces échelles-là, on fait le pari qu'il existe une loi capable de justifier l'apparition et la croissance progressive de ces micro-défauts avant qu'ils ne coalescent en macrofissures, mais on n'ambitionne pas de découvrir cette loi. Les conséquences de ce renoncement est qu'il faut en contrepartie faire des choix : sur la ou les variables d'endommagement (leur nombre, leur caractère tensoriel, leur caractère local ou non local, ...), sur leur influence sur le comportement du matériau et sur leur évolution, avec pour seul guide quelques essais expérimentaux. Autrement dit, l'approche devient purement phénoménologique. Il y eut bien quelques tentatives comme dans [27, 28] pour construire des lois d'endommagement en partant de mécanismes microstructuraux, mais ce fut toujours au prix de grandes simplifications et une large part d'arbitraire demeurait quant au choix de la loi d'évolution. Cette absence de lien explicite avec les mécanismes physiques sous-jacents s'avèrera être une des principales faiblesses de l'approche.

Le concept de contrainte effective fut progressivement abandonné vu son manque de justification physique et on s'orienta vers la construction de modèles d'endommagement s'appuyant sur la thermodynamique des processus irréversibles comme il était alors la coutume de faire pour rendre compte des autres aspects dissipatifs du comportement des matériaux. La ou les variables d'endommagement prenaient donc le statut de variables internes intervenant dans les relations constitutives et auxquelles on devait rajouter une loi d'évolution. Il apparut très vite [29] qu'on pouvait utiliser le cadre du formalisme des matériaux standards généralisés [30] pour écrire ces lois, ce qui permettait de mettre dans un moule unique les lois de comportement usuelles des matériaux en y incluant l'endommagement. Il s'avère que les lois standards du type *rate independent* peuvent se justifier sans passer par ce formalisme aux bases physiques incertaines grâce au postulat de Drucker-Ilyushin qui requiert que le travail de déformation de l'élément de volume soit non négatif lorsque celui-ci est soumis à un cycle en déformation. En effet, rappelons qu'en plasticité parfaite on montre [4], moyennant des hypothèses très faibles sur le critère de plasticité et la loi d'écoulement plastique, que ce postulat est « équivalent » au principe du travail maximal de Hill et donc qu'il impose la convexité du domaine d'élasticité et la règle de normalité de l'écoulement. Dans le cas des lois d'endommagement fragile à seuil décrites à l'aide d'une variable « scalaire », on obtient également [4] un résultat très fort qui est rappelé ci-dessous.

(Dans le cas de plusieurs variables d'endommagement scalaires ou de variables d'endommagement vectorielles ou tensorielles, les conséquences du postulat sont moins spectaculaires. Mais comme la grande majorité des travaux réalisés à ce jour l'ont été dans le cadre scalaire, nous limiterons désormais notre exposé à ce cas-là.)

Soit  $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, D)$  le potentiel élastique du matériau fragile, dépendant uniquement de la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et de la variable d'endommagement scalaire  $D$ , dont on déduit les contraintes  $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, D)$ . En exigeant que  $\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} \geq 0$  pour tout cycle en déformation  $\mathcal{C}$ , on en déduit, moyennant des hypothèses très faibles sur le critère d'endommagement, que ce dernier doit nécessairement s'écrire

$$-\frac{\partial \psi}{\partial D}(\boldsymbol{\varepsilon}, D) \leq k(D),$$

où  $k(D)$  est une fonction positive arbitraire de  $D$ . Ce faisant, le travail de déformation devient une « fonction d'état », ne dépendant que de l'état  $(\boldsymbol{\varepsilon}, D)$ , s'écrivant

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, D) = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, D) + w(D),$$

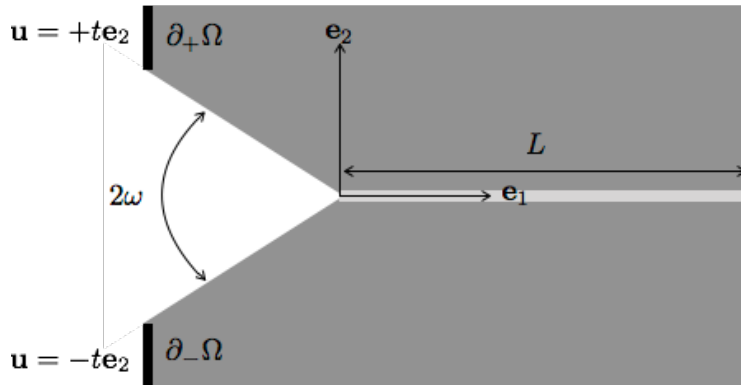
où  $w(D)$ , la primitive de  $k(D)$  nulle en  $D = 0$ , représente l'énergie dissipée lorsque l'élément de volume passe de l'état sain à l'état endommagé  $D$ . En rajoutant la condition d'irréversibilité et le fait que l'endommagement n'évolue que quand la déformation est au seuil, on a donc obtenu une loi d'évolution « standard » :

$$\dot{D} \geq 0, \quad \frac{\partial W}{\partial D}(\boldsymbol{\varepsilon}, D) \leq 0, \quad \frac{\partial W}{\partial D}(\boldsymbol{\varepsilon}, D) \dot{D} = 0.$$

En n'envisageant que des modèles où l'énergie dissipée après endommagement total de l'élément de volume prend une valeur finie  $w_1 > 0$ , moyennant un changement de variable d'endommagement, on peut supposer que  $w(D) = w_1 D$  et  $D \in [0, 1]$  représente alors la fraction actuelle d'énergie dissipée. Les modèles d'endommagement fragile se distinguent donc seulement par la dépendance en  $D$  de l'énergie élastique  $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, D)$  et par la valeur de  $w_1$ . Dans le cas d'un matériau à comportement linéairement élastique à état d'endommagement fixé, il ne reste plus alors qu'à identifier ou à choisir la dépendance en  $D$  du tenseur de rigidité  $A(D)$  ou de son inverse le tenseur de souplesse  $S(D)$  (le premier étant une fonction décroissante de  $D$  alors que le deuxième en est une fonction croissante). De plus, le domaine d'élasticité est nécessairement un ellipsoïde variant avec  $D$ , aussi bien dans l'espace des déformations ( $-A'(D)\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \leq 2w_1$ ) que dans l'espace des contraintes ( $S'(D)\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \leq 2w_1$ ). Les propriétés d'écrouissage se déduisent des signes des dérivées secondes de  $A(D)$  et  $S(D)$ . En particulier, les matériaux adoucissants (ceux dont les contraintes au seuil décroissent quand  $D$  augmente alors que les déformations au seuil croissent) correspondent à  $A''(D) < 0$  et  $S''(D) > 0$  (ces deux inégalités devant se comprendre au sens des formes quadratiques).

Les années 80 ont été essentiellement occupées à justifier et à construire des modèles d'endommagement « locaux », le cadre « standard » permettant, comme on vient de le souligner, de réduire considérablement les choix. Si ces modèles permettaient, par construction, d'envisager la rupture de l'élément de volume par perte de rigidité totale ( $A(1) = 0$ ), le lien avec la mécanique de rupture restait à faire. Et c'est là que les difficultés commencèrent à apparaître. Il était clair que seuls les modèles adoucissants où les contraintes décroissent progressivement vers 0 au fur et à mesure que l'endommagement augmente étaient susceptibles de rendre compte de la nucléation de fissures, mais surgissait alors une difficulté d'ordre mathématique que l'on n'avait pas rencontrée jusqu'ici dans les modèles de comportement usuels : celle de la perte de monotonie de la relation contrainte-déformation lors des phases d'endommagement. Il avait été déjà noté en plasticité parfaite que la perte de la stricte monotonie pouvait s'accompagner de phénomènes de charges limites, de localisations de la déformation et de non unicités de la réponse en déplacements, mais on conservait un résultat d'unicité des contraintes (du moins dans le cadre des lois « standards »). Mais pour les modèles d'endommagement adoucissants les choses empirent :

on risque toujours la non existence de solutions du fait que les contraintes sont bornées (c'est la notion de charges limites), mais quand il y a existence de solutions, il n'y a généralement plus unicité ni en déplacements ni en contraintes. Il est par exemple facile de construire une infinité de solutions au problème unidimensionnel d'une barre en traction sous déplacement contrôlé aux extrémités. De plus, l'endommagement peut se localiser sans que cela coûte de l'énergie. De ce point de vue l'exemple bidimensionnel d'une éprouvette entaillée est des plus instructifs, cf. figure 1.



**FIGURE 1.** Eprouvette entaillée dont le demi-angle d'entaille  $\omega \in (0, \pi/2)$  et dont les bords  $\partial_{\pm}\Omega$  sont soumis à des déplacements  $\pm t\mathbf{e}_2$ ,  $t$  représentant le paramètre de chargement, les autres bords étant libres. La bande en gris clair partant du fond d'entaille représente la zone où  $D = 1$ , ailleurs  $D = 0$ .

Considérons le champ d'endommagement où  $D$  vaut 1 sur une bande de longueur  $L$  et d'épaisseur  $h$  partant du fond d'entaille et séparant les parties supérieure et inférieure de l'éprouvette, alors que  $D$  vaut 0 ailleurs. Les déplacements d'équilibre correspondent aux translations  $\pm t\mathbf{e}_2$  des parties supérieure et inférieure, les contraintes sont donc partout nulles et il n'y a pas d'énergie élastique dans l'éprouvette. Et comme l'énergie dissipée pour créer cette zone endommagée est proportionnelle au volume, elle vaut donc ici  $w_1 Lh$ . Par conséquent, en faisant tendre  $h$  vers 0, elle tend vers 0. On peut donc rompre cette éprouvette sans que cela coûte de l'énergie et ce, quelle que soit l'intensité du chargement  $t$ . Notons le singulier contraste avec la théorie de Griffith. En effet si l'on considère cette même éprouvette soumise au même chargement dans la théorie de Griffith (avec un comportement linéairement élastique du matériau), il n'y aura jamais nucléation d'une fissure en fond d'entaille car, bien que les contraintes y soient singulières en  $r^{-\alpha}$ , la singularité est faible ( $\alpha > 1/2$  du fait que  $\omega > 0$ ) et le taux de restitution d'énergie d'une fissure de longueur  $\ell$  tend vers 0 quand  $\ell$  tend vers 0. Donc avec la théorie de Griffith il n'y a pas nucléation car il n'y a pas assez d'énergie potentielle à restituer pour créer l'énergie de surface, mais avec un modèle d'endommagement local adoucissant il y a rupture dès la mise en charge car comme on autorise la localisation de l'endommagement dans des bandes d'épaisseur arbitrairement petites la création de zone endommagée ne coûte pas d'énergie. Ces modèles d'endommagement contiennent bien la notion de contrainte bornée, mais en contrepartie ils donnent lieu à des énergies de surface nulles. Il manque donc un ingrédient si l'on veut faire le lien avec la rupture.

**Remarque.** À ce stade, il est bon de souligner qu'il ne suffit pas qu'un modèle satisfasse tous les canons de la thermodynamique pour qu'il soit pertinent. La communauté a perdu beaucoup de temps en se référant à ce seul dogme. Dans le cas d'espèce, on ne pouvait pas déduire sa

pertinence en se contentant de raisonner sur l'élément de volume, il fallait aussi étudier les problèmes aux limites auxquels ils conduisent. Ce qui avait été vrai jusqu'ici où on avait toujours travaillé dans l'univers paradisiaque des fonctionnelles convexes, ne l'était plus dès lors que l'on avait franchi les portes de l'enfer du non convexe. Faute d'outils d'analyse mathématique disponibles (et peut-être aussi à cause de la perte progressive de compétences dans ce domaine par la communauté internationale des mécaniciens du solide), on s'en remit aux simulations numériques pour tester les modèles. Si cela suffit à exhiber quelques défauts, ce ne fut pas suffisant pour qu'on en trouvât l'issue.

Avec le développement des ordinateurs et la possibilité de faire du calcul de structures avec de plus en plus de degrés de liberté, les défauts de ces modèles d'endommagement locaux apparurent assez vite : on constata que les résultats numériques étaient très sensibles au maillage et en particulier à sa finesse, plus le maillage était fin et plus les zones endommagées se localisaient. Pour pallier cette difficulté certains proposèrent que la longueur de maille devînt un paramètre du modèle, mais cette position saugrenue n'était pas tenable et il fallut se résoudre à changer le modèle physique de façon à limiter la localisation de l'endommagement. C'est ainsi qu'apparurent les modèles non locaux (et de nombreuses autres variantes) [31] où sont utilisées des intégrales pour « délocaliser » le champ d'endommagement. Mais s'ils jouaient bien le rôle de limiteur de la localisation et rendaient les résultats numériques dans une certaine mesure indépendants du maillage, leur lien précis avec la rupture et la théorie de Griffith n'était toujours pas établi car l'on ne peut se contenter de règles formelles d'équivalence entre endommagement et fissuration [32]. La lumière vint de l'école italienne de Calcul des Variations dont le père spirituel était De Giorgi et des articles d'Ambrosio et Tortorelli [5, 6]. Dans le cadre de la segmentation d'image, les auteurs montrèrent que la fonctionnelle de Mumford–Shah qui en dimension 3 s'écrit

$$\mathcal{E}(u, \Gamma) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} (\nabla u \cdot \nabla u + \alpha(u - f)^2) dx + \beta \text{aire}(\Gamma),$$

(où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ ,  $f$  est une fonction donnée,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes positives,  $u$  est un champ scalaire qui peut être discontinu sur la surface  $\Gamma$ ) pouvait être approchée, au sens de la Gamma-convergence [33], par la fonctionnelle régularisée

$$\mathcal{E}_\eta(u, D) = \int_{\Omega} ((1 - D)^2 \nabla u \cdot \nabla u + \alpha(u - f)^2) dx + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{D^2}{\eta} + \eta \nabla D \cdot \nabla D \right) dx,$$

(où  $\eta$  est un petit paramètre, le champ  $u$  est maintenant régulier dans  $\Omega$  et le champ  $D$  est scalaire, prenant ses valeurs entre 0 et 1). Ce résultat de Gamma-convergence signifie en particulier que les minima de  $\mathcal{E}_\eta$  convergent vers le minimum de  $\mathcal{E}$  et que les minimiseurs  $(u_\eta, D_\eta)$  de la fonctionnelle régularisée convergent (dans un sens approprié) vers les minimiseurs  $(u, \Gamma)$  de la fonctionnelle d'origine quand  $\eta$  tend vers 0. Le lien avec la rupture est clair : les champs  $u$  et  $D$  représentent les champs de déplacement et d'endommagement, les surfaces de discontinuité  $\Gamma$  représentent les fissures, l'énergie  $\beta \text{aire}(\Gamma)$  représente l'énergie de Griffith et donc le terme  $\frac{\beta}{2} \int_{\Omega} (\frac{D^2}{\eta} + \eta \nabla D \cdot \nabla D) dx$  représenterait l'énergie dissipée par endommagement. On voit qu'il contient le terme régularisé en gradient d'endommagement affecté du petit paramètre de convergence. C'est l'ingrédient qui manquait : un terme supplémentaire dans l'énergie qui interdit une localisation excessive de l'endommagement et qui exige la dépense d'une énergie finie pour amener l'endommagement à 1. Notons que ce résultat s'appuie de façon essentielle sur une approche variationnelle et un principe de minimisation d'énergie. Toutes les autres approches de régularisation, faute d'outils comparables, n'avaient pas été capables de fournir des preuves irréfutables de leur prétendu bien-fondé.

Il restait à transposer effectivement ce résultat établi en segmentation d'image au cadre de l'endommagement et de la rupture. Pour cela il fallait (i) considérer des champs  $\mathbf{u}$  vectoriels

et non scalaires; (ii) tenir compte de l'irréversibilité de l'endommagement; (iii) envisager des chargements et des conditions aux limites plus générales. Tout ceci ne constituait pas des difficultés insurmontables (du moins en principe) même si chaque étape de cette transposition fit apparaître de nouvelles difficultés techniques [11,34]. Il s'avéra même nécessaire de ne pas s'en tenir à la fonctionnelle d'Ambrosio–Tortorelli mais d'envisager des modèles d'endommagement plus généraux [8, 9], tout en conservant la propriété de convergence vers le modèle de Griffith. Par exemple, le modèle d'endommagement à gradient (baptisé AT1 alors que celui d'Ambrosio–Tortorelli était appelé AT2) caractérisé par la densité d'énergie suivante

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, D, \nabla D) = \frac{1}{2}(1-D)^2 A_0(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) + \frac{3G_c}{8} \left( \frac{D}{\ell} + \ell \nabla D \cdot \nabla D \right)$$

(où  $A_0$  est le tenseur de rigidité du matériau sain,  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$  est la prédéformation et  $\ell$  la dimension d'une longueur) possède les propriétés requises. Il diffère de l'original simplement par le terme linéaire en  $D$  qui remplace le terme quadratique (d'où leur nom) et le coefficient multiplicatif de  $G_c$ . L'énergie totale de la structure dans l'état  $(\mathbf{u}, D)$  s'écrit donc à un instant donné

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, D) = \int_{\Omega} W(\boldsymbol{\varepsilon}, D, \nabla D) dx - \mathbf{f}(\mathbf{u}),$$

avec une dépendance en temps de  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$  et  $\mathbf{f}$ . Bien sûr, le résultat de Gamma-convergence qui s'appuie sur la minimisation globale de l'énergie ne peut pas s'appliquer en présence de forces données non nulles, ni la fonctionnelle de Griffith ni sa régularisée n'étant alors bornées inférieurement. Il faut affaiblir le principe de minimisation et introduire comme dans le cas de la théorie de Griffith une condition plus faible de stabilité locale tenant compte de l'irréversibilité de l'endommagement :

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, D) \leq \mathcal{E}(\mathbf{u}^*, D^*), \quad \forall (\mathbf{u}^*, D^*) \text{ voisin de } (\mathbf{u}, D), D^* \geq D$$

avec la norme  $H^1(\Omega)$  comme choix naturel de la norme fixant la notion de voisinage. En y adjoignant un bilan d'énergie on a donc obtenu une formulation variationnelle du problème d'évolution de l'endommagement qui est formellement la même que celle qui était utilisée dans les modèles locaux (et qui s'appuie sur les mêmes principes d'irréversibilité, de stabilité et de bilan d'énergie que le modèle de Griffith), à ceci près que l'énergie contient maintenant le terme supplémentaire en gradient d'endommagement, cf. [8–10, 35]. De ce fait, le critère d'endommagement local qui correspond à la condition de stabilité d'ordre 1 devient

$$\frac{1}{(1-D)^3} S_0 \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{3G_c \ell}{4} \Delta D \leq \frac{3G_c}{8\ell},$$

où  $S_0$  est le tenseur de souplesse du matériau sain. Dans les zones encore saines où  $D = 0$ , on retrouve le critère en contraintes du modèle local (dans AT1,  $w_1 = 3G_c/8\ell$ ) et on peut vérifier que l'on a bien une réponse adoucissante qui suit une phase élastique, la contrainte uniaxiale maximale que le matériau peut supporter étant

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{3G_c E_0}{8\ell}}.$$

(C'est cette phase élastique suivie d'un adoucissement qui le distingue du modèle initial d'Ambrosio–Tortorelli, qui lui ne possède pas de phase élastique, mais une phase durcissante suivie d'une phase adoucissante. Cette absence de phase élastique fait que toute la structure s'endommage immédiatement, ce qui constitue une pollution d'un point de vue numérique. Le modèle AT1 corrige ce défaut.) Dans les zones endommagées par contre apparaît le terme non local en laplacien  $D$  dû à l'introduction des termes en gradient d'endommagement dans l'énergie. On

déduit du critère modifié le profil de la zone endommagée qui accompagne la création d'une fissure, l'endommagement valant 1 sur les lèvres de la fissure et décroissant vers 0 dans la direction normale. Dans le cas de AT1, ce profil est parabolique avec une demi-largeur égale à  $2\ell$ .

Dans un premier temps, ces modèles d'endommagement à gradient vont être utilisés comme modèles régularisés de Griffith. Autrement dit, le modèle de Griffith est alors considéré comme le bon modèle physique, le modèle d'endommagement en constituant simplement une approximation via le petit paramètre  $\ell$  et le résultat de Gamma-convergence. C'était d'ailleurs dans cet esprit-là qu'Ambrosio et Tortorelli avaient conçu leur régularisation elliptique. Ceci permettait de simplifier substantiellement le traitement numérique de la segmentation d'image. De la même façon, le modèle d'endommagement allait permettre de traiter la propagation des fissures sans hypothèse *a priori* sur leur trajet spatio-temporel et sans avoir à gérer le délicat problème de surfaces de discontinuités libres. De plus, sa formulation variationnelle se prêtait à un algorithme de minimisation alternée qui consiste à un pas de temps donné à minimiser par rapport à  $\mathbf{u}$  à  $D$  fixé, puis par rapport à  $D$  à  $\mathbf{u}$  fixé, jusqu'à convergence. Dans le cas du modèle AT1 où l'énergie est une fonction quadratique (et convexe) de chaque champ pris séparément (alors que l'énergie n'est pas une fonction convexe du couple  $(\mathbf{u}, D)$ ), ces problèmes de minimisation admettent une solution unique et sont faciles à implémenter : pour  $\mathbf{u}$  cela revient à résoudre un problème d'élasticité linéaire, alors que pour  $D$  il faut tenir compte de la condition d'irréversibilité ce qui conduit à la minimisation d'une fonctionnelle quadratique sous contrainte. De plus, c'est un algorithme de descente, l'énergie décroissant à chaque itération, ce qui n'assure pas la convergence vers un état stable mais s'avère très robuste en pratique. C'est dans cet esprit de se servir des modèles d'endommagement à gradient pour régulariser le modèle de Griffith que les premiers tests numériques ont été faits et ont permis de mettre en valeur la capacité de l'approche à rendre compte de trajets de fissuration complexes [11–13].

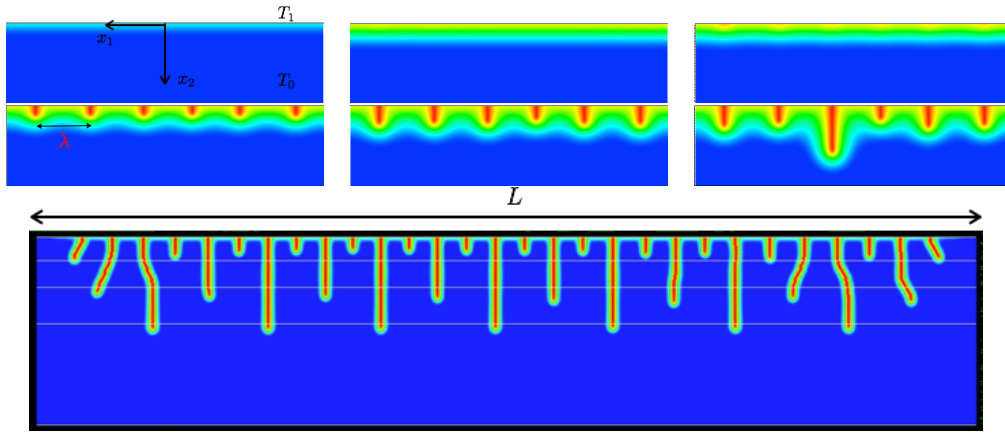
Toutefois, en procédant ainsi et en considérant que la longueur  $\ell$  est purement numérique on perd la possibilité de rendre compte correctement de la nucléation des fissures puisqu'alors la contrainte critique  $\sigma_c$  tend vers l'infini comme  $1/\sqrt{\ell}$  et on retombe sur les défauts de la théorie de Griffith. On passe à côté de l'opportunité qui nous est offerte d'en combler une des lacunes, alors que c'était la vocation première de la mécanique de l'endommagement et que l'on a désormais tous les ingrédients pour y parvenir. Il faut donc changer de point de vue et considérer que le modèle d'endommagement est le modèle physique et que le modèle de Griffith n'en est qu'une approximation « aux grandes échelles ». Ce faisant, la longueur  $\ell$  devient une longueur caractéristique du « matériau » (après les changements de variable et les normalisations qui ont conduit à la forme finale du modèle d'endommagement). Dans le cas du modèle AT1, cette longueur se déduit donc de la mesure du module d'Young du matériau sain, de la densité d'énergie de surface  $G_c$  et de la contrainte uniaxiale maximale  $\sigma_c$  que le matériau peut supporter :

$$\ell = \frac{3G_c E_0}{8\sigma_c^2}.$$

Cette longueur étant désormais fixée, on ne peut plus utiliser directement le résultat de Gamma-convergence pour faire le lien avec la théorie de Griffith. Toutefois, en considérant des structures dont la taille caractéristique  $L$  est grande devant la longueur caractéristique du matériau  $\ell$ , on introduit le petit paramètre  $\ell/L$  dans le problème d'évolution de l'endommagement et le lien avec la théorie de Griffith réapparaît [14, 36].

Le problème du choc thermique traité avec ce type de modèles à gradient en montre toute la richesse et la pertinence. Rappelons brièvement les points marquants qui sont développés dans [15, 16]. On se place en contraintes planes et on considère une éprouvette rectangulaire de largeur  $L$  dont la température est  $T_0$ . Elle est soumise à un choc thermique à partir de l'instant  $t = 0$ , le bord supérieur  $x_2 = 0$  étant dès lors maintenu à la température  $T_1 < T_0$ . Par diffusion thermique et en supposant que l'endommagement ne perturbe pas cette propagation,

le chargement est donc donné par le champ de déformation thermique dépendant du temps  $\boldsymbol{\varepsilon}_t^0 = \alpha(T_1 - T_0)\text{Erfc}\left(\frac{x_2}{2\sqrt{kt}}\right)\mathbf{I}$  où  $\alpha$  et  $k$  sont les coefficients de dilatation et de diffusion thermiques, Erfc étant la fonction d'erreur complémentaire. Le déplacement normal  $u_1$  des bords latéraux  $x_1 = \pm L/2$  étant bloqué, ce refroidissement induit une contrainte de traction  $\sigma_{11}$  dans le matériau qui, s'il restait élastique, vaudrait  $\sigma_T = E_0\alpha(T_0 - T_1)$  en  $x_2 = 0$ . Par conséquent si le choc thermique est assez grand, *i.e.* si la contrainte  $\sigma_T$  est plus grande que la contrainte critique  $\sigma_c$  du matériau, alors le bord supérieur de l'éprouvette va s'endommager dès l'instant 0. En se plaçant dans cette situation, on décrit dans la figure 2 ci-dessous l'évolution de l'endommagement prédit par l'algorithme de minimisation alternée en utilisant le modèle AT1 avec un maillage triangulaire non structuré et en partant d'une éprouvette saine.



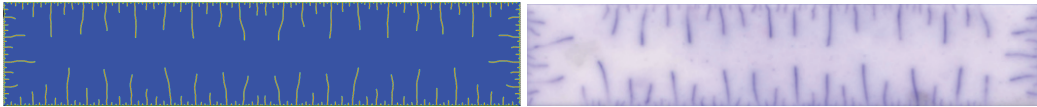
**FIGURE 2.** Différentes phases de l'évolution de l'endommagement lors du choc thermique lorsque ce choc est suffisamment important : (i) L'endommagement s'initie dès l'instant 0 sur le bord supérieur de l'échantillon  $x_2 = 0$ , puis se propage progressivement vers l'intérieur tout en restant uniforme en  $x_1$  jusqu'à un instant critique où apparaît une bifurcation avec un mode de bifurcation périodique; (ii) L'endommagement devient dépendant de  $x_1$  et tout en augmentant se localise progressivement au centre de chaque période pour donner finalement naissance à des fissures; (iii) Une fois que le réseau de fissures a été établi, et que leur longueur et leur espacement sont suffisamment grands par rapport à la longueur caractéristique du matériau  $\ell$ , ces fissures se propagent en suivant pratiquement la loi de Griffith : elles avancent en reproduisant toujours le même profil parabolique d'endommagement qui correspond à une énergie dissipée  $G_c$  par unité de longueur. On observe un phénomène de doublement de période à intervalles réguliers : une fissure sur deux s'arrêtant alors que la voisine continue à se propager.

Ces résultats appellent quelques commentaires :

- (1) C'est la présence d'une contrainte critique qui déclenche le processus d'endommagement.
- (2) La fin de la première phase est donnée par un problème de bifurcation, la solution uniforme en  $x_1$  cessant alors d'être unique (grâce au caractère adoucissant du modèle d'endommagement). Ce problème de bifurcation est traité analytiquement dans [16] sous l'hypothèse que la taille de l'éprouvette  $L$  est grande devant la longueur caractéristique du matériau  $\ell$ . On montre alors, par minimisation d'un quotient de Rayleigh, que le mode de bifurcation du champ d'endommagement est périodique (en fait sinusoïdal) en  $x_1$  avec une période  $\lambda$  qui est proportionnelle à  $\ell$ , le coefficient de proportionnalité

ne dépendant que du coefficient de Poisson et de l'intensité du choc thermique par le rapport  $\sigma_T/\sigma_c$ . La présence des termes en gradient d'endommagement dans l'énergie est évidemment essentielle. Si l'on ne considérait que des modèles locaux, il y aurait bifurcation dès l'instant 0 avec un mode de bifurcation arbitraire. Ce sont les termes de régularisation qui forcent la périodicité avec une période finie.

- (3) Dans la deuxième phase, celle durant laquelle les fissures se mettent en place par localisation contrôlée de l'endommagement, tous les paramètres du modèle interviennent, aussi bien  $\sigma_c$  que  $\ell$ , on ne peut pas encore se contenter d'utiliser uniquement le modèle de Griffith. C'est évidemment la phase la plus délicate à résoudre. Ce n'est que dans la dernière phase que le modèle de Griffith prévaut [14], seul  $G_c$  joue un rôle,  $\sigma_c$  non. Il est d'ailleurs remarquable de constater que l'on a besoin ni d'invoquer la minimisation globale, ni de passer à la limite pour établir un lien fort entre les modèles d'endommagement à gradient et le modèle de Griffith durant cette dernière phase.
- (4) Il est tout aussi remarquable de constater que l'algorithme de minimisation alternée arrive à capter tous les phénomènes importants : il capte l'instant de bifurcation et le mode de bifurcation de la fin de la première phase, il fait avancer les fissures suivant la loi de Griffith durant la troisième phase et il capte le phénomène de doublement de période qui nécessite un « dialogue » entre les fissures.



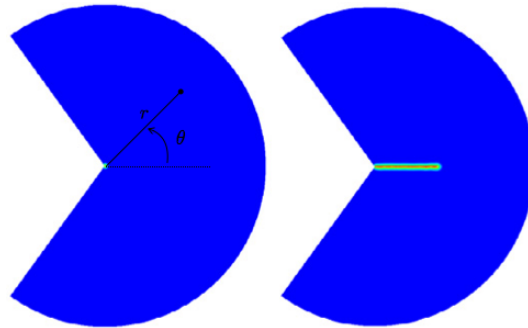
**FIGURE 3.** Comparaison entre les résultats numériques (à gauche) et les essais expérimentaux (à droite, issus de [17]) pour une éprouvette de céramique, dont les dimensions sont (largeur  $L=50$  mm, hauteur = 9.8 mm, épaisseur = 1 mm), soumise à un choc thermique de 380 °C. La longueur caractéristique  $\ell$  est obtenue à partir des mesures de  $E_0$ ,  $\sigma_c$  et  $G_c$ , ce qui donne ici  $\ell = 46\mu\text{m}$ . C'est  $\ell$  qui fixe la taille du maillage de façon à ce que l'on puisse calculer précisément les profils d'endommagement, ce qui conduit ici à un nombre d'éléments de quelques millions.

La comparaison avec des résultats expérimentaux est esquissée dans la figure 3, cf. [15] pour plus de détails. Notons toutefois que cette comparaison ne peut se faire que pour la troisième phase, celle où le réseau des fissures est établi, faute de résultats expérimentaux assez précis pour ce qui concerne la phase de nucléation. Il n'en demeure pas moins que ce modèle d'endommagement qui ne comporte que quatre paramètres matériau (en comptant le coefficient de Poisson) est capable de gérer toutes les phases de développement de l'endommagement en partant d'une éprouvette saine et sans aucune hypothèse *a priori* sur l'évolution.

Le problème de la nucléation d'une fissure en fond d'entaille traité en considérant que le modèle d'endommagement à gradient est le modèle physique et comparé avec des résultats expérimentaux va constituer un bon test sur la capacité de ces modèles à être quantitativement prédictifs sur l'occurrence de ce phénomène essentiel pour l'Ingénieur. Considérons donc à nouveau une éprouvette entaillée comme celle de la figure 1, initialement saine et soumise à un chargement croissant (ici à déplacement contrôlé, mais on obtiendrait la même chose à force contrôlée). Nous avons vu que ni le modèle de Griffith, ni les modèles d'endommagement locaux n'étaient aptes à rendre compte correctement de la nucléation d'une fissure en fond d'entaille, le premier ne prévoyant aucune nucléation parce qu'il exige un apport d'énergie trop grand, les deuxièmes prédisant la nucléation immédiate parce qu'ils n'exigent aucun apport d'énergie du tout. Utilisons donc le modèle AT1, en prenant pour longueur caractéristique  $\ell$  celle issue



des mesures de  $E_0$ ,  $\sigma_c$  et  $G_c$  lors des confrontations avec les résultats expérimentaux comme on l'avait fait pour le problème du choc thermique. Plaçons-nous dans la situation où cette longueur  $\ell$  est petite devant la longueur caractéristique  $L$  de l'éprouvette entaillée, ce qui est généralement le cas en pratique. On peut alors utiliser une approche à deux échelles qui simplifie le calcul de la charge de nucléation d'une fissure macroscopique (quantité qui est la seule qui nous intéresse ici). Jusqu'à cette charge de nucléation, si on prend pour longueur de référence  $\ell$ , la zone endommagée va rester localisée en fond d'entaille et en se plaçant assez loin du fond on devrait retrouver une réponse élastique. Par conséquent, en se plaçant à l'échelle macroscopique de la structure, on obtient une bonne approximation du champ de déplacement par un calcul purement élastique. Ce champ de déplacement élastique présente une singularité de la forme :  $\mathbf{u}^{\text{sing}}(r, \theta) = K r^\lambda \mathbf{U}(\theta)$ , où l'exposant de la singularité  $\lambda \in (1/2, 1)$  et la fonction angulaire normalisée sont connus pour un angle d'entaille donnée, alors que le facteur d'intensité des contraintes généralisé  $K$  est une quantité globale dépendant de la géométrie et du chargement. On peut donc déduire du calcul élastique la valeur  $K_t$  de  $K$  pour une intensité  $t$  du chargement (la relation entre  $K_t$  et  $t$  est évidemment linéaire en  $t$ ). En se plaçant maintenant au voisinage du fond d'entaille et en utilisant  $\ell$  comme échelle de longueur, on devrait retrouver le champ singulier précédent comme approximation du champ des déplacements à l'infini (à cette échelle). On est donc amené à résoudre un problème d'endommagement qui est posé sur un secteur angulaire infini dans lequel les bords de l'entaille sont libres alors que le déplacement à l'infini est donné par la forme de la singularité, le facteur  $K$  jouant le rôle de paramètre de chargement pour ce problème local. Ce problème ne dépend que de l'angle d'entaille et du modèle d'endommagement, il est indépendant du reste de la structure et peut donc être résolu une fois pour toutes.



**FIGURE 4.** Zones endommagées calculées en fond d'entaille juste avant et juste après la valeur critique  $K_c$  du facteur d'intensité des contraintes généralisé.

Le problème est résolu numériquement sur un secteur angulaire de rayon fini  $R$  grand devant  $\ell$ , en imposant le déplacement  $\mathbf{u} = K R^\lambda \mathbf{U}(\theta)$  en  $r = R$  avec  $K$  comme paramètre de chargement croissant depuis 0. Les calculs sont faits avec les modèles AT1 et AT2 en utilisant l'algorithme de minimisation alternée pour différents angles d'entaille. Typiquement, on observe une réponse comme celle qui est décrite figure 4. Tant que  $K$  reste en dessous d'une valeur critique  $K_c$  (dépendant de l'angle d'entaille  $\omega$ ), la zone endommagée reste confinée en fond d'entaille. Puis brusquement, aussitôt que  $K$  dépasse la valeur  $K_c$ , une bande endommagée de taille de l'ordre de  $R$ , avec  $D = 1$  au centre, se développe en fond d'entaille. Ce saut de la zone endommagée est caractéristique d'un point limite (alors qu'il s'agissait d'un point de bifurcation dans le choc thermique) : il faudrait diminuer  $K$  lorsqu'il a atteint  $K_c$  tout en essayant de contrôler la taille de la zone endommagée pour obtenir une réponse « continue ». Toutefois, seule la valeur de  $K_c$  est intéressante car caractéristique de l'entaille. En effet, la longueur de la fissure

créée lors du saut est une quantité globale qui dépend de la géométrie de toute l'éprouvette et de son chargement. La valeur fournie par le calcul effectué sur le secteur angulaire de taille finie n'est pas représentative. Une fois que la valeur  $K_c$  a été obtenue, on déduit du calcul élastique fait sur la structure complète la valeur du chargement critique  $t_c$  à partir duquel la fissure macroscopique apparaît. C'est cette valeur de  $t_c$  calculée qui est comparée aux valeurs expérimentales. Ceci a été fait pour une série de matériaux, pour plusieurs types d'éprouvette et pour une famille de valeurs de demi-angle d'entaille  $\omega$  allant de 0 (cas d'une fissure), à  $\pi/2$  (bord droit). L'accord est toujours excellent, cf. [18], et comme cette valeur de  $t_c$  fait clairement intervenir tous les paramètres du modèle d'endommagement le test est probant : l'approche a réussi là où les autres avaient jusqu'ici échoué. Notons que ce problème a été traité avec exactement le même modèle que celui qui a été utilisé dans le choc thermique, ce qui aurait tendance à prouver que l'on n'a pas besoin d'invoquer des critères spécifiques (qui d'ailleurs parfois relèvent de la pure science-fiction) pour expliquer ce qui est observé dans ces différentes situations : un critère de stabilité et un bilan d'énergie faisant intervenir une contrainte critique et une énergie de surface suffisent.

### 3. Bilan et perspectives

Essayons de faire un premier bilan en s'appuyant sur les discussions et les présentations qui ont précédé. La mécanique de l'endommagement via l'approche variationnelle et les modèles à gradient est capable, mais dans un cadre très restreint jusqu'ici, de traiter le problème complet de la nucléation des fissures jusqu'à leur propagation et la rupture complète, palliant ainsi les défauts majeurs de la théorie de Griffith tout en restant en accord avec elle lorsque celle-ci fonctionne. De plus, cette approche s'appuie sur une formulation du problème d'évolution qui est basée sur les principes physiques généraux d'irréversibilité, de stabilité et de bilan d'énergie, ce qui a permis d'obtenir des résultats mathématiques importants et qui constituera un avantage certain lorsqu'il s'agira d'élargir son cadre d'application. Sa facilité de mise en oeuvre alliée à sa capacité à rendre compte de phénomènes variés et complexes sans changer de modèle, ce qui paraissait jusqu'alors impossible, en a fait incontestablement son succès. Il suffit pour s'en convaincre de compter le nombre d'articles qui paraissent chaque semaine dans les revues spécialisées et qui comportent les mots clés *fracture* et *phase field* (car la communauté des physiciens a réussi à imposer sa terminologie en occultant le mot endommagement, la communauté des mécaniciens ayant finalement cédé à cet affichage plus médiatique en renonçant à faire valoir sa primauté conceptuelle pour ce qui concerne la rupture). (Si l'on en croit le Web of Science, ce nombre s'élevait à 1 136 pour la seule année 2021.) Peut-on pour autant parler de victoire définitive, les modèles d'endommagement à gradient s'imposant comme les seuls capables de traiter le problème complet de la rupture? Rien n'est moins sûr comme le fera apparaître la discussion qui suivra sur l'élargissement de son cadre d'application. Pour préparer cette discussion, revenons sur la construction des modèles à gradient et des ingrédients introduits.

Pour qu'ils fonctionnent dans le cadre quasi-statique, isotrope et fragile, on a vu qu'un modèle comme AT1 qui ne contient que quatre paramètres matériaux suffit :  $E_0$ ,  $\nu$  (qui est supposé invariant),  $\sigma_c$  et  $G_c$ . (Dans le cas de chargement thermique, il faut y ajouter le coefficient de dilatation qui est également supposé invariant.) Mais évidemment des choix implicites ont été faits comme celui de l'invariance du coefficient de Poisson et du coefficient de dilatation : ainsi l'exposant 2 dans le facteur  $(1 - D)^2$  qui affecte la rigidité, ou encore la dépendance quadratique en le gradient d'endommagement. Ces choix ont été essentiellement guidés par des soucis de simplicité de mise en oeuvre. Comment les justifier plus solidement ou comment procéder s'il s'avère qu'il faut les abandonner? On se heurte ici clairement au défaut originel de la mécanique

de l'endommagement : l'abandon de son lien explicite avec les mécanismes physiques sous-jacents. Quand on va aborder la question de leur extension à un cadre plus général, seules des considérations phénoménologiques pourront servir de critère discriminant.

Commençons par considérer le cas de matériaux fragiles « incompressibles ». Comme il a été judicieusement remarqué dans [37], on ne peut plus utiliser un modèle comme AT1 ou tout autre modèle qui suppose que le coefficient de Poisson reste constant, car dans ce cas un matériau initialement incompressible restant toujours incompressible son énergie élastique ne dépendrait jamais de la pression hydrostatique et donc le critère d'endommagement qui s'en déduit par dérivation ne pourrait pas en dépendre. Or cette dépendance est essentielle si l'on veut expliquer des résultats expérimentaux comme ceux de l'essai de Gent–Park (cf. [37]). Si l'on veut rester dans un cadre variationnel, il faut donc faire dépendre le coefficient de Poisson ou de façon équivalente le module de compressibilité de l'endommagement, ce qui d'un point de vue physique est tout à fait raisonnable puisqu'il est bien connu que si l'on introduit des microfissures dans un matériau incompressible le comportement effectif du matériau microfissuré est celui d'un matériau compressible. Donc choisissons par exemple pour énergie élastique duale la fonction  $\psi^*(\boldsymbol{\sigma}, D)$  des contraintes et de l'endommagement suivante :

$$\psi^*(\boldsymbol{\sigma}, D) = \frac{1}{2}k(D)(Tr\boldsymbol{\sigma})^2 + \frac{1}{2}m(D)\boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D$$

où  $k(D)$  et  $m(D)$  sont des coefficients de souplesse (liés aux inverses des modules de compressibilité et de cisaillement),  $\boldsymbol{\sigma}^D$  étant le déviateur de  $\boldsymbol{\sigma}$ . Le critère d'endommagement exprimé en contraintes s'écrit alors (sans faire apparaître le terme en laplacien  $D$  et en conservant une dépendance linéaire en  $D$  pour la densité d'énergie dissipée  $w(D) = w_1 D$ ) :

$$\frac{1}{2}k'(D)(Tr\boldsymbol{\sigma})^2 + \frac{1}{2}m'(D)\boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D \leq w_1.$$

Par conséquent, si on choisit la fonction  $k(D)$  de façon à ce que  $k(0) = 0$  et  $k'(0) > 0$ , on aura construit un modèle dans lequel un matériau initialement incompressible deviendra compressible et dont le critère d'endommagement dépend de la pression. On n'est pas obligé d'abandonner le cadre variationnel. Est-ce le bon choix? Il en est fait un totalement différent dans [37], les auteurs préférant abandonner le cadre confortable d'une approche variationnelle. Une position aussi radicale est-elle nécessaire?

De façon plus générale, si on suppose le matériau linéairement élastique à endommagement fixé, alors le critère d'endommagement est nécessairement quadratique en contraintes ou en déformation et donc implique une symétrie de comportement en traction et en compression. C'est manifestement contraire à ce qui est observé. Si l'on veut rester dans le cadre variationnel, il faut donc envisager des potentiels élastiques non quadratiques en  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ou en  $\boldsymbol{\sigma}$ . On peut les prendre homogènes de degré deux de façon à conserver un comportement directionnel linéaire. C'est par exemple ce qui avait été proposé dans [38] où l'on prenait un potentiel élastique de la forme

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, D) = \frac{K_0}{2}(Tr^-\boldsymbol{\varepsilon})^2 + (1-D)^2 \left( \frac{K_0}{2}(Tr^+\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}^D \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^D \right)$$

où  $Tr^\pm \boldsymbol{\varepsilon} = (|Tr\boldsymbol{\varepsilon}| \pm Tr\boldsymbol{\varepsilon})/2$ , ce qui rend le comportement asymétrique car dépendant du signe de  $Tr\boldsymbol{\varepsilon}$ . Mais une infinité d'autres choix sont possibles. Réciproquement, étant donné un critère de résistance « raisonnable » donné, peut-on construire un potentiel élastique « endommageable » redonnant ce critère? Ce genre de questions est abordé dans [39] et les auteurs y étudient un certain nombre de cas en restant toujours dans un cadre variationnel.

On peut utiliser un modèle d'endommagement à gradient comme le modèle AT1 en dynamique, en conservant pour l'essentiel sa structure variationnelle. Il suffit d'ajouter les termes d'inertie dans les équations d'équilibre [36, 40]. C'est ce qui a été fait dans [40] pour modéliser la fragmentation dynamique d'un anneau circulaire en extension uniforme. Ce problème est un

des problèmes fondamentaux pour étudier tant expérimentalement que théoriquement la fragmentation des matériaux. Il a la particularité, comme l'essai de traction simple en quasi-statique, de présenter une forte symétrie, tous les points matériels se trouvant dans la même situation. (Il n'existe de ce fait à ce jour aucun modèle « déterministe » entièrement satisfaisant capable de prédire le nombre de fragments.) Mais alors qu'en quasi-statique on montre facilement à partir du critère de stabilité que la réponse homogène est instable dès l'apparition du premier endommagement (pourvu que la structure soit suffisamment grande par rapport à la longueur caractéristique du matériau), ce résultat n'est plus vrai en dynamique. Bien que la démonstration précise n'ait jamais été faite, il semble que la solution dynamique soit unique et donc que pour le problème de l'anneau, en l'absence d'imperfection, la solution axi-symétrique soit la seule possible. (C'est le fait que les méthodes classiques de recherche de bifurcation échouent qui fait penser que la solution est unique.) Par conséquent, l'endommagement devrait rester uniforme et on ne devrait pas voir de fragmentation. En fait, quand on traite numériquement le problème, les inévitables erreurs d'arrondi induisent des imperfections et au bout d'un certain temps (dépendant des paramètres de l'essai) la solution homogène laisse place à une solution où l'endommagement se localise pour finalement donner lieu à un certain nombre de fragments. Ce nombre est pour une large part indépendant de la vitesse d'expansion et essentiellement donné par le rapport entre le périmètre de l'anneau et la longueur caractéristique du matériau. Ces résultats numériques sont confirmés par une étude de stabilité dynamique où on détermine l'imperfection la plus défavorable et le temps qu'elle met pour atteindre une amplitude critique. Les essais expérimentaux ne confirment que partiellement ces résultats, l'indépendance par rapport à la vitesse d'expansion n'étant vraie que pour des valeurs assez faibles de celle-ci. Rendre compte de cette dépendance exigerait de changer le modèle en y incluant éventuellement des effets visqueux. On voit donc que l'utilisation de tels modèles en dynamique va demander un gros travail de réflexion tant du point de vue théorique que dans le choix des ingrédients à incorporer dans les modèles.

Le modèle de rupture fragile de Griffith ne permet pas de rendre compte de la fatigue, *i.e.* de la propagation de fissures sous chargement cyclique de faible amplitude, car il donne lieu à une adaptation en un cycle (la fissure peut évoluer durant le premier cycle mais plus après). C'est ce qui a obligé les ingénieurs à proposer des lois empiriques de fatigue, telle la loi de Paris qui s'appuie sur la notion de singularités des contraintes et de taux de restitution d'énergie mais qui abandonne le critère de Griffith au profit d'une loi d'évolution de la fissure cycle par cycle. Malheureusement les modèles d'endommagement fragiles comme AT1 possèdent le même défaut. Il manque dans ces modèles une variable « cumulative » qui ferait croître l'endommagement jusqu'à 1 après un certain nombre de cycles même si l'amplitude du chargement est faible. C'est en partant de ce constat et en faisant fonctionner cette idée dans [41] que les auteurs sont arrivés à rendre compte de la fatigue (et même à retrouver des lois de Paris) en utilisant des modèles d'endommagement à gradient enrichis d'une variable interne cumulative. Dans cette approche, ce sont clairement les considérations phénoménologiques qui ont prévalu : que représente cette variable cumulative et d'où vient-elle sont des questions qui exigeraient une analyse des mécanismes de dégradation aux petites échelles pour pouvoir y répondre.

Si l'on considère que l'objet de la mécanique de la rupture ductile est d'étudier la propagation de fissures en interaction forte avec un comportement élasto-plastique du matériau (par opposition aux situations où la zone plastique reste confinée en fond de fissure et qui peut être traitée par simple ajout de termes correctifs dans la loi de Griffith) et si l'on veut utiliser des modèles d'endommagement pour rendre compte de la nucléation des fissures, il faut nécessairement introduire un couplage entre ces deux phénomènes dissipatifs. Il s'avère que cela peut se faire facilement tout en restant dans un cadre variationnel, car les deux phénomènes séparément peuvent être traités avec cette approche. Considérons pour simplifier le cas où la loi de plasti-

cité est une loi standard régie par le critère de plasticité de Von Mises, sans écrouissage, avec la règle de normalité pour la loi d'écoulement plastique. Dans ce cas, la densité d'énergie du matériau (somme de l'énergie élastique et de l'énergie dissipée) est

$$W = \frac{1}{2}A(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \sigma_Y p,$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  est la déformation plastique,  $p$  la déformation plastique cumulée et  $\sigma_Y$  la contrainte seuil de Von Mises. La façon la plus simple d'introduire un couplage est de faire dépendre le tenseur de rigidité et la contrainte seuil de l'endommagement, les deux devenant des fonctions décroissantes de  $D$ , cf. [42, 43]. (Mais on pourrait bien sûr faire des choix différents de couplage.) En ajoutant le terme d'énergie dissipée spécifique à l'endommagement, on obtient ainsi une densité d'énergie qui s'écrit

$$W = \frac{1}{2}A(D)(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \sigma_Y(D)p + w(D) + w_1 \ell^2 \nabla D \cdot \nabla D.$$

En utilisant la condition d'irréversibilité et le critère de stabilité, on en déduit deux critères, un pour chaque variable dissipative. Celui pour la plasticité est simplement le critère de Von Mises avec le seuil dépendant de l'endommagement :  $\sqrt{3\boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\sigma}^D}/2 \leq \sigma_Y(D)$ , alors que le critère d'endommagement fait apparaître un couplage avec la plasticité du fait de la dépendance de  $\sigma_Y$  en  $D$ . Exprimé en contraintes, il s'écrit

$$\frac{1}{2}S'(D)\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} + 2w_1 \ell^2 \Delta D \leq w'(D) + \sigma'_Y(D)p,$$

S désignant le tenseur de souplesse. (En utilisant le bilan d'énergie, on obtient de plus la règle de normalité pour l'écoulement plastique et une condition de consistance pour  $\dot{D}$ .) On voit donc qu'il y a interaction et compétition entre les deux critères (ce qui rend cette approche totalement différente de ce qui est habituellement fait en rupture ductile). Du fait de l'adoucissement aussi bien pour l'endommagement que pour le seuil de plasticité, on obtient le phénomène remarquable suivant : la localisation de l'endommagement (contrôlée par les termes en gradient) force la déformation plastique à se concentrer au centre des bandes d'endommagement créant ainsi des bandes de cisaillement où les déplacements sont discontinus alors que les contraintes ne sont pas encore nulles. Autrement dit on crée des fissures « cohésives ». La loi cohésive peut se calculer, c'est donc un sous-produit du modèle d'élasto-plasticité endommageable, cf. [42, 43]. Il a été montré dans [44], par Gamma-convergence, que ce modèle convergerait (quand la longueur caractéristique tend vers 0 et moyennant une mise à l'échelle appropriée des paramètres) vers un modèle de rupture cohésif (du type Barenblatt donc, la densité d'énergie de surface dépendant du saut de déplacement). Même si la démonstration est faite dans le cadre restreint de problèmes anti-plan avec minimisation globale sans prise en compte de l'irréversibilité, le résultat n'en est pas moins remarquable et montre toute la richesse de l'approche. Notons d'ailleurs que ce modèle contenant en la déformation plastique cumulée une variable cumulative peut, sans ajout supplémentaire, rendre compte de la fatigue. Comme de plus sa mise en oeuvre numérique ne présente aucune difficulté car on peut toujours procéder par minimisation alternée sur les 3 champs  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, D)$  (la minimisation par rapport à  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  étant une simple projection), on peut s'attendre à ce qu'il connaisse autant de succès que son homologue sans plasticité, vu toutes les possibilités qu'il offre.

Il ressort de ce parcours rétrospectif et anticipatif de la mécanique de l'endommagement qu'elle fonctionne, ce qui était après tout ce que l'on attendait d'elle. Mais on ne peut pas s'en contenter car elle le fait essentiellement par procuration : on insère la variable  $D$  qui cristallise notre ignorance aux quatre coins des lois constitutives (ou de l'énergie si on s'en tient à une approche variationnelle) au gré des besoins. À charge à elle et à ses excroissances d'assurer que les prédictions des modèles sont conformes à l'observation. On peut voir dans cette souplesse et cette capacité d'adaptation une force de cette approche. Mais elle risque de devenir une faiblesse,

si par confort ou par paresse on oublie que la mécanique de l'endommagement est née d'un aveu d'impuissance à décrire la genèse et la croissance des défauts à petite échelle. Il faut résolument s'attaquer à ce problème. Les modèles cohésifs sont une voie possible car ils sont physiquement bien étayés (tout du moins tant qu'on n'aborde pas la question de l'irréversibilité) et possèdent les ingrédients requis avec une contrainte critique et une longueur caractéristique. Un certain nombre de résultats fondamentaux déjà établis montrent que cette voie mérite d'être revisitée.

En conclusion, la rupture est probablement le phénomène le plus important mais aussi le plus complexe que l'on rencontre en mécanique des solides, comprendre les lois qui le régissent doit être une priorité du mécanicien. Il n'a fait qu'un bout du chemin. Il doit mener ce travail à caractère fondamental à son terme sans en laisser la charge à d'autres s'il veut que sa discipline conserve son rang de discipline fondamentale et s'il ne veut pas que l'on fasse appel à lui que comme le technologue de service.

### Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

### Remerciements

Cet article est rédigé en français pour plusieurs raisons : (i) parce que la revue l'autorise. Qu'elle en soit ici remerciée; (ii) parce que c'est la langue dans laquelle l'auteur a le plus de chances d'exprimer clairement sa pensée et d'éviter les ambiguïtés. (iii) parce qu'il n'y a pas de raison que ce soit toujours les mêmes qui soient frustrés; (iv) parce que ce texte s'adresse en priorité à la communauté des mécaniciens français qui a joué un rôle important dans l'évolution des mécaniques de la rupture et de l'endommagement. Parfois pour le meilleur, parfois pour le pire.

### Références

- [1] A. A. Griffith, « The Phenomena of Rupture and Flow in Solids », *Philos. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A* **221** (1921), p. 163-198.
- [2] G. I. Barenblatt, « The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture », *Advances in Applied Mechanics*, vol. 7, Elsevier, 1962, p. 55-129.
- [3] L. M. Kachanov, *Introduction to continuum damage mechanics*, Mechanics of Elastic Stability, vol. 10, Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
- [4] J.-J. Marigo, « Constitutive relations in Plasticity, Damage and Fracture Mechanics based on a Work Property », *Nucl. Eng. Des.* **114** (1989), n° 3, p. 249-272.
- [5] L. Ambrosio, V. M. Tortorelli, « Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functional via Gamma-Convergence », *Commun. Pure Appl. Math.* **43** (1990), n° 8, p. 999-1036.
- [6] L. Ambrosio, V. M. Tortorelli, « On the approximation of free discontinuity problems », *Boll. Unione Mat. Ital., VII. Ser., B* **6** (1992), n° 1, p. 105-123.
- [7] A. Mielke, « Evolution of rate-independent systems », in *Evolutionary equations. Vol. II*, Handbook of Differential Equations, North-Holland, 2005, p. 461-559.
- [8] K. Pham, J.-J. Marigo, « Approche variationnelle de l'endommagement : I. Les concepts fondamentaux », *C. R. Méc. Acad. Sci. Paris* **338** (2010), n° 4, p. 191-198.
- [9] K. Pham, J.-J. Marigo, « Approche variationnelle de l'endommagement : II. Les modèles à gradient », *C. R. Méc. Acad. Sci. Paris* **338** (2010), n° 4, p. 199-206.
- [10] J.-J. Marigo, C. Maurini, K. Pham, « An overview of the modelling of fracture by gradient damage models », *Meccanica* **51** (2016), n° 12, p. 3107-3128.
- [11] B. Bourdin, G. A. Francfort, J.-J. Marigo, « The variational approach to fracture », *J. Elasticity* **91** (2008), n° 1-3, p. 5-148.
- [12] B. Bourdin, G. A. Francfort, J.-J. Marigo, « Numerical experiments in revisited brittle fracture », *J. Mech. Phys. Solids* **48** (2000), n° 4, p. 797-826.
- [13] B. Bourdin, « Numerical implementation of the variational formulation for quasi-static brittle fracture », *Interfaces Free Bound.* **9** (2007), n° 3, p. 411-430.

- [14] P. Sicsic, J.-J. Marigo, « From gradient damage laws to Griffith's theory of crack », *J. Elasticity* **113** (2013), n° 1, p. 55-74.
- [15] B. Bourdin, J.-J. Marigo, C. Maurini, P. Sicsic, « Morphogenesis and Propagation of Complex Cracks Induced by Thermal Shocks », *Phys. Rev. Lett.* **112** (2014), n° 1, article no. 014301 (5 pages).
- [16] P. Sicsic, J.-J. Marigo, C. Maurini, « Initiation of a periodic array of cracks in the thermal shock problem : a gradient damage modeling », *J. Mech. Phys. Solids* **63** (2014), p. 256-284.
- [17] Y. Shao, Y. Zhang, X. Xu, Z. Zhou, W. Li, B. Liu, « Effect of crack pattern on the residual strength of ceramics after quenching », *J. Am. Ceram. Soc.* **94** (2011), n° 9, p. 2804-2807.
- [18] E. Tanné, T. Li, B. Bourdin, J.-J. Marigo, C. Maurini, « Crack nucleation in variational phase-field models of brittle fracture », *J. Mech. Phys. Solids* **110** (2018), p. 80-99.
- [19] G. R. Irwin, « Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate », *J. Appl. Mech.* **24** (1957), n° 3, p. 361-364.
- [20] G. A. Francfort, J.-J. Marigo, « Stable damage evolution in a brittle continuous medium », *Eur. J. Mech., A, Solids* **12** (1993), n° 2, p. 149-189.
- [21] G. A. Francfort, J.-J. Marigo, « Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem », *J. Mech. Phys. Solids* **46** (1998), n° 8, p. 1319-1342.
- [22] A. Chambolle, V. Crismale, « Existence of strong solutions to the Dirichlet problem for the Griffith energy », *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* **58** (2019), n° 4, article no. 136 (27 pages).
- [23] J. R. Rice, « A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks », *J. Appl. Mech.* **35** (1968), n° 2, p. 379-386.
- [24] J. R. Rice, « Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture », in *Fracture : An Advanced Treatise* (H. Liebowitz, éd.), Mathematical Fundamentals, vol. 2, Academic Press Inc., 1968, p. 191-311.
- [25] P. Destuynder, M. Djaoua, « Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile », *Math. Methods Appl. Sci.* **3** (1981), n° 1, p. 70-87.
- [26] J. Lemaître, J.-L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 1985.
- [27] S. Andrieux, Y. Bamberger, J.-J. Marigo, « A model of micro-cracked material for concretes and rocks », *J. Méc. Théor. Appl.* **5** (1986), n° 3, p. 471-513.
- [28] J.-J. Marigo, « Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids », *Eng. Fract. Mech.* **21** (1985), n° 4, p. 861-874.
- [29] J.-J. Marigo, « Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique », *C. R. Acad. Sci., Sér. IIA Earth Planet. Sci.* **292** (1981), n° 19, p. 1309-1312.
- [30] B. Halphen, N. Q. Son, « Sur les matériaux standards généralisés », *J. Méc., Paris* **14** (1975), p. 39-63.
- [31] G. Pijaudier-Cabot, Z. P. Bažant, « Non-local damage theory », *J. Eng. Mech.* **113** (1987), n° 10, p. 1512-1533.
- [32] J. Mazars, G. Pijaudier-Cabot, « From damage to fracture mechanics and conversely : a combined approach », *Int. J. Solids Struct.* **33** (1996), n° 20-22, p. 3327-3342.
- [33] A. Braides,  *$\Gamma$ -convergence for Beginners*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 22, Oxford University Press, 2002.
- [34] G. Dal Maso, F. Iurlano, « Fracture models as  $\Gamma$ -limits of damage models », *Commun. Pure Appl. Anal.* **12** (2013), n° 4, p. 1657-1686.
- [35] K. Pham, H. Amor, J.-J. Marigo, C. Maurini, « Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture », *Int. J. Damage Mech.* **20** (2011), n° 4, p. 618-652.
- [36] T. Li, J.-J. Marigo, « Crack tip equation of motion in dynamic gradient damage models », *J. Elasticity* **127** (2017), n° 1, p. 25-57.
- [37] A. Kumar, G. A. Francfort, O. Lopez-Pamies, « Fracture and healing of elastomers : A phase-transition theory and numerical implementation », *J. Mech. Phys. Solids* **112** (2018), p. 523-551.
- [38] H. Amor, J.-J. Marigo, C. Maurini, « Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact : Numerical experiments », *J. Mech. Phys. Solids* **57** (2009), n° 8, p. 1209-1229.
- [39] L. De Lorenzis, C. Maurini, « Nucleation under multi-axial loading in variational phase-field models of brittle fracture », *Int. J. Fract.* **237** (2022), n° 1-2, p. 61-81, Special Issue : Phase-Field Approaches in the 3rd Millennium.
- [40] A. G. Fischer, J.-J. Marigo, « Gradient damage models applied to dynamic fragmentation of brittle materials », *Int. J. Fract.* **220** (2019), n° 2, p. 143-165.
- [41] P. Carrara, M. Ambati, R. Alessi, L. de Lorenzis, « A framework to model the fatigue behavior of brittle materials based on a variational phase-field approach », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **361** (2020), article no. 112731 (29 pages).
- [42] R. Alessi, J.-J. Marigo, S. Vidoli, « Gradient Damage Models Coupled with Plasticity and Nucleation of Cohesive Cracks », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **214** (2014), n° 2, p. 575-615.
- [43] R. Alessi, J.-J. Marigo, S. Vidoli, « Gradient damage models coupled with plasticity : variational formulation and main properties », *Mech. Mater.* **80** (2015), p. 351-367.
- [44] G. Dal Maso, G. Orlando, R. Toader, « Fracture models for elasto-plastic materials as limits of gradient damage models coupled with plasticity : the antiplane case », *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* **55** (2016), n° 3, article no. 45 (39 pages).







---

Research article / *Article de recherche*

The French “Année de la Mécanique”: some views on recent advances in solid and fluid mechanics / *L'année de la mécanique : quelques points de vue sur des avancées récentes en mécanique des solides et des fluides*

## Principle of Virtual Work as Foundational Framework for Metamaterial Discovery and Rational Design

*Le principe des puissances virtuelles comme cadre de base pour la découverte et la conception rationnelle des métamatériaux*

Francesco dell'Isola<sup>Ⓢ,\*,a</sup> and Anil Misra<sup>Ⓢ,b</sup>

<sup>a</sup> Department of Civil, Construction-Architectural and Environmental Engineering (DICEEA) and International Research Center on Mathematics and Mechanics of Complex Systems (M&MoCS). Università degli Studi dell'Aquila. Via Giovanni Gronchi 18 - Zona industriale di Pile 67100, L'Aquila, Italy.

<sup>b</sup> The University of Kansas. Civil, Environmental and Architectural Engineering Department. 1530 W. 15th Street, Lawrence, KS 66045-7609, USA.

*E-mails:* francesco.dellisola@univaq.it (F. dell'Isola), amisra@ku.edu (A. Misra)

**Abstract.** Novel theories are needed for the discovery of innovative and exotic metamaterial and for their rational design. The current practice of mechanical analyses based upon moribund classical theories and experimental trial-error campaigns is caught in an inescapable vortex and illusion of inductive reasoning. The needed novel research paradigm is one in which the formulation of theoretical concepts precede their experimental validation. In the absence of theoretical understanding, the design experiments and collection of experimental evidence will remain unavoidably circumscribed. History of science can provide us guidance in the search for the needed powerful tools required for discovery. The principle of virtual work provides the necessary framework for development of theories that can lead to novel metamaterials, as it was the unifying principle which allowed the French-Italian School, headed by D'Alembert, Lagrange and Gabrio Piola, to found modern continuum mechanics. Based upon this framework we have conceived a metamaterial synthesis schema that exploits micro-macro identification traceable to the early days of the formulation of continuum theories for deformable solids. The schema is illustrated with application to metamaterials with pantographic and granular motifs based upon higher-gradient and higher-order theories.

---

\*Corresponding author

**Résumé.** La « Mécanique » Analytique a été une théorie controversée depuis sa formulation par Lagrange en 1788 et la controverse se poursuit jusqu'à nos jours : Truesdell déclare que la Mécanique doit être fondée sur le concept de « force ». Au contraire selon D'Alembert le seul principe unificateur est le Principe des Travaux Virtuels (PTV) : la force étant un concept dérivé, utile dans les applications. Ce débat épistémologique est-il inutile ? La mécanique est-elle aujourd'hui aussi fertile de problèmes théoriques et potentialités dans les applications technologiques ? En effet, la mécanique si basée sur le PTV s'avère être un outil puissant pour favoriser l'invention scientifique et l'avancement technologique : il rends possible, par exemple, la théorie moderne des méta-matériaux ou matériaux architecturés, c'est-à-dire, la théorie qui nous aide à « inventer » des matériaux qui « n'existent pas dans la nature et qui ont des propriétés à l'apparence magique » : donc l'approche épistémologique qui avait inspiré D'Alembert semble n'avoir encore épuisé sa capacité novatrice. En effet, le PTV permet d'homogénéiser le comportement des systèmes complexes et de formuler des théories macroscopiques prédictives du comportement « global » des microstructures qui forment les métamatériaux « exotiques ». La compréhension des résultats du débat épistémologique fondé sur la dichotomie force/travail nous offre un outil puissant pour concevoir et produire des matériaux « réels ». Parmi les infinies possibilités on signale les matériaux i) avec effet Poisson négatif ; ii) qui restent dans le régime élastique même en grandes déformations ; iii) qui se comportent, dans les petites déformations, comme des fluides et, en grandes déformations, comme des solides (pentamode materials) ; iv) avec une structure granulaire, qui ont un comportement chiral au niveaux macroscopique.

**Keywords.** metamaterials, energy methods, rational design, principle of virtual work, generalized continua, microstructure.

**Mots-clés.** métamatériaux, méthodes énergétiques, conception rationnelle, principe des travaux virtuels, Milieux continus généralisés, Microstructure.

*Manuscript received 20 August 2022, revised 11 November 2022, accepted 15 November 2022.*

## 1. Mechanics, the first Mathematized Theory in History of Science, is still a powerful tool for discovery

A metamaterial may be described as a “material which has been designed to meet a specific purpose governed by a desired specific behavior that is described by a given set of evolution equations” [1, 2]. The impact of the technological applications which are becoming possible because of the use of “exotic” metamaterials cannot be underestimated. Novel metamaterials are changing, just to give some examples, the engineering of bone and blood vessels prostheses [3], airplanes, automobiles, space vehicles and textiles [4, 5].

The discovery of new metamaterials and their design based upon an approach that exemplifies a “trial and error” procedure is expectedly unreliable and inefficient. Indeed, metamaterials have to be discovered through a process of synthesis founded upon sound theoretical reasoning combined with technological methods that can culminate in their fabrication and evaluation. In the theoretical and technological challenges that are to be faced in this synthesis process, an ancient theory, most likely the oldest mathematized theory ever conceived by humankind, plays a crucial role. This theory is Mechanics, albeit, for some readers, this circumstance may appear surprising. The field of Mechanics, to be generative of novel models and for being a powerful tool for discovery, must be founded upon the the principle of virtual work. This overarching principle can serve as the foundational theory that provides the pathway for establishing methodologies and material models that lead to rational design of innovative metamaterials.

We note, in this regard, that alternative postulation paradigms for mechanics are possible. Indeed, history teaches us that paradigm shifts in physical theories are occurring often. So one cannot exclude the possibility of scientific revolution in mechanics as well which could replace the principle of virtual work with another more general and widely encompassing paradigm. Although such a possibility cannot be excluded a priori, it is remarkable that the principle of virtual work has remain unchanged since the 3<sup>rd</sup> century BCE as a fundamental pillar of

mechanics and that no paradigmatic shift has occurred for thermodynamics which in principle remains unchanged since its foundation by Clausius.

Some of the concepts that we want to describe in this paper were defended in the presentations [6] (in French) and [7] (in English) as well as [8].

### 1.1. *Evolution in Energy Methods from Ancient Conceptions*

The antecedents of the principle of virtual work may be traced to the apocryphal text *Μηχανικά Προβλήματα* transmitted as part of the *Corpus Aristotelicum*. In this ancient treatise, whose compilation can be traced to Archytas of Tarentum [9], one can find 35 problems discussed in terms of few basic principles of motion along circular paths, weights and levers. It is argued by modern scholars that the goal of this treatise is to explain technological artefacts in terms of Aristotelian natural philosophy [10].

Although such attribution may appear rather curious given that the treatise predates Aristotle by a few centuries<sup>1</sup>, however, they are a tribute to the potency and endurance of the discussed principles<sup>2</sup>. It is interesting that the concepts associated to mechanics based upon motion is also found in the ancient *Vaiśeṣika* sutra of Kanada [12, 13]. A careful and intense investigation about the reciprocal influences and the emergence of certain similar patterns as well as divergences between Indian and Greek science and literature seems one of the most important, and unfortunately neglected, philological challenge to be initiated, ideally with the assistance of scholars steeped in these respective traditions.

A careful reading of pseudo-Aristotelian *Μηχανικά Προβλήματα* demonstrates how powerful are the rudiments of the principle of virtual work and concepts attributable later to Euclidean geometry, when conjunctly and systematically applied, to explain the functioning of machines.

The reader has to be warned: in the literature, the attribution to Archytas of Tarentum is not generally accepted, further, Diogenes Laertius talks about another Archytas who had written a book about mechanics. However, whoever was the author of *Μηχανικά*, any mechanician who reads it, cannot avoid to be surprised by its “modern” use of the mathematical modeling techniques in predicting physical phenomena. The style of the presentation and the clear underlying epistemological vision cannot be Aristotelian [14] and the attribution to Archytas of Tarentum may be debated as such vision seems to be too much Hellenistic, that is posterior of some centuries after Archytas. On the other side, as stated in <https://plato.stanford.edu/entries/archytas/>:

“Diogenes Laertius reports that Archytas was “the first to systematize mechanics by using mathematical first principles” (VIII 83 = A1), and Archytas is accordingly sometimes hailed by modern scholars as the founder of the science of mechanics.”

The *Μηχανικά Προβλήματα*, as such, may be counted amongst the most ancient examples of the unifying capacity of mathematical abstraction to model physical phenomena. In many epochs till modern time periods, the concepts articulated in it have been periodically either revived or abandoned in a cyclic struggle of progression and regression of technology and science, as discussed in [15]. A particularly imaginative mind could even conceive that the textbook which arrived to us was an Attic-dialect Greek (used by Aristotle) text that was an updated version of a more ancient Doric-dialect Greek (used by Archytas) text.

<sup>1</sup>As in our opinion is definitively proven in [9].

<sup>2</sup>We like to dream that the unknown copyist who included this mathematical masterpiece in the *Corpus* of the works of a famous opposer of mathematics as a tool for understanding Nature (i.e. Aristotle) wanted to preserve it against the destructive intentions of those scholars who wanted to erase it from Greek scientific literature. This circumstance parallels what surely happened more recently: Richard Toupin (Private Communication to the first author) wanted to include a chapter on variational principles in [11] even at the price to have them harshly criticized by Triesdell.

A notable resurrection of these ideas is in the 18<sup>th</sup> century CE work of D'Alembert *Traité de dynamique* (see for example [16]) that along with the contributions of Euler culminated to the remarkable treatise *Mécanique Analytique* of Lagrange, whose first version dates 1788<sup>3</sup>.

In a striking similarity with the ideas expressed in *Μηχανικά Προβλήματα*, D'Alembert's treatise analyzes the motion of systems of interacting bodies by considering their equilibrium when the total virtual work done by all interactions vanishes for every virtual displacement. Lagrange formulation expands upon these ideas and analyses. Lagrange statement is very general: "If a system consisting of bodies or points, each of which is propelled by any power (for Lagrange a synonym of force), is in equilibrium and if a small movement is imparted to this system, by virtue of which each point will travel an infinitesimally small distance which will express its virtual velocity, then the sum of the powers multiplied by the distance traveled by the points at which it is applied along the line of application of this same power will be equal to zero, if the small distances travelled in the same direction as the power are considered as positive and the distances traveled in the opposite direction as negative."

Although a modern formulation of this principle usually includes the use of concepts from functional analysis, tensor algebra and calculus, the following two points characterize the formulation presented by Lagrange. Firstly, it is given in general terms such that it includes all the versions that appear to have been formulated so far. Secondly, his formulation uses the minimum possible mathematical concepts (only concepts from Euclidean geometry) that are sufficient to rigorously express the principle in its full generality.

## 1.2. Force or Work - A Contrarian Viewpoint?

In both, D'Alembert and Lagrange, the use of the word "force" or equivalent is nominalistic. In these works, the comprehensible quantity is the movement in time that defines the physical basis of the dynamics of bodies, and not its "presumed" cause "force", and therefore motion can only be understood as "indirectly" related to "force". Dynamics is the science developed in order to mathematically predict, from fundamental principles, the laws of motion of considered systems.

The notion of "force" is used in the mathematical theory necessary to produce predictions about physical phenomena from the fundamental principles on which mechanics is based<sup>4</sup>: it is purely an abstract concept which does not correspond to any measurable physical quantities. We further remark that the Newtonian conception of force, as described in his first and second laws of motion, suffers from controversy surrounding Newton's epistemological reasoning, which has been debated widely [17, 18]. Newton's laws use a definition of mass based upon a macro mass density, which ignores the effects of mass distributions at the micro scale (see for example [19]). In this context the difficulties met in the Newtonian postulations has also been underlined, but not solved, by Mach [20]. A more thorough discussion of this point has been developed in a separate paper [21] as the subject requires a lengthy elaboration, which will distract from the focus of the present work. Here we simply want to remark that in the framework of Lagrangian mechanics, forces are mathematical derived concepts defined in terms of the primitive concept related to virtual work.

<sup>3</sup>It is remarkable that in McLaughlin, Peter. "The Question of the Authenticity of the Mechanical Problems." (2013) one reads: "However, by the end of the 18th century after Euler and Lagrange, the *Mechanical Problems* had ceased to be read as part of science and had become the object of history of science". Against its detractors, it is therefore remarkable that *Μηχανικά Προβλήματα* has been considered a scientific text until Euler and Lagrange!

<sup>4</sup>Remarkably in McLaughlin one reads that: «the actual text of Diogenes reports [...] that Archytas based mechanics on mechanical principles» and that the editor of Archytas text changed "mechanical principles" into "mathematical principles". Epistemological interpretation of Archytas words may change completely depending on which version is accepted.

Indeed, D'Alembert: states "... forces relative to bodies in motion are obscure and metaphysical entities which can only spread shadows on a science which, otherwise, is crystal clear in itself..." (D'Alembert, *Traité de dynamique* (1743) p. XVI). In D'Alembert's view, this principle has to be the underlying postulate whose consequences can be potentially evaluated through experimental verification of its predictions. Clearly, "force" in D'Alembert understanding is a derived notion used in the development of the theory, but without a direct experimental counterpart. As D'Alembert writes "... I must warn that, in order to avoid circumlocutions, I have often made use of the obscure term of force [ ... ] but I never pretended to attach to this term any other idea except those which result from the principles that I have established either in this preface or in the first part of this treatise". The fundamental and unifying idea is to be found in the principle of virtual velocities, which was later termed as the principle of virtual work.

In contrast, the Truesdellian criticism of Lagrange presents a contrarian view to the concepts underlying the principle of virtual work. It is claimed by Truesdell that mechanics is to be founded on the concept of "force". In a language replete with baroque and rococo styling (reflecting in many ways his personal lifestyle, see <https://judith2you.wordpress.com/2015/01/26/judith-in-alabaster/>), Truesdell criticizes the approach articulated in *Méchanique Analytique* in rather sharp terms. For example, Truesdell states (see [22] §14) "Granted his more modest scope, estimates of Lagrange's performance must remain a matter of taste. In music, in painting, in literature, tastes have changed in the past century. Why should they not also change in mechanics? The historians delight in repeating Hamilton's praise of the *Méchanique Analytique* as "a kind of scientific poem", but it is unlikely that many persons today would find Hamilton's recommendations in non-scientific poetry congenial." It is remarkable that Hamilton becomes an incidental target of Truesdell's criticism. In any case, a reading of *Méchanique Analytique* will show that it is written with clarity, with many parts resembling modern textbook such that it can be read with profitability even today. Truesdell further expresses in the essay "V. Whence the Law of Moment of Momentum §3" [23]:

"Lagrange's best ideas in mechanics derive from his earliest period, when he was studying Euler's papers and had not yet fallen under the personal influence of D'Alembert"

implying that Lagrange was somehow under a nefarious influence of D'Alembert.

The approach elaborated in *Méchanique Analytique* was somehow colored as being of theoretical interest and not for applications although it was always used for solving problems of practical importance [24]. It is remarkable that already in *Μηχανικά Προβλήματα* the principle of virtual work has been illustrated via practical applications.

With respect to applications of the Lagrangian methods, however, Truesdell in the "Preface to the First Edition" of *A First Course in Rational Continuum Mechanics* [25] states:

"While the knowledge he thus acquires does not of itself put applications into his hands, it gives him the tools to fashion them efficiently, or at least to classify, describe, and teach the applications already known."

The unifying capacity of the variational principles are diminished by this statement, which seems to imply that variational principles do not allow for the development of innovative theories and for the application of theory to novel applications. This opinion is contradicted by what has been stated by Landau and Feynman, who in their celebrated textbooks claim that variational principles are the most powerful tools for the discovery of novel models.

Truesdell then continues [25]:

"By consistently leaving applications to the appliers, Lagrange set them on common ground with the theorists who sought to pursue the mathematics further: Both had been trained in the same workshop and spoke the same jargon."

It seems to us that, contrary to what is implied by Truesdell, this is not a negative aspect of the epistemological approach by Lagrange: science advances if and only if theorists and appliers speak the same jargon. The most important feature of the French School of Mechanics is, in our opinion, this unique capacity of his most prominent representatives to conjugate theory with practice.

Truesdell concludes with a typical logical fallacy, mixing a “*Non Sequitur*” with a “Hasty Generalization suppressing evidence”, embellished with his baroque style [25]:

“Even today this comradeship of infancy lingers on, provided discrete systems and rigid bodies exhaust the universe of mechanical discourse.”

Moreover, in Truesdell’s view Lagrangian methods are of limited value, since, as he states, thus showing that he did not carefully read the last version (1802) of the *Mécanique Analytique* and the works by Piola (albeit he cites them systematically) [25]:

“In 1788 the mechanics of deformable bodies, which is inherently not only subtler, more beautiful, and grander but also far closer to nature than is the rather arid special case called “analytical mechanics”, had been explored only in terms of isolated examples, brilliant but untypical. Unfortunately most of these fitted into Lagrange’s scheme; those that did not, he passed over in silence.”

Subjected to such severe criticism by Truesdell, arguably one the most influential mechanician of 20<sup>th</sup> century, it is not difficult to imagine why Lagrange’s contributions came to be at times ignored, undervalued and underutilized within the broad field of mechanics.

Notwithstanding Truesdell’s negative views regarding principle of virtual work, as expressed in his many writings, its application to modeling of physical phenomena has been unprecedented [26]. The success of the principle of virtual work (and its (only logical or also historical?) antecedent principle of least action) is expressed in the following sentences of a recent article of a widely read weekly magazine “... as Feynman says, there are multiple valid ways of describing so many physical phenomena. But an even stranger fact is that, when there are competing descriptions, one often turns out to be more true than the others, because it extends to a deeper or more general description of reality. Of the three ways of describing objects’ motion, for instance, the approach that turns out to be more true is the underdog: the principle of least action...” (see “A Different Kind of Theory of Everything” by Natalie Wolchover, *The New Yorker*, February 19, 2019). The principle of least action, first known to have been enunciated by Hellenistic scientists<sup>5</sup>, has been rediscovered or restated by many great contributors to the progress of mechanics, including Lagrange, Piola, Landau, Feynman, Toupin, Mindlin, Rivlin,...

The treatise attributed to Archytas is, most likely, the first known mathematical formulations in applied mechanics and, as such, provides a template and direction for the invention of novel theories. The principle of virtual work, in our opinion, provides the most powerful tool for scientific creativity that can drive the technological advancements in mechanics.

## 2. Metamaterial Synthesis Schema

The variational principles, and in particular principle of virtual work, provide the foundational framework for developing those modern theories, which can lead us to the design of metamaterials or architected materials. Such an assertion can be illustrated through some examples of metamaterials synthesis and design proposed in the recent past, on the basis of a scientific debate started about a century before. Auxetic materials, characterized by negative Poisson’s effect, represent an exemplary case to this point. Their, sometimes harshly, denied existence has been

<sup>5</sup>“For this would be agreed by all: that Nature does nothing in vain nor labours in vain”. Olympiodorus, Commentary on Aristotle’s *Meteora* translated by Ivor Thomas in the Greek Mathematical Works Loeb Classical Library Voll.I-4 1939

recently proven on the basis of a procedure based on two conceptual steps: (i) the characterization of the class of definite positive quadratic energies for isotropic linear elastic materials and (ii) the determination of micro-architectures, which, after homogenization, are described by a Cauchy continuum with any energy in this class.

The synthesis of auxetic metamaterials is a direct consequence of the study of the theory of elasticity based upon the principle of minimum potential energy (a special case of the principle of virtual work). Indeed, it is the analysis performed in the 19<sup>th</sup> century, by Lamé and Green, based upon the belief that any definite positive isotropic elastic strain energy must be physically realizable, that revealed theoretically the possible existence of auxetic materials. The debate (for a detailed historically precise description of the different viewpoints driving this debate see [27,28]) was confronting the “physical intuition” of the supporters of balance laws who “could not conceive” negative Poisson effect and those who believed in the epistemological principle that “every well-posed model must describe a part of physical reality”.

In the 20<sup>th</sup> century this epistemological principle ultimately led to the construction of auxetic materials and to their technological application, for instance, into blood vessels reconstruction. In a similar vein, more recently Milton and Charkavaev [29], considering what elasticity tensors (that are predicated upon the existence of elastic strain energy) are possible, proposed (and such materials have been later realized!) pentamode metamaterials with a tridimensional microstructure, which at the macroscopic level has a fluid-like vanishing shear modulus in linear (small) deformations and behaves as a solid in large deformations.

The challenge in the further discovery and rational design of metamaterials with specific properties must confront the lack of predictive theories that go beyond those of the “classical” continuum theory, in which the strain energy solely depend upon the gradient of placement (that is the so-called first gradient theory or theory of Cauchy continua)<sup>6</sup>.

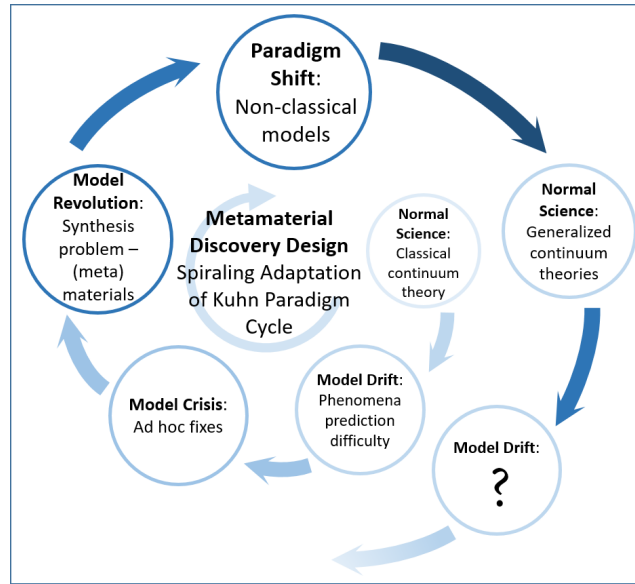
The envisaged novel metamaterials will, by nature, incorporate microscale mechano-morphologies whose energetic contributions and proper description at the macroscale require a shift in the paradigm of how mechanical analysis is widely practiced. In fact, the current practice is caught in the vortex, leading to some unavoidable contradictions, of developing analyses that are pretending to describe the behavior of every kind of possible materials using the existing classical continuum theory.

Instead, for discovering novel metamaterials, the needed paradigm is the one in which the theoretical constructs (equations) mathematically representing the desired behavior is first developed and the microscale mechano-morphologies is subsequently designed in such a way that the macroscale behavior is governed by the chosen equations. The problem of synthesis can thus be stated as the realization of a microstructure, or more generally the micro-mechano-morphology, that, after homogenization, will produce the desired behavior.

One can be tempted to pose the rhetorical question that, mechanics, as being the most ancient mathematized theory, is no longer fertile enough for contributing new theoretical understandings that can lead to further advanced theories and future technological applications. This question, in reality, does not concern mechanics: it concerns the Cauchy version of mechanics, as formulated in modern times by Truesdell. This version is blocked by a kind of conceptual “strait-jacket”, which impeded the development of more advanced models. The answer to this question

---

<sup>6</sup>The reader should remark that, in a very misleading way, the gradient of placement is called deformation gradient. One is, also, accustomed to call strain or deformation measure the Cauchy–Green tensor built with the placement gradient. As in higher gradient or in micro-structured continua the deformation energy depends also on other tensors, which all together describe some deformation modes, we find all the widely-used-in-literature nomenclature rather inappropriate.



**Figure 1.** Adaptation of Kuhn paradigm cycle for metamaterial discovery and design. Note that the current practice is based upon classical continuum theory that originated from Cauchy analysis for describing the mechanical behavior of existing materials (recognizable as Kuhn's Normal Science). It is now well known that the theory fails to predict many phenomena such as, nonlinear dispersion in propagation of mechanical waves, finite sized boundary layers formed during deformation, and stress/strain concentration in finite localization zones (representing Model Drift). Attempts have been made to address these shortcomings using *ad hoc* fixes including “artificial” regularizations of the governing equations (Model Crisis). Most significantly, the current theory presents major shortcomings in the problem of synthesis or realization of metamaterials with predefined properties (therefore the need for Model Revolution). Clearly, a paradigm shift is required for developing non-classical models (for which the principle of virtual work is a powerful foundational framework). The ensuing generalized continuum theories, or higher-gradient and higher-order theories, are expected to result to new normal science, which may lead to future model drift in the spiraling cyclic adaptation of Kuhn's paradigm cycle, which we have in mind.

is: if mechanics is based on the principle of virtual work, as it has been since its first Greek formulation, then it has the vitality needed to produce original and extremely innovative theories and powerful technological advancements.

From an epistemic viewpoint, the needed paradigm for metamaterials design is best illustrated through the spiraling adaptation of the widely known Kuhn paradigm cycle [30] in Fig. 1. It could be objected that the epistemological and historical considerations that we are presenting are outside the scope of the practice of mechanicians, and in particular, of those among them who are willing to participate to the challenge involved in the theory of metamaterials.

Instead, a clarification of the origin and evolution of the theoretical understanding of mechanical theory and problems is, in our opinion, a necessary step in the conception and development of every novel theoretical formulations, and in particular, the specific one that can lead to the envisaged paradigm shift. The mathematical conception of mechanics in ancient times, in the era of Archytas on the basis of the virtual work and least action principles, can serve as a faithful guide, even in modern research activity, because deep mathematical ideas, once firmly es-



tablished, have particular endurance.<sup>7</sup> Moreover, as any “algorithm” or “meta-theory” is not yet available teaching us how to “invent” novel models, the only guidance that we have available is given by the past successful mathematical and modeling inventions.

In this regard, it is notable that the Truesdellian viewpoint that mechanical theories must be founded upon the concept of force and moments of force and their balance postulates, places mechanics on a shaky foundation and poses serious impediments for its future developments. In this viewpoint, the role of micro-scale, the micro-macro identification, the exploitation of symmetry groups, and shape optimization becomes extremely challenging even if one were to adopt certain generalized continuum approaches *à la Eringen* [31] that are based upon balance laws. Symmetry groups and shape optimization in isolation do not provide a principle for founding a physical theory, however their fundamental concepts can be harnessed more efficiently within the framework of variational principles. In this regard, it may be remarked that while kirigami and origami provide interesting internal structures (microstructures) [32,33], they are not basis for predictive theories, as they are specific microstructures among an infinity of others. The problem of synthesis of metamaterials centers around the ability to choose amongst this infinity those that are behaving as desired. Furthermore, in many cases different balance postulates may be needed at the micro- and macro-scales depending upon the different sets of kinematical descriptors necessary for modeling at the two scales. Without recourse to variational approaches, it may not be possible a priori to understand which micro-scale balance postulate relates to a certain macro-scale balance postulate, and further, to establish relationships among the micro- and macro-balance laws. Such force-balance concept, therefore, has to be abandoned in order to achieve a paradigm shift, particularly in light of the existing alternative of the least action principle and its generalization: the principle of virtual work. This viewpoint can be found in many papers that, using the Lagrangian spirit, are able to address problems of complex mechanical systems from several perspectives: 1) theoretical, aimed at designing new materials based on complex sub-structures or involving “multi-physical” aspects (see, e.g., [34–38]); 2) numerical, aimed at solving those complex systems with ad hoc discrete models (see, e.g., [39,40]).

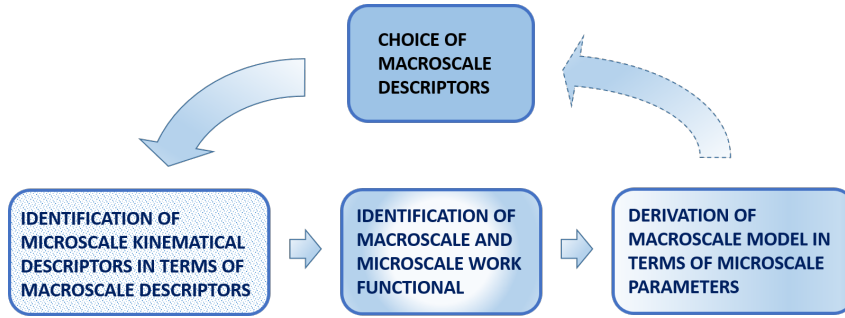
We believe that this principle is the only “firm and immutable” foundation in the art of mathematical modelling of mechanical phenomena since the appearance of *Μηχανικά Προβλήματα*. Of course, we do not believe that the postulation scheme based on the principle of virtual work is “forever” immutable: we simply claim that a major Kuhn revolution in mechanical sciences will be needed before it can be replaced.

### 2.1. *Micro-macro Procedure based upon Piola ansatz*

The genesis of micro-macro identification can be traced to the vanguards of continuum mechanics of deformable bodies in the first half of 19th century CE [41–43]. Among these pioneering works, Piola had already conceived a micro-macro identification scheme whose rudiments and conceptual basis can be traced to the systematic use of the principle of virtual work. In Fig. 2 we illustrate the Piola micro-macro identification methodology. Based upon this *ansatz*, a three pronged approach can be outlined that can address the model revolution and lead to a paradigm shift of the Kuhn cycle (1):

- *Macro-scale theory selection*: As a first step, devise a continuum theory, valid at the macro-scale, that seems suitable to describe the desired behavior using a judicious choice of macroscopic descriptors and a suitable formulation of the Principle of Virtual Work.

<sup>7</sup>In the words of G.H. Hardy “A mathematician, on the other hand, has no material to work with but ideas, and so his patterns are likely to last longer, since ideas wear less with time than words.” *A Mathematician's Apology*, Section 10.



**Figure 2.** Micro-macro procedure based upon Piola *ansatz*.

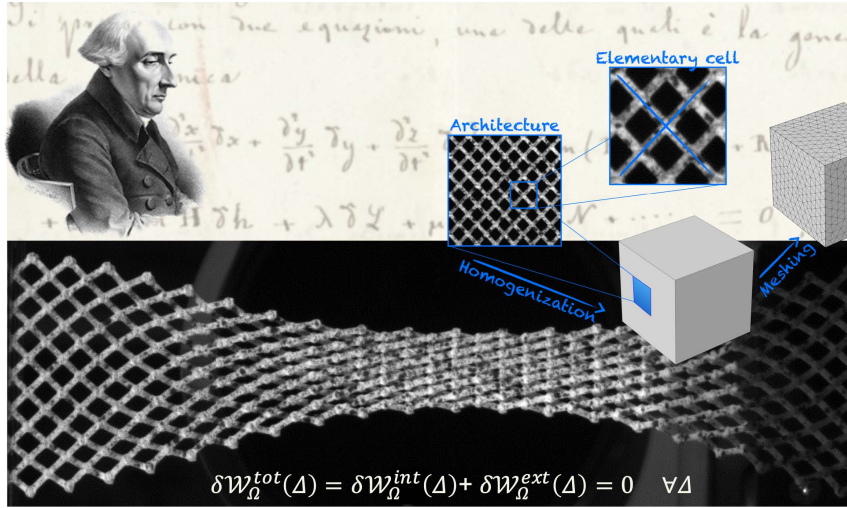
- *Micro-mechano-morphology selection*: Next conjecture a subclass –in a specific class of microarchitectures, having a multi-scale mechano-morphology– which represents candidates to be governed by the chosen macro-model, once homogenized.
- *Macro-micro conjectural identification of micro-kinematical descriptors in terms of macro descriptors*: at this stage the modeller must find which micro-kinematical descriptors best represent (energetically) each choice of macro descriptor.
- *Macro-micro constitutive identification*: Finally, identify the macro constitutive equations in terms of suitably parameterized micro properties, in the selected subclass of micro-architectures, by identifying micro-virtual work with macro-virtual work.

Higher gradient theories leading to fabricated pantographic metamaterials (illustrated in Fig. 3) are exemplar of such a micro-macro identification process [44–48]. The three pronged approach outlined above is general enough to allow for variations to be conceived in a larger class of microarchitectures. We consider, as further example, the case of granular microarchitectures, for which the deformation energy can be represented by the aggregation of the deformation energies of interacting grain-pairs. In the sub-class represented by collection of nearly rigid elements (or grains) such that the elastic strain energy is stored in the deformable mechanisms represented through interconnections or interfaces between the grains, the outlined approach could proceed by (i) identification of the chosen continuum kinematic descriptors and deformation measures with the discrete grain-scale kinematics; (ii) consequent identification of the continuum deformation energy density with the volume average of grain-pair interaction energies; and (iii) application of the variational approach for defining stress/force conjugates of the kinematic variables, determining constitutive relations, and the governing macro-scale Euler–Lagrange equations [49, 50].

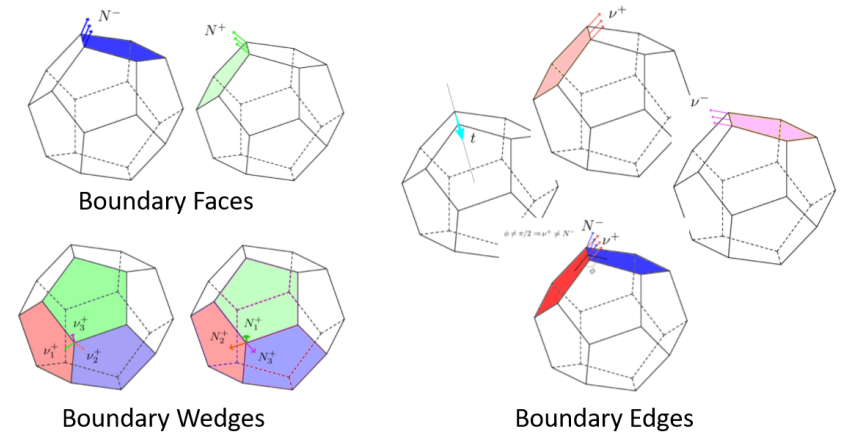
## 2.2. Principle of Virtual Work as a Potent Primogenitor

The key underlying quantities that drive the micro-macro identification described above are the kinematic descriptors and the associated work functionals. Clearly in this case, the variational methods and, hence, the principle of virtual work provide a general framework to develop the needed equations that govern the behavior at any chosen scale. To illustrate the efficacy of the principle of virtual work in developing non-standard novel theories, we briefly review here the case of metamaterial described by the  $N^{\text{th}}$  gradient continuum theory. In this case, the only macroscopic descriptor introduced is the placement field, and further, its gradients up to the order  $N$  are involved in the expression for deformation energy functional. The internal power<sup>8</sup>

<sup>8</sup>The reader should not be confused by the introduction, here and in the literature, of different but equivalent nomenclature: one can talk about the principle of virtual work or the principle of virtual power: in the first case one



**Figure 3.** Pantographic metamaterial as an exemplar of the micro-macro identification.



**Figure 4.** Boundary faces, edges, wedges.

functional for an  $N^{\text{th}}$  gradient continua is given as a distribution of order smaller or equal to  $N$ , expressed as

$$P^{int}(B, V) = \sum_{\Lambda=0}^N \int_B T_\Lambda \cdot \nabla^\Lambda V, \tag{1}$$

in which  $\Lambda$ - order contravariant tensors  $T_\Lambda$  is termed as  $\Lambda$ - order multipolar stress [51]. By performing subsequent integration by parts we arrive at terms related to boundary faces, boundary edges and boundary wedges as illustrated in Fig. 4 expressing the contact loads which are possible in  $N^{\text{th}}$  gradient continua and therefore the class of external loads which are sustainable by these continua.

introduces test functions which are virtual displacements, in the second one they are virtual velocities. The conceptual basis is exactly the same and formally one can obtain the power functional from the work functional simply by dividing the virtual displacement by an infinitesimal time.

Using the principle of virtual power, it is therefore possible to express the class of admissible external loads sustainable by (and applicable to)  $N^{\text{th}}$  gradient continua as follows (for more details see [51]):

$$\begin{aligned}
 P^{\text{int}}(B, V) = & \int_B F(B, 0) V + \int_{\partial B} F(\partial B, 0) \cdot V \\
 & + \sum_{L=1}^{N-1} \int_{\partial B} F(\partial B, L) \cdot (\nabla^L V)_{\perp} + \int_{\partial \partial B} F(\partial \partial B, 0) \cdot V \\
 & + \sum_{J=1}^{N-2} \int_{\partial \partial B} F(\partial \partial B, J) \cdot (\nabla^J V)_{\perp} + \sum_{J=0}^{N-3} \int_{\partial \partial \partial B} F(\partial \partial \partial B, J) \cdot \nabla^J V_{\perp}
 \end{aligned} \tag{2}$$

It is remarkable that externally applicable loads, for  $N^{\text{th}}$  gradient continua, do NOT reduce simply to forces (i.e. to the quantities dual in work of virtual displacement). One has to introduce  $k$ -forces: i.e. the quantities dual in work of the normal gradients of virtual displacements at the body faces, edges and wedges boundaries. This point has been discussed already by [52, 53] and [54] where the concept of multipolar stresses and forces is introduced. However in [54] only the evolution equations which can be obtained from an invariance principle for total energy are considered.

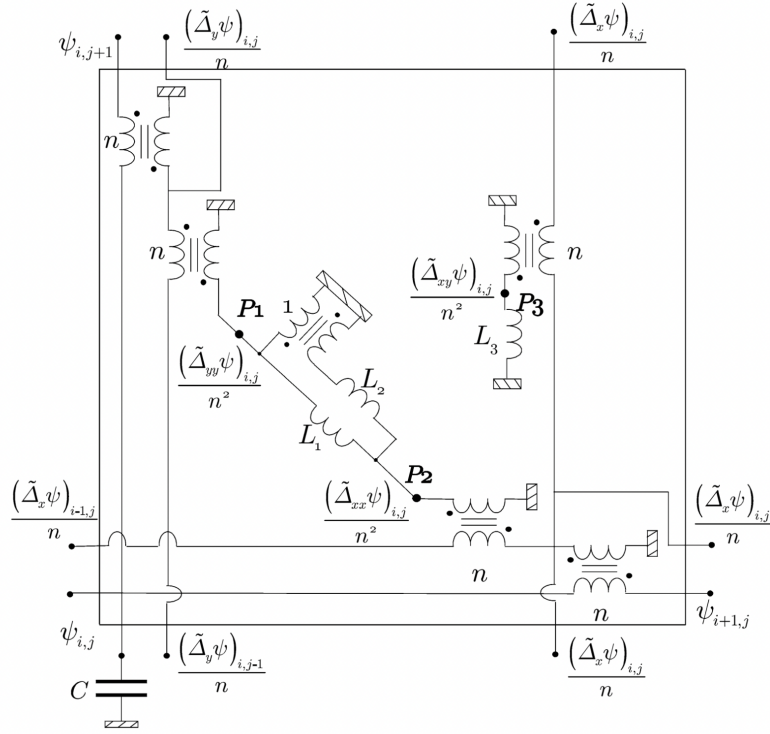
Instead, using the principle of virtual work one can get not only the appropriate forms of governing equations (which one could call the “balance equations”) for every kind of kinematical descriptor that has been introduced, but, more importantly, one can easily *deduce, using an integration by parts argument*, the class of natural and essential boundary conditions leading to well-posed problems. It is remarkable that the determination of boundary conditions in (force, moments of force or any other quantity one may be willing to introduce) balance approaches are often fraught with consistency problems, as they are postulated independently of the bulk balance equations. Aware of this difficulty, many authors recur to the “stratagem” of *inducing* from experiments needed boundary conditions, inductivistic attitude which should be avoided, as we will argue in the following.

Using the principle of virtual work, and beginning with any kind of additional macroscale kinematic descriptors (also some of which are purely Lagrangian, and therefore not at all affected by any kind of Eulerian invariance), one can easily postulate work functionals to introduce any kind higher-order micromorphic theories [49, 55–57]. It is, therefore, clear that if we are to achieve the paradigm shift and introduce novel theoretical approaches into the mechanical analyses for metamaterial discovery and design, then the principle of virtual work has a pivotal role.

### 3. Metamaterial Synthesis based upon the Homogenization Schema

The homogenization procedure outlined in the above section provides a general framework on which the problem of metamaterial synthesis can be based. This problem is not yet solved for the class of  $N^{\text{th}}$  gradient continua, although it is worthwhile to mention here that it is not completely unprecedented. The mathematical method that are to be developed bears similarity to that used for designing analog circuits whose elementary components are the elements of resistance, inductance, capacitance and transformer [58].

In fact, a general theorem of synthesis has been proven for every quadratic Lagrangian and Hamilton–Rayleigh-dissipation functions in the case of circuit design: it is possible correspondingly to obtain algorithmically a graph, and for every branch of the graph, an elementary linear sub-circuit so that the resulting circuit is governed by the associated Lagrange equations. An example of such an analog circuit for Kirchhoff plate element [59, 60] is illustrated in Fig. 5. The synthesis for a specified class of mechanical metamaterial, therefore, should proceed in a similar manner by finding a minimal set of elementary sub-structures which can be combined



**Figure 5.** The analog circuit of Kirchhoff plate element.

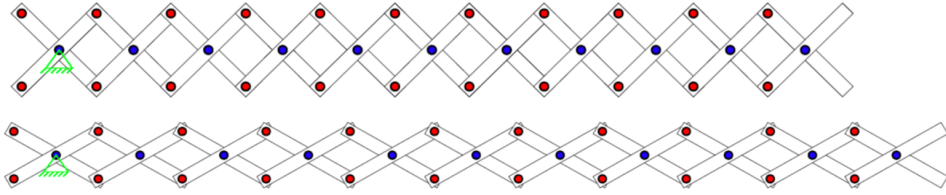
using suitable interconnections to represent every internal virtual work functional. To illustrate the paradigm to be developed, we will discuss the case of (1) second, third and  $n^{\text{th}}$  gradient meta-beam incorporating pantographic motif, and (2) 2D chiral Cosserat metamaterial of granular motif, so giving two examples of the efficacy of the described schema.

### 3.1. Second Gradient - Pantographic Motif

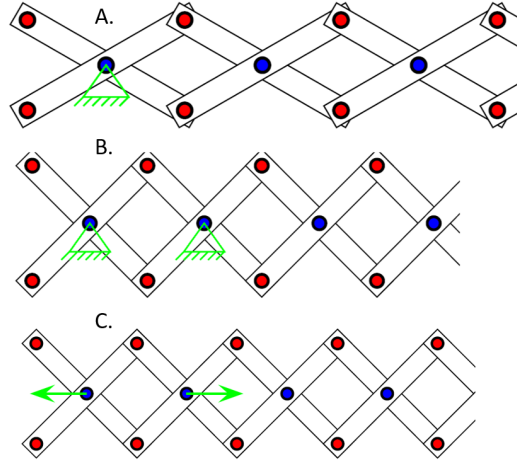
The most basic substructure in the synthesis of a second gradient material is the pantographic beam shown in Fig. 6. The constituting beams are flexible and are interconnected with perfect pivots. The relevant length scales are three: the beams thickness, the blue pivots distance, and the product of the number of the cells times the blue pivots distance. The linearised pantographic beams are the synthesis of the following macro-scale second gradient quadratic energy [45],

$$E(u) = \int_0^l \left[ K \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right)^2 + K' \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right)^2 \right] ds, \quad (3)$$

It has to be remarked that the pantographic beam incorporates floppy modes, i.e.; non-rigid displacement fields corresponding to vanishing deformation energy. Further, note that the homogenised displacement in Eq. (3) can represent only the position of the blue materials points, which we could call the Piola points. The positions of red points have no macroscopic kinematical description and are calculated assuming a local microscopic instantaneous equilibrium condition. The macro boundary conditions can be determined following the approach given in Eq. (2), for a general  $N - th$  gradient continuum. These boundary conditions are illustrated in



**Figure 6.** Pantographic beam.



**Figure 7.** Micro-interpretation of macro-boundary conditions: A. Displacement constraint at the micro-level. B. Normal derivative and rotation constraint at the micro-level. C. Reactive double-force (note: it expends work on elongations and is not a couple).

Fig. 7 and includes specification of displacement, rotation and the normal derivative or their energetic duals.

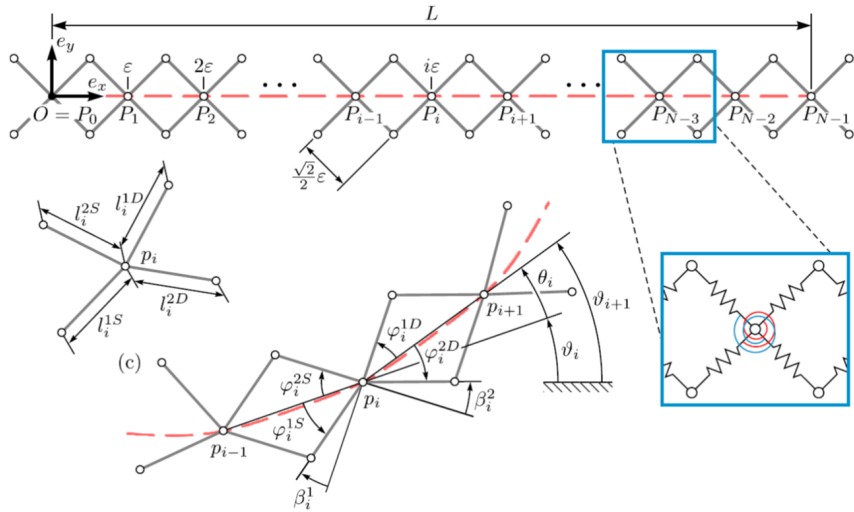
Further, a macro-scale model that can describe large displacements and deformations of pantographic beams can be given by introducing a meso-length scale using Hencky discrete springs that are equivalent to Euler beams, such that macro-deformation energy is expressed in terms of the extensional and rotational kinematic quantities  $\rho$  and  $\vartheta$  as [61],

$$E = \int_0^l K_E K_F \left[ \frac{\rho^2 - 2}{\rho^2 (K_E - 4K_F) - 2K_E} \vartheta'^2 + \frac{\rho^2}{(2 - \rho^2) [\rho^2 (K_E - 4K_F) + 8K_F]} \rho'^2 \right] ds, \quad (4)$$

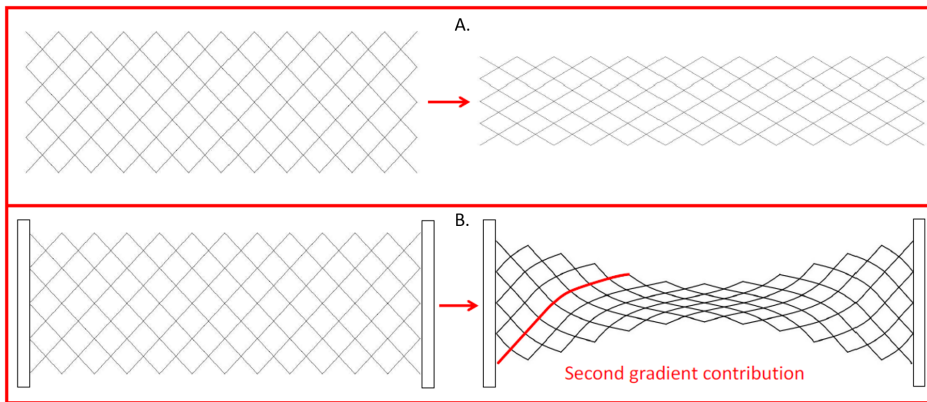
where  $K_E$  and  $K_F$  are the stiffnesses of the extensional and rotational springs. In this case, the class of architectures, among which we look for our synthesis, is that constituted by several constrained Euler beams as represented by their Hencky discretisation, as illustrated in Fig. 8.

We can now consider the case of 2D plate, in which case the pantographic multi-scale micro-architectures to be synthesized is one whose deformation energy is given as [62],

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\chi(\cdot)) = & \int_{\Omega} \sum_{\alpha} \frac{\mathbb{K}_e}{2} (\|\mathbf{FD}_{\alpha}\| - 1)^2 dA \\ & + \int_{\Omega} \sum_{\alpha} \frac{\mathbb{K}_b}{2} \left[ \frac{|\nabla \mathbf{F} | \mathbf{D}_{\alpha} \otimes \mathbf{D}_{\alpha} \cdot \nabla \mathbf{F} | d\mathbf{D}_{\alpha} \otimes \mathbf{D}_{\alpha}}{\|\mathbf{FD}_{\alpha}\|^2} - \left( \frac{\mathbf{FD}_{\alpha}}{\|\mathbf{FD}_{\alpha}\|} \cdot \frac{\nabla \mathbf{F} | \mathbf{D}_{\alpha} \otimes \mathbf{D}_{\alpha}}{\|\mathbf{FD}_{\alpha}\|} \right) \right] dA \\ & + \int_{\Omega} \frac{\mathbb{K}_p}{2} \left[ \cos^{-1} \left( \frac{\mathbf{FD}_1}{\|\mathbf{FD}_1\|} \cdot \frac{\mathbf{FD}_2}{\|\mathbf{FD}_2\|} \right) - \frac{\pi}{2} \right]^{\gamma} dA \end{aligned} \quad (5)$$



**Figure 8.** Pantographic beam modeled as collection of Hencky elements representative of Euler beam.

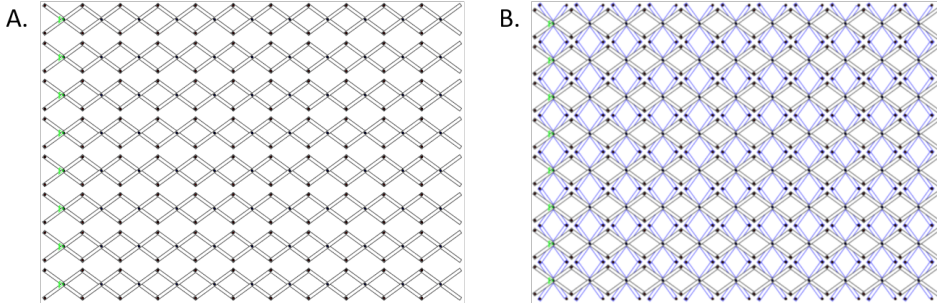


**Figure 9.** Pantographic 2D-plate: A. Only floppy modes indicating zero first gradient deformation energy. B. Deformation pattern in bias test with fully clamped ends showing the contribution of second gradient deformation energy.

where the exponent  $\gamma$  represents a nonlinear material behavior. It is noted that the deformation energy in Eq. (5) is incomplete since only two second order partial derivatives appear. In this case, the synthesized micro-architecture is illustrated in Fig. 9 (see also [63–66]).

Finally we consider the case of bi-pantographic planar sheets, in which Euler beams are replaced by pantographic beams. It is notable that the bi-pantographic sheets do not represent a complete second gradient 2D continuum, even though additional second order derivatives of parallel displacement appear in the deformation energy. In this case, the multi-scale micro-





**Figure 10.** Bi-pantographic sheet micro-architecture: A. Sub-architecture composed of horizontal pantographic beam building blocks. B. Sub-architecture composed of a family of horizontal and vertical pantographic beam building blocks.

architectures to be synthesized is one whose deformation energy is given as [62],

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = \int_{\Omega} \sum_{\alpha} \left\{ K_E K_F \left[ \frac{\rho_{\alpha}^2 \cos^2 \gamma - 1}{\rho_{\alpha}^2 \cos^2 \gamma (K_E - 8K_F \cos^2 \gamma) - K_E} \left( \frac{\partial \vartheta_{\alpha}}{\partial \alpha} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\rho_{\alpha}^2 \cos^2 \gamma}{(1 - \rho_{\alpha}^2 \cos^2 \gamma) [8K_F + \rho_{\alpha}^2 (K_E - 8K_F \cos^2 \gamma)]} \left( \frac{\partial \rho_{\alpha}}{\partial \alpha} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + K_S \left[ \cos^{-1} \left( 1 - \frac{\rho_{\alpha}^2}{\frac{1}{2} \cos^2 \gamma} \right) - \pi + 2\gamma \right]^2 \right\} dA \end{aligned} \quad (6)$$

The bi-pantographic planar sheet is obtained by assembling a sub-architecture constituted by horizontal pantographic beams as illustrated in Fig. 10 combined with a sub-architecture constituted by vertical pantographic beams sharing the same central nodes as the horizontal beams and interconnected using pivots as shown in Fig. 10B.

For the case of perfect pivots, there is zero deformation energy for the homogeneous deformation modes shown in Fig. 11. From a rheological viewpoint, the class of architectures that needs to be considered to get the synthesis of the bi-pantographic sheet is, interestingly, again a meso-structure represented by means of extensional and rotational springs as portrayed in Fig. 12. The advent of additive manufacturing (3D printing) has made it possible to fabricate the aforementioned pantographic structures (see, e.g., [67–70]). An example of the 3D printed bi-pantographic sheet is shown in Fig. 12. What makes 3D printing of such structures more significant is the ability of implementing experimentally a variety of boundary conditions such that their effect upon the macro-scale behavior can be investigated using traditional mechanical testing devices.

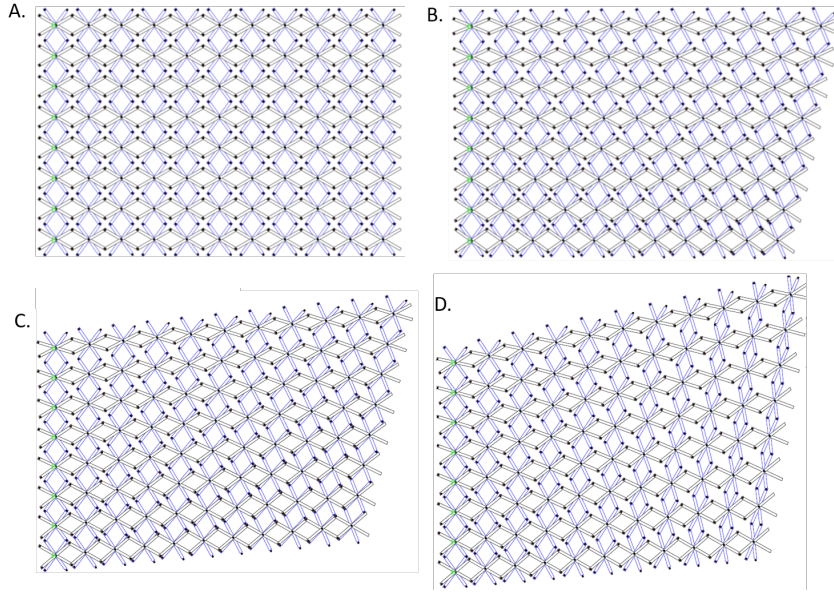
### 3.2. Cosserat Continua - Granular motif

For a Cosserat continua, the most basic structure that can be synthesized is a beam with granular motif. To endow the beam with chirality, such that the axis of chirality is orthogonal to the beam axis, the required synthesis is of the following macro-scale energy [71, 72],

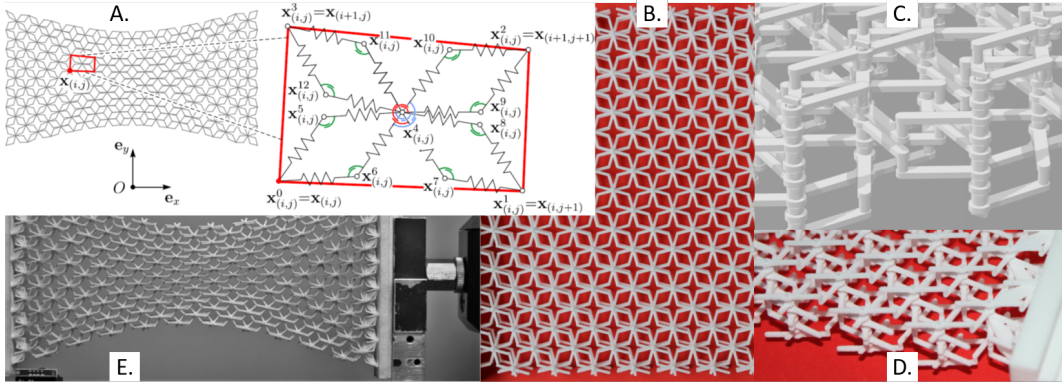
$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^l C^n \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + C^s \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \psi \right)^2 + C^{\theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^2 + 2C^{ns} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \psi \right), \quad (7)$$

The considered macro-scale kinematic quantities are the axial displacement,  $u_1$ , the transversal displacement,  $u_2$ , and the rotation,  $\psi$ . It is remarked that the macroscale energy in Eq. (7) reduces to that of Timoshenko beam when the 4<sup>th</sup> term in Eq. (7) is ignored. The synthesis of



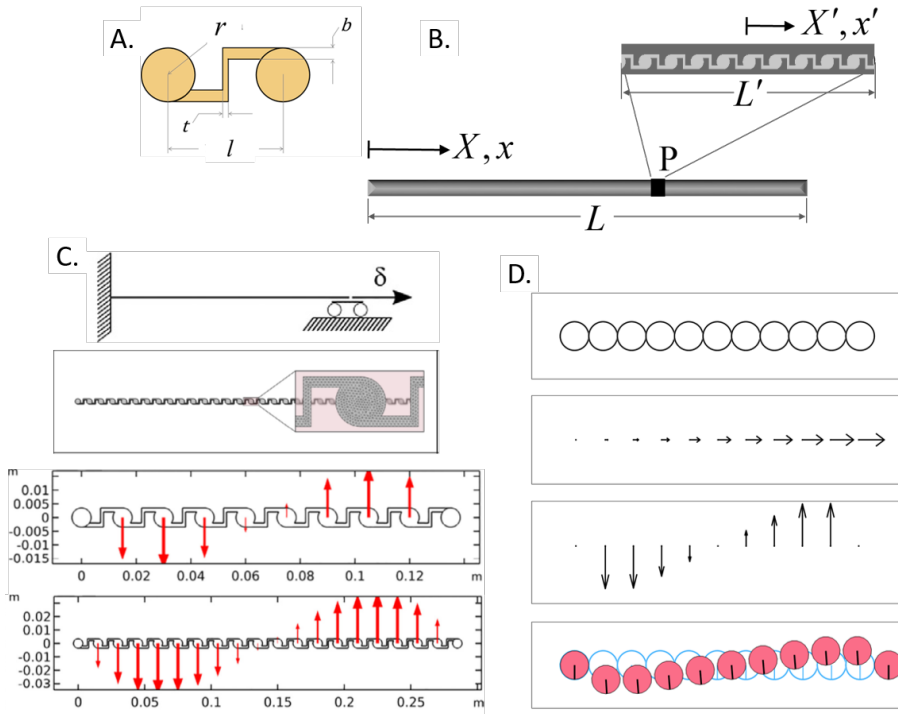


**Figure 11.** Bi-pantographic zero energy modes under homogeneous deformations: A. Vertical and horizontal elongation. B. Horizontal shear. C. Vertical and horizontal shear. D. Combined elongation and shear.



**Figure 12.** A. Bi-pantographic sheet represented as a collection of Hencky elements representative of Euler beams. B. Physical realization of bi-pantographic sheet using 3D printing. C. CAD rendering of perfect pivot connections. D. The realization of boundary conditions within the 3D printed specimen. E. The fabricated sheet subjected to bias test.

this macro-scale energy as a granular motif is possible if the interacting grains admit stretch and shear coupling which can be achieved via the grain-grain connection using a duoskelion [35] set of beams as shown in Fig. 13A, which serve as a mechanical analog of grain-pair interactions. The stretch-shear coupling in such a mechanical analog has been shown through finite element (FE) modeling treating the grain-pair and connectors as standard Cauchy continua [71]. The resultant beam is illustrated in Fig. 13B. The chiral nature of the beam is evident from the transversal displacement observed in FE [71] and discrete element simulation of the beam [73] (note that the



**Figure 13.** A. Grain-pair with stretch-shear coupling. B. Beam with granular motif emphasized in the inset. C. Results of FE simulation of the beam under extension modeled using standard elastic Cauchy continua showing the non-standard transversal displacements. D. Results of the beam under extension modeled using discrete (rigid) elements interacting via springs representing the grain-pair mechanism in A.

behavior is independent of the number of grains).

It is noteworthy that the homogenized macro-scale model, Eq. (7), can only represent the positions of the grain barycenter and the grain rotation about its barycenter treating the grains as rigid bodies. Such a treatment is justified, since in these cases the elastic deformation energy is stored in the mechanism that connect a grain-pair. We can further consider the case of a 2D plate, in which case the following deformation energy represents the metamaterial to be synthesized [74]:

$$E(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \lambda (E_{11} + E_{22})^2 + \mu (E_{11} + E_{22} + 2E_{12})^2 + \beta \gamma^2 + \alpha \left( \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^2 - \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right)^2 \right) + \eta \gamma (E_{11} + E_{22}) \quad (8)$$

The considered macro-scale kinematic quantities are the displacement,  $u_i$ , and the micro-rotation,  $\psi$ . In this case also, the synthesis of this macro-scale energy as a granular motif is possible if the interacting grains admit stretch and shear coupling (see [74]).

In all of the above examples, one can easily recognize the Piola *ansatz* that proceeds from establishing the equivalence class of micro-deformations corresponding to each macro-deformation and by identifying the micro and macro work functionals on corresponding micro and macro deformations. Then the Piola homogenization is obtained via the application of the principle of virtual work for the two classes of macro and micro virtual work functionals defined on the set of micro or macro admissible virtual displacements (or test functions) and with the identification of corresponding micro and macro virtual works.

From the mathematical viewpoint, it is remarkable that the virtual work functionals are distributions (in the sense of Laurent Schwartz) and virtual displacements are the correspondent test functions ([75]). Therefore the mathematical results obtained in the framework of that theory are of great use in the theory of metamaterials synthesis.

#### 4. Epistemological considerations for experimental validation

In the absence of advanced theories, experimental campaigns for discovering novel phenomena and characterizing unprecedented material behavior will remain inadequate and illusory. While the debate between deductivist and inductivist views of the formulation of scientific ideas may continue, clear advantage is afforded when the formulation of the mathematical concepts precede their validation with experimental evidence. The inductivist view of developing theoretical concepts, typically, reverses this order and seeks to develop mathematical models based upon data obtained from experimentation. Such an approach could be stunting as the domain of possible phenomena is limited to those already observed or to their near interpolations and the developed models serve only as explanations.<sup>9</sup> In fact without having a presumed (or conjectured) theory at hand, it is not possible to design meaningful experiments or interpret the results so as to reveal the novel phenomena.

We illustrate the power of the conceptual epistemological framework given to us by a deductivist viewpoint by discussing its effects when used in the theory of metamaterials. In fact, it has been immediately clear, in the study of pantographic sheets under large deformations, that it was very difficult to recognize where a material sub-body individuated in the reference configuration is placed in the present configuration. The efforts for getting a correct algorithmic elaboration from images, without the guidance of a theory conjecturing where all sub-bodies of considered specimens were presumed to be, were all in vain.

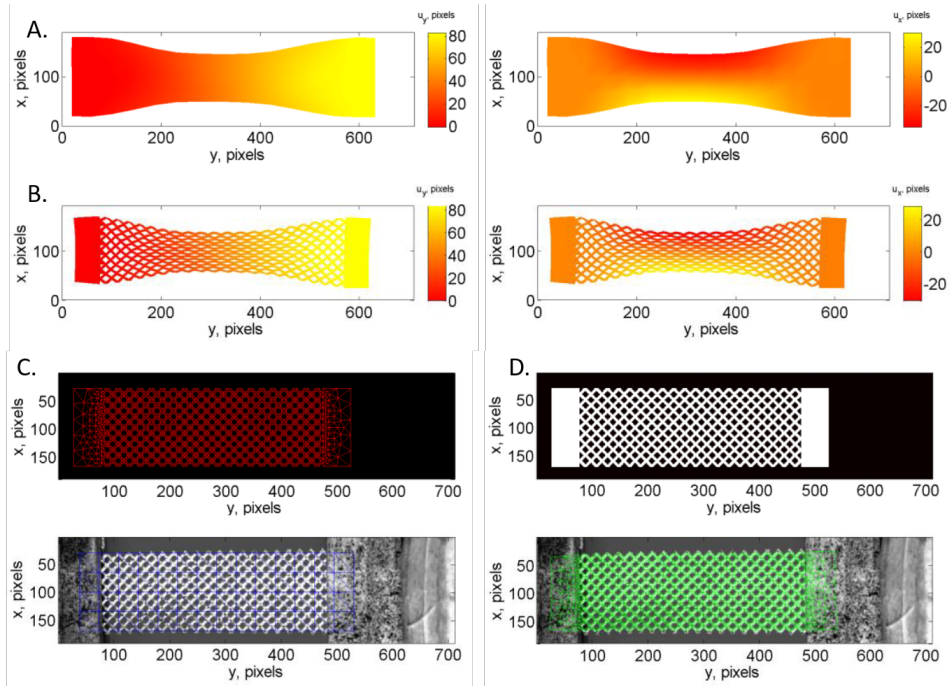
To get an effective algorithmic interpretation and elaboration of the experimental results obtained in the bias test of pantographic sheets using digital image correlation (DIC), it was necessary to use a second gradient theory (valid at macro-scale) guiding the algorithmic analyses designed for interpretation of the deformations measurements as shown in Fig. 14A. In other words: only when the theory suggested where a specific sub-body had to be placed the DIC algorithm could localize it [34, 72, 76, 77]. The second gradient macro-theory was very efficient (as it implied low computational costs) for this aim.

Alternatively, the first gradient theory was applied for a micro scale analyses in which a complete representation of the micro-mechano-morphology of the pantographic sheet is necessary (see Fig. 14B for the result of such an analyses): when this choice was done the needed computational efforts were correspondingly much more time consuming. Only with the availability of both said theoretical frameworks and their predictions of the placement of the sub-bodies it was possible inform the DIC back-tracking procedure to correctly recognize the shape changes in the images the deformed sheet as shown in Fig. 14C and D for the macro- and micro-analyses, respectively.

Also in the case of the chiral Cosserat beam with granular motif, the accurate determination of the grain motions is only possible by using systematically the introduced presumed conjectural

---

<sup>9</sup>“It may be said, therefore, that an explanation is not fully adequate unless its *explanans*, if taken account of in time, could have served as a basis for predicting the phenomenon under consideration. . . . It is this potential predictive force which gives scientific explanation its importance: only to the extent that we are able to explain empirical facts can we attain the major objective of scientific research, namely not merely to record the phenomena of our experience, but to learn from them, by basing upon them theoretical generalizations which enable us to anticipate new occurrences and to control, at least to some extent, the changes in our environment.” Hempel & Oppenheim, 1948, “Studies in the Logic of Explanation”. *Philosophy of Science*. XV (2): 135–175



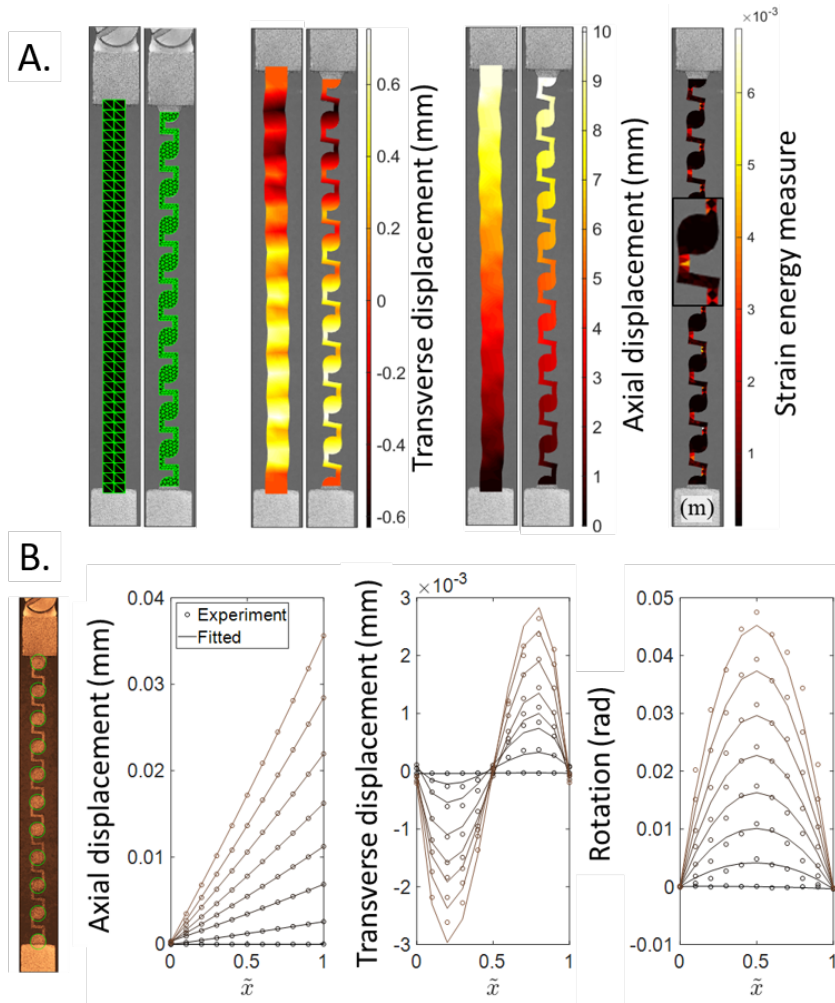
**Figure 14.** A. Macro-scale analyses using a second gradient theory. B. Micro-scale analyses using a first gradient theory. C. Results of the DIC backtracking for the macro-scale analyses. D. Results of the DIC backtracking for the micro-scale analyses.

model. In Fig. 15A, we show two possible backtracking scenarios, one macro-scale and the other micro-scale, for the DIC determination of deformed shape of the beam. It is clear from Fig. 15A, that the macro-scale analyses provides little useful information (in fact the extracted information could be misleading without the prior knowledge of the precise details of the microstructure). The primary useful information we get from the micro-scale analyses is that the strain energy is localized in the grain connectors and that the bar can be treated as a granular system. Further analyses to extract the rigid motions of the grains leads to kinematic fields of the introduced presumed model as shown in Fig. 15B, where the DIC determined kinematic fields are plotted with those predicted by the introduced model.

## 5. Conclusion and research perspectives

Through the presented discussion and illustrative examples it is amply clear that the principle of virtual work provides a general framework for developing theories that can be used to scientifically design exotic and innovative metamaterials. The >2500 years old mathematical principle which allowed for the first foundation of mechanics maintains the vitality capable of guiding mechanicians towards innovation, both in their modeling efforts and in their search for technologically relevant applications. The impulse given to mechanics by the Illuministic mechanicians operating in France at the end of 18<sup>th</sup> century, and their further enhancement by the pupils and scientific descendants of Gabrio Piola in the early 19<sup>th</sup> century, does not seem to be exhausted yet.

Indeed, the principle of virtual work provides the most efficient and powerful tool for achieving the paradigm change in mechanical sciences that seems to be urged by the modern demands from applications and by the increased experimental evidence which falsified the first gradient



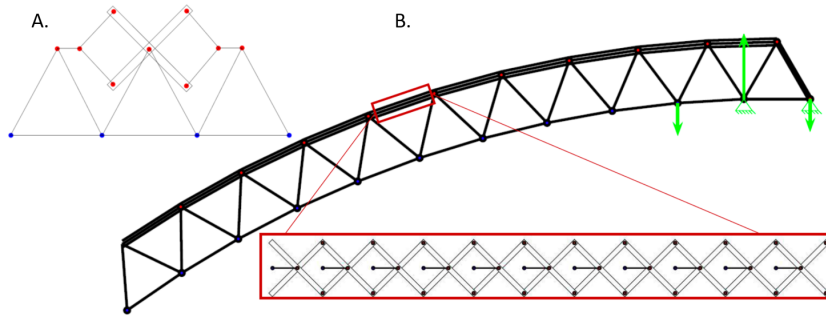
**Figure 15.** A. Macro-scale and micro-scale determination of beam deformation using DIC. B. Measured grain rigid body motions obtained from DIC and predicted kinematics of the chiral Cosserat beam model.

continuum theory in a number of instances. Here, we have discussed selected results taken from more recent literature that reflect the potential progression which can be interpreted in terms of a spiraling adaptation of the classical Kuhn paradigm cycle.

The theoretical analyses based upon the principle of virtual work, as they allow for an effective micro-macro identification process, can be exploited to develop the homogenization schema essential for conceiving a metamaterial synthesis algorithm. In the present paper, to show the impact of the used epistemological concepts, we exemplify the identification-synthesis schema through the discussed synthesis of second gradient and chiral Cosserat media.

Furthermore, from the viewpoint of the further and necessary advances in metamaterials design we want to briefly indicate here how more general synthesis results may be obtained, by discussing the specific synthesis method used for getting linear beams whose deformation energy depends on the third gradient of transverse displacement. Such a third-gradient beam can be synthesized by placing a pantographic beam at the top of a Warren bridge architecture





**Figure 16.** A. Schematic building block of primitive pantograph unit placed within a Warren truss framework for introducing a fourth length-scale. B. Possible realization of a third-gradient beam by incorporating pantographic beam within the Warren bridge architecture.

as shown in Fig. 16. This type of beam can be potentially devised by introducing a fourth length scale (the height of the Warren truss triangles) in the pantographic motif as illustrated in Fig. 16A, where a primitive pantograph has been placed within a Warren truss structure [44]. The possible realization of such a system is shown in Fig. 16B, in which a pantographic beam is incorporated within the Warren bridge architecture.

The above approach, most likely, can be extended to  $N^{\text{th}}$  gradient beams by successively introducing further length scales. Subsequently, by interconnecting such higher order beams, one can expect to get  $N^{\text{th}}$  gradient 2D and 3D materials.

Similarly, higher-order micromorphic material systems could be synthesized, by introducing additional micro-mechano-morphologies of different length scales or in the case of modulating dynamic behavior, introducing mass distributions that lead to additional micro-inertia as discussed in [19, 78] or using dielectric materials for modulation with electric fields [19].

## Conflicts of interest

The authors declare no competing financial interest.

## Acknowledgments

AM is supported in part by the United States National Science Foundation grant CMMI-1727433.

## References

- [1] F. dell'Isola, E. Barchiesi, A. Misra, "Naive Model Theory: its applications to the Theory of Metamaterials Design", in *Discrete and Continuum Models for Complex Metamaterials*, Cambridge University Press, 2020, p. 141-196.
- [2] E. Barchiesi, M. Spagnuolo, L. Placidi, "Mechanical metamaterials: a state of the art", *Math. Mech. Solids* **24** (2019), no. 1, p. 212-234.
- [3] I. Giorgio, M. Spagnuolo, U. Andreaus, D. Scerrato, A. M. Bersani, "In-depth gaze at the astonishing mechanical behavior of bone: A review for designing bio-inspired hierarchical metamaterials", *Math. Mech. Solids* **26** (2021), no. 7, p. 1074-1103.
- [4] L. Placidi, L. Greco, S. Bucci, E. Turco, N. L. Rizzi, "A second gradient formulation for a 2D fabric sheet with inextensible fibres", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **67** (2016), no. 5, article no. 114 (1-24 pages).
- [5] I. Giorgio, A. Ciallella, D. Scerrato, "A study about the impact of the topological arrangement of fibers on fiber-reinforced composites: some guidelines aiming at the development of new ultra-stiff and ultra-soft metamaterials", *Int. J. Solids Struct.* **203** (2020), p. 73-83.

- [6] F. dell'Isola, "La mécanique dans le style français: un outil puissant pour la découverte, Mechanics in the French style: a powerful tool for discovery", 2022, p. at minute 40:00., <https://www.youtube.com/watch?v={Asxw}72{EL}37g&t=1499s>.
- [7] F. dell'Isola, "The Principle of Virtual Work: A powerful tool for discovery and metamaterials design", 2022, ICONSOM 2022 Alghero Plenary Lecture, <https://www.youtube.com/watch?v=dGPYfo24wIg&list=PLWzK5oO41smV-7d3O8lbv7QoCZJ-P7oN&index=4&t=155s>.
- [8] A. Misra, "Granular micromechanics: bridging grain interactions and continuum descriptions", 2019, CONSOM 2019 Rome Plenary Lecture, <https://www.youtube.com/watch?v=krhPC2xOdZQ>.
- [9] T. N. Winter, "The mechanical problems in the corpus of Aristotle", <https://digitalcommons.unl.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1067&context=classicsfacpub>, 2007.
- [10] M. Schiefsky, "Structures of argument and concepts of force in the Aristotelian Mechanical Problems", in *Evidence and Interpretation in Studies on Early Science and Medicine*, Brill, 2010, p. 43-67.
- [11] C. A. Truesdell, R. Toupin, "The classical field theories", in *Principles of classical mechanics and field theory/Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie*, Springer, 1960, p. 226-858.
- [12] Kanāda, *The Vaiśeṣhika Aphorisms of Kanāda: With Comments from the Upaskāra of Śāṅkara Misra and the Vivritti of Jaya-Nārāyana Tarkapanchānana*, Oriental Books, 1873.
- [13] Kanāda, *Matter and Mind: The Vaiśeṣhika Sūtra of Kanāda, Translated:Kak, S*, Mount Meru Publishing, 2016.
- [14] P. McLaughlin, "The Question of the Authenticity of the Mechanical Problems", [https://www.uni-heidelberg.de/md/philsem/personal/mclaughlin\\_authenticity\\_2013\\_2.pdf](https://www.uni-heidelberg.de/md/philsem/personal/mclaughlin_authenticity_2013_2.pdf), 2013.
- [15] L. Russo *et al.*, *The forgotten revolution: how science was born in 300 BC and why it had to be reborn*, Springer, 2003.
- [16] A. R. Oliveira *et al.*, "D'Alembert: Between Newtonian Science and the Cartesian Inheritance", *Advances in Historical Studies* **6** (2017), no. 1, p. 128-144.
- [17] J. M. Keynes, "Newton, the man", in *Essays in Biography*, Springer, 2010, p. 363-374.
- [18] M. White, *Isaac Newton: the last sorcerer*, vol. 176, Fourth Estate London, 1997.
- [19] N. Nejadsadeghi, A. Misra, "Role of higher-order inertia in modulating elastic wave dispersion in materials with granular microstructure", *International Journal of Mechanical Sciences* **185** (2020), article no. 105867.
- [20] E. Mach, *The science of mechanics: A critical and historical exposition of its principles*, Open court publishing Company, 1893.
- [21] F. dell'Isola, M. Stilz, "ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik", *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* (2022).
- [22] C. A. Truesdell, "A program toward rediscovering the rational mechanics of the age of reason", *Arch. Hist. Exact Sci.* **1** (1960), p. 3-36.
- [23] C. A. Truesdell, *Essays in the History of Mechanics*, Springer, 2012.
- [24] S. Timoshenko, *History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures*, Courier Corporation, 1983.
- [25] C. A. Truesdell, *A First Course in Rational Continuum Mechanics VI*, Academic Press Inc., 1992.
- [26] M. Planck, "The Principle of least action", in *A survey of physical theory*, Courier Corporation, 1960, p. 69-81.
- [27] E. Benvenuto, A. Becchi, M. Corradi, F. Foce, *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico: passim*, Edizioni di storia e letteratura., 2007.
- [28] E. Benvenuto, *An introduction to the history of structural mechanics: Part I: Statics and resistance of solids*, Springer, 2012.
- [29] G. W. Milton, A. V. Cherkaev, "Which elasticity tensors are realizable?", *J. Eng. Mater. Technol.* **117** (1995), p. 483-493.
- [30] T. S. Kuhn, *The structure of scientific revolutions*, vol. 111, University of Chicago Press, 1962.
- [31] A. C. Eringen, *Microcontinuum field theories: I. Foundations and Solids*, Springer, 1999.
- [32] B. G.-g. Chen, B. Liu, A. A. Evans, J. Paulose, I. Cohen, V. Vitelli, C. Santangelo, "Topological mechanics of origami and kirigami", *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016), article no. 135501 (13 pages).
- [33] Z. Zhai, L. Wu, H. Jiang, "Mechanical metamaterials based on origami and kirigami", *Applied Physics Reviews* **8** (2021), article no. 041319 (4 pages).
- [34] E. Barchiesi, F. dell'Isola, F. Hild, P. Seppacher, "Two-dimensional continua capable of large elastic extension in two independent directions: asymptotic homogenization, numerical simulations and experimental evidence", *Mech. Res. Commun.* **103** (2020), article no. 103466.
- [35] E. Barchiesi, F. dell'Isola, A. M. Bersani, E. Turco, "Equilibria determination of elastic articulated duoskelion beams in 2D via a Riks-type algorithm", *Int. J. Non-Linear Mech.* **128** (2021), article no. 103628.
- [36] I. Giorgio, "Lattice shells composed of two families of curved Kirchhoff rods: an archetypal example, topology optimization of a cycloidal metamaterial", *Optimization* **33** (2021), no. 4, p. 1063-1082.
- [37] A. Ciallella, D. Pasquali, M. Gołaszewski, F. D'Annibale, I. Giorgio, "A rate-independent internal friction to describe the hysteretic behavior of pantographic structures under cyclic loads", *Mech. Res. Commun.* **116** (2021), article no. 103761.

- [38] I. Giorgio, "A variational formulation for one-dimensional linear thermoviscoelasticity", *Math. Mech. Complex Syst.* **9** (2021), no. 4, p. 397-412.
- [39] I. Giorgio, "A discrete formulation of Kirchhoff rods in large-motion dynamics", *Math. Mech. Solids* **25** (2020), no. 5, p. 1081-1100.
- [40] E. Turco, A. Misra, R. Sarikaya, T. Lekszycki, "Quantitative analysis of deformation mechanisms in pantographic substructures: experiments and modeling", *Contin. Mech. Thermodyn.* **31** (2019), p. 209-223.
- [41] C. Navier, "Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques", *Memoire de l'Academie Royale de Sciences* **7** (1827), p. 375-393.
- [42] A.-L. Cauchy, "Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle", *Exercices de Mathématiques* **3** (1828), no. 1822.
- [43] F. dell'Isola, G. Maier, U. Perego, U. Andreaus, R. Esposito, S. Forest, *The complete works of Gabrio Piola: Volume I, english and italian ed.*, vol. 2014, Springer, 2014.
- [44] P. Seppecher, J.-J. Alibert, F. dell'Isola, "Linear elastic trusses leading to continua with exotic mechanical interactions", *J. Phys., Conf. Ser.* **319** (2011), article no. 012018.
- [45] J.-J. Alibert, P. Seppecher, F. dell'Isola, "Truss modular beams with deformation energy depending on higher displacement gradients", *Math. Mech. Solids* **8** (2003), no. 1, p. 51-73.
- [46] F. dell'Isola, P. Seppecher, J.-J. Alibert, T. Lekszycki, R. Grygoruk, M. Pawlikowski, D. Steigmann, I. Giorgio, U. Andreaus, E. Turco, M. Gołaszewski, N. L. Rizzi, C. Boutin, V. A. Eremeyev, A. Misra, L. Placidi, E. Barchiesi, L. Greco, M. Cuomo, A. Cazzani, A. D. Corte, A. Battista, D. Scerrato, I. Z. Eremeeva, Y. Rahali, J.-F. Ganghoffer, W. Mueller, G. Ganzosch, M. Spagnuolo, A. Pfaff, K. Barcz, K. Hoschke, J. Neggens, F. Hild, "Pantographic metamaterials: an example of mathematically driven design and of its technological challenges", *Contin. Mech. Thermodyn.* **31** (2018), no. 4, p. 851-884.
- [47] R. Fedele, "Piola's approach to the equilibrium problem for bodies with second gradient energies. Part I: First gradient theory and differential geometry", *Contin. Mech. Thermodyn.* **34** (2022), no. 2, p. 445-474.
- [48] R. Fedele, "Approach à la Piola for the equilibrium problem of bodies with second gradient energies. Part II: Variational derivation of second gradient equations and their transport", *Contin. Mech. Thermodyn.* **34** (2022), p. 1087-1111.
- [49] A. Misra, L. Placidi, F. dell'Isola, E. Barchiesi, "Identification of a geometrically nonlinear micromorphic continuum via granular micromechanics", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **72** (2021), no. 4, article no. 157 (21 pages).
- [50] N. NejadSadeghi, A. Misra, "Extended granular micromechanics approach: a micromorphic theory of degree  $n$ ", *Math. Mech. Solids* **25** (2020), no. 2, p. 407-429.
- [51] F. dell'Isola, P. Seppecher, A. Madeo, "How contact interactions may depend on the shape of Cauchy cuts in  $N$ -th gradient continua: approach "à la D'Alembert"", *Z. Angew. Math. Phys.* **63** (2012), no. 6, p. 1119-1141.
- [52] R. D. Mindlin, "Microstructure in linear elasticity", Tech. Report 50, Columbia Univ New York Dept of Civil Engineering and Engineering Mechanics, 1963.
- [53] R. D. Mindlin, "Micro-Structure in Linear Elasticity", *Arch. Ration. Mech. Anal.* **16** (1964), no. 1, p. 51-78.
- [54] A. E. Green, R. S. Rivlin, "Multipolar continuum mechanics", in *Collected Papers of R. S. Rivlin*, Springer, 1997, p. 1754-1788.
- [55] G. La Valle, "A new deformation measure for the nonlinear micropolar continuum", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **73** (2022), no. 2, article no. 78 (26 pages).
- [56] V. A. Eremeyev, A. Cazzani, F. dell'Isola, "On nonlinear dilatational strain gradient elasticity", *Contin. Mech. Thermodyn.* **33** (2021), no. 4, p. 1429-1463.
- [57] V. A. Eremeyev, E. Turco, "Enriched buckling for beam-lattice metamaterials", *Mech. Res. Commun.* **103** (2020), article no. 103458.
- [58] S. Crandall, D. Karnopp, E. Kurtz, D. Pridmore-Brown, *Dynamics of Mechanical and Electromechanical Systems*, Courier Corporation, 1982.
- [59] S. Alessandrini, U. Andreaus, F. Dell'Isola, M. Porfiri, "Piezo-electromechanical (PEM) Kirchhoff-Love plates", *European Journal of Mechanics-A/Solids* **23** (2004), no. 4, p. 689-702.
- [60] I. Giorgio, L. Galantucci, A. Della Corte, D. Del Vescovo, "Piezo-electromechanical smart materials with distributed arrays of piezoelectric transducers: current and upcoming applications", *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics* **47** (2015), no. 4, p. 1051-1084.
- [61] E. Barchiesi, S. R. Eugster, L. Placidi, F. dell'Isola, "Pantographic beam: a complete second gradient 1D-continuum in plane", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **70** (2019), no. 5, article no. 135 (24 pages).
- [62] F. dell'Isola, I. Giorgio, M. Pawlikowski, N. L. Rizzi, "Large deformations of planar extensible beams and pantographic lattices: heuristic homogenization, experimental and numerical examples of equilibrium", *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A* **472** (2016), no. 2185, article no. 20150790.
- [63] M. Spagnuolo, M. E. Yildizdag, X. Pinelli, A. Cazzani, F. Hild, "Out-of-plane deformation reduction via inelastic hinges in fibrous metamaterials and simplified damage approach", *Math. Mech. Solids* **27** (2022), no. 6, p. 1011-1031.



- [64] G. La Valle, A. Ciallella, G. Falsone, "The effect of local random defects on the response of pantographic sheets", *Math. Mech. Solids* **27** (2022), no. 10, p. 2147-2169.
- [65] M. Valmalle, A. Vintache, B. Smaniotto, F. Gutmann, M. Spagnuolo, A. Ciallella, F. Hild, "Local-global DVC analyses confirm theoretical predictions for deformation and damage onset in torsion of pantographic metamaterial", *Mech. Mater.* **172** (2022), article no. 104379.
- [66] A. Ciallella, D. Pasquali, F. D'Annibale, I. Giorgio, "Shear rupture mechanism and dissipation phenomena in bias-extension test of pantographic sheets: Numerical modeling and experiments", *Math. Mech. Solids* **27** (2022), no. 10, p. 2170-2188.
- [67] B. E. Abali, E. Barchiesi, "Additive manufacturing introduced substructure and computational determination of metamaterials parameters by means of the asymptotic homogenization", *Contin. Mech. Thermodyn.* **33** (2021), no. 4, p. 993-1009.
- [68] G. Aydin, M. E. Yildizdag, B. E. Abali, "Strain-Gradient Modeling and Computation of 3-D Printed Metamaterials for Verifying Constitutive Parameters Determined by Asymptotic Homogenization", in *Theoretical Analyses, Computations, and Experiments of Multiscale Materials*, Advanced Structured Materials, vol. 175, Springer, 2022, p. 343-357.
- [69] M. Gołaszewski, R. Grygoruk, I. Giorgio, M. Laudato, F. Di Cosmo, "Metamaterials with relative displacements in their microstructure: technological challenges in 3D printing, experiments and numerical predictions", *Contin. Mech. Thermodyn.* **31** (2019), p. 1015-1034.
- [70] Z. Vangelatos, V. Melissinaki, M. Farsari, K. Komvopoulos, C. Grigoropoulos, "Intertwined microlattices greatly enhance the performance of mechanical metamaterials", *Math. Mech. Solids* **24** (2019), no. 8, p. 2636-2648.
- [71] M. De Angelo, L. Placidi, N. Nejadi Sadeghi, A. Misra, "Non-standard Timoshenko beam model for chiral metamaterial: identification of stiffness parameters", *Mech. Res. Commun.* **103** (2020), article no. 103462.
- [72] N. Nejadi Sadeghi, F. Hild, A. Misra, "Parametric Experimentation to Evaluate Chiral Bars Representative of Granular Motif", *International Journal of Mechanical Sciences* **221** (2022), article no. 107184.
- [73] A. Misra, N. Nejadi Sadeghi, M. De Angelo, L. Placidi, "Chiral metamaterial predicted by granular micromechanics: verified with 1D example synthesized using additive manufacturing", *Contin. Mech. Thermodyn.* **32** (2020), p. 1497-1513.
- [74] I. Giorgio, F. dell'Isola, A. Misra, "Chirality in 2D Cosserat media related to stretch-micro-rotation coupling with links to granular micromechanics", *Int. J. Solids Struct.* **202** (2020), p. 28-38.
- [75] F. dell'Isola, P. Seppecher, A. Della Corte, "The postulations *à la D'Alembert* and *à la Cauchy* for higher gradient continuum theories are equivalent: a review of existing results", *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A* **471** (2015), no. 2183, article no. 20150415 (25 pages).
- [76] R. Fedele, "Simultaneous assessment of mechanical properties and boundary conditions based on Digital Image Correlation", *Exp. Mech.* **55** (2015), p. 139-153.
- [77] R. Fedele, A. Ciani, L. Galantucci, V. Casalegno, A. Ventrella, M. Ferraris, "Characterization of innovative CFC/Cu joints by full-field measurements and finite elements", *Mater. Sci. Eng. A* **595** (2014), p. 306-317.
- [78] N. Shekarchizadeh, M. Laudato, L. Manzari, B. E. Abali, I. Giorgio, A. M. Bersani, "Parameter identification of a second-gradient model for the description of pantographic structures in dynamic regime", *Z. Angew. Math. Phys.* **72** (2021), no. 6, article no. 190.





---

Research article / *Article de recherche*

The French “Année de la Mécanique”: some views on recent advances in solid and fluid mechanics / *L'année de la mécanique : quelques points de vue sur des avancées récentes en mécanique des solides et des fluides*

## Irreducible representation of surface distributions and Piola transformation of external loads sustainable by third gradient continua

*Représentation irréductible des distributions surfaciques et transformation de Piola des charges externes soutenables par un continuum de troisième gradient*

Francesco dell'Isola<sup>Ⓢ,\*</sup>,<sup>a</sup> and Roberto Fedele<sup>Ⓢ</sup>,<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Department of Civil, Construction-Architectural and Environmental Engineering (DICEAA), University of L'Aquila, Piazzale Ernesto Pontieri, Monteluco di Roio, 67100 L'Aquila, and International Research Center on Mathematics and Mechanics of Complex Systems (MEMOCS), University of L'Aquila, L'Aquila, Italy.  
URL: [www.fdelisola.it](http://www.fdelisola.it)

<sup>b</sup> Department of Civil and Environmental Engineering (DICA), Politecnico di Milano, Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milan, Italy.  
URL: [www.robertofedele.com](http://www.robertofedele.com)

E-mails: [francesco.dellisola@univaq.it](mailto:francesco.dellisola@univaq.it) (F. Dell'Isola), [roberto.fedele@polimi.it](mailto:roberto.fedele@polimi.it) (R. Fedele)

**Abstract.** In this paper Piola transformations are found that relate the Eulerian and Lagrangian external loads which third gradient continua can sustain. As shown by Gabrio Piola and Paul Germain, the most effective postulation scheme in mechanics is based on the principle of virtual work and therefore continuum mechanics must be mathematically founded based on the theory of distributions and on differential geometry. Using the principle of virtual work, the set of admissible external loads sustainable by third gradient continua is seen to include: i) volume force density, ii) surface density of contact force, iii) surface density of contact double force, iv) surface density of contact triple force, v) line density of edge contact forces, vi) line density of contact edge double forces and vii) contact forces concentrated on wedge points. Following the nomenclature introduced by Paul Germain, forces are dual in virtual work of virtual displacements, surface and line

---

\*Corresponding author

double forces are dual of the derivatives of virtual displacements in the normal direction(s) of the surfaces and edges constituting the boundary of the continuum, and surface triple forces are dual of the second normal derivatives of virtual displacements. Volume and surface forces transform as in first gradient Cauchy continua. Moreover we find that: a) the virtual work expended by Eulerian surface triple force, when transformed into the Lagrangian description, must be represented as the work expended by all the kinds of external Lagrangian loads listed in i)-vii); b) Eulerian surface double force transforms into Lagrangian surface double force, surface contact force and edge contact line force; c) Eulerian edge contact line double force transforms into Lagrangian edge contact line double forces, edge line forces and point concentrated wedge forces; d) Eulerian edge and wedge contact line forces transforms into their Lagrangian counterpart only. The Piola transformation formulas deduced in this paper depend on the first, second and third gradients of placement. The presented results allow for the formulation of well-posed boundary condition problems for third gradient continua in the Lagrangian description, and are relevant in computational mechanics. In view of the obtained Piola transformation formulas, the concept of dead loads needs to be modified. We believe to have given an example of how the *Mechanics in the French Style*, as developed on the ideas by D'Alembert and Lagrange, is still a fertile tool of invention.

**Résumé.** Dans cet article, on trouve les transformations de Piola qui relient les charges externes Eulériennes et Lagrangiennes que les milieux continus de troisième gradient peuvent soutenir. Comme l'ont montré Gabrio Piola et Paul Germain, le schéma de postulation le plus efficace en mécanique est basé sur le principe des travaux virtuels et, par conséquent, la mécanique des continus doit être mathématiquement fondée sur la théorie des distributions. En utilisant le principe des travaux virtuels, l'ensemble des charges externes admissibles soutenables par les continus de troisième gradient comprend : i) la densité de force volumique, ii) la densité de surface de la force de contact, iii) la densité de surface de la double force de contact, iv) la densité de surface de la triple force de contact, v) la densité linéaire des forces de contact de bord, vi) la densité linéaire des doubles forces de contact de bord et vii) les forces de contact concentrées sur les points de coin. Suivant la nomenclature introduite par Paul Germain, les forces sont duales en travail virtuel des déplacements virtuels, les forces doubles de surface et de ligne sont duales des dérivées des déplacements virtuels dans la ou les directions normales des surfaces et des bords constituant la frontière du continuum et les forces triples de surface sont duales des dérivées secondes normales des déplacements virtuels. Les forces de volume et de surface se transforment comme dans les milieux continus de Cauchy à premier gradient. En plus, nous trouvons que a) le travail virtuel dépensé par la force triple de surface Eulérienne, lorsqu'elle est transformée en description Lagrangienne, doit être représentée comme le travail dépensé par tous les types de charges Lagrangiennes externes énumérées aux points i)-vii) ; b) la force double de surface Eulérienne se transforme en force double de surface, en force de contact de surface et en force de ligne de contact Lagrangiennes, c) la force double de ligne de contact Eulérienne se transforme en doubles forces de ligne de contact Lagrangiennes, en forces de ligne et en forces de coin concentrées, d) les forces de ligne de contact de bord et de coin Eulériennes se transforment uniquement en leur contrepartie Lagrangienne. Les formules de transformation de Piola déduites dans cet article dépendent des premier, deuxième et troisième gradients du placement. Les résultats présentés permettent la formulation de problèmes de conditions aux limites bien posés pour les milieux continus de troisième gradient dans la description Lagrangienne et sont pertinents en mécanique computationnelle. Compte tenu des formules de transformation de Piola obtenues, le concept de charges mortes doit être aussi modifié. Nous pensons avoir donné un exemple de la façon dont la « Mécanique à la française », telle qu'elle a été développée à partir des idées de D'Alembert et de Lagrange, est toujours un outil de découverte fertile.

**Keywords.** Third-gradient materials, Principle of Virtual Work, Piola Transformation, Eulerian description, Lagrangian description, Distribution theory, Differential Geometry.

**Mots-clés.** Continuum de troisième gradient, Principe des Travaux Virtuels, Transformations de Piola, Description lagrangienne, Description Eulerienne, Théorie des distributions, Géométrie différentielle.

*Manuscript received 25 August 2022, accepted 25 November 2022.*

## 1. Introduction

The aim of this paper is to find Piola transformations for admissible sustainable loads in third gradient continua. The conceptual framework that we accept is that given by the postulation of continuum mechanics based on the principle of virtual work. This principle has been systematically used since the most ancient known mathematized mechanical theories were formulated in the pseudo-Aristotelian *Μεχανικά Προβλήματα*. In the following centuries, it revealed itself to be the most reliable guide to invent novel mathematical models for describing physical phenomenology. In mentioned apocryphal collection of exercises of mechanics, included in the *Corpus Aristotelicum*, sometimes attributed to Archytas of Tarentum [1] and dated, depending on the commentators, in the period between the IV century BC and the II century BC, one finds the first “great” unification theory: 35 problems of relevance in Engineering applications, which were studied separately on the basis of different principles, are discussed using always the same and unique principle, the principle of virtual work, with the support of the logical structure given by Euclidean geometry.

The foundational attitude which animated the *Μεχανικά Προβλήματα* has been revived many centuries later by the French-Italian school of mechanics headed by D’Alembert, Lagrange and Gabrio Piola. Albeit the principle of virtual work has been too often considered “controversial” (see already [2, 3]) it has been recognized many times to be the most effective tools for guiding the invention of novel mathematical models in mechanical sciences (see [4, 5]).

D’Alembert in his *Traité de Dynamique* (1768) explicitly states that the range of application of mechanics must be “enlarged in reducing the number of the principles on which it is based”. This is exactly what has been done by Paul Germain, when he extended the possibilities of application for continuum mechanics by renouncing to use many balance laws (balance of forces, of torques of microforces and so on) and by concentrating in the systematic use of the principle of virtual work for formulating generalized continuum models (see [6–8] and the more recent works [9, 10]).

In the present paper, we want to give a further example of the application of the principle of virtual work to perfect some parts of continuum mechanics, which cannot be developed by using the postulation based on the balance of forces and torques, and which seems very promising in their applications to their use for the design of novel metamaterials [11–13]. The mathematical tools used here are taken from a more modern version of Euclidean geometry: modern differential geometry, originated from the works of Gauss and Riemann and developed using absolute tensor calculus by Levi–Civita and Ricci in the form presented in the fundamental textbook by Lichnerowicz [14].

In this way we want to contribute to substantiate the following statement:

« “Mechanics in the French Style”, as developed on the ideas by D’Alembert and Lagrange, remains the most powerful and fertile tool of invention in mechanical sciences ».

### 1.1. *Third-gradient continua: summary of main concepts*

The virtual work functionals to be used for third-gradient continua are third-order distributions (see [15] and [6–8]), when virtual displacements are regarded as test functions. Therefore, their deformation energy density depends on the derivatives of the placement field up to the third order, see e.g. [15, 16]. Third gradient internal virtual work functional requires a second-order stress tensor and hyper-stress tensors of order three and four, called double and triple stresses, see e.g. [17, 18]. By iterated integrations by parts, also extended to the faces, edges and wedges of the continuum boundary, all regarded as embedded manifolds with boundary [15, 19, 20], the internal virtual work functional can be represented as the sum of distributions concentrated on volumes, surfaces, curves and points [15, 21].

As proven in [15], also for higher-gradient continua a Cauchy representation theorem for contact loads in terms of hyper-stress tensors can be proven, using an integration by parts argument. Therefore the class of admissible sustainable external loads for  $n^{\text{th}}$  gradient continua is easily determined once the Principle of Virtual Work is accepted. External loads applicable to third-gradient continua include surface  $k$ -forces with  $k = 1, 2, 3$ , line  $h$ -forces with  $k = 1, 2$  and wedge forces: well-posed boundary problems for third gradient continua are thus easily deduced without any *ad hoc* assumption.

### 1.2. Meta-materials architectures and higher gradient continuum models

Higher-gradient continua are models suitable to describe the macroscopic behaviour of mechanical systems exhibiting multi-scale structure. We simply cite here few interesting phenomenological context plural where size effects, determined by characteristic multiple length scales, play a relevant role: materials with nano architecture [22], systems where boundary layers [23–25] or contact lines [26] arise, surface tension in fluids [27].

Rather interestingly, in the present context, it has to be recalled that the homogenized continua corresponding to a large class of truss micro-architectures have been studied (see [28–30]): in particular, it has been proven that, by using three length-scales, it is possible to design beams whose deformation energy depends on the third gradient of transverse displacement. Therefore the problem of synthesis of third gradient beams has found a positive solution, so further motivating the study of third gradient continua. In fact, we conjecture that, by using the design scheme of pantographic micro-structures, and replacing the Euler beams with the third gradient beams synthesized in [29] it will be possible to design third gradient 2D and 3D continua (see e.g. [31]).

The theoretical results about higher gradient continua have been exploited to design experiments involving multi-scale 3D printed micro-architectures: correspondingly suitable multi-scale Digital Image Correlation procedures have been conceived, both using images of a free surface (2D DIC) or within the bulk (Digital Volume Correlation DVC) (see e.g. [32–35]): this circumstance proves the importance in the engineering applications of generalized continuum theories.

Finally, it has to be remarked that, to our knowledge, any result about existence, uniqueness and stability of third-gradient models has not been yet found, albeit it seems to us that the methods exploited in [36–38] should be easily generalized: this means that higher gradient continuum theories can give inspiration to more advanced mathematical investigations.

Although Gabrio Piola, already in [3], introduced higher gradient continua, via an asymptotic homogenization procedure, only recently the need of such continua in modelling exotic mechanical phenomena has been fully recognized. This circumstance is mainly due to the opposition of Truesdellian school, in which it is often believed that balance laws, using the approach *à la Cauchy*, are the only basic principles at the basis of mechanics and that “exotic”  $h$ -forces do not “exist”, see e.g. [4, 39]. Instead, in the case of  $n^{\text{th}}$  gradient continua,  $h$ -forces appear naturally (being  $h \leq n$ ), by duality in the postulation of mechanics based on the principle of the virtual work [40] and supply a powerful tool for model formulation.

We expect that the study of continuum mechanics based on the principle of virtual work, and in particular the presented investigations about third-gradient continua, will pave the way towards the synthesis of novel metamaterials, exhibiting a larger variety of mechanical behaviour.

### 1.3. Organization of the paper

In the present paper the results in [20, 41] are generalized: we prove that Eulerian external  $h$ -forces, under Piola transformations, originate all the lower order Lagrangian forces on lower dimension submanifolds of the continuum boundary.

The paper is organized as follows. In the continuation of this first section we introduce the used notations and the first kinematical and geometrical concepts. A warning is repeated here: Lagrangian quantities and indices are chosen to be represented by capital letters, while Eulerian with lowercase letters. However, in order to decrease the complexity of notations, many general results from differential geometry are presented with capital letters but are clearly valid in general.

In Section 2, the class of admissible generalized loadings which can be sustained by third gradient continua, as found in the literature, is shortly described. The essential nomenclature, based on that introduced by Germain, is also recalled.

In Section 3, some useful preliminary concepts and results from modern differential geometry of embedded manifolds with boundaries, as originated from the works of Gauss and Riemann, are recalled. Also some relationships useful in the sequel are established. The concept of piecewise regular surfaces is introduced and explained via some figures. In piecewise regular surfaces, the field of normal unit vectors jumps on a finite number of curves (more technical details about this point are given in [15]). These surfaces are composed by faces, each of which can be regarded as a two-dimensional embedded manifold with boundary. The curves of discontinuity of normals are to be regarded as parts of the boundary of each concurring face, and are called edges. Finally a finite number of edges are concurring on wedges, where the tangent vectors of concurring curves are discontinuous.

In Section 4, the problem of finding the irreducible representation of second-order surface distributions is confronted in the case in which the surface, on which the distribution is concentrated is piecewise regular. Also some formulas are found, useful for integration by parts.

In Section 5, the preparatory concepts are concluded by proving the Piola transformations formulas for the shapes of differential boundaries of reference into current configurations.

In Section 6, finally the Piola transformations of external loads sustainable by third gradient continua are obtained. They link externally applied loads in the current configuration with those applied in the reference configuration.

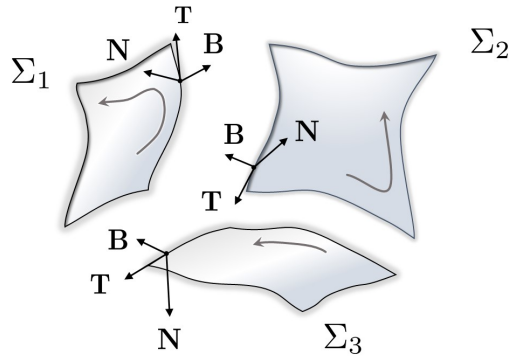
In Section 7, some conclusions and research perspectives are presented. In particular it is discussed the possibility of extending the present results to the more general case of  $n^{\text{th}}$  gradient continua.

#### 1.4. *Used notations, kinematical and geometrical concepts*

We use tensor indicial Levi–Civita notation, with Einstein convention the sum of repeated indices. We believe that the distinction between contravariant and covariant components is essential in the present context, as displacements and velocities are naturally to be identified as having contravariant components, and therefore forces and stresses need covariant components to saturate, in work or power expressions, virtual displacements or velocities.

In order to make the used formulas more readable, Eulerian and Lagrangian quantities and components will be denoted respectively by lowercase and uppercase letters. For instance the Lagrangian and Eulerian gradient operators components will be denoted respectively by the symbols  $\frac{\partial}{\partial X^A}$  and  $\frac{\partial}{\partial x^a}$ . As it plays a crucial role in our presentation, the derivative along the direction of the unit vector  $N^R$  will be denoted as  $\frac{\partial}{\partial N} := N^R \frac{\partial}{\partial X^R}$ .

Given a domain  $D$  with dimension  $i$  ( $i = 3, 2, 1$ ), symbol  $\partial D$  will denote its differential border, having dimension  $(i - 1)$ . As the differential border may not be smooth, we will need to consider the  $p^{\text{th}}$  order border, which is defined iteratively as follows:  $\partial^{(0)}\Omega := \Omega$ - and  $\partial^{(p)}D \equiv \partial \partial^{(p-1)}D$ . It has to be remarked that the standard formulation of the so-called Poincaré formula (see [42]) does not hold for the domains having the regularity which we are considering here (see [15] for more details on this subject).



**Figure 1.** Part of the volume boundary  $\partial\Omega$  constituted of oriented regular faces  $\Sigma$  (with the positive normals pointing outwards), with their differential boundaries including in turn piecewise regular edges oriented consistently. The mutually orthogonal, normalized vectors  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{N}$  specify a Darboux moving basis along such boundary edges.

We will consider here a continuum having the three-dimensional domain  $\Omega$ , with non-vanishing volume and included in the Euclidean space, as reference configuration. The placement  $\Pi$  of the continuum is assumed to be a bijection sufficiently regular that maps every material point in  $\Omega$  into its current position, hence invertible being its inverse equally regular.

The domain  $\Omega$  is called Lagrangian or material or reference configuration, while the domain  $\omega := \Pi(\Omega)$  is called Eulerian or spatial or current configuration. The domain  $\Omega$  (a three-dimensional manifold with piecewise regular differentiable boundary, see [15]) is assumed to be a differential boundary which is composed by faces, edges and wedges. Faces and edges are two-dimensional manifolds and one-dimensional manifolds respectively, whose differential boundaries are the edges and the wedges respectively. Edges are those curves on which faces are concurring and where the faces normals are discontinuous, wedges are those points where edges concur: the concurring edge tangent vectors of different edges may be different, see Fig. 1.

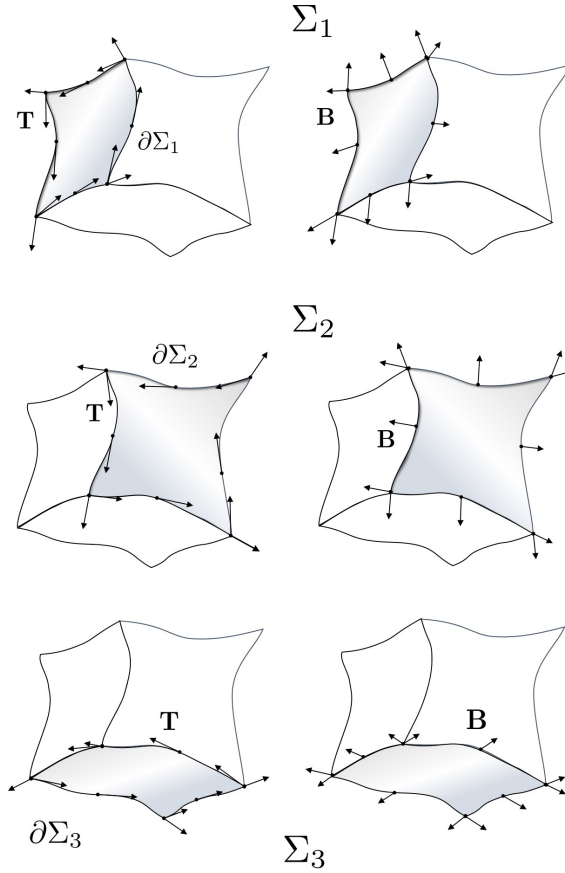
We denote  $\Sigma$ ,  $L$ , and  $P$  the surfaces, curves and points which are the supports of  $\partial\Omega$ ,  $\partial\partial\Omega$  and  $\partial\partial\partial\Omega$ : remark that, a curve, which belongs to the boundary of a face, is also a part of the boundary of another concurring face. Therefore the same curve has to be regarded as part of two different boundaries.

Assuming that the placement is sufficiently regular, the domain  $\omega := \Pi(\Omega)$  will have the same differential properties as  $\Omega$ : in this paper we refrain from the study of the process of edge and wedge formation in the passage from reference to current configuration. All the faces and edges, having co-dimension one and two, are oriented consistently with the orientation of the outward pointing normal field, with respect to  $\Omega$ , whose components are denoted  $N^R$ .

### 1.5. *Distinction between Eulerian and Lagrangian fields and quantities: important notational warning*

In this paper we will need to discuss some differential geometry properties of the boundaries for both Eulerian and Lagrangian configurations of third-gradient continua. Moreover we will consider both Eulerian and Lagrangian fields to establish several relationships among them. In order to make the presentation less cumbersome we have not formulated in a general formalism all the needed properties, and subsequently reformulated them in either the Lagrangian or Eulerian description, when required. Instead we have discussed them in the Lagrangian description, by





**Figure 2.** Edge tangent and tangent normal vectors (in the order denoted by symbols **T** and **B**) running along the differential boundary  $\partial\Sigma$  of each oriented regular face  $\Sigma$ . Wedges are easily recognized as discontinuity points for the tangent (and for the tangent normal).

using the convention that every relevant Lagrangian quantity is denoted with uppercase letters. The reader will easily reconstruct, when necessary, the required relationships in the Eulerian description simply by denoting the Eulerian counterparts of every Lagrangian quantity or field by using the same letter, but lowercase.

For instance in the Eulerian configuration, we denote  $\sigma$ ,  $\lambda$ , and  $p$  the surfaces, curves and points which are the supports of  $\partial\omega$ ,  $\partial\partial\omega$  and  $\partial\partial\partial\omega$ .

**2. Admissible generalized loadings which can be sustained by third gradient continua**

We introduce two different vector bases: one for the reference (denoted  $\{E_B\}$ ) and one for the current configuration (denoted  $\{e_i\}$ ). As always needed when distinguishing contravariant from covariant components, we also introduce, in both the reference and actual configurations, Riemannian metric tensors, whose components are denoted in the specified bases by  $G_{AB}$  and  $g_{ij}$ , respectively.

Along any curved edge, regarded as part of the boundary of a face having normal **N**, one can define the field of bases constituted by the triples **T**, **N** and **B** := **T**  $\wedge$  **N**, where **T** denoted the edge

tangent: both  $\mathbf{T}$  and the normal  $\mathbf{B}$  to the boundary of the face belong to the plane tangent to the face. The vector  $\mathbf{B}$  is also called *the tangent normal* to the edge (see Figs. 1 and 2).

The introduced continuum deformation is specified by the diffeomorphism  $\Pi$  between  $\Omega$  and  $\omega$ : therefore many concepts and results of differential geometry [43–45] will be used in the following. This diffeomorphism will play an important role also when developing the theory of generalised continua (see e.g. [18]) where additional kinematic descriptors are needed: in fact  $\Pi$  allows for the establishment of the correspondence between any Lagrangian field  $\Psi(X)$  (with  $X \in \Omega$ ) with the Eulerian field  $\Psi(\Pi^{-1}(x))$  (with  $x \in \omega$ ).

Finally we will denote the placement gradient with the symbol

$$\mathbf{F} = \partial\chi/\partial\mathbf{X},$$

and assume that

$$J := \det(\mathbf{F}) > 0.$$

For third-gradient continua (see e.g. [15, 21] and in the linear case [46]), the sustainable admissible external virtual work functional, in Lagrangian form, has the form:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W}^{\text{ext}} = & \int_{\Omega} \mathcal{F}_{\Omega i}^{\text{ext}} \delta\Pi^i d\Omega (V) + \int_{\Sigma} \mathcal{F}_{\Sigma i}^{\text{ext}} \delta\Pi^i d\Sigma (S) \\ & + \int_{\Sigma} \mathcal{F}_{\Sigma Ni}^{\text{ext}} \frac{\partial \delta\Pi^i}{\partial N} d\Sigma (SN) + \int_{\Sigma} \mathcal{F}_{\Sigma NNi}^{\text{ext}} \frac{\partial^2 \delta\Pi^i}{\partial N^2} d\Sigma (SNN) + \\ & + \int_L \mathcal{F}_{Li}^{\text{ext}} \delta\Pi^i dL (L) + \int_L \mathcal{F}_{LNi}^{\text{ext}} \frac{\partial \delta\Pi^i}{\partial N} dL (LN) + \int_L \mathcal{F}_{LBi}^{\text{ext}} \frac{\partial \delta\Pi^i}{\partial B} dL (LB) + \\ & + \sum_{w=1}^{\#\text{wedge}} \mathcal{F}_{P_w i}^{\text{ext}} \delta\Pi^i (\mathbf{P}_w) (W). \end{aligned} \quad (1)$$

Each addend has been labeled with a letter having an obvious meaning: volume lowercase ( $V$ ) surface ( $S$ ), edge ( $L$ ) and wedge ( $W$ ) addend. When the considered load is dual of a first or second order normal derivative of virtual displacement the corresponding letters  $N$ ,  $B$ ,  $NN$  have been added.

The fields  $\mathcal{F}_{\Omega i}^{\text{ext}}(\mathbf{X})$ ,  $\mathcal{F}_{\Sigma i}^{\text{ext}}(\mathbf{X})$ ,  $\mathcal{F}_{Li}^{\text{ext}}(\mathbf{X})$  and  $\mathcal{F}_{P_w i}^{\text{ext}}$  map the material particle  $X$  or  $P_w$  belonging to the reference configuration into Eulerian vectors. These fields are defined, respectively in the domain  $\Omega$ , on its faces, on its edges and on its wedges: they are force densities per unit volume, per unit surface, per unit length and point forces.

Following (and extending) the nomenclature by Paul Germain (see [6–8])

- (1) the vector fields  $\mathcal{F}_{\Sigma Ni}^{\text{ext}}(\mathbf{X})$  and  $\mathcal{F}_{\Sigma NNi}^{\text{ext}}(\mathbf{X})$  can be called *external surface double* and *triple forces*, respectively: they are, respectively, a work (force times length) per unit surface, and a force times length squared per unit surface;
- (2) the vector fields  $\mathcal{F}_{LNi}^{\text{ext}}(\mathbf{X})$  and  $\mathcal{F}_{LBi}^{\text{ext}}(\mathbf{X})$  can be called *external edge double forces*, that are work (force times length) per unit line.

As the placement is assumed to be a diffeomorphism, the structure of external virtual work functional, as established by the theorem of Laurent Schwartz (see [47] and also [15]), is the same in both the Lagrangian and the Eulerian descriptions.

*Therefore one can obtain the expression for the Eulerian external work functional from the equation (1) simply replacing with lowercase letters the uppercase letters, and redefining the involved quantities in the Eulerian description.*

The reader should remark that the equation (1) is a particularization of the general representation formula for the external virtual work for a  $n^{\text{th}}$  gradient material, provided in [15].

### 3. Some useful preliminary concepts and results from differential geometry

The most important ancillary mathematical theory for continuum mechanics is differential geometry, as it is obviously understood once that the placement is identified as a diffeomorphism between reference and current configuration, and that the deformation can be interpreted as a change of Riemannian metrics in the reference configuration.

In this section, for seek of self consistency, we recall some results which we need in the development of our presentation. The reader needs to familiarize with them, and with the used Ricci–Levi–Civita notation, in order to follow the subsequent deductions.

#### 3.1. Definitory properties of faces and edges projectors

The content of this section is illustrated by the Figs. 1 and 2. Because of the accepted regularity assumptions, at each point of a regular face of  $\partial\Omega$ , its linear tangential and normal projection operators are well defined. Denoting them by  $[M_{\parallel}]_B^A$  and  $[M_{\perp}]_B^A$ , respectively, they enjoy the following properties:

$$[M_{\parallel}]_B^A + [M_{\perp}]_B^A = G_B^A, \quad \mathbf{M}_{\parallel} + \mathbf{M}_{\perp} = \mathbf{1}, \quad (2)$$

$$[M_{\perp}]_A^C = N^C N_A, \quad [\mathbf{M}_{\perp}] = \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}, \quad (3)$$

$$[M_{\parallel}]_A^C = G_A^C - N^C N_A, \quad [\mathbf{M}_{\parallel}] = \mathbf{1} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}, \quad (4)$$

$$[M_{\parallel}]_B^A [M_{\parallel}]_C^B = [M_{\parallel}]_C^A, \quad \mathbf{M}_{\parallel}^2 = \mathbf{M}_{\parallel}, \quad (5)$$

$$[M_{\perp}]_B^A [M_{\perp}]_C^B = [M_{\perp}]_C^A, \quad \mathbf{M}_{\perp}^2 = \mathbf{M}_{\perp}, \quad (6)$$

where  $G_B^A$  are the components of the unit operator, coincident with the mixed form of the metric tensor.

Similarly, at each point of an edge in  $\partial\partial\Omega$ , its linear tangential and normal projection operators are well defined. These projectors are denoted in the order by the symbols  $[M_{L\parallel}]_B^A$  and  $[M_{L\perp}]_B^A$  and enjoy the following properties:

$$[M_{L\parallel}]_A^E = T^E T_A, \quad \mathbf{M}_{L\parallel} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{T}, \quad (7)$$

$$[M_{L\perp}]_A^E = B^E B_A + N^E N_A, \quad \mathbf{M}_{L\perp} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}, \quad (8)$$

$$G_A^E = [M_{L\parallel}]_A^E + [M_{L\perp}]_A^E = T^E T_A + B^E B_A + N^E N_A, \quad (9)$$

which can be rewritten as

$$\mathbf{1} = \mathbf{M}_{L\parallel} + \mathbf{M}_{L\perp} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{T} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}.$$

#### 3.2. Deformative Riemannian metrics

As already understood by Piola (see [16]), the deformation of a continuum can be mathematically described by changing the inner product in the reference configuration. The placement-induced Riemannian metrics defined as

$$G^{*RS} := g^{rs} (\mathbf{F}^{-1})_r^R (\mathbf{F}^{-1})_s^S, \quad (10)$$

$$G_{AB}^* := \left( g^{rs} (\mathbf{F}^{-1})_r^A (\mathbf{F}^{-1})_s^B \right)^{-1} = g_{lm} F_A^l F_B^m, \quad (11)$$

is sometimes called the *pull-back* of the Eulerian metric tensor: it is naturally defined in its doubly contravariant form.

One obviously has that<sup>1</sup> for every co-vector  $V$

$$G^{*RQ} V_R V_Q = \|\mathbf{F}^{-T} \mathbf{V}\|_g^2, \quad (12)$$

(see [16, 19, 43]), where  $\|v\|_g = (g_{ab} v^a v^b)^{\frac{1}{2}}$  denotes the Eulerian norm.

It is easy to check that

$$\langle \mathbf{F}\mathbf{U}, \mathbf{F}\mathbf{V} \rangle_g = g_{lm} F_A^l F_B^m U^A V^B = G_{RQ}^* U^R V^Q. \quad (13)$$

In what follows we will need to introduce the following vector associated to  $V$

$$V^{*R} := G^{*RS} V_S. \quad (14)$$

It is the contravariant vector associated to  $V$  by using the pull-back metrics: obviously, in general, it differs from the contravariant form of the same vector (generated by the usual metrics):  $V^{*R} \neq V^R$ . In particular we will need the previous formula for the normal

$$N^{*R} := G^{*RS} N_S. \quad (15)$$

### 3.3. *The divergence theorem for submanifolds with boundary and a notational warning*

This theorem is probably the one which initiated differential geometry, and is essentially due to Gauss and Stokes. It applies to every Riemannian submanifolds, may it be one-dimensional (as a compact curve) or two-dimensional (as a surface): the interested reader may consult e.g. [44, 45] or [15] for further details.

Let us consider a submanifold  $S$  embedded in the Euclidean space and let  $\partial S$  denote its differential boundary. Let  $Q$  be the parallel projector on the tangent space to  $S$ .

Gauss divergence theorem on  $S$  states that for every vector field  $W$  defined on  $S$  the following equality holds

$$\int_S Q_A^C \frac{\partial}{\partial X^C} (Q_B^A W^B) dS = \int_{\partial S} Q_A^B W^A D_B d\partial S, \quad (16)$$

where the vector  $D$  is the vector tangent to  $S$  which is orthogonal to  $\partial S$ .

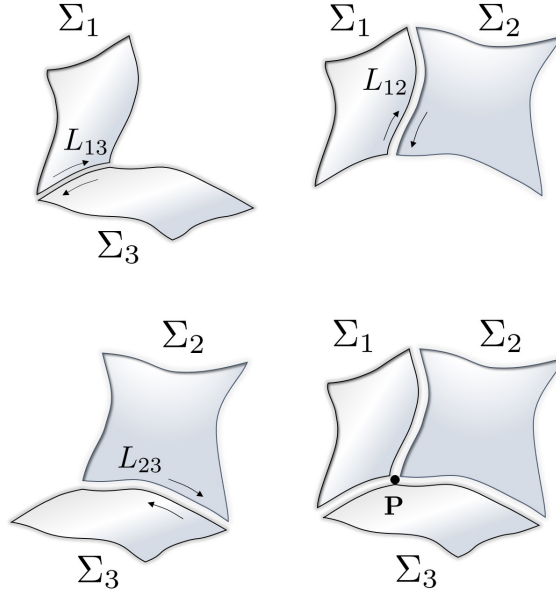
The integrand appearing at LHS of the equality defines the surface divergence of the vector field  $W$  sometimes also denoted with the symbol  $\text{DIV}_S(\mathbf{W})$ .

In the present paper this theorem is applied in four different instances: for Eulerian or Lagrangian faces or edges, constituting the differential boundary of the reference or for the current configurations.

In the present paper we will need to consider domains (in both the reference and current configuration) whose differential boundary is a piecewise regular surface, which can be regarded as the union of faces, edges and wedges (see Figs. 1-2). Each face can be regarded as a 2D submanifold, whose boundary is constituted by all the edges on which the face is concurring. Each edge can be regarded as part of the differential boundary of all the faces concurring on it: the limits on the edge of the face normals from every face are, in general, different, as different are the relative tangent normal vectors (see Figs. 2-3). Therefore, when applying the divergence theorem to every face of the considered piecewise regular surface, different edge fluxes coming from every face arise.

---

<sup>1</sup>Recalling that the normal to a manifold is naturally recognized as a co-vector, in the literature the Lagrangian co-vector having components  $(\mathbf{F}^{-1})_r^R N_R$  is denoted  $\mathbf{F}^{-T} \mathbf{N}$ .



**Figure 3.** Pairs of boundary faces  $\Sigma$  which share parts of the support of their differential border  $\partial\Sigma$ . Opposite orientations are induced along each border edge, when regarded as belonging to the boundary of one face or of the contiguous one. Herein the wedge point  $\mathbf{P}$  is shared among three faces, and belongs to three regular edges of their differential boundaries.

### 3.4. Some useful identities involving the face parallel projectors

It is easy to prove the following identities, which we will systematically use in the sequel. We have used a notation involving uppercase letters only: however, the involved properties in the demonstrations are purely geometrical. The reader will easily transform all formulas in lowercase letters so obtaining the needed identities in the Eulerian configuration.

#### 3.4.1. Representation for face parallel projector restricted to edges

For the edge tangent vector and the tangent normal to the edge, the following identities hold:

$$[M_{\parallel}]_A^E T^A = T^E, \quad [M_{\parallel}]_A^E B^A = B^E. \quad (17)$$

Therefore, the following representation for face projectors holds:

$$[M_{\parallel}]_{A'}^E = T^E T_{A'} + B^E B_{A'}. \quad (18)$$

#### 3.4.2. Surface divergence of surface parallel projector

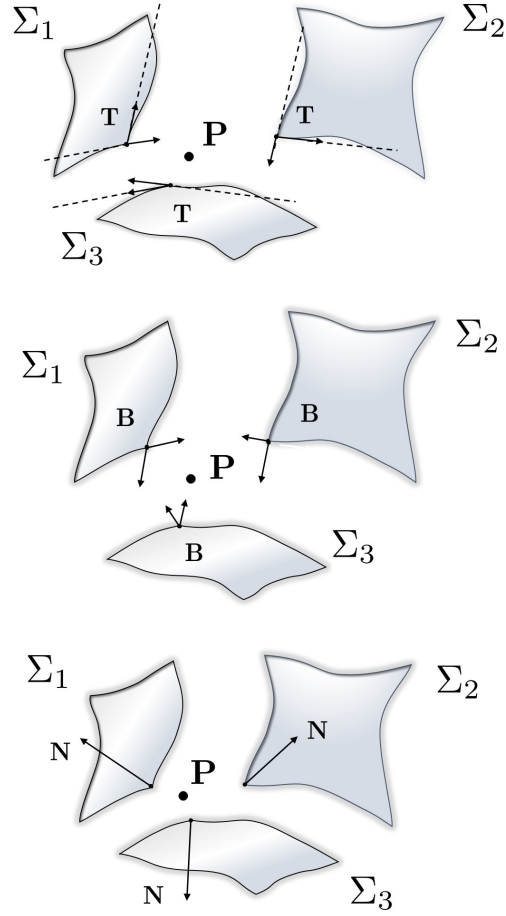
The surface divergence of the parallel projector can be calculated as follows

$$[M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial [M_{\parallel}]_A^K}{\partial X^S} = -[M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (N^K N_A)}{\partial X^S} = -[M_{\parallel}]_Q^S \left( \frac{\partial N_A}{\partial X^S} N^K + \frac{\partial N^K}{\partial X^S} N_A \right), \quad (19)$$

and the following definitory identity is very well-known in Riemannian differential geometry:

$$[M_{\parallel}]_S^R \frac{\partial}{\partial X^R} [M_{\parallel}]_D^S = -N_D \frac{\partial N^S}{\partial X^S} =: \frac{2}{R_m} N_D, \quad (20)$$

where symbol  $R_m$  is called the local mean curvature over the boundary face.



**Figure 4.** Darboux basis vectors belonging to the differential boundaries of each face concurring to the wedge point  $\mathbf{P}$ . When considering separately each face with a continuous normal field, the edge tangent and edge tangent normal vectors, i.e.  $\mathbf{T}$  and  $\mathbf{B}$ , are discontinuous at the wedge points: instead, when passing from one face to the contiguous one sharing the support of an edge,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{B}$  and also  $\mathbf{N}$  are discontinuous (in particular, the tangents equal opposite).

### 3.4.3. Surface divergence for the fully parallel projection of a two times contravariant tensor $\mathbb{A}_i^{AB}$

It is calculated with the following equality chain:

$$\begin{aligned}
 & [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{AB} [M_{\parallel}]_A^K [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} \\
 &= [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{AB} \delta_A^K [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} - [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{AB} N^K N_A [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} \\
 &= [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} - N^K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} - \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^S \frac{\partial N^K}{\partial X^S}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

By projecting the equation (21) along the direction normal to the surface, we get

$$N_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{AB} [M_{\parallel}]_A^K [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} = N_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} - [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S}. \quad (22)$$

By projecting the equation (21) along the direction  $B$ , we get

$$B_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{AB} [M_{\parallel}]_A^K [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} = B_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} - \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^S \frac{\partial N^K}{\partial X^S} B_K. \quad (23)$$

By projecting the equation (21) along the tangent plane to the surface, we get

$$\begin{aligned} [M_{\parallel}]_K^{K'} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{AB} [M_{\parallel}]_A^K [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} \\ = \left( [M_{\parallel}]_K^{K'} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} - \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^S [M_{\parallel}]_K^{K'} \frac{\partial N^K}{\partial X^S} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

### 3.4.4. A first useful reduction

The term

$$[M_{\parallel}]_K^{K'} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} + [M_{\parallel}]_K^{K'} \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^R \frac{\partial N^K}{\partial X^R}$$

appears in the irreducible representation for a surface second-order distribution, which we will get in the following as surface dual in work of virtual displacement.

We get the following chain of equalities:

$$\begin{aligned} & [M_{\parallel}]_K^{K'} \left( [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} + \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^R \frac{\partial N^K}{\partial X^R} \right) \\ &= [M_{\parallel}]_K^{K'} \left( [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} \mathbb{A}_i^{KB} + [M_{\parallel}]_Q^S [M_{\parallel}]_B^Q \frac{\partial \mathbb{A}_i^{KB}}{\partial X^S} + \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^R \frac{\partial N^K}{\partial X^R} \right) \\ &= [M_{\parallel}]_K^{K'} \left( [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( -N^Q N_B \right)}{\partial X^S} \mathbb{A}_i^{KB} + [M_{\parallel}]_B^S \frac{\partial \mathbb{A}_i^{KB}}{\partial X^S} + \mathbb{A}_i^{AB} N_A \frac{\partial N^K}{\partial X^B} \right) \\ &= [M_{\parallel}]_K^{K'} \left( [M_{\parallel}]_Q^S N_B \frac{\partial \left( -N^Q \right)}{\partial X^S} \mathbb{A}_i^{KB} + [M_{\parallel}]_Q^S N^Q \frac{\partial \left( -N_B \right)}{\partial X^S} \mathbb{A}_i^{KB} + [M_{\parallel}]_B^S \frac{\partial \mathbb{A}_i^{KB}}{\partial X^S} + \mathbb{A}_i^{AB} N_A \frac{\partial N^K}{\partial X^B} \right) \\ &= [M_{\parallel}]_K^{K'} \left( -\frac{\partial N^Q}{\partial X^Q} \mathbb{A}_i^{KB} N_B + [M_{\parallel}]_B^S \frac{\partial \mathbb{A}_i^{KB}}{\partial X^S} + \mathbb{A}_i^{AB} N_A \frac{\partial N^K}{\partial X^B} \right) \\ &= [M_{\parallel}]_K^{K'} \left( [M_{\parallel}]_B^S \frac{\partial \mathbb{A}_i^{KB}}{\partial X^S} + \mathbb{A}_i^{AB} N_A \frac{\partial N^K}{\partial X^B} - \frac{\partial N^Q}{\partial X^Q} \mathbb{A}_i^{KB} N_B \right). \end{aligned} \quad (25)$$

### 3.4.5. Another useful reduction

The term

$$[M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial}{\partial X^S} \left( \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q \right) + N_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S}$$

appears in the irreducible representation for a surface second-order distribution, which we will get in the following as surface dual in work of normal derivative of virtual displacement.

We get the following chain of equalities:

$$\begin{aligned}
& [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial}{\partial X^S} \left( \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q \right) + N_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} \\
&= [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial}{\partial X^S} \left( \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q N^K \right) N_K + N_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} \\
&= N_K [M_{\parallel}]_Q^S \left( \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q N^K + \mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} \right). \tag{26}
\end{aligned}$$

### 3.4.6. Derivatives of the vectors $\mathbf{T}$ , $\mathbf{B}$ and $\mathbf{N}$

As the vectors  $\mathbf{T}$  and  $\mathbf{B}$  have norm equal to one, we have

$$\frac{d\mathbf{T}}{dS} \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \frac{d\mathbf{B}}{dS} \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{27}$$

where  $S$  denotes the curvilinear abscissa along the boundary edge. Therefore we can deduce that:

$$T^A \frac{\partial T^E}{\partial X^A} T_E = [M_{L\parallel}]_E^A \frac{\partial T^E}{\partial X^A} = 0. \tag{28}$$

The reader will remark that, to introduce the gradient of  $\mathbf{T}$ , it is necessary to smoothly prolong the field  $\mathbf{T}$  in an open neighborhood of the curved edge, with constant value in any direction orthogonal to the edge: this requirement is met in the vicinity of any of its regular points. Using this constant orthogonal extension (i.e. wrt the edge tangent) and its analogue for the field  $\mathbf{B}$ , it is also easy to verify that

$$B_{A'} \frac{\partial T^{A'}}{\partial X^E} = 0, \quad N_{A'} \frac{\partial T^{A'}}{\partial X^E} = 0, \tag{29}$$

$$B^E \frac{\partial B^{A'}}{\partial X^E} = 0, \quad N^E \frac{\partial B^{A'}}{\partial X^E} = 0. \tag{30}$$

A similar extension of the normal field to every face is also needed for defining its gradient. This strategy is used in Riemannian geometry to define the surface curvature tensor. It is simple to verify that:

$$\frac{\partial N_A}{\partial X_E} N^A = 0, \quad \frac{\partial N_A}{\partial X_E} N^E = 0. \tag{31}$$

## 4. Irreducible representation of second order surface distributions and some integration by parts formulas

When using the principle of virtual work it is essential to get the irreducible representation of virtual work functionals: i.e., their representation in which the lowest possible order of derivatives of test functions appears (see [15] and [47]). To this aim it is necessary to apply systematically the divergence theorem and the integration by parts techniques.

We explicitly warn the reader that the surface on which the distribution is concentrated is a piecewise regular surface  $\Sigma$  (as defined in the previous sections): therefore when we write  $\partial\Sigma$  we mean the union of the boundaries of all the  $m$  faces  $\Sigma_r$ , with  $r = 1, \dots$ , constituting  $\Sigma$  (see Figs. 1-3).

Therefore we will use systematically the following notation

$$\int_{\partial\Sigma} (\bullet) d\partial\Sigma := \sum_{r=1}^m \int_{\partial\Sigma_r} (\bullet) d\partial\Sigma_r.$$



#### 4.1. Projector-based decomposition of second order surface distributions

In order to get its irreducible representation, we will need repeatedly to integrate by parts two times the following work functional, which is a second order distribution concentrated on a surface:

$$\int_{\Sigma} \mathbb{A}_i^{RS} \frac{\partial^2 \delta \Pi^i}{\partial X^R \partial X^S} d\Sigma, \quad (32)$$

where  $\mathbb{A}_i^{RS}$  is a generic (symmetric!) tensor field defined in the neighbourhood of the surface  $\Sigma$ .

To do so, we start by decomposing the identity in the space of two times covariant tensors and considering the tensor product:

$$\begin{aligned} \delta_A^R \delta_B^S &= \left( [M_{\parallel}]_A^R + N^R N_A \right) \left( [M_{\parallel}]_B^S + N^S N_B \right) \\ &= [M_{\parallel}]_A^R [M_{\parallel}]_B^S + N^R N_A [M_{\parallel}]_B^S + N_B N^S [M_{\parallel}]_A^R + N_B N^S N^R N_A. \end{aligned} \quad (33)$$

The work functional (32) can be split as the sum of the three addends:

- completely parallel projection:

$$\int_{\Sigma} \mathbb{A}_i^{AB} [M_{\parallel}]_A^R [M_{\parallel}]_B^S \frac{\partial^2 \delta \Pi^i}{\partial X^R \partial X^S} d\Sigma; \quad (34)$$

- one time normal and one time parallel projection. This addend, because of the symmetry of  $\mathbb{A}_i^{AB}$  and of the Hessian matrix of the field  $\delta \Pi^i$ , is equal to

$$\int_{\Sigma} \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^R \right) N^S \frac{\partial^2 \delta \Pi^i}{\partial X^R \partial X^S} d\Sigma, \quad (35)$$

which, by using the equality

$$N^S \frac{\partial^2 \delta \Pi^i}{\partial X^R \partial X^S} = \frac{\partial}{\partial X^R} \left( N^S \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^S} \right) - \frac{\partial N^S}{\partial X^R} \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^S} \right) = \frac{\partial}{\partial X^R} \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) - \frac{\partial N^S}{\partial X^R} \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^S} \right)$$

becomes

$$\int_{\Sigma} \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^R \right) \left( \frac{\partial}{\partial X^R} \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) - \frac{\partial N^S}{\partial X^R} \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^S} \right) \right) d\Sigma; \quad (36)$$

- completely normal projection:

$$\int_{\Sigma} \left( \mathbb{A}_i^{AB} N_B N_A \right) N^S N^R \frac{\partial^2 \delta \Pi^i}{\partial X^R \partial X^S} d\Sigma. \quad (37)$$

##### 4.1.1. Irreducible representation of the first addend (34)

To reduce the first addend (34) we need to integrate by parts and to apply the surface divergence theorem two times. We start with the needed chain of equalities, by applying the Leibniz rule and the surface divergence theorem and recalling idempotence of projectors:

$$\begin{aligned} &\int_{\Sigma} \left( \mathbb{A}_i^{AB} [M_{\parallel}]_A^R [M_{\parallel}]_B^Q \right) [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial}{\partial X^S} \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^R} \right) d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial}{\partial X^S} \left( \mathbb{A}_i^{AB} [M_{\parallel}]_A^R [M_{\parallel}]_B^Q \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^R} \right) d\Sigma \\ &\quad - \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial}{\partial X^S} \left( \mathbb{A}_i^{AB} [M_{\parallel}]_A^R [M_{\parallel}]_B^Q \right) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^R} \right) d\Sigma \\ &= \int_{\partial \Sigma} \left( B_B \mathbb{A}_i^{AB} [M_{\parallel}]_A^R \right) \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^R} d\partial \Sigma - \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial}{\partial X^S} \left( \mathbb{A}_i^{AB} [M_{\parallel}]_A^R [M_{\parallel}]_B^Q \right) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^R} \right) d\Sigma = \end{aligned} \quad (38)$$

The chain of equalities continues by using the decompositions of identities Eqs. (2) and (9), namely

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial\Sigma} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} [M_{\parallel}]_A^K) (T^R T_K + B^R B_K + N^R N_K) \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^R} d\delta\Sigma \\
&\quad - \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{AB} [M_{\parallel}]_A^K [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} ([M_{\parallel}]_K^R + N^R N_K) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^R} \right) d\Sigma \\
&= \int_{\partial\Sigma} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} T_A) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^R} T^R \right) d\delta\Sigma \\
&\quad + \int_{\partial\Sigma} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} B_K) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial B} \right) d\delta\Sigma \\
&\quad - \int_{\Sigma} N_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{AB} [M_{\parallel}]_A^K [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma \\
&\quad - \int_{\Sigma} \left( [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{AB} [M_{\parallel}]_A^K [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) [M_{\parallel}]_K^R \frac{\partial}{\partial X^R} (\delta \Pi^i) d\Sigma
\end{aligned} \tag{39}$$

where we have used the notation  $\frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial B} := \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^R} B^R$ .

The obtained equality can be further simplified by using the equality (21)

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial\Sigma} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} T_A) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^R} T^R \right) d\delta\Sigma + \int_{\partial\Sigma} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} B_K) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial B} \right) d\delta\Sigma \\
&\quad - \int_{\Sigma} \left( N_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} - [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma \\
&\quad - \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_{K'}^R \frac{\partial}{\partial X^R} \left( [M_{\parallel}]_{K'}^{K'} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{AB} [M_{\parallel}]_A^K [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \delta \Pi^i \right) d\Sigma \\
&\quad + \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_{K'}^R \frac{\partial}{\partial X^R} \left( [M_{\parallel}]_{K'}^{K'} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{AB} [M_{\parallel}]_A^K [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \delta \Pi^i d\Sigma =
\end{aligned} \tag{40}$$

which becomes through the divergence theorem

$$\begin{aligned}
&= \int_{\partial\Sigma} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} T_A) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^R} T^R \right) d\delta\Sigma + \int_{\partial\Sigma} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} B_K) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial B} \right) d\delta\Sigma \\
&\quad - \int_{\Sigma} \left( N_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma \\
&\quad + \int_{\Sigma} \left( [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma \\
&\quad - \int_{\partial\Sigma} \left( B_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{AB} [M_{\parallel}]_A^K [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \delta \Pi^i d\delta\Sigma \\
&\quad + \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_{K'}^R \frac{\partial}{\partial X^R} \left( [M_{\parallel}]_{K'}^{K'} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{AB} [M_{\parallel}]_A^K [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \delta \Pi^i d\Sigma.
\end{aligned} \tag{41}$$

The reduction of the first addend (34) is then continued by applying the Leibniz rule to the derivation along the edge and on the surface to get:

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\partial\Sigma} T^R \frac{\partial}{\partial X^R} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} T_A \delta \Pi^i) d\partial\Sigma - \int_{\partial\Sigma} T^R \frac{\partial}{\partial X^R} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} T_A) \delta \Pi^i d\partial\Sigma \\
 &+ \int_{\partial\Sigma} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} B_K) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial B} \right) d\partial\Sigma - \int_{\Sigma} \left( N_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma \\
 &+ \int_{\Sigma} \left( [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma \\
 &- \int_{\partial\Sigma} \left( B_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} - \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^S \frac{\partial N^K}{\partial X^S} B_K \right) \delta \Pi^i d\partial\Sigma \\
 &+ \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_{K'}^R \frac{\partial}{\partial X^R} \left( [M_{\parallel}]_{K'}^{K'} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} - \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^S [M_{\parallel}]_{K'}^{K'} \frac{\partial N^K}{\partial X^S} \right) \delta \Pi^i d\Sigma =
 \end{aligned} \tag{42}$$

which, by applying again divergence theorem on edges and faces, becomes the searched irreducible representation

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\partial\partial\Sigma} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} T_A \delta \Pi^i) \\
 &- \int_{\partial\Sigma} T^R \frac{\partial}{\partial X^R} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} T_A) \delta \Pi^i d\partial\Sigma + \int_{\partial\Sigma} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} B_K) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial B} \right) d\partial\Sigma \\
 &- \int_{\Sigma} \left( N_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma \\
 &+ \int_{\Sigma} \left( [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma \\
 &- \int_{\partial\Sigma} \left( B_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \delta \Pi^i d\partial\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \left( \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^S \frac{\partial N^K}{\partial X^S} B_K \right) \delta \Pi^i d\partial\Sigma \\
 &+ \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_{K'}^R \frac{\partial}{\partial X^R} \left( [M_{\parallel}]_{K'}^{K'} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \delta \Pi^i d\Sigma \\
 &- \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_{K'}^R \frac{\partial}{\partial X^R} \left( \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^S [M_{\parallel}]_{K'}^{K'} \frac{\partial N^K}{\partial X^S} \right) \delta \Pi^i d\Sigma.
 \end{aligned} \tag{43}$$

In the first line of the above equation we have used the following notation

$$\sum_{\partial\partial\Sigma} (\varphi) = \sum_{\alpha=q}^l \left( \sum_{\beta=1}^{k_\alpha} (\lim \varphi(e_{\beta,\alpha}, P_\alpha)) \right), \tag{44}$$

where: the symbol  $P_\alpha$  denotes the  $\alpha^{\text{th}}$  wedge among the  $q$  wedges in the piecewise regular surface  $\Sigma$ ; the symbol  $e_{\beta,\alpha}$  denotes the  $\beta^{\text{th}}$  edge among the  $k_\alpha$  concurring in the wedge  $P_\alpha$ ; symbol  $\lim \varphi(e_{\beta,\alpha}, P_\alpha)$  denotes the sum of all the limits of the quantity  $\varphi$  calculated along the edge  $e_{\beta,\alpha}$  towards the point  $P_\alpha$  when  $e_{\beta,\alpha}$  is regarded as part of the boundary of all faces concurring on it (see Figs. 3 and 4).

#### 4.1.2. Irreducible representation of the second addend (Eq. 36)

To complete the irreducible representation of Eq. (32), we must reduce the second addend in Eq. (36). This is done with the further splitting it into two addends, for which two chains of equalities can be developed.

The first of these chains of equalities is obtained by applying again and again the integration by parts and the surface divergence theorem, namely:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma} \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^S \right) \frac{\partial}{\partial X^S} \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma = \int_{\Sigma} \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q [M_{\parallel}]_Q^S \right) \frac{\partial}{\partial X^S} \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma \\
& = \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial}{\partial X^S} \left\{ \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q \right) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) \right\} d\Sigma + - \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial}{\partial X^S} \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q \right) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma \\
& = \int_{\partial \Sigma} \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A B_B \right) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\partial \Sigma + - \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial}{\partial X^S} \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q \right) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma.
\end{aligned} \tag{45}$$

The second chain of equality is, by recalling that  $\frac{\partial N^S}{\partial X^R} N_S = 0$ ,

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Sigma} \left\{ \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^R \right) \frac{\partial N^S}{\partial X^R} \right\} \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^S} d\Sigma = - \int_{\Sigma} \left\{ \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^R \right) \frac{\partial N^S}{\partial X^R} \right\} N_S \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} d\Sigma + \\
& - \int_{\Sigma} \left\{ \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^R \right) \frac{\partial N^S}{\partial X^R} \right\} [M_{\parallel}]_S^Q \frac{\partial}{\partial X^Q} \left( \delta \Pi^i \right) d\Sigma \\
& = - \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_S^Q \frac{\partial}{\partial X^Q} \left\{ [M_{\parallel}]_S^{S'} \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^R \right) \frac{\partial N^S}{\partial X^R} \delta \Pi^i \right\} d\Sigma \\
& + \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_S^Q \frac{\partial}{\partial X^Q} \left\{ [M_{\parallel}]_S^{S'} \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^R \right) \frac{\partial N^S}{\partial X^R} \right\} \delta \Pi^i d\Sigma \\
& = - \int_{\partial \Sigma} B_S \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^R \right) \frac{\partial N^S}{\partial X^R} \delta \Pi^i d\partial \Sigma \\
& + \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_S^Q \frac{\partial}{\partial X^Q} \left\{ [M_{\parallel}]_S^{S'} \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^R \right) \frac{\partial N^S}{\partial X^R} \right\} \delta \Pi^i d\Sigma.
\end{aligned} \tag{46}$$

By adding the final expression for the two previous chains of equalities, we get for the second addend (36) the following irreducible representation:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_S^Q \frac{\partial}{\partial X^Q} \left\{ [M_{\parallel}]_S^{S'} \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^R \right) \frac{\partial N^S}{\partial X^R} \right\} \delta \Pi^i d\Sigma \\
& + - \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial}{\partial X^S} \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q \right) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma + \\
& - \int_{\partial \Sigma} B_S \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^R \right) \frac{\partial N^S}{\partial X^R} \delta \Pi^i d\partial \Sigma + \int_{\partial \Sigma} \left( 2\mathbb{A}_i^{AB} N_A B_B \right) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\partial \Sigma
\end{aligned}$$

#### 4.1.3. Irreducible representation of second-order surface distributions

Gathering the results obtained in the previous subsections, we get the following irreducible representation of a second-order distribution concentrated on a surface:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Sigma} \mathbb{A}_i^{RS} \frac{\partial^2 \delta \Pi^i}{\partial X^R \partial X^S} d\Sigma = \\
 & = \int_{\Sigma} (\mathbb{A}_i^{AB} N_B N_A) \frac{\partial^2 \delta \Pi^i}{\partial N^2} d\Sigma + \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_{K'}^R \frac{\partial}{\partial X^R} \left( [M_{\parallel}]_K^{K'} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \delta \Pi^i d\Sigma \\
 & - \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_{K'}^R \frac{\partial}{\partial X^R} \left( \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^S [M_{\parallel}]_K^{K'} \frac{\partial N^K}{\partial X^S} \right) \delta \Pi^i d\Sigma \\
 & + \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_{S'}^Q \frac{\partial}{\partial X^Q} \left\{ [M_{\parallel}]_S^{S'} (2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^R) \frac{\partial N^S}{\partial X^R} \right\} \delta \Pi^i d\Sigma \\
 & + \int_{\Sigma} \left( [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma - \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial}{\partial X^S} (2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma \\
 & - \int_{\Sigma} \left( N_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma + \int_{\partial \Sigma} \left( \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^S \frac{\partial N^K}{\partial X^S} B_K \right) \delta \Pi^i d\partial \Sigma \\
 & - \int_{\partial \Sigma} B_S (2\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^R) \frac{\partial N^S}{\partial X^R} \delta \Pi^i d\partial \Sigma - \int_{\partial \Sigma} \left( B_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \delta \Pi^i d\partial \Sigma \\
 & - \int_{\partial \Sigma} T^R \frac{\partial}{\partial X^R} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} T_A) \delta \Pi^i d\partial \Sigma + \int_{\partial \Sigma} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} B_K) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial B} \right) d\partial \Sigma \\
 & + \int_{\partial \Sigma} (2\mathbb{A}_i^{AB} N_A B_B) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\partial \Sigma + \sum_{\partial \partial \Sigma} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} T_A \delta \Pi^i).
 \end{aligned} \tag{47}$$

By gathering and simplifying one gets:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Sigma} \mathbb{A}_i^{RS} \frac{\partial^2 \delta \Pi^i}{\partial X^R \partial X^S} d\Sigma \\
 & = \int_{\Sigma} (\mathbb{A}_i^{AB} N_B N_A) \frac{\partial^2 \delta \Pi^i}{\partial N^2} d\Sigma + \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_{K'}^R \frac{\partial}{\partial X^R} \left( [M_{\parallel}]_K^{K'} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \delta \Pi^i d\Sigma \\
 & + \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_{S'}^Q \frac{\partial}{\partial X^Q} \left\{ [M_{\parallel}]_S^{S'} \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^R \frac{\partial N^S}{\partial X^R} \right\} \delta \Pi^i d\Sigma \\
 & - \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial}{\partial X^S} (\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma \\
 & - \int_{\Sigma} \left( N_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma \\
 & - \int_{\partial \Sigma} (\mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^R) \frac{\partial N^S}{\partial X^R} B_S \delta \Pi^i d\partial \Sigma - \int_{\partial \Sigma} \left( B_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial (\mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q)}{\partial X^S} \right) \delta \Pi^i d\partial \Sigma \\
 & - \int_{\partial \Sigma} T^R \frac{\partial}{\partial X^R} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} T_A) \delta \Pi^i d\partial \Sigma + \int_{\partial \Sigma} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} B_K) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial B} \right) d\partial \Sigma \\
 & + \int_{\partial \Sigma} (2\mathbb{A}_i^{AB} N_A B_B) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\partial \Sigma + \sum_{\partial \partial \Sigma} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} T_A \delta \Pi^i).
 \end{aligned} \tag{48}$$

A final version, obtained using the equation (25), is

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma} \mathbb{A}_i^{RS} \frac{\partial^2 \delta \Pi^i}{\partial X^R \partial X^S} d\Sigma \\
&= \int_{\Sigma} (\mathbb{A}_i^{AB} N_B N_A) \frac{\partial^2 \delta \Pi^i}{\partial N^2} d\Sigma \\
&+ \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_{K'}^R \frac{\partial}{\partial X^R} \left\{ [M_{\parallel}]_K^{K'} \left( [M_{\parallel}]_B^S \frac{\partial \mathbb{A}_i^{KB}}{\partial X^S} + \mathbb{A}_i^{AB} N_A \frac{\partial N^K}{\partial X^B} - \frac{\partial N^Q}{\partial X^Q} \mathbb{A}_i^{KB} N_B \right) \right\} \delta \Pi^i d\Sigma \\
&- \int_{\Sigma} \left\{ N_K [M_{\parallel}]_Q^S \left( \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{AB} N_A [M_{\parallel}]_B^Q N^K + \mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} \right) \right\} \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\Sigma \tag{49} \\
&- \int_{\partial \Sigma} \left\{ \mathbb{A}_i^{AB} N_A \frac{\partial N^S}{\partial X^B} B_S + B_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \mathbb{A}_i^{KB} [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} + T^R \frac{\partial}{\partial X^R} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} T_A) \right\} \delta \Pi^i d\partial \Sigma \\
&+ \int_{\partial \Sigma} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} B_K) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial B} \right) d\partial \Sigma + \int_{\partial \Sigma} (2 \mathbb{A}_i^{AB} N_A B_B) \left( \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} \right) d\partial \Sigma + \sum_{\partial \partial \Sigma} (B_B \mathbb{A}_i^{AB} T_A \delta \Pi^i).
\end{aligned}$$

## 5. Piola Transformations of the shapes of differential boundaries of reference into current configurations

In this section we recall the Piola transformation formulas for the vectors characterizing the shapes of the configurations boundaries as needed for third gradient continua: they were already used in [19, 41].

### 5.1. The Eulerian-Lagrangian transformation formulas for the edge tangent vector

The regularity assumptions about placement imply that:

$$t^r = \frac{F_R^r T^R}{\|\mathbf{F}\mathbf{T}\|} = F_R^r T^R \|\mathbf{F}^{-1}\mathbf{t}\|, \tag{50}$$

$$t_r = g_{rs} t^s = g_{rs} \frac{F_R^s T^R}{\|\mathbf{F}\mathbf{T}\|} = g_{rs} \frac{F_R^s G^{RS} T_S}{\|\mathbf{F}\mathbf{T}\|}. \tag{51}$$

### 5.2. The transformation of the normal vector to a boundary face from reference to current configurations

It is very well-known in the literature (see e.g. [16, 19] also for a detailed reference to the literature)<sup>2</sup> that

$$n_r = \frac{(\mathbf{F}^{-1})_r^R N_R}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} = (\mathbf{F}^{-1})_r^R \|\mathbf{F}^T \mathbf{n}\| N_R, \tag{52}$$

$$n^r = g^{rs} n_s = \frac{g^{rs} (\mathbf{F}^{-1})_r^R g_{RS} N^S}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|}. \tag{53}$$

<sup>2</sup>For some “sociological reasons” this formula is attributed to Nanson: in fact, it appears already in the works by Piola [3]. How it could be possible to attribute to Piola the transformation of Piola-Lagrange stress into Cauchy-Euler stress and imagine that the transformation formula for the normals to Cauchy cuts was found some decades later is rather difficult to justify.

### 5.3. The transformation of contravariant and covariant edge tangent normal

The Piola transformations for edge tangent normal were found in [19, 41]. They are given by the formulas:

$$b_r = \left\{ (\mathbf{F}^{-1})_r^R B_R - \frac{G^{*LM} B_L N_M}{G^{*RS} N_S N_R} (\mathbf{F}^{-1})_r^R N_R \right\} \frac{\|\mathbf{F}^{-T} \mathbf{N}\|_g}{\|J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{T}\|_g}; \quad (54)$$

$$b^r = \left\{ F_R^r B^R - \frac{G_{LM}^* B^L T^M}{G_{RS}^* T^R T^S} F_R^r T^R \right\} \frac{\|\mathbf{F} \mathbf{T}\|_g}{\|J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N}\|_g}. \quad (55)$$

One can easily verify the second formula by imposing that  $b_r b^r = 1$ ,  $b_r n^r = 0$ ,  $b_r t^r = 1$ .

## 6. Piola Transformations of external loads sustainable by third gradient continua

Gabrio Piola was the first to introduce  $n^{\text{th}}$  gradient continua (see [3, 4, 39]), considering internal work functionals that later will be recognized as  $n^{\text{th}}$  order distributions. However he did not manage to characterize the external loads sustainable by these generalized continua: his last work [2] was published posthumous.<sup>3</sup>

In fact, Piola did manage to study the transformations named after him in the case of first gradient continua: this was necessary to compare his variational deduction with the one, based on force and torque balance laws, put forward by Cauchy.

Here we present, based on some results from Riemannian differential geometry, the transformations that gives Lagrangian sustainable external loads in terms of their Eulerian counterparts, in the case of third gradient continua. The novelty peculiarity of these continua consists in the fact that they can sustain contact forces concentrated on wedges of their differential boundaries.

### 6.1. Piola Transformation of external volume and surface-contact forces

As appearing in the representation formula Eq. (1), third gradient continua can sustain external volume and surface-contact forces. No further difficulties, when comparing the third gradient Piola transformation with the first gradient one, appear in this cases.

The expression for the Eulerian volume work functional is easily transformed into a corresponding Lagrangian work functional. This can be done without too much difficulties. In fact:

$$\int_{\omega} f_{\omega i}^{\text{ext}} \delta \Pi^i d\omega = \int_{\Omega} J f_{\omega i}^{\text{ext}} (\Pi(X)) \delta \Pi^i d\Omega, \quad (56)$$

The field  $f_{\omega i}^{\text{ext}} (\Pi(X))$  results to be defined in the Lagrangian configuration: this change of variables for the Eulerian fields will not be explicitly indicated in what follows.

Hence, Eulerian external volume forces are transformed into Lagrangian volume forces only

$$\mathcal{F}_{\Omega i}^{\text{ext}} = J f_{\omega i}^{\text{ext}}. \quad (57)$$

This transformation is exactly the same that has been originally calculated by Piola for first gradient (or Cauchy) continua.

Also the Eulerian surface external forces are easily transformed into Lagrangian external forces by using the transformation formula for the area elements (see e.g. [16, 19, 43]), namely

$$d\sigma = \|J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N}\| d\Sigma, \quad (58)$$

<sup>3</sup>The mathematical genealogy starting from Piola has, indeed, produced Levi-Civita absolute tensor calculus and some important parts of modern differential geometry, see [48].

in the expression for external work functional as follows:

$$\int_{\sigma} f_{\sigma i}^{\text{ext}} \delta \Pi^i d\sigma = \int_{\Sigma} \|J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\| f_{\Sigma i}^{\text{ext}} \delta \Pi^i d\Sigma. \quad (59)$$

External Eulerian surface contact forces are transformed into Lagrangian surface contact forces only

$$\mathcal{F}_{\Sigma i}^{\text{ext}} = \|J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\| f_{\sigma i}^{\text{ext}}. \quad (60)$$

## 6.2. Piola Transformation of external surface double force

Among the loads, which can be sustained by third and second gradient continua but not by first gradient continua, one finds surface external double forces: surface double forces expend work on the normal derivative of the virtual displacement vector.

The corresponding Eulerian work functional is expressed as:

$$\int_{\sigma} f_{\sigma ni}^{\text{ext}} \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial n} d\sigma. \quad (61)$$

Using the equation (58), the rule for the derivation of composed functions and also Eq. (52), we obtain that the previous work functional can be represented as follows:

$$= \int_{\Sigma} \|J\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\| f_{\sigma ni}^{\text{ext}} g^{rs} \frac{(\mathbf{F}^{-1})_s^Q N_Q}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} (\mathbf{F}^{-1})_r^R \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^R} d\Sigma.$$

By simplifying and recalling the definition (15) we get that Eq. (61) can be transformed into:

$$\int_{\Sigma} J f_{\sigma ni}^{\text{ext}} N^{\star R} \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^R} d\Sigma. \quad (62)$$

The definition (15) clearly indicates that the distribution representing Eulerian surface external double forces does NOT transforms, according to the Lagrangian description, into the work functional corresponding to a Lagrangian surface external double forces: in fact, in general,  $N^{\star R} \neq N^R$ .

To decompose the expression (62), into its “elementary” Lagrangian “lower-order” functionals, we start recalling that

$$[M_{\perp}]_R^S = N^S N_R, \quad [M_{\parallel}]_R^S + N^S N_R = \delta_R^S, \quad (63)$$

so that it is equal to

$$\int_{\Sigma} J f_{\sigma ni}^{\text{ext}} N^{\star R} \left( [M_{\parallel}]_R^S + N^S N_R \right) \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^S} d\Sigma.$$

By recalling that  $N^{\star R} N_R = \|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|^2$ , through integration by parts the work functional (61) is equal to

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|^2 f_{\sigma ni}^{\text{ext}} \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} d\Sigma + \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_{R'}^S \frac{\partial}{\partial X^S} \left\{ J f_{\sigma ni}^{\text{ext}} N^{\star R} \delta \Pi^i [M_{\parallel}]_R^{R'} \right\} d\Sigma + \\ - \int_{\Sigma} [M_{\parallel}]_{R'}^S \frac{\partial}{\partial X^S} \left\{ J f_{\sigma ni}^{\text{ext}} N^{\star R} [M_{\parallel}]_R^{R'} \right\} \delta \Pi^i d\Sigma. \end{aligned}$$

Applying the divergence theorem to the faces constituting  $\Sigma$  (see e.g. [16, 20, 49]), we finally get

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} f_{\sigma ni}^{\text{ext}} \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial n} d\sigma = \int_{\Sigma} \left\{ \|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|^2 f_{\sigma ni}^{\text{ext}} \right\} \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N} d\Sigma + \int_{\partial \Sigma} \left\{ J f_{\Sigma ni}^{\text{ext}} N^{\star R} B_R \right\} \delta \Pi^i d\partial \Sigma \\ - \int_{\Sigma} \left\{ [M_{\parallel}]_{R'}^S \frac{\partial}{\partial X^S} \left( J f_{\Sigma ni}^{\text{ext}} N^{\star R} [M_{\parallel}]_R^{R'} \right) \right\} \delta \Pi^i d\Sigma. \end{aligned}$$

In the last three integral expressions, we have grouped in brackets the dual in work of virtual displacement  $\delta \Pi^i$  (i.e. line and surface densities of force) and the dual in work of the normal derivative of virtual displacement  $\frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial N}$  (i.e. surface density of double force).



We can conclude that the Eulerian double force surface density  $f_{\sigma ni}^{\text{ext}}$  external work functional, when transformed into the Lagrangian description, is equivalent to the triple of work functionals corresponding to the external actions: i) surface density of double force density, ii) surface density of force and iii) line density of force.

The Lagrangian external forces corresponding to the Eulerian double force  $f_{\sigma ni}^{\text{ext}}$  are given by the following three identities:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\Sigma N}^{\text{ext}}(f_{\sigma n}^{\text{ext}}) &= \|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|^2 J f_{\sigma n}^{\text{ext}}; \\ \mathcal{F}_{\Sigma}^{\text{ext}}(f_{\sigma n}^{\text{ext}}) &= - [M_{\parallel}]_{R'}^S \frac{\partial}{\partial X^S} \left\{ J f_{\sigma n}^{\text{ext}} N^{\star R} [M_{\parallel}]_R^{R'} \right\}; \\ \mathcal{F}_L^{\text{ext}}(f_{\sigma n}^{\text{ext}}) &= J f_{\sigma n}^{\text{ext}} (B_R N^{\star R}).\end{aligned}\quad (64)$$

### 6.3. Piola Transformation of surface external triple force

In this subsection the Eulerian surface triple external force  $f_{\sigma nni}^{\text{ext}}$  density work functional is considered. It is peculiar of third or higher gradient continua and expends work on the second normal derivative of the virtual displacements:

$$\int_{\sigma} f_{\sigma nni}^{\text{ext}} \frac{\partial^2 \delta \Pi^i}{\partial n^2} d\sigma. \quad (65)$$

#### 6.3.1. Eulerian surface triple force functional transformed into Lagrangian coordinates

This work functional, by using the placement induced change of variables, becomes

$$\int_{\Sigma} \left( \|\mathbf{J}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\| f_{\sigma nni}^{\text{ext}} n^r n^s \frac{\partial^2 \delta \chi^i}{\partial x^r \partial x^s} \right) d\Sigma.$$

We then use the Piola transformation formula for the covariant normal  $n_r$  to get

$$\int_{\Sigma} \left( \|\mathbf{J}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\| f_{\sigma nni}^{\text{ext}} g^{rt} \frac{(\mathbf{F}^{-1})_t^Q N_Q}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} g^{sv} \frac{(\mathbf{F}^{-1})_v^V N_V}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} (\mathbf{F}^{-1})_r^R (\mathbf{F}^{-1})_s^S \frac{\partial^2 \delta \Pi^i}{\partial X^R \partial X^S} \right) d\Sigma.$$

which, after simplifications and using the definition of  $N^{\star R}$ , becomes:

$$\int_{\Sigma} \left\{ \frac{J f_{\sigma nni}^{\text{ext}}}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} N^{\star A} N^{\star B} \right\} \frac{\partial^2 \delta \Pi^i}{\partial X^A \partial X^B} d\Sigma. \quad (66)$$

Since  $N^{\star R} \neq N^R$ , and exactly as it is true for double forces, we must remark that Eulerian surface triple force work functionals do NOT correspond to Lagrangian triple force work functionals only.

#### 6.3.2. Application of the general irreducible representation formula (49): Lagrangian generalized forces associated to applied Eulerian external surface triple force density

By equating

$$\mathbb{A}_i^{RS} = \frac{J f_{\sigma nni}^{\text{ext}}}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} N^{\star R} N^{\star S}$$

the general formula Eq. (49) derived above gives the following list of Lagrangian generalized forces corresponding to the Eulerian triple force surface density  $f_{\sigma nni}^{\text{ext}}$ .

- Lagrangian surface triple force density

$$\mathcal{F}_{\Sigma NN}^{\text{ext}}(f_{\sigma nn}^{\text{ext}}) = \frac{J f_{\sigma nn}^{\text{ext}}}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} N^{\star R} N^{\star S} N_R N_S,$$

which becomes, by using the identity  $N_R N^{\star R} = \|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|^2$

$$\mathcal{F}_{\Sigma NN}^{\text{ext}}(f_{\sigma nn}^{\text{ext}}) = J f_{\sigma nn}^{\text{ext}} \|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|^3; \quad (67)$$

- Lagrangian surface force density

By considering the dual in work of virtual displacement in the surface work functional we get:

$$\mathcal{F}_{\Sigma}^{\text{ext}}(f_{\sigma nn}^{\text{ext}}) = [M_{\parallel}]_{K'}^R \frac{\partial}{\partial X^R} \left\{ [M_{\parallel}]_{K'}^{K'} \left( [M_{\parallel}]_B^S \frac{\partial \left( \frac{J f_{\sigma nn}^{\text{ext}}}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} N^{\star K} N^{\star B} \right)}{\partial X^S} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{J f_{\sigma nn}^{\text{ext}}}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} N^{\star A} N^{\star B} N_A \frac{\partial N^K}{\partial X^B} - \frac{\partial N^Q}{\partial X^Q} \left( \frac{J f_{\sigma nn}^{\text{ext}}}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} N^{\star K} N^{\star B} \right) N_B \right) \right\}. \quad (68)$$

By simplifying we get:

$$\mathcal{F}_{\Sigma}^{\text{ext}}(f_{\sigma nn}^{\text{ext}}) = [M_{\parallel}]_{K'}^R \frac{\partial}{\partial X^R} \left\{ [M_{\parallel}]_{K'}^{K'} \left( [M_{\parallel}]_B^S \frac{\partial \left( \frac{J f_{\sigma nn}^{\text{ext}}}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} N^{\star K} N^{\star B} \right)}{\partial X^S} + \right. \right. \\ \left. \left. + \|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\| N^{\star B} \frac{\partial N^K}{\partial X^B} J f_{\sigma nn}^{\text{ext}} - \|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\| \frac{\partial N^Q}{\partial X^Q} (J f_{\sigma nn}^{\text{ext}} N^{\star K}) \right) \right\}. \quad (69)$$

- Lagrangian surface double force density

By considering the dual in work of normal derivative of virtual displacement in the surface work functional, we get:

$$\mathcal{F}_{\Sigma N}^{\text{ext}}(f_{\sigma nn}^{\text{ext}}) = \\ - N_K [M_{\parallel}]_Q^S \left( \frac{\partial \left( \left( \frac{J f_{\sigma nn}^{\text{ext}}}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} N^{\star A} N^{\star B} \right) N_A [M_{\parallel}]_B^Q N^K + \left( \frac{J f_{\sigma nn}^{\text{ext}}}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} N^{\star K} N^{\star B} \right) [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} \right). \quad (70)$$

By simplifying we get:

$$\mathcal{F}_{\Sigma N}^{\text{ext}}(f_{\sigma nn}^{\text{ext}}) = -N_K [M_{\parallel}]_Q^S \left( \frac{\partial \left( J f_{\sigma nn}^{\text{ext}} \|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\| [M_{\parallel}]_B^Q N^{\star B} \left( N^K + \frac{N^{\star K}}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|^2} \right) \right)}{\partial X^S} \right). \quad (71)$$

- Lagrangian edge force density

By considering the dual in work of virtual displacement in the edge work functional we get:

$$\mathcal{F}_{\partial\Sigma}^{\text{ext}}(f_{\sigma nn}^{\text{ext}}) = - \left( \frac{J f_{\sigma nn}^{\text{ext}}}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} N^{\star A} N^{\star B} \right) N_A \frac{\partial N^S}{\partial X^B} B_S \\ - B_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \left( \frac{J f_{\sigma nn}^{\text{ext}}}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} N^{\star K} N^{\star B} \right) [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} + -T^R \frac{\partial}{\partial X^R} \left( T_A B_B \left( \frac{J f_{\sigma nn}^{\text{ext}}}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} N^{\star A} N^{\star B} \right) \right). \quad (72)$$

By simplifying we get

$$\mathcal{F}_{\partial\Sigma}^{\text{ext}}(f_{\sigma nn}^{\text{ext}}) = -J f_{\sigma nn}^{\text{ext}} \|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\| N^{\star B} \frac{\partial N^S}{\partial X^B} B_S \\ - B_K [M_{\parallel}]_Q^S \frac{\partial \left( \left( \frac{J f_{\sigma nn}^{\text{ext}}}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} N^{\star K} N^{\star B} [M_{\parallel}]_B^Q \right)}{\partial X^S} + -T^R \frac{\partial}{\partial X^R} \left( \frac{J f_{\sigma nn}^{\text{ext}}}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} N^{\star A} T_A N^{\star B} B_B \right). \quad (73)$$

- Lagrangian edge double force densities

By considering the dual in work of the normal derivatives of virtual displacement along the directions  $B$  and  $N$  in the edge work functional we get:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\partial\Sigma B}^{\text{ext}}(f_{\sigma nn}^{\text{ext}}) &= \frac{J f_{\sigma nn}^{\text{ext}}}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} (N^{\star K} B_K)^2; \\ \mathcal{F}_{\partial\Sigma N}^{\text{ext}}(f_{\sigma nn}^{\text{ext}}) &= 2J f_{\sigma nn}^{\text{ext}} \|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\| N^{\star B} B_B.\end{aligned}$$

- Lagrangian wedge concentrated forces

By considering the dual in work of the virtual displacement in the wedge work functional we get:

$$\mathcal{F}_P^{\text{ext}}(f_{\sigma nn}^{\text{ext}}) = \sum_{\partial\partial\Sigma} T_A B_B \left( \frac{J f_{\sigma nn}^{\text{ext}}}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} N^{\star A} N^{\star B} \right).$$

#### 6.4. Piola transformation of edge contact forces

The Eulerian edge external work functional, relative to the line force density  $f_{li}^{\text{ext}}$ , is easily transformed directly into the Lagrangian edge work functional. In fact one finds

$$\int_l f_{li}^{\text{ext}} \delta\Pi^i dl = \int_L \|\mathbf{FT}\|_g f_{li}^{\text{ext}} \delta\Pi^i dL, \quad (74)$$

from which we get

$$\mathcal{F}_L^{\text{ext}}(f_{li}^{\text{ext}}) = \|\mathbf{FT}\|_g f_l^{\text{ext}}.$$

#### 6.5. Piola Transformation of edge double force $f_{lni}^{\text{ext}}$

The Eulerian external work functional relative to the edge double force  $f_{lni}^{\text{ext}}$  can be transformed as follows:

$$\int_l f_{lni}^{\text{ext}} g^{rs} n_s \frac{\partial \delta\Pi^i}{\partial x^r} dl = \int_L \|\mathbf{FT}\|_g f_{lni}^{\text{ext}} g^{rs} \frac{(\mathbf{F}^{-1})_s^{NQ} N_Q}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|_g} (\mathbf{F}^{-1})_r^S \frac{\partial \delta\Pi^i}{\partial X^S} dL. \quad (75)$$

By decomposing the identity as done in (9), applying the divergence theorem for the curved edge, the above functional becomes:

$$\begin{aligned}\int_L \|\mathbf{FT}\|_g \|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|_g f_{lni}^{\text{ext}} \frac{\partial \delta\Pi^i}{\partial N} dL + \int_L \frac{\|\mathbf{FT}\|_g}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|_g} f_{lni}^{\text{ext}} (N^{\star S} B_S) \frac{\partial \delta\Pi^i}{\partial B} dL \\ + \sum_{\alpha=1}^l \sum_{\beta=1}^{k_\alpha} \lim \left( \frac{\|\mathbf{FT}\|}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} f_{lni}^{\text{ext}} (T_S N^{\star S}) \right) (e_{\beta,\alpha}, P_\alpha) \delta\Pi^i \\ - \int_L T^C \frac{\partial}{\partial X^C} \left\{ \frac{\|\mathbf{FT}\|}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} f_{lni}^{\text{ext}} N^{\star S} T_S \right\} \delta\Pi^i dL.\end{aligned} \quad (76)$$

Therefore we can conclude:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{LN}^{\text{ext}}(f_{ln}^{\text{ext}}) &= \|\mathbf{FT}\|_g \|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|_g f_{lni}^{\text{ext}}; \\ \mathcal{F}_{LB}^{\text{ext}}(f_{ln}^{\text{ext}}) &= \frac{\|\mathbf{FT}\|_g}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|_g} f_{ln}^{\text{ext}} (B_S N^{\star S}); \\ \mathcal{F}_{L\star}^{\text{ext}}(f_{ln}^{\text{ext}}) &= -T^C T_{S'} \frac{\partial}{\partial X^C} \left\{ \frac{\|\mathbf{FT}\|_g}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|_g} f_{lni}^{\text{ext}} (N^{\star S} T_S) T^{S'} \right\}; \\ \mathcal{F}_{P_\alpha}^{\text{ext}} &= \sum_{\beta=1}^{k_\alpha} \lim \left( \frac{\|\mathbf{FT}\|}{\|\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\|} f_{lni}^{\text{ext}} (T_S N^{\star S}) \right) (e_{\beta,\alpha}, P_\alpha),\end{aligned}$$

where the concentrated force at a single wedge was considered.

### 6.6. Piola Transformation of edge double force $f_{lbi}^{\text{ext}}$

The Eulerian external work functional relative to the edge double force  $f_{lbi}^{\text{ext}}$  can be transformed as follows, by recalling (55) and by decomposing the identity using the orthonormal basis  $(T_S, N_S, B_S)$  as follows:

$$\begin{aligned} & \int_l f_{lbi}^{\text{ext}} b^r \frac{\partial \delta \chi^i}{\partial x^r} dl \\ &= \int_L \frac{\|\mathbf{FT}\|^2}{\|\mathbf{JF}^{-T}\mathbf{N}\|} f_{lbi}^{\text{ext}} \left\{ B^S - \frac{G_{LM}^* B^L T^M}{G_{PN}^* T^P T^N} T^S \right\} (T^Q T_S + N^Q N_S + B^Q B_S) \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^Q} dL. \end{aligned} \quad (77)$$

The chain of equalities continues by using the orthonormality of  $(T_S, N_S, B_S)$ , integrating by parts and applying the divergence theorem on the edge:

$$\begin{aligned} &= \int_L \frac{\|\mathbf{FT}\|^2}{\|\mathbf{JF}^{-T}\mathbf{N}\|} f_{lbi}^{\text{ext}} B^Q \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial X^Q} dL \\ &+ \int_L T_{S'} T^Q \frac{\partial}{\partial X^Q} \left( \frac{\|\mathbf{FT}\|^2}{\|\mathbf{JF}^{-T}\mathbf{N}\|} f_{lbi}^{\text{ext}} \left\{ B^S - \frac{G_{LM}^* B^L T^M}{G_{PN}^* T^P T^N} T^S \right\} \delta \Pi^i T^{S'} T_S \right) dL \\ &- \int_L T_{S'} T^Q \frac{\partial}{\partial X^Q} \left( \frac{\|\mathbf{FT}\|^2}{\|\mathbf{JF}^{-T}\mathbf{N}\|} f_{lbi}^{\text{ext}} \left\{ B^S - \frac{G_{LM}^* B^L T^M}{G_{PN}^* T^P T^N} T^S \right\} T^{S'} T_S \right) \delta \Pi^i dL \\ &= \int_L \frac{\|\mathbf{FT}\|^2}{\|\mathbf{JF}^{-T}\mathbf{N}\|} f_{lbi}^{\text{ext}} \frac{\partial \delta \Pi^i}{\partial B} dL + \\ &- \sum_{\alpha=1}^l \sum_{\beta=1}^{k_\alpha} \lim \left( \frac{\|\mathbf{FT}\|^2}{\|\mathbf{JF}^{-T}\mathbf{N}\|} f_{lbi}^{\text{ext}} \frac{G_{LM}^* B^L T^M}{G_{PN}^* T^P T^N} \right) (e_{\beta,\alpha}, P_\alpha) \delta \Pi^i \\ &+ \int_L T^Q T_{S'} \frac{\partial}{\partial X^Q} \left( \frac{\|\mathbf{FT}\|^2}{\|\mathbf{JF}^{-T}\mathbf{N}\|} f_{lbi}^{\text{ext}} \left\{ \frac{G_{LM}^* B^L T^M}{G_{PN}^* T^P T^N} T^S \right\} T_S T^{S'} \right) \delta \Pi^i dL. \end{aligned} \quad (78)$$

where we have used the notation introduced in Eq. (44).

Therefore we have:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{LB}^{\text{ext}}(f_{Lb}^{\text{ext}}) &= + \frac{\|\mathbf{FT}\|^2}{\|\mathbf{JF}^{-T}\mathbf{N}\|} f_{Lb}^{\text{ext}}; \\ \mathcal{F}_L^{\text{ext}}(f_{Lb}^{\text{ext}}) &= + T^L T_{S'} \frac{\partial}{\partial X^L} \left\{ \frac{\langle \mathbf{F}, \mathbf{FT} \rangle}{\|\mathbf{JF}^{-T}\mathbf{N}\|} f_{Lb}^{\text{ext}} T^{S'} \right\}; \\ \mathcal{F}_{P_\alpha}^{\text{ext}}(f_{Lb}^{\text{ext}}) &= - \sum_{\beta=1}^{k_\alpha} \left( \frac{\|\mathbf{FT}\|^2}{\|\mathbf{JF}^{-T}\mathbf{N}\|} f_{lbi}^{\text{ext}} \left\{ \frac{G_{LM}^* B^L T^M}{G_{PN}^* T^P T^N} \right\} \right), \end{aligned} \quad (79)$$

where the concentrated force at a single wedge was considered.

### 6.7. Piola transformation of wedge forces

The transformation of concentrated wedge forces from the Eulerian to the Lagrangian description trivially leads to the following relationship

$$\mathcal{F}_{P_w}^{\text{ext}} = f_{p_w}^{\text{ext}}, \quad (80)$$

being  $\mathbf{P}_w$  and  $\mathbf{p}_w = \mathbf{\Pi}(\mathbf{P}_w)$  corresponding points through the placement, and for the virtual displacements one has  $\delta \Pi^i = \delta x^i (\mathbf{\Pi}^{-1})$ .

## 7. Conclusions and research perspectives

The approach to continuum mechanics “imposed” by Cauchy postulation represents a true straightjacket for the development of the discipline. The scheme that is imposed by the format used by the entire Truesdellian school assumes that externally applied loads can be forces and torques, only. As remarked by Paul Germain: i) torques are a kind of double forces, for instance the tangent part of surface double force are surface contact torques, ii) instead normal surface double forces, expending work on the normal component of the normal derivative of virtual displacement, are loads that “tend” to elongate the continuum and do not influence the resultant force and the resultant torque applied to any of its sub-bodies.

The inability of describing in their scheme this kind of external load led Truesdellians to deny, for a long time, even the “existence” of higher gradient continua. This statement has some delicate epistemological implications: in fact they assume an inductivist viewpoint, in which the physical entities and the mathematical models used for describing them are confused. This implies that they deny the existence of phenomena which cannot be described by their models (a complete discussion about this point can be found in [5]). In other words their *non sequitur* reasoning is the following: i) higher gradient continua cannot be described in the framework of Cauchy postulation, ii) every phenomenon must be described by Cauchy postulation, as it has been induced « experimentally » iii) higher gradient continua, a mathematical model that they confuse with some really existing physical objects, do not exist.

The French school, as represented by Paul Germain, assumes a more realistic epistemological viewpoint and bases its analyses on the principle of virtual work, which is recognized to be a very powerful tool in mathematical models formulation.

Following the indications put forward by Germain (see [7, 8, 50–52]) the development of continuum mechanics must be based on the theory of distributions, as formulated by Laurent Schwartz (see [15, 47]).

Therefore, when one decides to develop the theory of those continua, whose deformation energy depends on the third gradient of placement, the wisest choice is to formulate it based on D'Alembert–Lagrange postulation of mechanics. In fact we prove in this paper that the Piola Transformation of Eulerian external loads that can be sustained by third gradient continua contradicts all beliefs of those scholars using Cauchy postulation scheme.

In fact, in third gradient continua such loads include: i) *double* and *triple* forces surface density to be prescribed over the boundary face, that expend work on the first and second normal derivatives of the virtual displacements, ii) *force* and *double force* line density prescribed over the boundary edge, expending work on the virtual displacement and its first derivatives, iii) *forces* concentrated on wedges. Clearly balance of force and balance of torque are not affected by double completely normal and triple forces, and, as shown in [53] and [40], the presence of edge forces implies the existence of double forces in considered continua: as a consequence Cauchy postulation scheme does not allow for the construction of second and third gradient continuum models. It has to be remarked that, as discussed in the introduction and the references there cited, higher gradient continuum models are proving to be able to supply the needed conceptual and theoretical basis for the development of novel metamaterials, and therefore the aforementioned theoretical problems do have an immediate impact in applications.

In order to formulate well-posed equilibrium and dynamic problems in the theory of third gradient solid continua it is necessary to formulate these problems in the Lagrangian description: therefore Piola transformations are necessarily to be looked for in this generalized framework.

This was the aim of the present paper.

The results are surprising: Eulerian triple forces produce, once transformed into the Lagrangian description, all sustainable types of loads: hence, the type of externally applied loads

does depend on the description used. This fact has many consequences to be investigated: in particular, we can question whether the concept of dead load, as used so far, needs to be modified to have a more general validity.

It is therefore proven, once more, that the most fundamental concept in continuum mechanics is not that of applied load but that of work functional related to a load: work expended by an externally applied load is invariant under transformation from Lagrangian to Eulerian description.

The mathematical reason, which is at the basis of the fact that the type of applied loads are not invariant under Piola transformation, is purely related to a differential geometric property: the normals to a differential boundary are not transported from Lagrangian to Eulerian description by the gradient of placement, as already established by Piola. This fact has all the mechanical consequences described in this paper.

Many are the research perspectives: we plan to generalize the presented results to the more general case of  $n^{\text{th}}$  gradient continua. Also of interest is the application of the results presented here to solve, with numerical methods, problems relevant in modern metamaterials theory.

### Conflicts of interest

The authors declare no competing financial interest.

### Dedication

The manuscript was written through contributions of both the authors. The authors have given approval to the final version of the manuscript.

### References

- [1] T. N. Winter, *The Mechanical Problems in the corpus of Aristotle*, Faculty Publications, Classics and Religious Studies Department, vol. 68, Digital Commons University of Nebraska-Lincoln, 2007.
- [2] G. Piola, *Di un principio controverso della meccanica analitica di Lagrange e delle molteplici sue applicazioni*, Springer, 2014.
- [3] F. Dell'Isola, G. Maier, U. Perego, U. Andreaus, R. Esposito, S. Forest, *The Complete Works of Piola, Gabrio: Volume I. Commented English Translation-English and Italian Edition*, Springer, 2014.
- [4] F. Dell'Isola, A. Della Corte, I. Giorgio, "Higher-gradient continua: The legacy of Piola, Mindlin, Sedov and Toupin and some future research perspectives", *Math. Mech. Solids* **22** (2017), no. 4, p. 852-872.
- [5] M. Spagnuolo, F. Dell'Isola, A. Cazzani, "The Study of the Genesis of Novel Mathematical and Mechanical Theories Provides an Inspiration for Future Original Research", in *Evaluation of Scientific Sources in Mechanics: Heiberg's Prolegomena to the Works of Archimedes and Hellinger's Encyclopedia Article on Continuum Mechanics* (F. Dell'Isola, S. R. Eugster, M. Spagnuolo, E. Barchiesi, eds.), Advanced Structured Materials, vol. 152, Springer, 2022, p. 1-73.
- [6] P. Germain, "La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus. Première partie: Théorie du second gradient", *J. Méc., Paris* **12** (1973), no. 2, p. 235-274.
- [7] P. Germain, "The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2: Microstructure", *SIAM J. Appl. Math.* **25** (1973), no. 4, p. 556-575.
- [8] P. Germain, "The method of virtual power in the mechanics of continuous media, I: Second-gradient theory", *Math. Mech. Complex Syst.* **12** (2020), no. 2, p. 153-190.
- [9] L. Placidi, E. Barchiesi, A. Misra, "A strain gradient variational approach to damage: a comparison with damage gradient models and numerical results", *Math. Mech. Complex Syst.* **6** (2018), no. 2, p. 77-100.
- [10] I. Giorgio, "A variational formulation for one-dimensional linear thermoviscoelasticity", *Math. Mech. Complex Syst.* **9** (2022), no. 4, p. 397-412.
- [11] E. Barchiesi, M. Spagnuolo, L. Placidi, "Mechanical metamaterials: a state of the art", *Math. Mech. Solids* **24** (2019), no. 1, p. 212-234.
- [12] I. Giorgio, A. Ciallella, D. Scerrato, "A study about the impact of the topological arrangement of fibers on fiber-reinforced composites: some guidelines aiming at the development of new ultra-stiff and ultra-soft metamaterials", *International Journal of Solids and Structures* **203** (2020), p. 73-83.

- [13] I. Giorgio, M. Spagnuolo, U. Andreaus, D. Scerrato, A. M. Bersani, "In-depth gaze at the astonishing mechanical behavior of bone: A review for designing bio-inspired hierarchical metamaterials", *Math Mech Solids* **26** (2021), no. 7, p. 1074-1103.
- [14] A. Lichnerowicz, *Éléments de calcul tensoriel*, Section de Mathématiques, vol. 259, Armand Colin, 1951.
- [15] F. Dell'Isola, P. Seppecher, A. Madeo, "How contact interactions may depend on the shape of Cauchy cuts in N-th gradient continua: approach "à la D'Alembert"", *Z. Angew. Math. Phys.* **63** (2012), no. 6, p. 1119-1141.
- [16] N. Auffray, F. Dell'Isola, V. Eremeyev, A. Madeo, G. Rosi, "Analytical continuum mechanics à la Hamilton-piola least action principle for second gradient continua and capillary fluids", *Math. Mech. Solids* **20** (2015), no. 4, p. 375-417.
- [17] C. Polizzotto, "A note on the higher order strain and stress tensors within deformation gradient elasticity theories: Physical interpretations and comparisons", *Int. J. Solids Struct.* **90** (2016), p. 116-121.
- [18] A. E. Green, R. S. Rivlin, "Multipolar continuum mechanics", *Arch. Ration. Mech. Anal.* **17** (1964), p. 113-147.
- [19] R. Fedele, "Piola's approach to the equilibrium problem for bodies with second gradient energies. Part I: first gradient theory and differential geometry", *Contin. Mech. Thermodyn.* **34** (2021), no. 2, p. 445-474.
- [20] R. Fedele, "Approach à la Piola for the equilibrium problem of bodies with second gradient energies. Part II: Variational derivation of second gradient equations and their transport", *Contin. Mech. Thermodyn.* **34** (2022), p. 1087-1111.
- [21] R. Fedele, "Third-gradient continua: nonstandard equilibrium equations and selection of work conjugate variables", *Math Mech Solids* **27** (2022), no. 10, p. 2046-2072.
- [22] S. Khakalo, J. Niiranen, "Form II of Mindlin's second strain gradient theory of elasticity with a simplification: For materials and structures from nano- to macro-scales", *Eur. J. Mech., A, Solids* **71** (2018), p. 292-319.
- [23] M. Ferretti, A. Madeo, F. Dell'Isola, P. Boisse, "Modeling the onset of shear boundary layers in fibrous composite reinforcements by second gradient theory", *Z. Angew. Math. Phys.* **65** (2014), no. 3, p. 587-612.
- [24] P. Seppecher, "Equilibrium of a Cahn-Hilliard fluid on a wall: influence of the wetting properties of the fluid upon the stability of a thin liquid film", *Eur. J. Mech. B Fluids* **12** (1993), no. 1, p. 977-992.
- [25] D. Scerrato, A. M. Bersani, I. Giorgio, "Bio-inspired design of a porous resorbable scaffold for bone reconstruction: A preliminary study", *Biomimetics* **6** (2021), no. 1, p. 18.
- [26] P. Seppecher, "Moving contact lines in the Cahn-Hilliard theory", *Int. J. Eng. Sci.* **34** (1996), no. 9, p. 977-992.
- [27] A. Krawietz, "Surface tension and reaction stresses of a linear incompressible second gradient fluid", *Contin. Mech. Thermodyn.* **34** (2022), p. 1027-1050.
- [28] J.-J. Alibert, P. Seppecher, F. Dell'Isola, "Truss Modular Beams with Deformation Energy Depending on Higher Displacement Gradients", *Math. Mech. Solids* **1** (2003), no. 8, p. 51-73.
- [29] P. Seppecher, J.-J. Alibert, F. Dell'Isola, "Linear elastic trusses leading to continua with exotic mechanical interactions", *J. Phys.: Conf. Ser.* **319** (2011), article no. 012018.
- [30] H. Abdoul-Anziz, P. Seppecher, "Strain gradient and generalized continua obtained by homogenizing frame lattices", *Math. Mech. Complex Syst.* **6** (2018), no. 3, p. 213-250.
- [31] F. Dell'Isola, P. Seppecher, J.-J. Alibert, T. Lekszycki, R. Grygoruk, M. Pawlikowski, D. Steigmann, I. Giorgio, U. Andreaus, E. Turco *et al.*, "Pantographic metamaterials: an example of mathematically driven design and of its technological challenges", *Contin. Mech. Thermodyn.* **31** (2019), no. 4, p. 851-884.
- [32] R. Fedele, A. Ciani, L. Galantucci, V. Casalegno, A. Ventrella, M. Ferraris, "Characterization of innovative CFC/Cu joints by full-field measurements and finite elements", *Mater. Sci. Eng. A* **595** (2014), p. 306-317.
- [33] R. Fedele, A. Ciani, L. Galantucci, M. Bettuzzi, L. Andena, "A Regularized, Pyramidal Multi-grid Approach to Global 3D-Volume Digital Image Correlation Based on X-ray Micro-tomography", *Fundam. Inf.* **125** (2013), no. 3-4, p. 361-376.
- [34] E. Barchiesi, F. Dell'Isola, F. Hild, "On the validation of homogenized modeling for bi-pantographic metamaterials via digital image correlation", *Int. J. Solids Struct.* **208-209** (2021), p. 49-62.
- [35] M. Valmalle, A. Vintache, B. Smaniotto, F. Gutmann, M. Spagnuolo, A. Ciallella, F. Hild, "Local-global DVC analyses confirm theoretical predictions for deformation and damage onset in torsion of pantographic metamaterial", *Mechanics of Materials* (2022), article no. 104379.
- [36] V. A. Eremeyev, S. A. Lurie, Y. O. Solyaev, F. dell'Isola, "On the well posedness of static boundary value problem within the linear dilatational strain gradient elasticity", *Z. Angew. Math. Phys.* **71** (2020), article no. 182.
- [37] V. A. Eremeyev, "Strong ellipticity conditions and infinitesimal stability within nonlinear strain gradient elasticity", *Mech. Res. Commun.* **117** (2021), article no. 103782.
- [38] V. A. Eremeyev, "Local material symmetry group for first- and second-order strain gradient fluids", *Math. Mech. Solids* **26** (2021), no. 8, p. 1173-1190.
- [39] F. Dell'Isola, U. Andreaus, L. Placidi, "At the origins and in the vanguard of peridynamics. Non-local and higher-gradient continuum mechanics: an underestimated and still topical contribution of Piola, Gabrio", *Math. Mech. Solids* **20** (2015), no. 8, p. 887-928.
- [40] F. Dell'Isola, A. Madeo, P. Seppecher, "Cauchy tetrahedron argument applied to higher contact interactions", *Arch. Ration. Mech. Anal.* **219** (2016), no. 3, p. 1305-1341.

- [41] F. dell'Isola, S. R. Eugster, R. Fedele, P. Seppecher, "Second-gradient continua: Lagrangian to Eulerian and back", *Math. Mech. Solids* **27** (2022), no. 12, p. 2715-2750.
- [42] V. I. Arnol'd, *Mathematical methods of classical mechanics*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 60, Springer, 2013, ebook edition.
- [43] J. E. Marsden, T. J. R. Hughes, *Mathematical foundations of elasticity*, 3<sup>rd</sup> ed., Dover Publications, 1993.
- [44] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, 3<sup>rd</sup> ed., Publish or Perish Inc., 1999.
- [45] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.
- [46] R. D. Mindlin, N. N. Eshel, "On first strain-gradient theories in linear elasticity", *Int. J. Solids Struct.* **4** (1968), no. 1, p. 109-124.
- [47] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, 1966.
- [48] F. Dell'Isola, E. Barchiesi, L. Placidi, "Levi-Civita, Tullio", in *Encyclopedia of Continuum Mechanics* (H. Altenbach, A. Öchsner, eds.), Springer, 2019, p. 1-11.
- [49] G. Capobianco, S. R. Eugster, "On the divergence theorem for submanifolds of Euclidean vector spaces within the theory of second-gradient continua", *Z. Angew. Math. Phys.* **73** (2022), article no. 86.
- [50] P. Germain, "Functional concepts in continuum mechanics", *Meccanica* **33** (1998), no. 8, p. 433-444.
- [51] "Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics. Joint Symposium IUTAM IMU held in Marseille, Sept. 1-6, 1975", (P. Germain, B. Nayroles, eds.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 503, Springer, 2006.
- [52] P. Germain, P. Suquet, Q. S. Nguyen, "Continuum thermodynamics", *J. Appl. Mech.* **50** (1983), p. 1010-1020.
- [53] F. Dell'Isola, P. Seppecher, "Edge Contact Forces and Quasi-Balanced Power", *Meccanica* **32** (1997), no. 1, p. 33-52.





---

Research article / *Article de recherche*

The French “Année de la Mécanique”: some views on recent advances in solid and fluid mechanics / *L'année de la mécanique : quelques points de vue sur des avancées récentes en mécanique des solides et des fluides*

# Conciliating accuracy and efficiency to empower engineering based on performance: a short journey

Francisco Chinesta <sup>\*,a,b</sup> and Elias Cueto <sup>c</sup>

<sup>a</sup> PIMM lab, Arts et Metiers Institute of Technology, 151 Boulevard de Hôpital, 75013 Paris, France

<sup>b</sup> CNRS@CREATE LTD, 1 Create Way, 08-01 CREATE Tower, Singapore 138602

<sup>c</sup> Aragon Institute of Engineering Research, Universidad de Zaragoza, Maria de Luna s/n, 50018 Zaragoza, Spain

*E-mails:* francisco.chinesta@ensam.eu (F. Chinesta), ecueto@unizar.es (E. Cueto)

**Abstract.** This paper revisits the different arts of engineering. The *art of modeling* for describing the behavior of complex systems from the solution of partial differential equations that are expected to govern their responses. Then, the *art of simulation* concerns the ability of solving these complex mathematical objects expected to describe the physical reality as accurately as possible (accuracy with respect to the exact solution of the models) and as fast as possible. Finally, the *art of decision making* needs to ensure accurate and fast predictions for efficient diagnosis and prognosis. For that purpose physics-informed digital twins (also known as Hybrid Twins) will be employed, allying real-time physics (where complex models are solved by using advanced model order reduction techniques) and physics-informed data-driven models for filling the gap between the reality and the physics-based model predictions. The use of physics-aware data-driven models in tandem with physics-based reduced order models allows us to predict very fast without compromising accuracy. This is compulsory for diagnosis and prognosis purposes.

**Keywords.** Physics-based modeling, Machine learning, Artificial Intelligence, Data-driven modeling, Model Order Reduction, POD, PGD, Virtual, Digital and Hybrid Twins.

**Funding.** F. C. is supported by the CREATE-ID ESI-ENSAM research chair. E. C. is supported by ESI Group through the Simulated Reality project, UZ-2019-0060. This work has been partially funded by the Spanish Ministry of Science and Innovation, AEI /10.13039/501100011033, through Grant number PID2020-113463RB-C31 and the Regional Government of Aragon and the European Social Fund, group T24-20R..

*Manuscript received 17 August 2022, accepted 28 March 2023.*

---

\*Corresponding author

## 1. The whole picture

At the beginning was science. The so-called modern science, for some historians of science Galileo's heritage, would have to wait a bit more. From the very beginning, the human being created technology to master the natural environment and take profit of it for constructing tools that facilitated the everyday life. Later, was the time to surpass the status quo, to break limits, to make non-natural things—like flying for instance—and engineering became a major protagonist, looking for improving performances. Thus, the dream of Leonardo was flying, the wings were there for making flying possible, or simpler. In many cases the application preceded the scientific understanding.

As Theodore Von Karman said, scientists study the world as it is, engineers create the world that never has been. The first industrial revolution arose from steam engines and transformed industry. Later on, electricity gave rise to the second revolution, the one enabling producing more and faster, and this one not only transformed industry but also the society.

Alessandro Volta was invited two centuries ago at the French academy of sciences in Paris to present his battery. He exhibited the action of applying the electrodes of his battery to a frog. All the attendants were very impressed by the frog jumps. After that exciting session, the legend says that Napoleon asked: Alessandro, do you think that one day, this thing that you call electricity, could serve to something else that making jumps to the frogs? Few generations later, can you imagine one single day of your *everyday* life without electricity?

Later, electronics entered the scene and, with it, automation. Welcome to the third industrial revolution that enabled not only making faster, but making better. Despite all these advances, engineering remained product-based, despite of the fact that the society is looking for performance. The product is a simple way to access to this performance. When we buy an electric drill, we are in fact trying to buy a good quality hole. However, engineering remained product-oriented. Why?

Certainty, due to the fact that even if physics-based models are very rich (in terms of physics), it was difficult to both (i) address the product in its environment, usually too large, too complex, too uncertain, too fluctuating...; and (ii) solve them under stringent real-time constraints, needed for optimal decision in operation, the ultimate goal of engineers and engineering.

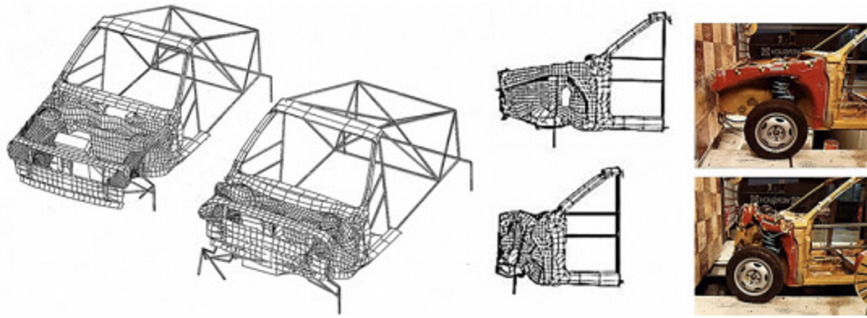
## 2. The three arts of the engineering

The just referred challenges were addressed by empowering three arts of engineering.

### 2.1. *The art of modeling*

Science begun by empirical observation, something that is often called the first paradigm of science. This is science in the times of Tycho Brahe. But science soon embraced—in fact, with Brahe's disciple, Kepler—a new paradigm: that of scientific theory. The *art of modeling* concerned all the physics throughout all the description scales of materials, processes and structures, a rich and holistic physics-based approach. This *art* allowed us to make accurate predictions concerning materials, manufacturing processes and structural analysis, even in extreme conditions and with the computational facilities available 45 years ago. These were in some cases smaller than the one we have in the smartphone placed in our pocket.

Despite of the encountered computing limitations it was possible for instance, in 1985, to simulate a crash test (involving fast-dynamics, multi-contact, plastic deformation, damage and rupture, the worst among all the imaginable behaviors), as sketched in Figure 1. This was a major accomplishment in computer simulation that can be found in the Computer History Museum at San Jose (California) [1].



**Figure 1.** Pioneering crash analyses. Picture courtesy of ESI Group.

However, these accomplishments remained limited by the available computational resources as well as by the characteristic time of calculation and response. Replacing product management by the management of performance needs for faster predictions, for faster and more optimal designs, for faster and better decisions.

## 2.2. *The art of simulation*

Thus, the *art of modeling* was enriched with a second art, the *art of simulation*—the third paradigm of science—that can be summarized in a single sentence: the ability of applying the best numerical technique to a given problem, ensuring the best accuracy and efficiency. The *art of simulation* is also a long history, more than 50 years old, that began when computers irrupted and replaced the human analogical calculation by its radically new, and much faster, digital counterpart. But the new engineering based on performance, at the beginning of the third millennium, needs to proceed faster, in real-time. Sometimes even faster.

It was at the end of the XX century, that new technologies were proposed and implemented, that without breaking down its physics-based rich descriptions, allowed to speed-up their predictive capacities, i.e., the solution of the complex models that such rich engineering descriptions imply. New capabilities were possible by involving the use of Model Order Reduction (MOR).

To introduce the main idea behind MOR, we consider the picture of a very touristic monument on Paris, the one depicted in Figure 2. When showing this image to our Parisian colleagues, asking them about what monument it is, the response is immediate: it is the *Pantheon*. Even if we are very happy with that response, our next question is, after removing the picture from their eyes: how many columns are placed in its front? There, the responses are quite diverse, 5 for some of the interrogated people, 6 for others, some indicate seven... The surprise arrives when our colleagues are informed on the exact number of columns: just 22. Every response was very far from the exact value.

What does this experiment prove? It proves the fact that we can be sure on something even when we absolutely ignore the details. Thus, MOR could be defined as the mathematical technique able to extract essential features while ignoring accessorial details. Obviously, this definition entails the dependence on the definition of essential and accessorial. For a tourist or a computational algorithm for recognizing monuments from pictures, the essential is recognizing the monument, whereas for the enterprise in charge of the columns maintenance the number of columns seems crucial! Thus, models can and should be reduced with respect to a given goal, and the validity of reduced models depend on the circumstances in which they were learned.

For describing MOR in a more proper way, we consider a field of interest  $u(x, t)$ , with the quantity  $u(\bullet)$  being a scalar, a vector or a tensor field, that depends on the physical space,



**Figure 2.** A highly visited monument in Paris.

represented by the space coordinates  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^D$  ( $D = 3$  when operating in the three-dimensional space) and time  $t \in \mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ .

For computing numerically such a rich field, the first step consists in reducing the number of unknowns—a step called discretization—that approximates the solution from the value of the field at different locations  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , (the so-called nodes in finite elements notation) and at different time instants  $t_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ , according to the general form

$$u(x, t_m) \approx \sum_{i=1}^N U_i^m N_i(x), \quad (1)$$

where when considering an interpolative approximation, i.e.,  $N_i(x_j) = \delta_{ij}$ , with  $\delta$  the Kronecker delta,  $U_i^m = u(x_i, t_m)$ . The previous expression represents the usual approximation employed in the Finite Elements Method (FEM), where the approximation functions  $N_i(x)$  are called *shape functions*.

For computing the  $N$  unknown values of the field at each time instant  $t_m$ , an equivalent number of equations is required. For that, physics offers in general the model to which the evolution (in space and time) of the field under consideration is subjected, represented in its most general form as

$$\mathcal{L}(u(x, t); \mu) = F(x, t; \mu), \text{ in } \Omega_\mu, \quad (2)$$

where  $\mathcal{L}(\bullet)$  represents a generic linear or nonlinear differential operator,  $F(\bullet)$  is the so-called forcing term, and  $\mu$  a set of parameters. Some of these parameters could affect the domain in which the problem is defined  $\Omega_\mu$  (the so-called geometrical parameters), some of them could affect the physical model itself and others the forcing term. Thus, it is expected that the solution will depend on the choice made for the different parameters grouped in vector  $\mu$ , i.e.,  $u(x, t; \mu)$ .

In general, time derivatives involved in the differential operator are approximated by using adequate finite difference schemes, taking profit of the causality that allows computing the present from the past. Thus, the general physics-based model, at time  $t_m$ , reads

$$\tilde{\mathcal{L}}(u(x, t_m); \mu) = \tilde{F}(x, t_m; \mu), \text{ in } \Omega_\mu, \quad t = t_m, \quad (3)$$

that involves the solution at the present time, i.e.  $u(x, t_m; \mu)$  that by using the approximation (1) consists of  $N$  unknowns, the  $N$  nodal values of the field at the present time  $t_m$  and for the

considered set of parameters  $\mu$ , i.e.  $U_i^m(\mu)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . In the previous equation,  $\tilde{\bullet}$  represents the semi-discretized differential form.

Now, if we define the model residual at present time  $t_m$  and for the given choice of the parameters  $\mu$ , as

$$\mathcal{R}_\mu(u(x, t_m)) = \tilde{\mathcal{L}}(u(x, t_m); \mu) - \tilde{F}(x, t_m; \mu), \quad (4)$$

to enforce its nullity, the weighted residual formulation proceeds by enforcing, for any test function  $u^*(x, t_m)$  in an appropriate functional space, a vanishing integral

$$\int_{\Omega_\mu} u^*(x, t_m) \mathcal{R}_\mu(u(x, t_m)) dx = 0. \quad (5)$$

Within the Galerkin setting, the test functions are approximated from

$$u^*(x, t_m) \approx \sum_{i=1}^N U_i^* N_i(x), \quad (6)$$

that introduced into the weighted residual formulation Eq. (5) and taking into account the arbitrariness of the  $N$  coefficients  $U_i^*$  allows (after some technical manipulations: integration by parts, domain partition into elements, numerical integration, enforcement of essential boundary conditions...) to the algebraic system

$$\mathbb{K} \mathbf{U}^m = \mathbf{F}, \quad (7)$$

where matrix  $\mathbb{K}$  could depend on the solution itself  $\mathbf{U}^m$ , in the case of nonlinear modes, on time, and also on the parameters choice  $\mu$ . The forcing term  $\mathbf{F}$  will depend, in turn, on present and/or past time instants, as well as on the parameters choice. All these dependences are not explicitly indicated for the sake of notational simplicity.

Even if the reduction accomplished is unimaginable, a *double infinity* of points and time instants, condensed into  $N \times M$  discrete values (nodes and time instants), sometimes the complexity of the involved physics and the associated problem solutions, needs for several millions of nodes where then solution must be computed every mili-second, or even micro-second, as it is the case when analyzing the crash test before referred.

Solving too many algebraic systems, each one containing millions of rows and columns, is feasible with the nowadays computational resources. However, fulfilling the stringent real-time constraints while keeping reasonable the computational resources (if simulation is expected be used in small and medium enterprises, as a consequence of democratizing simulation) is far to be obvious. Despite of the impressive reduction just mentioned, that led to the algebraic system (7), its repeated solution continues being, very often, too expensive. MOR could alleviate these difficulties.

Imagine for a while, and without loss of generality, a steady-state linear problem, whose discretized form reads

$$\mathbb{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (8)$$

This discrete model is able to compute the response  $\mathbf{U}$  for any choice of the forcing term  $\mathbf{F}$ , that is,  $\mathbf{U}^1$  results from the forcing  $\mathbf{F}^1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ ,  $\mathbf{U}^2$  from  $\mathbf{F}^2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$  and so on, until the response  $\mathbf{U}^N$  related to  $\mathbf{F}^N = (0, 0, \dots, 1)^T$ . Because of the linearity, superposition applies and the response calculation to any forcing spanned into the canonical basis just considered, is straightforward.

However, in general, only a region of this impressively large domain  $\mathbb{R}^N$  of all the possible responses is, and will be, explored by a system during its life. Even the human being, each one of us, and despite the impressive freedom that we have, we explore only a small region of the domain containing all the possibilities open to us.

Thus, one could expect the response  $\mathbf{U}$  expressible in a smaller approximation basis, instead of the one of dimension  $N$  just considered. If a reduced approximation basis exists, i.e., all

the expected solutions  $\mathbf{U}$  could be approximated by using a reduced basis of size  $R$ , i.e.,  $\mathbf{U} = \text{span}\{\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_R\}$ , with  $R \ll N$ , then by putting the different vectors composing the reduced basis into the columns of matrix  $\mathbb{B}$ , i.e.  $\mathbb{B} = (\mathbf{R}_1 \dots \mathbf{R}_R)$ , one can write  $\mathbf{U} = \mathbb{B}\mathbf{V}$ , where  $\mathbf{V}$  is a  $R \times 1$  vector, which component  $V_k$  represents the contribution of the approximation function  $\mathbf{R}_k$  for representing  $\mathbf{U}$ .

Thus, the algebraic system (9) can be rewritten in its reduced form

$$\mathbb{K}\mathbb{B}\mathbf{V} = \mathbf{F}, \quad (9)$$

that, projected into the reduced basis (Galerkin projection), becomes

$$\mathbb{B}^T \mathbb{K} \mathbb{B} \mathbf{V} = \mathbb{B}^T \mathbf{F}, \quad (10)$$

which defines an algebraic system of size  $R \times R$ .

The only remaining issue is the procedure to be employed for discovering that reduced basis able to span the problem solution. The construction of this basis is based on an appropriate learning procedure. For that purpose, manifold learning can be successfully applied for extracting the so-called slow manifold where the problem solution lives. Principal Component Analysis (PCA) performs well in the case of linear manifolds, whereas nonlinear manifold learning performs very well when the solution manifold exhibits a noticeable nonlinearity [2–4].

When the reduced basis is extracted by using PCA, the projected algebraic system, Eq. (10) represents the so-called Proper Orthogonal Decomposition (POD) based model order reduction, widely employed in many domains of science and engineering [5]. The main issues remain the ones related to the reduced basis generality and adaptation, the error quantification, the sampling strategy for extracting the reduced basis (some improvements were proposed in the context of the so-called Reduced Basis method [5–9]), addressing multi-parametric models and the efficient treatment of nonlinear models that needs advanced techniques (hyper-reduction [10, 11], Empirical Interpolation Methods (EIM) [12] and its discrete counterpart [13], cross approximations [14], among many other alternatives).

Until now, and despite of the fact of grouping all these techniques under the denomination of *model order reduction*, the subjacent physical models were never reduced. All them come from the considered physics, with all their richness encapsulated into the matrix  $\mathbb{K}$ , resulting from a standard discretization. The only thing that was reduced was the basis in which the response  $\mathbf{U}$  is expressed, as a consequence of the reduced nature of the forcing that remains constrained into a certain manifold  $\omega$  (with intrinsic dimension  $R$  in the discussed case) of the whole space  $\mathbb{R}^N$ .

An alternative procedure, more aligned with the model order reduction rationale, consists of calculating action/reaction pairs, i.e.,  $(\mathbf{U}^k, \mathbf{F}^k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , and looking for the lowest rank matrix  $\mathbb{K}^{\text{LR}}$ , i.e., the most reduced model, minimizing, by using a certain  $p$ -norm, the cost  $\mathcal{E}(\mathbb{K}^{\text{LR}})$  [15]:

$$\mathcal{E}(\mathbb{K}^{\text{LR}}) = \sum_{k=1}^K \left\| \mathbb{K}^{\text{LR}} \mathbf{U}^k - \mathbf{F}^k \right\|_p, \quad (11)$$

as employed for discovering dynamical systems within the so-called Dynamic Mode Decomposition (DMD) [16, 17].

In [15] the just reduced model extractor was extended for addressing nonlinear models, in [18] for operating within a reduced basis and also for extracting the reduced transfer function that approximates the inverse of model. Moreover, in [19], the procedure was adapted for constructing stable time integrators. We will come back later to the construction of models from data by using machine learning (ML) techniques. Before that, we will address the parametric dimension.

In the parametric case, POD-based techniques continues to perform well, as soon as the reduced basis is extracted from a training that covers as much as possible the parametric domain.

Then, the solution can be projected into the reduced basis and model parameters inferred online by using performant data assimilation techniques, for instance Bayesian or Kalman filters.

Proper Orthogonal Decomposition with Interpolation, PODI, [20] has been largely employed. When using the PODI, the coefficients affecting each of the vectors composing the reduced basis, are assumed to depend on the parameters, whose quantification is performed by using standard regressions. As a main limitation of this technique we can cite the number of parameters that complexities the construction of the regression.

For improving efficiency, several reduced bases are calculated at different locations of the parametric space, instead of a unique reduced basis in the whole parametric space. When different reduced bases are computed for different choices of the parameters, they must be interpolated for covering the whole parametric space before using it for approximating the solution and proceeding from the weighted residual form. Interpolation is a tricky issue and some efficient procedures were proposed for performing that interpolation, as for example the employ of Grassmannian manifolds [21].

Another way of computing parametric solutions of parametrized partial differential equations consists in applying the so-called Proper Generalized Decomposition, PGD, based on the separated representation of the solution. This was originally proposed for defining non-incremental transient solutions [22]. In the parametric setting, the PGD proceeds by assuming a fully separated representation of the problem solution, where parameters are assumed extra-coordinates [23]. Thus, if for the sake of simplicity we assume a model depending on a single parameter  $\mu$ , the parametric solution approximation  $u^Q(x, t, \mu)$  reads

$$u^Q(x, t, \mu) = \sum_{i=1}^Q X_i(x) T_i(t) M_i(\mu), \quad (12)$$

with  $x \in \Omega$ ,  $t \in \mathcal{T}$  and  $\mu \in \mathcal{I}$ .

To compute the different unknown functions involved in the separated representation, Eq. (12), the usual weighted residual form is extended according to

$$\int_{\Omega \times \mathcal{T} \times \mathcal{I}} u^*(x, t, \mu) \mathcal{R}(u(x, t, \mu)) \, dx \, dt \, d\mu = 0. \quad (13)$$

Within a Galerkin framework, when looking to the  $q^{\text{th}}$  functional product, the trial and test functions to be employed within the integral form, Eq. (13), read respectively

$$u^q(x, t, \mu) = \sum_{i=1}^{q-1} X_i(x) T_i(t) M_i(\mu) + X_q(x) T_q(t) M_q(\mu) \equiv u^{q-1}(x, t, \mu) + X_q(x) T_q(t) M_q(\mu), \quad (14)$$

and

$$u^*(x, t, \mu) = X^*(x) T_q(t) M_q(\mu) + X_q(x) T^*(t) M_q(\mu) + X_q(x) T_q(t) M^*(\mu). \quad (15)$$

The separated representation constructor, deeply described in [24], proceeds by using an alternate directions, fixed point algorithm that computes the unknown function at the enrichment iteration  $q$ :  $X_q(x)$  from  $T_q(t)$  and  $M_q(\mu)$  taken at the previous iteration,  $T_q(t)$  from  $X_q(x)$  and  $M_q(\mu)$ , and finally  $M_q(\mu)$  from  $X_q(x)$  and  $T_q(t)$ . The iteration continues until reaching the fixed point, and then the next function product,  $q + 1$  is considered.

The main difficulties in applying the just described procedure are the necessity of performing an affine decomposition of the problem residual involved in Eq. (13) for ensuring the efficiency of the sequential calculation of each function that involves the corresponding problem coordinate. Such affine decomposition is not direct, mainly in the case of nonlinear models [14, 23]. The other difficulty is related to the procedure intrusiveness that makes difficult its use in tandem with usual commercial software.

The main interest of computing such parametric solutions  $u(x, t, \mu)$  is the ability of deriving real-time engineering, by computing any solution related to any parameters choice in almost real-time, fact that makes possible simulation, optimization, inverse analysis, simulation-based control and uncertainty propagation, all them under the stringent real-time constraints.

To overcome the difficulties related to the complex nonlinear problems and the procedure intrusiveness, one option consists in constructing metamodels (also known as surrogates, response surfaces, virtual charts or vademecums). The construction of these metamodels can be performed by considering a simple workflow: (i) defining a sampling of the parametric space; (ii) computing a high fidelity solution for each parameter choice; (iii) using an adequate regression for extending the solution known at the points in the sampling everywhere in the parametric space.

There are many alternatives for performing the first and third tasks, trying to conciliate: (i) active learning; making use of a sparse and very reduced data set, considering the best goal-oriented sampling, aimed at roughly linearly scaling with the dimension of the parameters space; (ii) the high fidelity solutions post-compression by extracting first and using then (by projection) reduced bases; (iii) rich enough approximation bases while avoiding overfitting, based on the use of sparse regularizations for enforcing parsimony (elastic-net, ridge, lasso, . . .) [25]; (iv) using orthogonal basis for evaluating sensibilities in a direct manner; and (v) efficiently addressing the high-dimensional spaces induced by the multi-parametric models, where the use of separated representations are specially suitable [26–29].

Other alternatives for performing regressions consist of using state-of-the-art techniques, like Support Vector Regression, SVR, [30], Decision Trees [31] or their Random Forest counterpart [32], Deep Neural Networks [33, 34]. These last are very efficient when a large enough amount of data is available.

The use of those parametric solutions (or their parametric transfer functions counterpart) makes it possible to link system components and connect components with their environment, to constitute the so-called *Augmented Virtual Prototype*, AVP, a nominal virtual replica of a real system. AVP allowed to address rich descriptions of physical systems in almost real-time. But are those descriptions and the associated predictions in agreement with observations and measurements on the physical system?

In some cases, it is. In many others, however, this is not the case and significant deviations appear, limiting predictive capabilities. An epistemic *ignorance* seems to persist in our conceptualization and subsequent description of the physical reality. Models are models, but sometimes reality seems to contain something else, the so-called *ignorance* (the part of the reality that our models ignore), and that, as discussed below, constitutes an immense source of opportunities. As Stephen Hawking once said: *The greatest obstacle is not ignorance—it is the illusion of knowledge*.

### 2.3. Towards the art of decision making in complex systems of systems

Advanced procedures are urgently needed, not only for performing faster, but for performing well. The *art of decision making* irrupted almost everywhere, facilitated by our nowadays global interconnected world, where the Internet of Things, IoT, is fully deployed. This is at the heart of the fourth industrial revolution, with *data* as one of its protagonists, but not the only one. Smart cities and nations, with the human in the loop, are attracting interest of scientists, engineers, politicians and decision makers. This fourth industrial revolution has its counterpart in science: we speak of the fourth paradigm of science, where large scientific infrastructures produce huge volumes of data that are readily incorporated into the scientific pipeline.



Complex systems of systems, containing many interconnected components, are concerned by uncertainty and variability that limit the performances of physics-based models. On the other hand, data, even when available, rarely cover the system extension (and scales) in space and time, and then, diagnosis and prognosis based exclusively on data encounter their own limitations. The hybrid paradigm, combining both, the existing knowledge and the collected data representing the considered reality, seems a valuable route for conciliating accuracy and efficiency.

As commented, data becomes a major protagonist. However, the word *data*, simple at a first view, encompass a rich essence. First, there is a vast typology: list, images, time series, fields, graphs... Second, extracting the intrinsic data dimensionality is also a tricky issue, needing for efficient linear and nonlinear dimensionality reduction procedures [2], also known as manifold learning techniques, able to discriminate useless and useful. In recent times, some authors speak even of the fifth paradigm of science, in which data are produced by simulation in order to feed scientific discovery and theories.

But, how to realize that a model is not accurate enough? The simplest way: by making measurements (collecting data) and comparing these measurements with the predictions based on the existing knowledge, provided by the state-of-the-art models, that can be very efficiently solved as discussed above.

When these measurements, even adequately assimilated into the models (model calibration), does not result in a calibrated model able to describe with high fidelity the observed reality, something seems missing in the reality representation. This should be modeled to improve designs and decisions.

One possibility is offered by Artificial Intelligence, AI. Machine Learning, a major protagonist of AI, is able to create predictive models from available or collected data, with an additional added value, the fact of providing that prediction in almost real-time.

However, creating models from scratch, simply because the existing models based on physics were not accurate enough, is not the best choice. Creating a model based on data from scratch needs a lot of data, and in engineering and technology, data is synonym of cost. Sometimes data collection also implies to consider an ethical dimension, to fulfill existing regulations, or must address technical difficulties, related for example to the sensors placement, data transfer...

In our works we advocated by the alliance between both (i) the analogical world of knowledge and physics-based models, and (ii) the more recent digital world of data, manipulated by more and more powerful (accurate, frugal and explainable—certifiable—) techniques of Artificial Intelligence.

This new alliance is materialized in the so-called Digital or Hybrid Twins, in which physics-based models are enriched to decrease their intrinsic ignorance, in a pragmatic way, from data representing the deviation between predictions and measurements. The hybrid paradigm not only allows reducing the amount of needed data (now it is only expected to describe the gap between the reality and the physics-based predictions), but also the ability of explaining the part of the model based on the existing physics or knowledge, and then facilitating the design or decision certification.

In order to reduce the amount of data to model the observable phenomena (when models do not exist or are too inaccurate) or for enriching the existing physics-based models within the hybrid paradigm previous introduced, physics-aware (also known as physics-informed) Artificial Intelligence seems to be the most appealing route.

The so-called Physics Informed Neural Networks, PINN, [35, 36] consider the approximation of the unknown function  $u(x, t)$  as a regression problem defined on an adapted neural network. Then, as soon as the physics is assumed fully known and adequately described by a partial differential equation, the derivatives involved in the differential operator can be applied on the NN and the residual nullity is enforced from the NN loss function.

Sometimes, not everything concerning the physics is fully known. If we consider a hyper-elastic material, the best option consists in learning the free energy by constructing a regression linked to the state variables, in such a way that its derivatives leads to the constitutive equation. Then, the free energy is learned to be consistent with the collected data on the structural component, under the equilibrium constraints.

Similar procedures apply in the so-called Structure Preserving NN (also known as Thermodynamic Informed NN) where the free energy and the dissipation potential are computed in such a way that energy balance and entropy production are ensured [37–42].

In those works, inspired from the GENERIC framework [43], the state  $\mathbf{Z}$  evolution,  $\dot{\mathbf{Z}}$ , reads

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbb{L}\nabla_{\mathbf{Z}}\mathcal{H} + \mathbb{M}\nabla_{\mathbf{Z}}\mathcal{S}, \quad (16)$$

where the first term of the right-hand member represents the reversible evolution (Hamiltonian contribution) whereas the second one represents the dissipative contribution, with  $\mathcal{H}$  and  $\mathcal{S}$  the energy and the entropy respectively.

Learning matrices  $\mathbb{L}$  (known to be skew-symmetric) and  $\mathbb{M}$ , symmetric and positive semi-definite, as well as both potentials  $\mathcal{H}$  and  $\mathcal{S}$  (subjected to some constraints: the Jacobi identities as well as the consistency conditions  $\mathbb{L}\nabla_{\mathbf{Z}}\mathcal{S} = \mathbf{0}$  and  $\mathbb{M}\nabla_{\mathbf{Z}}\mathcal{H} = \mathbf{0}$ ) is performed from the existing data concerning the state time evolution  $\mathbf{Z}(t_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . The learnt model has very interesting properties, as are the ones related to energy conservation and positive dissipation, giving rise to stable and accurate time integrators.

The main issue found when learning such thermodynamic-aware models is not the regression implementation, but the choice of the variables in the state vector, an issue discussed in [44]. In very small systems the state variables are easily identified, however in large (continuous) systems such a choice is far of being trivial. In that case, many options exist. One among them consists of performing a dimensionality reduction. The use of most of manifold learning dimensionality reduction has as main drawback the unavailability of performing the inverse mapping for coming back from the reduced space to the departure one.

In the general nonlinear case, an appealing alternative consists in the use of NN-based (sparse) autoencoders [45], where encoding and decoding is learned, while models operate (and are learnt) in a transparent way in the internal layer of reduced dimension where active reduced coordinates (the so-called latent variables or latent space) act. Autoencoders allow to learn the best model representation, that in many cases, other than reducing the dimension of the model, makes possible reducing the model complexity (and therefore its nonlinearity), enabling the use of simpler and cheaper regression techniques operating at the level of the latent space, where sometimes linear regressions suffice.

In the same way that data allows enriching the existing knowledge (i.e., models based on physics), the existing knowledge and physics-based models allow to replace the big data by a smart data paradigm, by simply responding three main questions: (i) what data to collect, (ii) when and (iii) where. For instance, for having an idea on the temperature in Paris we can use two thermometers, one placed inside our apartment, the other in the balcony, and take the temperatures at mid-night, early in the morning and at noon. Two thermometers and 3 measures, to have a reasonable approximation of the temperature evolution each day in Paris. However, for taking that decision about the measurements we used our knowledge. We thus avoid using one million thermometers distributed all along Paris and collecting the temperature at each one, each millisecond. This is expensive and useless. This example illustrates the difference between big-data and smart-data. Smarter seems definitively better!

Reconciliation and alliance between physics-based and data-driven models, leads to the so-called Hybrid Twin, HT [46]. It constitutes a digital replica of a material, process, structure, component, systems or systems of systems, able to replace or substitute the real system for antic-

ipating future responses, to access to its intimate state, while retaining the following features, qualities and functionalities: (i) accuracy guaranteed by the hybrid approach; (ii) frugal, being based on the smart-data paradigm; (iii) holistic throughout all the involved physics and description scales; (iv) providing real-time responses by invoking advanced model order reduction techniques; (v) explicable and certifiable; (vi) adaptable; (vii) reliable; (viii) resilient; (ix) informed-IoT; (x) systemic to address the system within its environment; and (xi) usable.

The HT of a component, of a system, or of a system of systems can and must interact with the human being. The last continues to be, even today, the main contributor in many domains where imagination, intuition, complex abstraction and interpretability are needed, as well as qualitative reasoning, including the emotional dimension.

It is well known that people remember very differently what they learnt after two weeks: 10% to 20% of what they heard or read, 90% of what they did (acted upon) in a real or virtual experience. Thus, we must experience physics, we must be protagonists and not only observers.

Data produced by the HT must be contextualized to be profitable, interpretable and exploitable by humans. New human-centric facilities irrupted and were combined with the hybrid paradigm. Among them the immersive virtual reality, VR, augmented reality, AR, [47] in multi-physics evolving settings, and hybrid reality, HR, in which the human interacts with the virtual world (a digital replica of the reality) in the form of holograms that can be experienced visually, from the touch, and even by integrating other sensorial sensations: smell or taste. Recording emotions could lead to better adapt a product to each specific final user, e.g. adapt the car to the driver, adapt the text-book to the reader, adapt a cosmetic cream to the customer. . .

This human-centric HT constitutes the major protagonist of an incipient Augmented Intelligence, that does not aim at replacing the human, but enriching him to face the ultimate art, the *art of decision-making*. The one that is not based on a simple reptilian pattern recognition: I am hungry, I eat. . . necessary, but primitive. Here we are speaking about the art of decision making, that has another more elaborated dimension making use of the two sides of the brain, the rational and the creative.

### 3. Final remarks

We recently experienced the impact of COVID-19 pandemic, everywhere, and adapted to it in an active and constructive manner. The world is definitively changing, evolving, and things will be definitively different even when pandemic will definitively disappear. During this pandemic, many people worked at home, some activities seems being nowadays resilient enough, but other remain much less, as for example production machines and chains.

Without any doubt, a resilient, human centric world, allying real and virtual, cold digital data and warmer emotions, all them harmoniously entangled, will constitute the new revolution. It will be not only an industrial one. This time, more than ever, it will have a huge human and societal dimension.

Engineering is succeeding in this new framework, sculpting a new world, with major protagonists: HT (combining real-time physics and real-time physics-informed AI), blockchain, quantum computing, multi-sensorial and emotional human-centric. . . empowering human creativity and imagination, enabling moving further, better and faster. . . It is not a far dream, it is becoming a reality, that results from an intimate combination of the three just revisited arts of engineering: the art of modeling, the art of simulation and the art of decision making.

### Conflicts of interest

The authors declare no competing financial interest.

## Dedication

The manuscript was written through contributions of all authors. All authors have given approval to the final version of the manuscript.

## Acknowledgments

Authors are supported by their respective ESI Group research contracts, whose support are gratefully acknowledged.

This research is part of the programme DesCartes and is supported by the National Research Foundation, Prime Minister Office, Singapore under its Campus for Research Excellence and Technological Enterprise (CREATE) programme.

## References

- [1] ESI Groups, “The History of Crash Simulation”, 2019, <https://www.youtube.com/watch?v=NU3cB9ArSZg>.
- [2] J. A. Lee, M. Verleysen, *Nonlinear dimensionality reduction*, Information Science and Statistics, Springer, 2007.
- [3] S. T. Roweis, L. K. Saul, “Nonlinear dimensionality reduction by Locally Linear Embedding”, *Science* **290** (2000), no. 5500, p. 2323-2326.
- [4] L. van der Maaten, G. E. Hinton, “Visualizing data using t-SNE”, *J. Mach. Learn. Res.* **9** (2008), p. 2579-2605.
- [5] F. Chinesta, A. Huerta, G. Rozza, K. Willcox, “Model Order Reduction”, in *Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition* (E. Stein, R. de Borst, T. Hughes, eds.), John Wiley & Sons, 2017, p. 1-36.
- [6] K. Veroy, A. T. Patera, “Certified real-time solution of the parametrized steady incompressible Navier–Stokes equations: Rigorous reduced-basis *a posteriori* error bounds”, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **47** (2005), no. 8-9, p. 773-788.
- [7] K. Veroy, C. Prud’homme, D. Rovas, A. T. Patera, “*A Posteriori* error bounds for reduced-basis approximation of parametrized noncoercive and nonlinear elliptic partial differential equations”, in *Proceedings of the 16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2003.
- [8] Y. Maday, A. T. Patera, G. Turinici, “*A Priori* convergence theory for reduced-basis approximations of single-parameter elliptic partial differential equations”, *J. Sci. Comput.* **17** (2002), no. 1-4, p. 437-446.
- [9] Y. Maday, A. T. Patera, G. Turinici, “Global *a priori* convergence theory for reduced-basis approximation of single-parameter symmetric coercive elliptic partial differential equations”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **335** (2002), no. 3, p. 289-294.
- [10] D. Ryckelynck, “*A priori* hyperreduction method: an adaptive approach”, *J. Comput. Phys.* **202** (2005), no. 1, p. 346-366.
- [11] T. Chapman, P. Avery, P. Collins, C. Farhat, “Accelerated mesh sampling for the hyper reduction of nonlinear computational models”, *Int. J. Num. Meth. Engrg.* **109** (2017), no. 12, p. 1623-1654.
- [12] M. Barrault, Y. Maday, N. C. Nguyen, A. T. Patera, “An “empirical interpolation” method: Application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **339** (2004), no. 9, p. 667-672.
- [13] S. Chaturantabut, D. C. Sorensen, “Nonlinear model order reduction via discrete empirical interpolation”, *SIAM J. Sci. Comput.* **32** (2010), no. 5, p. 2737-2764.
- [14] J. V. Aguado, D. Borzacchiello, K. S. Kollepara, F. Chinesta, A. Huerta, “Tensor representation of on-linear models using cross approximations”, *J. Sci. Comput.* **81** (2019), p. 22-47.
- [15] A. Reille, N. Hascoet, C. Ghnatios, A. Ammar, E. Cueto, J.-L. Duval, F. Chinesta, R. Keunings, “Incremental dynamic mode decomposition: A reduced-model learner operating at the low-data limit”, *C. R. Méc. Acad. Sci. Paris* **347** (2019), no. 11, p. 780-792.
- [16] P.J. Schmid, “Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data”, *J. Fluid Mech.* **656** (2010), p. 5-28.
- [17] M. O. Williams, I. G. Kevrekidis, C. W. Rowley, “A data-driven approximation of the Koopman operator: extending dynamic mode decomposition”, *J. Nonlinear Sci.* **25** (2015), no. 6, p. 1307-1346.
- [18] A. Reille, V. Champaney, F. Daim, Y. Tourbier, N. Hascoet, D. González, E. Cueto, J.-L. Duval, F. Chinesta, “Learning data-driven reduced elastic and inelastic models of spot-welded patches”, *Mechanics & Industry*, **22** (2021), article no. 32 (17 pages).
- [19] A. Sancarlos, M. Cameron, J.-M. Le Peuvedic, J. Groulier, J.-L. Duval, E. Cueton, F. Chinesta, “Learning stable reduced-order models for hybrid twins. Data Centric Engineering”, *Data-Centric Engineering* **2** (2021), article no. E10.
- [20] H. V. Ly, H. T. Tran, “Modeling and control of physical processes using Proper Orthogonal Decomposition”, *Mathematical and Computer Modelling* **33** (2001), no. 1-3, p. 223-236.

- [21] D. Amsallem, C. Farhat, "Interpolation method for adapting reduced-order models and application to aeroelasticity", *AIAA J.* **46** (2008), no. 7, p. 1803-1813.
- [22] P. Ladevèze, *Nonlinear Computational Structural Mechanics. New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*, Mechanical Engineering Series, Springer, 1999.
- [23] F. Chinesta, A. Leygue, F. Bordeu, F. Bordeu, J. V. Aguado, E. Cueto, D. González, I. Alfaro, A. Ammar, A. Huerta, "PGD-Based *Computational Vademecum* for Efficient Design, Optimization and Control", *Arch. Comput. Methods Eng.* **20** (2013), no. 1, p. 31-59.
- [24] F. Chinesta, R. Keunings, A. Leygue, *The Proper Generalized Decomposition for Advanced Numerical Simulations. A primer*, SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology, Springer, 2014.
- [25] S. L. Brunton, J. L. Proctor, N. Kutz, "Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **113** (2016), no. 15, p. 3932-3937.
- [26] R. Tibshirani, "Regression shrinkage and selection via the lasso", *J. R. Stat. Soc., Ser. B, Stat. Methodol.* **58** (1996), no. 1, p. 267-288.
- [27] D. Borzacchiello, J. V. Aguado, F. Chinesta, "Non-intrusive *Sparse Subspace Learning* for parametrized problems", *Arch. Comput. Methods Eng.* **26** (2019), no. 2, p. 303-326.
- [28] R. Ibáñez, E. Abisset-Chavanne, A. Ammar, D. González, E. Cueto, A. Huerta, J.-L. Duval, F. Chinesta, "A multi-dimensional data-driven sparse identification technique: the sparse Proper Generalized Decomposition", *Complexity* **2018** (2018), article no. 5608286.
- [29] A. Sancarlos, V. Champaney, J.-L. Duval, E. Cueto, F. Chinesta, "PGD-based advanced nonlinear multiparametric regressions for constructing metamodels at the scarce-data limit", *Adv. Model. and Simul. in Eng. Sci.* **10** (2023), no. 4.
- [30] M. Awad, R. Khanna, "Support Vector Regression", in *Efficient Learning Machines: Theories, Concepts, and Applications for Engineers and System Designers*, Apress, 2015, p. 67-80.
- [31] C. W. Kirkwood, "Decision Tree primer", 2002, <https://www.public.asu.edu/~kirkwood/DASstuff/refs/decisiontrees/index.html>.
- [32] L. Breiman, "Random Forests", *Mach. Learn.* **45** (2001), p. 5-32.
- [33] J. Schmidhuber, "Deep learning in neural networks: An overview", *Neural Netw.* **61** (2015), p. 85-117.
- [34] I. Goodfellow, Y. Bengio, A. Courville, *Deep learning*, Adaptive Computation and Machine Learning, MIT Press, 2016.
- [35] M. Raissi, P. Perdikaris, G. E. Karniadakis, "Physics informed deep learning (part I): data-driven solutions of nonlinear partial differential equations", <https://arxiv.org/abs/1711.10561>, 2017.
- [36] M. Raissi, P. Perdikaris, G. E. Karniadakis, "Physics informed deep learning (part II): data-driven discovery of nonlinear partial differential equations", <https://arxiv.org/abs/1711.10566>, 2017.
- [37] D. González, F. Chinesta, E. Cueto, "Thermodynamically consistent data-driven computational mechanics", *Comput. Mech.* **31** (2019), p. 239-253.
- [38] D. González, F. Chinesta, E. Cueto, "Learning corrections for hyper-elastic models from data", *Front. Mater.* **6** (2019).
- [39] Q. Hernandez, A. Badiás, D. González, F. Chinesta, E. Cueto, "Deep learning of thermodynamics-aware reduced-order models from data", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **379** (2021), article no. 113763.
- [40] Q. Hernandez, D. González, F. Chinesta, E. Cueto, "Learning non-Markovian physics from data", *Journal of Computational Physics* **428** (2021), article no. 109982.
- [41] B. Moya, D. González, I. Alfaro, F. Chinesta, E. Cueto, "Learning slosh dynamics by means of data", *Comput. Mech.* **64** (2019), p. 511-523.
- [42] B. Moya, A. Badiás, I. Alfaro, F. Chinesta, E. Cueto, "Digital twins that learn and correct themselves", *Int. J. Numer. Methods Eng.* **123** (2020), no. 13, p. 3034-3044.
- [43] M. Grmela, H. C. Öttinger, "Dynamics and thermodynamics of complex fluids. I. Development of a general formalism", *Phys. Rev. E* **56** (1997), no. 6, p. 6620-6632.
- [44] R. Ibanez, P. Gilormini, E. Cueto, F. Chinesta, "Numerical experiments on unsupervised manifold learning applied to mechanical modeling of materials and structures", *Comptes Rendus. Mécanique* **348** (2020), no. 10-11, p. 937-958.
- [45] G. E. Hinton, R. Zemel, "Autoencoders, minimum description length and Helmholtz free energy", in *Advances in Neural Information Processing Systems*, vol. 6, Morgan-Kaufmann, 1993, p. 3-10.
- [46] F. Chinesta, E. Cueto, E. Abisset-Chavanne, J.-L. Duval, F. El Khaldi, "Virtual, Digital and Hybrid Twins: A New Paradigm in Data-Based Engineering and Engineered Data", *Arch. Comput. Methods Eng.* **27** (2020), p. 105-134.
- [47] A. Badiás, S. Curtit, D. González, I. Alfaro, F. Chinesta, E. Cueto, "An Augmented Reality platform for interactive aerodynamic design and analysis", *Int. J. Numer. Methods Eng.* **138** (2019), p. 125-138.





---

Review article / *Article de synthèse*

The French “Année de la Mécanique”: some views on recent advances in solid and fluid mechanics / *L'année de la mécanique : quelques points de vue sur des avancées récentes en mécanique des solides et des fluides*

Lie groups and continuum mechanics: where do we stand today?

*Groupes de Lie et mécanique des milieux continus : où en sommes-nous aujourd'hui ?*

Géry de Saxcé<sup>®,\* ,<sup>a</sup></sup> and Dina Razafindralandy<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Univ. Lille, CNRS, Centrale Lille, UMR 9013 - LaMcube - Laboratoire de mécanique multiphysique multiéchelle, F59000, Lille, France

<sup>b</sup> Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement (LaSIE) - UMR CNRS 7356, Pôle Sciences et Technologie, Avenue Michel Crépeau, F17042 La Rochelle Cedex 1, France

*E-mails:* gery.de-saxce@univ-lille.fr (G. de Saxcé), drazafin@univ-lr.fr (D. Razafindralandy)

**Abstract.** The geometric methods have experienced a fast growth in the past few decades. In this survey, we discuss the use of Lie groups in continuum mechanics. We address both the theoretical and numerical aspects. We explore the classical symmetry groups of the mechanics, the covariant form of the equations and the symmetry group of constitutive laws. We consider the Lie symmetry group of the equations of a mechanical problem and investigate how to take advantage of them in developing analytical models (self-similar solutions, conservation laws, turbulence, ...) of the physical phenomena encoded in these equations. Lastly, we present a method of constructing robust numerical integrators from the knowledge of the Lie symmetry group of the equations.

**Résumé.** Les méthodes géométriques ont connu une croissance rapide au cours des dernières décennies. Dans cette étude, nous discutons de l'utilisation des groupes de Lie en mécanique des milieux continus. Nous abordons à la fois les aspects théoriques et numériques. Nous explorons les groupes de symétrie classiques de la mécanique, la forme covariante des équations et le groupe de symétrie des lois constitutives. Nous considérons le groupe de symétrie de Lie des équations d'un problème de mécanique et montrons comment en tirer profit dans le développement de modèles analytiques (solutions auto-similaires, lois de conservation, turbulence, etc.) des phénomènes physiques encodés dans ces équations. Enfin, nous présentons une méthode de construction d'intégrateurs numériques robustes à partir de la connaissance du groupe de symétrie de Lie des équations.

**Keywords.** Lie groups, continuum mechanics, symmetry groups, geometric integrators, turbulence modelling.

---

\*Corresponding author

**Mots-clés.** Groupes de Lie, mécanique des milieux continus, groupes de symétrie, intégrateurs géométriques, modélisation de la turbulence.

*Manuscript received 4 December 2023, revised 12 February 2024, accepted 13 February 2024.*

## 1. Introduction

The Ancients, Greeks after Empedocles at fifth century BC and Roman people but also Persian, Indian and Japanese, explained the complexity of all matter in terms of simple substances: the *Earth, water, air and fire*. Today our method is the same as Ancients' one but the simple substances, the elementary bricks of the geometric approach of the mechanics and physics of continua are different and are *manifolds, groups and fibre bundles*.

A Lie group is a group that is also a differentiable manifold [1,2]. Its theory was developed from 1873 by Marius Sophus Lie, a Norwegian mathematician (see [3–5]). His interest in the geometry of differential equations was first motivated by the work of Carl Gustav Jacobi, on the theory of partial differential equations of first order and on the equations of classical mechanics. Some of Lie's early ideas were developed in close collaboration with Felix Klein. It was Lie who introduced Klein to the concept of group, which was to have a major role in his later work. In the famous Erlangen program, Klein synthesized in 1872 the geometry as the study of the properties of a space that is invariant under a given group of transformations, called today a *symmetry group*. In modern terminology, there is a group action on a manifold. Lie's set idea was to develop a theory of symmetries of differential equations that would accomplish for them what Évariste Galois had done for algebraic equations [6–8]. An important idea introduced by Lie was to work with the set of infinitesimal perturbations of the identity of the group called its *Lie algebra*. Next, new and strong developments of Lie's theory are the work of his successors, especially Wilhelm Killing, Élie Cartan and Hermann Weyl.

As already mentioned, the links between Lie groups and mechanics are deep since problems of mechanics are among others at the origin of Lie's concern. From a theoretical point of view, two kinds of issues can be addressed. At first, a symmetry group is given and we are interested in finding the invariant objects, the invariant properties or the invariant functions of these objects. It was already the case in Klein's approach of the geometry. In mechanics, the objects at issue are naturally tensors. The most fundamental aspects concern the covariance of the theory. To be general, the basic principles and equations of balance must be covariant, i.e. their form must be conserved by every transformation of the group. Another important aspect concerns the constitutive laws. A relevant challenge is to find the invariant functions of the elasticity tensor, or today the *constitutive tensors* representing the coupling with other phenomena such as thermoelasticity, piezoelectricity, magnetoelasticity and so on.

For the second issue, in contrast, the objects are known and we are searching the symmetry group which let invariant these objects, especially the systems of algebraic equations or partial differential equations.

By acting on the manifolds, the group gives a structure to the equations of the mechanical problem. Since the advent of numerical approximations and overall the computational methods, a large spectrum of methods have been developed that proved their efficiency but also their weaknesses. Worsening performance have been observed when these structure is not conserved by the approximations. In dynamics, odd numerical schemes suffer from numerical dissipation then the developments of symplectic integrators. These spurious effects can be eliminated by using symplectic integrators that respect the structure of the equations of the dynamics and conserve the energy.



In the present article, we propose a journey through selected topics where Lie groups and mechanics work together. More precisely, we make an overview of different concepts of Lie symmetry groups in continuum mechanics and present some applications. In Section 2, we revisit the fundamental symmetry groups of the mechanics. Many areas from statics to thermodynamics, including classical and relativistic approaches, will be covered. The symmetry group of constitutive laws will also be discussed. Section 3 is devoted to the symmetry group of the differential equations of a mechanical problem and their use as a modelling tool. Most applications are oriented towards fluid mechanics. It is shown how to obtain analytical (self-similar) solutions, conservation laws through an extension of Noether's theorem, and physics-preserving turbulence models from the symmetry group of the equations. In the same spirit as symplectic schemes, Section 4 presents a way to eliminate spurious effects in numerical integrations thanks to the knowledge of the symmetry group admitted by the equations.

## 2. Symmetry groups of the mechanics

In a nutshell, the leading idea of Erlangen program can be expressed as “a geometry is a group”. By selecting a group, we define a geometry. All stems back to the symmetry group. Paraphrasing Klein's idea, “a physics is a group”. For instance, by choosing Lorentz–Poincaré group, we define the relativistic mechanics. By the way, which is the symmetry group of the classical mechanics? As we shall see in the sequel, the response is not unique but before tackling the subject, let us discuss which are the main aspects concerned by the action of a symmetry group: the coordinate systems and local charts associated to the group, the transformation laws of tensors, the connections linked to the group.

Generally speaking, the elements of a symmetry group of the mechanics are coordinate changes which are linear or affine and can be represented by a matrix. From a physical point of view, the corresponding coordinate systems are those in which the observers measure lengths, durations, velocities and other related physical quantities. The space  $\mathbb{R}^n$  on which the symmetry group  $G$  acts is a simple vector affine space. On the contrary, the universe has an underlying structure of differentiable manifold and the question arises as to whether there exists at every point changes of local charts of which the Jacobean matrix is a transformation of the symmetry group. This leads to a system of partial derivative equations of first order that can be solved by Frobenius method. If the equations are compatible, the corresponding local charts are said admissible and the  $G$ -structure is integrable [9]. As we shall see, this is not always possible. An important property of a  $G$ -structure is that it is integrable if and only there exist one or more tensor fields of which the components in the admissible local charts are invariant ([9, Proposition 1.1]). These *structural tensors* equip the manifold with an underlying structure.

The behaviour of the continuum is represented by tensor fields that are sections of fiber bundles over the universe manifold. In the frames associated to the aforementioned coordinate systems or local charts associated to the group (called *G-frames*), these tensors are represented by components that are modified according to a transformation law where the group acts by representation. If we see tensors as orbits of the group, we define a class of tensors called *G-tensors* (for instance, as there are Euclidean tensors, there are Galilean tensors, Poincaréan tensors, ...). In fact the group plays a central role in the sense that it reveals the physical meaning of the components. A fruitful method consists in determining the minimal number of elements of a functional basis (able to generate all the invariants). It is constructive in the sense that it allows to determine the invariants themselves and a *normal form* (or reduced form) of the system of components. For instance, the normal form of a symmetric tensor is the diagonal form where the eigenvalues are invariant, but this method is general for tensors of arbitrary ranks. Next, starting from the normal form and applying a transformation of the group, we obtain the *generic form*

which is *covariant* in the sense that its expression is the same in every coordinate system or local chart associated to the group.

As there are  $G$ -tensors, there are  $G$ -connections, i.e. symmetric connections of which the connection matrix in the  $G$ -frames belongs to the Lie algebra of the group. In the modern approach, they are defined as connections on a principal bundle of structural  $G$  of which the orbits are the fibers. As tensors, connections acquire a physical meaning. For instance, in relativity, the connection represents the gravitation.

### 2.1. Statics

This is the most simple situation since the equilibrium is maintained (as long as it is not perturbed by a new loading), then the time does not matter and the universe is reduced to the 3D physical space. The transformations are changes of coordinate systems in which the observers measure lengths, then they are isometries. The symmetry group is *Euclid's group*. It is the group of the Euclidean geometry, according to Erlangen program, but it is also the group of Statics.

### 2.2. Dynamics

To take into account the evolution of the systems, we need an extra coordinate, the time. The universe is modeled by the 4D space-time. It is a relativistic idea but it turns out to be also relevant for the classical mechanics. Anyway, the space-time is not empty. There are objects (single particles or continuum bodies) moving inside, and among them observers. Writing the equations of the dynamics as a differential system of order one (the canonical equations) on the cotangent bundle, there is a group that conserves the structure of these equations, the *symplectic group*  $Sp(2n)$  (with  $n = 4$ ) that conserves the *canonical symplectic form*  $\omega = dx^1 \wedge dp_1 + \dots + dx^n \wedge dp_n$  [10]. More generally, a group is symplectic if it let invariant a closed non-degenerate 2-covariant tensor called the *symplectic form* and *presymplectic* if the invariant 2-covariant tensor is degenerate. The symmetry group of any theory of dynamics is expected to be symplectic or presymplectic. Although at the beginning the symplectic geometry was applied mainly to the dynamics of particles and rigid bodies [11, 12], it is now spreading within the continuum mechanics. It is also widely applied to other physical theories such that optics, electromagnetism, quantum mechanics, statistical mechanics [12–14].

According to Darboux theorem, if  $\omega$  is a presymplectic form of rank  $k$ , at every point of the manifold, there exists a local chart in which it is represented by  $\omega = dx^1 \wedge dx^{r+1} + \dots + dx^r \wedge dx^{2r}$ . If the dimension of the manifold is  $2n$  and  $r = n$ , the local charts are said symplectic or canonical. The corresponding change of local charts define an integrable  $Sp(2n)$ -structure.

An important tool introduced by Jean-Marie Souriau [12] is the *momentum map* from the manifold on which the group acts into the dual of its Lie algebra which is constant on the trajectories (first integral). It is a modern version of Noether's theorem.

There are two challenges: how to generalize the symplectic form and the momentum map to continuum mechanics. A natural idea is to introduce a *multisymplectic* form of degree  $> 2$  [15]. Although there are various attempts in the literature, no significant breakthrough has been achieved until now that opens promising perspectives for the continuum mechanics.

### 2.3. Classical dynamics

The space-time is the set of events. An event occurring at time  $t$  and position  $\mathbf{x}$  is represented in a local chart by a system of four components

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

In absence of gravitation, the particles are moving in Uniform Straight Motion (USM). The transformations of  $\mathbb{R}^4$  conserving the USM, the durations, the distances and the space orientations are affine of the form

$$\mathbf{X} = \mathbf{C} + \mathbf{P} \mathbf{X}', \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \tau_0 \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_T & \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

where  $\mathbf{v}_T \in \mathbb{R}^3$  is the velocity of transport or Galilean boost,  $\mathbf{R} \in \mathbb{SO}(3)$  is a rotation,  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$  is a spatial translation and  $\tau_0 \in \mathbb{R}$  is a clock change. Their set  $\mathbb{GAL}$  is *Galileo's group*, a Lie group of dimension 10. The set  $\mathbb{GAL}_0$  of the linear Galilean transformations  $\mathbf{P}$  is a Lie subgroup of dimension 6. The usual velocity  $\mathbf{v}$  is extended in the space-time as the 4-velocity

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}.$$

The transformation law of the vectors  $\mathbf{U} = \mathbf{P} \mathbf{U}'$  leads to the additive composition of velocities of the classical mechanics  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_T + \mathbf{R} \mathbf{v}'$ .

One of the properties of Galileo's group is that its  $G$ -structure is integrable. More precisely, every change of local chart of the  $G$ -structure  $\mathbf{X}' \mapsto \mathbf{X}$  is compound of a clock change  $t = t' + \tau_0$ , and a rigid body motion

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}(t) \mathbf{x}' + \mathbf{x}_0(t)$$

this last relation being often used in the statement of the principle of objectivity and material indifference but rather presented as an axiom, although this is a spin-off of the structure given by Galileo's group. By the way, it equips the space-time with a structure based on two structural tensors, a semi-metric (the metric of the space slice) and a 1-form  $\tau = dt$  (the clock form). This neoclassic modelling, introduced by Toupin [16] and taken up later on by Noll [17] and Künzle [18], offers a theoretical framework for the universal (or absolute) time and space. In modern literature, it is often called Newton–Cartan structure.

The compatible local chart of Galileo's group are called *Galilean charts*. In the geometric language, *Galileo's principle of relativity* claims that the statement of the physical laws of the classical mechanics is the same in all the Galilean charts. To respect this principle in practice, the laws are expressed in a *covariant form*, using a  $\mathbb{GAL}$ -connection  $\nabla$  called *Galilean connection*. In the Galilean charts (where the index 0 is related to time and Latin indices run from 1 to 3), the non vanishing Christoffel's symbols are  $g^j = -\Gamma_{00}^j$ , identified to the gravity, and  $\Omega_j^i = \Gamma_{j0}^i = -\Gamma_{i0}^j$  is interpreted as representing Coriolis' effects [19].

The matter and its evolution can be modeled by a line bundle  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_0$  where  $\mathcal{M}$  is the space-time of dimension 4, the base  $\mathcal{M}_0$  is a manifold of dimension 3 and the fibers are the trajectories of the material particles [20]. The coordinates in a local chart of  $\mathcal{M}_0$  are Lagrangian while the coordinates of the position  $x$  are Eulerian.

In statics, the key object to modelize internal forces in a continuum is Cauchy's stress tensor. Tackling the dynamics is simply a matter of introducing an extra dimension, the time. We start with a space-time symmetric 2-contravariant tensor represented in a Galilean chart of coordinates  $\mathbf{X}'$  by a symmetric  $4 \times 4$  matrix  $\mathbf{T}'$ . To determine the number of independent invariants, we consider the action of  $\mathbb{GAL}_0$ , *i.e.* the transformation law of the tensor  $\mathbf{T} = \mathbf{P} \mathbf{T}' \mathbf{P}^\top$ . We calculate first of all the dimension of the orbit of  $\mathbf{T}'$  as the difference 6 between the dimension 6 of the group and the dimension 0 of its isotropy subgroup; next the number of independent invariants as the difference between the number 10 of independent components of  $\mathbf{T}'$  and the dimension 6 of the orbit. They are 4 independent invariants that can be gathered in the normal form:

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & -\sigma' \end{bmatrix}$$

Next, using once again the transformation law  $\mathbb{T} = \mathbb{P} \mathbb{T}' \mathbb{P}^\top$  with a Galilean boost  $\mathbf{v}$  and a rotation  $\mathbb{R}$ , we obtain the generic form

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \rho & \rho \mathbf{v}^\top \\ \rho \mathbf{v} & \rho \mathbf{v} \mathbf{v}^\top - \sigma \end{bmatrix}$$

that reveals the physical meaning of the components: the density of mass  $\rho$ , the linear momentum  $\mathbf{p} = \rho \mathbf{v}$ , the Cauchy stresses  $\sigma = \mathbb{R} \sigma' \mathbb{R}^\top$  and the dynamical stresses  $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}^\top - \sigma$ . These particular quantities, that are introduced drop by drop in the course of standard textbooks, are gathered here in a *big tensor* of higher dimension. They are working together as a team. We call  $\mathbb{T}$  the *stress-mass tensor*.

Generalizing the equation of internal equilibrium of the statics ( $\text{Div } \sigma = 0$ ), the behaviour of the continuum is modeled by a conservation equation  $\text{Div } \mathbb{T} = 0$ , or in tensor notations,

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$$

where the Greek indices run from 0 to 3, that gives rise to

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j} (\rho v^j) = 0, \quad \rho \frac{\partial v^i}{\partial t} + \rho v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + \rho (g^i - 2\Omega_k^i v^k).$$

We can recognize Euler's equations of continua in a covariant form (according to Galileo's principle of relativity) where occurs in the right hand side of the latest equation the sum of the gravity force and Coriolis' force. Then we recover the equation of balance of mass and linear momentum. However, the balance of energy is missing.

#### 2.4. Relativistic dynamics and thermodynamics

By opposition to Galilean relativity, Einstein's Relativity is based on the experimental fact that the speed of the light has a huge but finite value  $c$  for every observer. In absence of gravitation, the light rays are straight lines and the particles of light –the photons– move at the constant velocity  $c$  in any coordinate system  $X$  where the observer takes measures to identify the events. The corresponding symmetry group is composed of the transformations preserving the USM (then it is affine) and Minkowski's metrics  $G_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta = c^2 dt^2 - \|dx\|^2$ . It is called *Lorentz–Poincaré group* and it is a Lie group of dimension 10 (as Galileo's group). The 4-velocity satisfying the normalization condition  $G_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = c^2$  is of the form

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$$

where  $\gamma = (1 - \|\mathbf{v}\|^2/c^2)^{-1/2}$ . An important difference with the classical mechanics is that the corresponding  $G$ -structure is *not integrable*, the obstruction being the curvature, i.e. the gravitation. In Relativity, it is simpler to manipulate the tensors than in classical mechanics because of the existence of the metrics that allows to raise and lower the indices. For instance,  $T_0^0 = G_{00} T^{00}$  is no more than  $e = \rho c^2$  stating the equivalence between the mass and the energy. Then the 2-rank tensor  $\mathbb{T}$  is called *stress-energy tensor*. The behaviour of the continuum is always modeled by a conservation equation  $\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$  allowing to recover the equations of balance of the energy and the linear momentum.

The idea to extend this *geometrization process* to the Thermodynamics of continua is natural. In [21], Eckart proposed to generalize the *first principle* of the Thermodynamics in terms of the stress-energy tensor in the form  $\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$ , the projection onto the 4-velocity allowing to recover the heat transfert equation  $U_\alpha \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$ . For the dissipative processes, Landau and Lifshitz propose in their relativistic mechanics of fluids [22] an additive decomposition of the stress-energy tensor into reversible and irreversible parts  $T^{\alpha\beta} = T_R^{\alpha\beta} + T_I^{\alpha\beta}$  and introduce the 4-flux of entropy  $s$  given by  $S^\alpha = T^{\alpha\beta} b_\beta$  where  $\mathbf{b} = \frac{1}{\theta} \mathbf{U}$  is Planck's temperature 4-vector built from

the inverse of the absolute temperature and the 4-velocity. In his relativistic thermodynamics ([23, 24]), Souriau proposed to generalize the *second principle* as  $\nabla_\alpha S^\alpha \geq 0$  and introduced the *friction tensor*  $f_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha b_\beta + \nabla_\beta b_\alpha)$  that merges the temperature gradient and the strain rate tensor, allowing to extend Fourier's conduction law and viscous flow rules to Relativity, as proposed by Vallée [25, 26]. By the way, Relativity is a consistent framework for the hypoelastic, hyperelastic and dissipative constitutive laws [27–29].

## 2.5. Classical thermodynamics

It is tempting to apply a geometrization process to the classical Thermodynamics by changing the symmetry group, that is possible with suitable modifications. In order to recover directly the equation of balance of energy, it is convenient to work in a manifold  $\widehat{\mathcal{M}}$  of dimension 5 by adding an extra coordinate  $z$  of which the meaning is the action per unit mass. For a free particle of mass  $m$  and velocity  $\mathbf{v}$ , using the transformation law of the velocity, we have

$$dz = \frac{\mathcal{L}}{m} dt = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 dt = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_T + \mathbf{R} \mathbf{v}'\|^2 dt = dz' + (\mathbf{v}_T)^\top \mathbf{R} dx' + \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_T\|^2 dt'$$

that leads to introduce the affine transformations of  $\mathbb{R}^5$  composed of a translation and a linear transformation of the form

$$\widehat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \tau_0 \\ \mathbf{k} \\ \eta \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{v}_T & \mathbf{R} & 0 \\ \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_T\|^2 & (\mathbf{v}_T)^\top \mathbf{R} & 1 \end{bmatrix}$$

where the bottom row of  $\widehat{\mathbf{P}}$  is given by the transformation law of  $z$  above. Their set is a Lie group of dimension 11 (because of the new parameter  $\eta$  of translation in the  $z$  direction). This group, called *Bargmann's group*, was introduced to solve problems of group quantization [30]. In addition to the invariants of Galileo's group, Bargmann's group let invariant a metric  $\widehat{G}_{\alpha\beta} d\widehat{X}^\alpha d\widehat{X}^\beta = 2 dt dz - \|d\mathbf{x}\|^2$ . Planck's temperature 4-vector  $\mathbf{b}$  is extended in the fifth dimension

$$\widehat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta} \mathbf{U} \\ \zeta \end{bmatrix},$$

where  $\zeta$  is Planck's potential. The friction tensor is now simply  $f_\alpha^\beta = \nabla_\alpha b^\beta$  (without symmetrization because the space-time is not Riemannian in classical mechanics). What about the stress-mass-tensor  $\mathbf{T}$ ? As the temperature vector, it can be also extended as a linear mapping from the tangent space to  $\widehat{\mathcal{M}}$  onto the tangent space to the space-time  $\mathcal{M}$ . Introducing the mass 4-flux  $\mathbf{N} = \rho \mathbf{U}$ , it is represented by a  $4 \times 5$  matrix

$$\widehat{\mathbf{T}} = [\mathbf{T}, \mathbf{N}] = \begin{bmatrix} e & -\mathbf{p}^\top & \rho \\ \mathbf{k} & \sigma_* & \mathbf{p} \end{bmatrix}$$

where  $e$  is the energy,  $\mathbf{p}$  the linear momentum,  $\sigma_*$  the dynamic stresses and

$$\mathbf{k} = \mathbf{h} + e \mathbf{v} - \sigma \mathbf{v}$$

decomposed into the energy flux by *conduction*  $\mathbf{h}$ , by *convection*  $e \mathbf{v}$  and by stress  $\sigma \mathbf{v}$ . The Landau–Lifshitz decomposition is still valid in the extended form  $\widehat{\mathbf{T}} = \widehat{\mathbf{T}}_R + \widehat{\mathbf{T}}_I$ . The first principle is extended as  $\nabla_\alpha \widehat{T}_\beta^\alpha$ . The second principle reads

$$\nabla_\alpha S^\alpha - \left( f_\alpha^\beta \tau_\beta U^\alpha \right) \left( (T_I)^\beta_\alpha \tau_\beta U^\alpha \right) \geq 0$$

where occurs the clock form  $\tau$ . It is the geometrization of the Clausius–Duhem inequality

$$\rho \frac{ds}{dt} - \frac{\rho}{\theta} \frac{dq_I}{dt} + \nabla_\alpha \left( \frac{h^\alpha}{\theta} \right) \geq 0$$

where  $s$  is the entropy,  $q_I$  is the specific irreversible heat source (present in  $T_I$ ) and  $\mathbf{h}$  the conduction flux.

## 2.6. Affine mechanics

Despite of several infringements to the relativistic model, the classical mechanics can be cast into the mould of the Relativity. It works both ways. It is the epistemological reversal. For instance, as the relativistic 4-velocity  $U_\alpha$  approaches  $c^2\tau_\alpha$  when  $c$  approaches the infinity, it is easy to guess the relativistic version of the second principle

$$\nabla_\alpha S^\alpha - \frac{1}{c^2} \left( f_\alpha^\beta U_\beta U^\alpha \right) - \frac{1}{c^2} \left( (T_I)^\beta_\alpha U_\beta U^\alpha \right) \geq 0$$

Taking the reasoning further, we can observe that Galileo's group, Lorentz–Poincaré group and Bargmann's group are all Lie subgroups of the affine group, hence the idea to develop an affine mechanics based on the concept of affine tensors [31]. The most simple types of affine tensors are the points of the tangent space to the manifold and the real-valued affine functions on this space. Analysing the underlying structure of the mechanics, we can identify three kinds of affine tensors relevant for the mechanics: the *torsor* (2-contravariant, anti-symmetric), the *co-torsor* (2-covariant, anti-symmetric), objects naturally in duality, and the *momentum tensor* (1-contravariant and 1-covariant), in duality with the infinitesimal generators of the Lie algebra of the symmetry group. Then the component system of the momentum tensor belongs to the dual of the Lie algebra, hence the name since the momentum map takes its values in this space.

On this ground, we can modelize curvilinear media of dimension  $p$  embedded in an ambient space of dimension  $n$ . The torsor is vector-valued in the tangent space to a matter manifold of dimension  $p$ . Its components  $({}^\gamma T^\alpha, {}^\gamma J^{\alpha\beta})$  have several indices, the left-hand one being related to the matter manifold. The  $J$  components allow to treat *generalized continua* such as *Cosserat media*. The behaviour of the curvilinear medium is governed by equations of the form

$${}_\gamma \tilde{\nabla} {}^\gamma T^\alpha = 0, \quad {}_\gamma \tilde{\nabla} {}^\gamma J^{\alpha\beta} = 0$$

where  $\tilde{\nabla}$  is an affine connection [32, 33]. These equations are very general and may have declined with respect to the chosen curvilinear medium and the ambient space. The case  $p = 1, n = 3$ , corresponds to the statics of arches,  $p = 1, n = 4$ , to the dynamics of the rigid body,  $p = 2, n = 4$ , to the dynamics of arches (if solid), water jets, flows in a pipe, in a hose (if fluid) [19]. For  $p = n = 4$ , we recover Euler's equation of a 3D continuum.

## 2.7. Symmetry group of constitutive laws

A topical issue which is becoming increasingly important for the improvement of material properties and the design of new materials (architected materials) is the study of their symmetries. The most simple constitutive relation is the elastic behaviour characterized by the elasticity tensor, an Euclidean tensor of rank four. The group  $\mathbb{O}(3)$  acts by linear representation onto its components. The materials are anisotropic by nature (rocks, wood, ...) or by construction (composite materials). The symmetry group of a material is the isotropy group of its elasticity tensor. The set of materials with the same isotropy subgroup is called a symmetry class. It may be a Lie subgroup of  $\mathbb{O}(3)$  but also a finite subgroup. The relevant mathematical tools are also representation theory and algebraic geometry. If the isotropy group is  $\mathbb{O}(3)$  itself, the material is isotropic.

Otherwise, if its components have been measured, determining the symmetry class of the material can be a difficult task because its components depend not only on the elasticity tensor but also on the frame of reference in which they have been determined, that is the orthonormal basis in which the components are given. A tool to classify the elastic materials is to define an

integrity basis of invariants, that is a set of independent invariant functions of the components. Another tool is the harmonic decomposition of the elasticity tensor. In 3D, The road ahead is long and full of obstacles [34–36]. In 2D, the problems are more affordable. This topic has been investigated recently, for instance in [37, 38]. It is worth to mention a very elegant and efficient method making use of complex numbers, the so-called 'polar method' by Verchery [39, 40]. This approach, developed further by Vannucci, is useful for the design of composite materials [41]. Another point of view consists in evaluating the distance to a given symmetry class [42]. In recent years, a new trend appears, the study of the coupling of the elasticity with other phenomena, in particular the piezoelectricity (appearance of a polarization in a dielectric material when it is subjected to an uniform mechanical strain) and the flexoelectricity (linear response of a polarization to a non-uniform strain or a strain-gradient) [43]. In [44], use is made of Curie principle [45]: the symmetry group of the consequences (the elasticity tensor) includes the symmetry group of the causes (the microstructure).

After this overview of the fundamental symmetry groups of the mechanics, we now look at another class of Lie symmetry groups, which are the symmetry groups of the equations of a mechanical problem, and their applications.

### 3. Symmetry group of the equations of a mechanical problem

An efficient tool in analyzing a mechanical problem is the Lie symmetry group of its evolution equation, that is the maximal Lie group of transformations which leave the set of solutions invariant [1, 2, 46]. One first use of Lie symmetry groups in mechanics is the reduction of the equations. Indeed, knowing a Lie symmetry group, one can find a suitable ansatz which reduces the equations. With successive reductions, one may obtain semi- or entirely analytical (self-similar) solutions. More abstractly, the Lie symmetry group approach has been used to classify mechanical problems according to the class of self-similar solutions that they may share [47–54].

Self-similar solutions are particularly helpful to build models of the evolution of a mechanical system, to study its stability or to validate numerical software. When self-similar solutions do not verify boundary conditions, they can be thought as asymptotic solutions in some regions far from boundary. This approach has been exploited to find solutions of equations in mathematical physics (see for example [55–59]). In mechanics, the Lie group reduction has been used to establish models of cosmology, to study the equilibrium of a membrane, viscoelasticity, plasticity, to classify beam equations, ... [59–68]. In fluid mechanics, self-similar solutions of the Navier–Stokes equations have been computed [69–72] some decades ago. In [71], self-similar vortex-like solutions have been particularly studied. In Section 3.1, the reduction process will be illustrated on an anisothermal model of fluid flow.

Another use of Lie symmetry in mechanics is to derive conservation laws. In the case of a variational problem, it is known from the first Nøther's theorem that to each variational symmetry group of the Lagrangian action corresponds a conservation law [73–75]. Recall that a variational symmetry is a transformation which leave the Lagrangian action invariant. It is a particular symmetry of the Euler–Lagrange equations. Nøther's theorem establishes for example a link between the invariance of the Lagrangian function under the time translation group and the conservation of energy, or between the spatial homogeneity of the Lagrangian and the conservation of linear momentum. Table 1 summarizes some very classical consequences of Nøther's theorem in classical and quantum mechanics. In structure mechanics, conservation of Eshelby-like tensors and the path invariance of  $J$ -integral in crack mechanics, for instance, can be explained by Nøther's theorem [76–84]. A detailed view of the derivation and application of conservation laws in elasticity can be found in the books [85, 86]. In inviscid fluid mechanics, it is now known

**Table 1.** Some variational symmetries and the corresponding conserved currents.

Symmetry/Symmetry group	Conserved current
Time translation	Energy
Space translation	Linear momentum
Rotation	Angular momentum
Lorentz boost	Boost 3-vector [102]
Permutation of identical particles	Fermi-Dirac or Bose-Einstein statistics [103]
Circle group $U(1)$	Electric charge
Unitary matrix group $SU(3)$	Color charge

that classical conservation (energy, momentum, vorticity, helicity) laws are consequences of symmetries. In addition, Noether's theorem permitted to find a new conservation law in [87] from a scaling symmetry. Moreover, Noether's theorem was used to study shocks [88] or to show the non-existence of time-periodic solutions with finite nonzero energy [87]. Some other recent applications in fluid dynamics are proposed in [89–94]. Exploitation of Noether's theorem for modelling and stability analysis in cosmology can be found in [60, 61]. Applications in relativistic and in quantum mechanics can be found in [95–99]. Conservation laws also enable to analyse the quality of a numerical scheme. Some schemes, such as (multi-)symplectic integrators, are even based on conservation laws [100, 101]. In Section 3.2, a short illustrative application of Noether's theorem is given, followed by a generalisation to the non-Lagrangian case.

The Lie symmetry group theory can also serve as a guide in modelling mechanical phenomena. In this spirit, a group theoretical approach has been used to unify laminar thin layer flows in [104] in the field of fluid mechanics. In turbulence, a link between the symmetry group of the Navier–Stokes equations and Kolmogorov's  $-5/3$  law has been exposed [105]. At the same time, scaling laws of various turbulent flows have been obtained in [106–111]. In these article, the classical scaling laws in the literature ([112–115]) has also be obtained, but also new ones. The fact that they can be obtained from a Lie symmetry group approach suggests that the Lie symmetry group contains, in some extents, the scaling laws of the equations.

Finding scaling laws is a way of modelling a fluid flow in some specific regions. Another direction to modelize turbulent flows is to run a numerical simulation. One of the mostly used turbulence simulation approach is the large eddy simulation. It permits to speed up significantly the calculation but necessitates the modelling of subgrid terms. The Lie group theory has been used to analyze classical turbulence models in [116–119]. These works conclude that many turbulence models used in litterature break the symmetries of the equations. An approach developped in [120–123] enables to build a class of turbulence models which preserve the Lie symmetry group of the Navier–Stokes equations. The works have latter been extended to the anisothermal case [108, 124–126]. This approach will be recalled in Section 3.3.

### 3.1. *Lie symmetry group and equation reduction*

In this subsection, the reduction process using the Lie symmetry group theory is illustrated very briefly through an example.

As said, a symmetry of a differential equation is a transformation which transforms any solution into another solution. A Lie symmetry group of an equation is a set of symmetries carrying a Lie group structure. Under suitable regularity conditions on the equation, the Lie algebra of the maximal Lie symmetry group (and then the Lie group itself by exponentiation) of the equation can be computed algorithmically from Lie's theory (see [127–129]). For instance,



consider a Newtonian incompressible anisothermal fluid flow. Under Boussinesq's assumption, the flow is governed by the anisothermal Navier–Stokes equations

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}\mathbf{v}^\top) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \nu \Delta \mathbf{v} + \beta g \theta \mathbf{e}_2 = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}\theta) - \kappa \Delta \theta = 0. \end{cases} \quad (1)$$

where  $\mathbf{v}$  is the Eulerian velocity field,  $p$  the pressure,  $\rho$  the density, assumed constant,  $\beta$  the thermal expansion,  $g$  the gravity acceleration,  $\nu$  the kinematic viscosity and  $\kappa$  the thermal diffusivity.  $\mathbf{e}_2$  is the unit ascending vertical vector. Table 2 lists the Lie (one-point) symmetry groups of equations (1) obtained from Lie's theory. It shows that equations (1) admit a 4-dimensional and four infinite-dimensional Lie symmetry groups.

**Table 2.** Lie Symmetry groups of equations (1).  $\epsilon$  is a real scalar,  $\zeta$  (resp.  $\boldsymbol{\alpha}$ ) is an arbitrary scalar (resp. vectorial) function of time and  $R$  is a constant horizontal rotation matrix.

Lie symmetry group	$(t, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{p}, \hat{\theta})$
Time translation group	$(t + \epsilon, \mathbf{x}, \mathbf{v}, p, \theta),$
Pressure translation group	$(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, p + \zeta(t), \theta),$
Pressure-temperature translation group	$(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, p + \epsilon \beta g x_3, \theta + \epsilon/\rho),$
Plane rotation group	$(t, R\mathbf{x}, R\mathbf{v}, p, \theta),$
Generalized Galilean boost group	$(t, \mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha}(t), \mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}, p - \rho(\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha}) \cdot \ddot{\boldsymbol{\alpha}}, \theta)$
Scale transformation group	$(e^{2\epsilon} t, e^\epsilon \mathbf{x}, e^{-\epsilon} \mathbf{v}, e^{-2\epsilon} p, e^{-3\epsilon} \theta).$

As illustration, let us compute a self-similar solution under the scale transformation group in Table 2. To this end, one can check that the following quantities are invariants of this group:

$$\eta^i = \frac{x^i}{\sqrt{t}}, \quad V^i = \sqrt{t} u^i, \quad P = tp, \quad \Theta = t^{3/2} \theta, \quad i = 1, \dots, 3.$$

The symmetry group theory guarantees then that the following change of variables reduces equations (1) [46]:

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{t}} \mathbf{V}(\boldsymbol{\eta}), \quad p(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{t} P(\boldsymbol{\eta}), \quad \theta(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{t^{3/2}} \Theta(\boldsymbol{\eta}) \quad \text{where} \quad \boldsymbol{\eta} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}.$$

Indeed, inserting these relations into equations (1), we get the following reduced system:

$$\begin{cases} \frac{\partial V^j}{\partial \eta^j} = 0 \\ V^j \frac{\partial V^i}{\partial \eta^j} - \frac{\eta^j}{2} \frac{\partial V^i}{\partial \eta^j} - \frac{V^i}{2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \eta^i} - \nu \frac{\partial^2 V^i}{\partial \eta^j \partial \eta^j} - \beta g \delta_2^i \Theta = 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ V^j \frac{\partial \Theta}{\partial \eta^j} - \frac{\eta^j}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta^j} - \frac{3}{2} \Theta - \kappa \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^j \partial \eta^j} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

These equations have one less independent variable than the original equations (1). Equations (2) can further be reduced, knowing that they admit (among others) the following Lie groups:

$$\{(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{V}, P, \Theta)\} \mapsto (R(\epsilon, \eta^2) \boldsymbol{\eta}, R(\epsilon, \eta^2) \mathbf{V}, P, \Theta), \quad \epsilon \in \mathbb{R}$$

where  $R(\epsilon, \eta^2)$  is a rotation matrix with angle  $\epsilon$  about the axis  $(O\eta^2)$ . It suggests the following ansatz:

$$V^1(\boldsymbol{\eta}) = W^\varrho(\varrho, y) \cos \varphi - W^\varphi(\varrho, y) \sin \varphi, \quad V^3(\boldsymbol{\eta}) = W^\varrho(\varrho, y) \sin \varphi + W^\varphi(\varrho, y) \cos \varphi,$$

$$V^2(\boldsymbol{\eta}) = W^y(\rho, y), \quad P(\boldsymbol{\eta}) = W^p(\rho, y), \quad \Theta(\boldsymbol{\eta}) = W^\theta(\rho, y),$$

where  $(\rho, \varphi, y)$  are cylindrical coordinates verifying

$$\eta^1 = \rho \cos \varphi, \quad \eta^3 = \rho \sin \varphi, \quad y = \eta^2.$$

The functions  $W^*$  satisfy the following system of equations with only two independent variables:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho W^e)}{\partial \rho} + \frac{\partial W^y}{\partial y} = 0 \\ \left( W^e - \frac{\rho}{2} \right) \frac{\partial W^e}{\partial \rho} + \left( W^y - \frac{y}{2} \right) \frac{\partial W^e}{\partial y} - \frac{W^e}{2} - \frac{(W^\varphi)^2}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W^p}{\partial \rho} = \nu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial W^e}{\partial \rho} \right) - \frac{W^e}{\rho^2} + \frac{\partial^2 W^e}{\partial y^2} \right) \\ \left( W^e - \frac{\rho}{2} \right) \frac{\partial W^\varphi}{\partial \rho} + \left( W^y - \frac{y}{2} \right) \frac{\partial W^\varphi}{\partial y} - \frac{W^\varphi}{2} + \frac{W^e W^\varphi}{\rho} = \nu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial W^\varphi}{\partial \rho} \right) - \frac{W^\varphi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 W^\varphi}{\partial y^2} \right) \\ \left( W^e - \frac{\rho}{2} \right) \frac{\partial W^y}{\partial \rho} + \left( W^y - \frac{y}{2} \right) \frac{\partial W^y}{\partial y} - \frac{W^y}{2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W^p}{\partial y} = \nu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial W^y}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 W^y}{\partial y^2} \right) - \beta g W^\theta \\ \left( W^e - \frac{\rho}{2} \right) \frac{\partial W^\theta}{\partial \rho} + \left( W^y - \frac{y}{2} \right) \frac{\partial W^\theta}{\partial y} - \frac{3W^\theta}{2} = \kappa \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial W^\theta}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 W^\theta}{\partial y^2} \right) \end{array} \right.$$

If we impose for example that  $W^e$  depends only on  $\rho$ , then the solution of this twice reduced system is

$$W^e = \frac{4a_1 \nu}{\rho} + \frac{1 - a_2}{2} \rho,$$

$$W^\varphi = \frac{a_3}{\rho} + a_4 \nu^2 \exp\left(-\frac{a_2 \rho^2}{8\nu}\right) \rho^{2a_1-3} \cdot \left[ 2(1+a_1)^2 \text{WM}_{1+a_1, \frac{3}{2}+a_1}\left(\frac{a_2 \rho^2}{4\nu}\right) + \left(1+a_1 + \frac{a_2 \rho^2}{8\nu}\right) \text{WM}_{a_1, \frac{3}{2}+a_1}\left(\frac{a_2 \rho^2}{4\nu}\right) \right]$$

$$W^y = (a_2 - 1)y + a_5$$

$$W^\theta = a_6 \text{KM}_{\frac{3}{6-4a_2}, \frac{1}{2}}\left(\frac{((2a_2-3)y+2a_5)^2}{4\kappa(2a_2-3)}\right) + a_7 \text{KU}_{\frac{3}{6-4a_2}, \frac{1}{2}}\left(\frac{((2a_2-3)y+2a_5)^2}{4\kappa(2a_2-3)}\right)$$

$$W^p = \rho W_\rho^p(\rho) + \rho W_y^p(y)$$

where WM, KM and KU are the Whittaker  $M$ , the Kummer  $M$  and the Kummer  $U$  functions (see [130]).  $a_1, \dots, a_7$  are arbitrary constants. The radial and longitudinal parts  $W_\rho^p$  and  $W_y^p$  of  $W^p$  can be obtained by integration from the following ordinary differential equations:

$$\frac{dW_\rho^p}{d\rho} = \frac{(W^\varphi)^2}{r} + \frac{16a_1^2 \nu^2}{\rho^3} + \frac{\rho}{4} - \frac{a_2^2 \rho}{4}, \quad \frac{dW_y^p}{dy} = -\beta g W^\theta - (a_2^2 - 2a_2 + 2)y - \frac{a_5}{2}(2a_2 - 3).$$

Going back to the original variables, the velocity field in cylindrical frame writes

$$\mathbf{v} = \left( \frac{4a_1 \nu}{r} + \frac{1 - a_2}{2t} r \right) \mathbf{e}_r + \nu^\varphi \mathbf{e}_\varphi + \left( \frac{a_2 - 1}{\sqrt{t}} x^2 + a_5 \right) \mathbf{e}_z \quad (3)$$

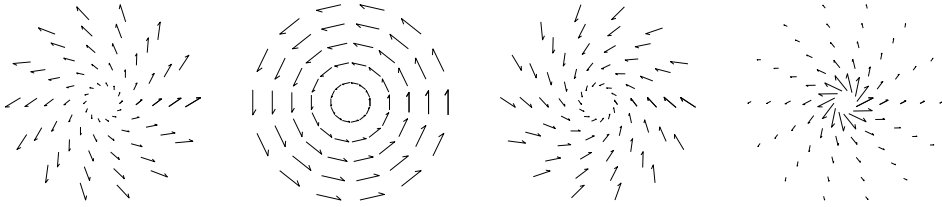
where the azimuthal component is

$$\nu^\varphi = \frac{a_3}{r} + a_4 \nu^2 \frac{r^{2a_1-3}}{t^{a_1-1}} \exp\left(-\frac{a_2 r^2}{8\nu t}\right) \cdot \left[ 2(1+a_1)^2 \text{WM}_{1+a_1, \frac{3}{2}+a_1}\left(\frac{a_2 r^2}{4\nu t}\right) + \left(1+a_1 + \frac{a_2 r^2}{8\nu t}\right) \text{WM}_{a_1, \frac{3}{2}+a_1}\left(\frac{a_2 r^2}{4\nu t}\right) \right] \quad (4)$$

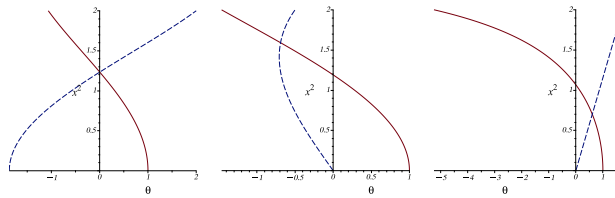
and the temperature field is

$$\theta = a_6 t^{\frac{3}{2}} \text{KM}_{\frac{3}{6-4a_2}, \frac{1}{2}} \left( \frac{((2a_2-3)x^2 + 2a_5)^2}{4\kappa(2a_2-3)} \right) + a_7 t^{\frac{3}{2}} \text{KU}_{\frac{3}{6-4a_2}, \frac{1}{2}} \left( \frac{((2a_2-3)x^2 + 2a_5)^2}{4\kappa(2a_2-3)} \right) \quad (5)$$

Figure 1 sketches the projection of the velocity field onto  $(x^1 O x^3)$  plane at  $t = 1$  and  $x^2 = 0$ , with  $\nu = 1$ ,  $\kappa = 1$  and for some values of the arbitrary constants. As can be seen, the solution may represent different configurations of a vertex and may be used to study vertex dynamics. The temperature is a linear combination of two Kummer functions of the altitude. These two functions are plotted in Figure 2 for  $a_5 = 0$  and some values of  $a_2$ .



**Figure 1.**  $(xOz)$ -velocity field. From left to right:  $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0.75, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0, 1)$ ,  $(0, 2, 0, 1)$  and  $(1, 1, 0, 1)$ .



**Figure 2.** Temperature as function of the altitude  $x^2$ . From left to right:  $a_2 = 0.75$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_2 = 2$ . Solid line:  $a_6 = 1, a_7 = 0$ , dashed line:  $a_6 = 0, a_7 = 1$ .

To calculate the previous self-similar solution, we chose arbitrarily two symmetries of the equations. Other choices yield other solutions. Note also that applying any of the symmetries listed in Table 2, except those already used to reduce the equations, to a self-similar solution yields another solution. To avoid redundancy, self-similar solutions can be optimally classified [52, 131].

In this subsection, we gave an overview of the Lie symmetry group reduction of an equation. In the next subsection, we present a glimpse of the application of Lie symmetry group in finding conservation laws.

### 3.2. Conservation laws

Consider an equation

$$E(\mathbf{y}, \mathbf{u}_{(n)}) = 0 \quad (6)$$

$\mathbf{y}$  being the independent variable,  $\mathbf{u}$  the dependent one and  $\mathbf{u}_{(n)}$  denoting the derivatives of  $\mathbf{u}$  up to order  $n$ . A conservation law of equation (6) is an expression

$$\text{Div } \mathbf{C} = 0, \quad \text{that is} \quad \frac{dC^i}{dy^i} = 0, \quad (7)$$

which holds on the space of solutions of the equation. In this expression,  $\mathbf{C}$  is called the conserved current and depends on  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{u}$  and the derivatives of  $\mathbf{u}$ . Div is the total divergence operator. In the case where  $\mathbf{y} = (t, \mathbf{x})$  is composed of the time and space variables, conservation law (7) can be formulated as a balance over an arbitrary spatial domain  $\Omega_x$  as follows:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_x} C^0 d\mathbf{x} = - \int_{\partial\Omega_x} \mathbf{C}^x \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad \text{with} \quad \mathbf{C}^x = (C^1, C^2, C^3)^\top \quad (8)$$

where  $d\Gamma$  is the surface element on the boundary  $\partial\Omega_x$  and  $\mathbf{n}$  the exterior unitary normal to  $\partial\Omega_x$ . If  $C^0$  is thought as a density then relation (8) states that the variation of the total density over  $\Omega_x$  is equal to the flux of  $-\mathbf{C}^x$  over the boundary.

Noether's theorem permits to calculate conservation laws when the problem is variational, that is when the solution is a local extremum of a Lagrangian action

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} L(\mathbf{y}, \mathbf{u}_{(k)}) d\mathbf{y} \quad (9)$$

for some  $k$ -order Lagrangian function  $L$ ,  $\Omega$  being a domain in  $\mathbf{y}$ -space. It states that to each Lie group of variational symmetries of the action (9) corresponds a conservation law of the Euler-Lagrange equations [46, 73–75, 132]. Recall that a variational symmetry is a transformation on  $(\mathbf{y}, \mathbf{u})$  which leaves action (9) invariant. It is automatically a symmetry of the corresponding Euler-Lagrange equation.

As an example, consider an elastic medium described by a first-order Lagrangian  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})$  where  $\mathbf{x}$  is the position and  $\mathbf{u}$  the displacement, and, from now on,  $\nabla$  is the gradient operator. If the medium is homogeneous in a direction  $j$  of space then the group of space translations in  $j$ -direction is a variational symmetry of the Lagrangian action. Noether's theorem then implies that

$$\frac{d}{dx^j} \left( L \delta_j^i - \frac{\partial L}{\partial u_i^a} u_j^a \right) = 0$$

on the solution of the Euler-Lagrange equation. If the medium is homogeneous in the three directions then the impulsion-energy Eshelby tensor

$$L \mathbf{1}_d - \left( \frac{\partial L}{\partial \nabla \mathbf{u}} \nabla \mathbf{u} \right)^\top$$

is a conserved tensor. Similarly, if the material is isotropic then there is a conserved angular momentum tensor. This analysis has been extended to more complex cases such as second gradient Lagrangian and micropolar elasticity [76, 79–81]. Note that Noether's theorem has also recently been extended to variational problems involving Lagrangian with fractionnal derivatives [133, 134].

For non-variational problems, described by equation (6), few methods of finding conservation laws emerged [135, 136]. One of them, called the direct method, consists in finding multipliers  $\Lambda^i$  depending on  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{u}$  and derivatives of  $\mathbf{u}$  such that the scalar function  $\Lambda^i E_i$  is the total divergence of some function  $\mathbf{C}$ , which then becomes automatically a conserved current [137–139]. A second method, in fact closely related to the first one, consists in finding another equation

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{u}^*) = 0 \quad (10)$$

involving not only on  $\mathbf{y}$  and  $\mathbf{u}$  but also on an adjoint dependent variable  $\mathbf{u}^*$  such that the augmented system (6)-(10) has a variational principle [56, 140–143]. Noether's theorem applies

then to this augmented system. The adjoint function  $\mathbf{E}^*$  is the adjoint of the Frechet derivative of  $\mathbf{E}$ . For instance, the adjoint equation of the anisothermal Navier–Stokes equations (1) are

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{w}) \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^\top \mathbf{w} + \nabla q + \nu \Delta \mathbf{w} - (\nabla \theta) \vartheta = 0 \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \vartheta + \kappa \Delta \vartheta - \beta g \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_2 \end{cases} \quad (11)$$

where  $\mathbf{w}$ ,  $q$  and  $\vartheta$  are respectively the adjoint of the velocity, the pressure and the temperature. The dot  $\cdot$  symbolizes the Euclidean inner product. It can be checked that equations (1)-(11) are the Euler–Lagrange equations associated to the Lagrangian function

$$\begin{aligned} L = \mathbf{w}^\top \frac{\mathbf{u}_t + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}}{2} - \mathbf{u}^\top \frac{\mathbf{v}_t + (\nabla \mathbf{w}) \mathbf{u}}{2} + \frac{\theta_t + \mathbf{u}^\top \nabla \theta}{2} \vartheta - \frac{\vartheta_t + \mathbf{u}^\top \nabla \vartheta}{2} \theta + \beta g \theta \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_2 \\ + \frac{\theta \vartheta - \mathbf{u}^\top \mathbf{w} + 2q}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{w} + \nu \operatorname{tr}((\nabla \mathbf{u})^\top \nabla \mathbf{w}) + \kappa \nabla \theta^\top \nabla \vartheta. \end{aligned} \quad (12)$$

Knowing that any variational symmetry of the Lagrangian action is also a symmetry of the Euler–Lagrange equations, one can seek among the Lie groups admitted by system (1)-(11) those which are also variational symmetry groups and then apply Noëther’s theorem. For instance, the group of scale transformations

$$(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, p, \theta, \mathbf{w}, q, \vartheta) \longmapsto (e^{2\epsilon} t, e^\epsilon \mathbf{x}, e^{-\epsilon} \mathbf{u}, e^{-2\epsilon} p, e^{-3\epsilon} \theta, e^{-2\epsilon} \mathbf{w}, e^{-3\epsilon} q, \vartheta)$$

is a symmetry group of system (1)-(11). It leaves the Lagrangian action (not the Lagrangian function itself) associated to Lagrangian (12) invariant and is then a variational symmetry group. Noëther’s theorem yields a conservation law where the time-component of the conserved current is

$$C^t = \frac{\mathbf{u}^\top \mathbf{w} - 3\theta \vartheta}{2} + t(2L + \mathbf{w}_t^\top \mathbf{u} - \mathbf{u}_t^\top \mathbf{w} + \vartheta_t \theta - \theta_t \vartheta) + \frac{\mathbf{u}^\top \nabla \mathbf{w} - \mathbf{w}^\top \nabla \mathbf{u} + \theta \nabla \vartheta^\top - \vartheta \nabla \theta^\top}{2} \mathbf{x}$$

and the space component is

$$\begin{aligned} C^{\mathbf{x}} = \mathbf{x}L - \frac{\mathbf{u} \mathbf{w}^\top + 2\nu \nabla \mathbf{w}^\top}{2} (\mathbf{u} + 2t \mathbf{u}_t + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{x}) - \frac{\mathbf{u} \vartheta + 2\kappa \nabla \vartheta}{2} (3\theta + 2t \theta_t + (\nabla \theta)^\top \mathbf{x}) \\ + \frac{\mathbf{u} \mathbf{u}^\top - 2\nu \nabla \mathbf{u}^\top}{2} (2\mathbf{w} + 2t \mathbf{w}_t + (\nabla \mathbf{w}) \mathbf{x}) - \frac{\mathbf{u} \theta + 2\kappa \nabla \theta}{2} (2t \vartheta_t + (\nabla \vartheta)^\top \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (13)$$

This conservation is non-local since it contains the adjoint variables which depend non-locally on  $(\mathbf{u}, p, \theta)$  through the adjoint equations.

### 3.3. Modelling

In this last subsection, we illustrate the use of Lie symmetry groups in turbulence modelling, and more precisely in the large-eddy simulation approach [144]. Consider a fluid flow, governed by equations (1). When the flow is turbulent, the presence of very small eddy scales necessitates a very fine grid and makes the numerical resolution of these equations computationally unaffordable. In order to reduce the computational cost, only large scales, those larger than the grid size,

are resolved. The effect of the small scales on the larger one are modeled. Concretely, instead of equation (1), one solves the following equations

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0, \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}^T) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \bar{p} - \nu \Delta \bar{\mathbf{v}} + \beta g \bar{\theta} \mathbf{e}_2 = \operatorname{div} \mathbb{T}_s, \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{\mathbf{v}} \bar{\theta}) - \kappa \Delta \bar{\theta} = \operatorname{div} \mathbf{h}_s, \end{cases} \quad (14)$$

where  $\bar{\mathbf{v}}$ ,  $\bar{p}$  and  $\bar{\theta}$  are the resolved velocity, pressure and temperature.  $\mathbb{T}_s$  and  $\mathbf{h}_s$  are the subgrid stress tensor and temperature flux. They represent the effect of the unresolved scales and have to be modelled.

An approach in [108, 122, 126] suggests to construct  $\mathbb{T}_s$  and  $\mathbf{h}_s$  such that the symmetry groups of equations (1), summarized in Table 2, are also symmetry groups of equations (1). With this approach, the resolved variables have the same properties as  $\mathbf{v}$ ,  $p$  and  $\theta$ , regarding the consequences of symmetries (self-similar solutions, conservation laws, ...). The symmetry preservation leads to the the following model:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_s^d &= \nu F_1 \bar{\mathbb{S}}^d + \nu F_2 \frac{\operatorname{Adj}^d \bar{\mathbb{S}}}{\|\bar{\mathbb{S}}\|} + \nu F_3 \frac{(\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}})^d}{\|\bar{\mathbb{S}}\|^3} + \nu F_4 \frac{[\bar{\mathbb{S}}(\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}})]^d}{\|\bar{\mathbb{S}}\|^4} + \nu F_5 \frac{\bar{\mathbb{S}}[(\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}}) \bar{\mathbb{S}}]^d}{\|\bar{\mathbb{S}}\|^5}, \\ \mathbf{h}_s &= \kappa F_6 \bar{\mathbb{T}} + \kappa F_7 \frac{\bar{\mathbb{S}} \bar{\mathbb{T}}}{\|\bar{\mathbb{S}}\|} + \kappa F_8 \frac{\bar{\mathbb{S}}^2 \bar{\mathbb{T}}}{\|\bar{\mathbb{S}}\|^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

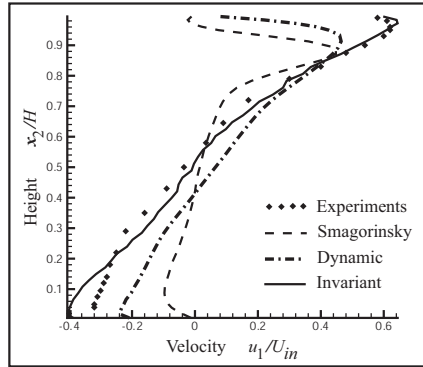
In these expressions, the superscript  $d$  designates the deviatoric part,  $\bar{\mathbb{S}}$  is the resolved strain rate tensor,  $\operatorname{Adj} \bar{\mathbb{S}}$  its adjugate (or comatrix),  $\bar{\mathbb{T}}$  is the gradient of the resolved temperature and  $F_i$  are arbitrary scalar functions of the following variables:

$$\frac{\det \bar{\mathbb{S}}}{\|\bar{\mathbb{S}}\|^3}, \quad \frac{\bar{\mathbb{T}}^2}{\|\bar{\mathbb{S}}\|^4}, \quad \frac{\bar{\mathbb{T}} : \bar{\mathbb{S}}}{\|\bar{\mathbb{S}}\|^5}, \quad \frac{(\bar{\mathbb{S}} \bar{\mathbb{T}}) : (\bar{\mathbb{S}} \bar{\mathbb{T}})}{\|\bar{\mathbb{S}}\|^6}. \quad (16)$$

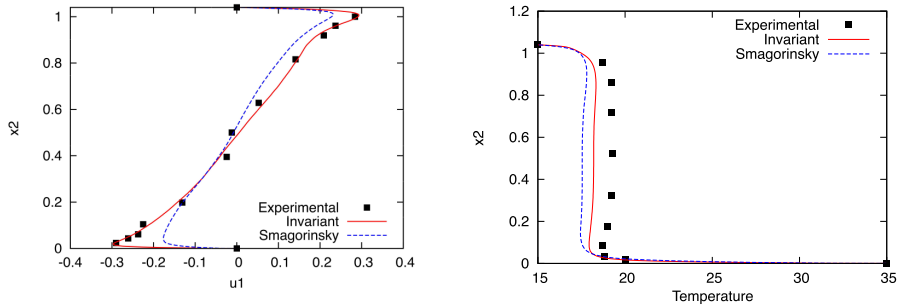
These variables are invariants of the symmetry groups of the equations and appear naturally. In the isothermal case, only the two first terms are present in  $\mathbb{T}_s^d$ , and  $F_1$  and  $F_2$  are functions of the first invariant in equation (16). The presence of  $\nu$  and  $\kappa$  in the model is uncommon. It is due to the fact that the model preserves not only the Lie point-symmetry group of the equations but also an equivalent transformation (symmetry transformation acting also on  $\nu$  and  $\kappa$ ) group.

Figure 3 shows a result of a simulation in an isothermal ventilated room (see [122] for details). It compares a very simple symmetry preserving model (where  $F_1$  is linear and  $F_2$  is constant), called invariant model herein, to two other popular LES models. It can be noticed that the velocity profile obtained by the invariant model is closer to the experimental value compared to the other models. It is especially verified close to the wall. This can be explained by the fact that wall laws are contained in the Lie symmetry group and that the model preserves this group.

In the anisothermal case, the same behaviour, namely that the invariant model is particularly efficient close to the wall, was also observed in [108]. Figure 4 shows simulation results extracted from [108] in a differentially heated room (see details in [108]). The temperature profile given by the invariant model also approximates the experimental results better than that obtained with the popular Smagorinsky model. However, a notable difference with the experimental results can still be seen. One reason which may explain this difference is that radiation has not been



**Figure 3.** Vertical velocity profile.



**Figure 4.** Horizontal velocity and temperature profile along the vertical direction in a differentially heated room.

considered in the equations. Moreover, temperature boundary conditions are not easy to deal with in an experimentation.

The simulations above were carried out with codes based on classical finite difference/volume schemes which are generally not symmetry preserving. In fact, it is also possible to design symmetry preserving numerical schemes. It is the object of the next section.

#### 4. Lie groups and numerical integrators

Many mechanical systems evolve on a (manifold acted upon by a) Lie group [145–147]. It is for example the case of the heavy top, of which the space of configuration is  $\mathbb{S}\mathbb{O}3$ , or a rigid multibody systems which evolves on multiple copies of  $\mathbb{S}\mathbb{E}3$ . The use of classical (vector space) solvers to integrate the equation of these systems may lead to approximate solutions which does not lie on the Lie group and may result in numerical issues. Algorithms that preserve the Lie group structure have been proposed and generally have better stability and robustness properties [100, 148–155]. One of them consists in formulating and solving the differential equation of the system in the corresponding Lie algebra. An exponentiation is then carried out to obtain the solution on the Lie group.

Lie group integrators are generally time integrators. For mechanical systems described by partial differential equations, one can consider Lie symmetry group preserving schemes. Indeed, as

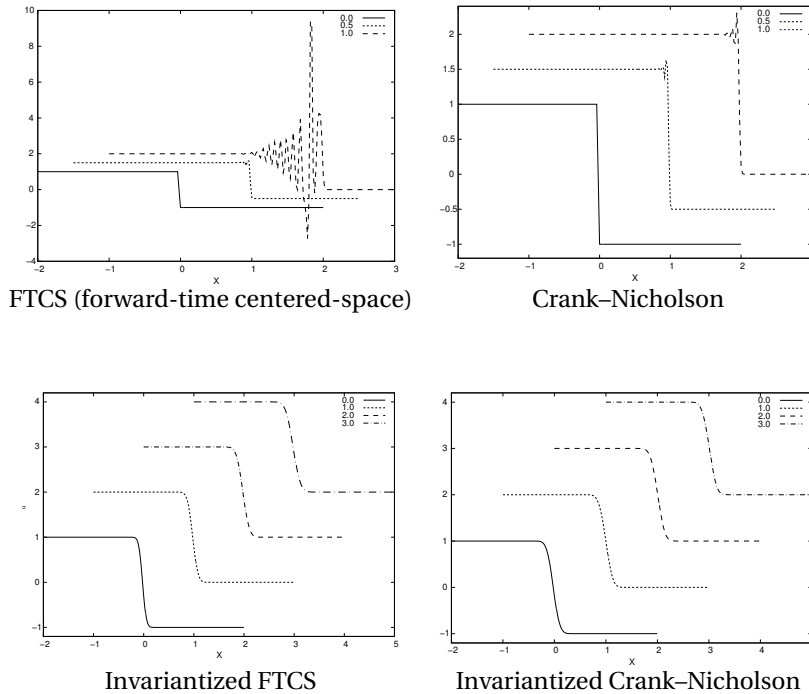
seen in the previous sections, the Lie symmetry group admitted by the equations of a mechanical system encode fundamental properties (invariance, conservation laws, ...). When representing the evolution of the system by a numerical model, it is then advisable to preserve these properties during the simulation. Few approaches exist to tackle this problem. One of them is to build numerical schemes based on the discrete invariants of the symmetry group [156–160]. This is done through the extension of the action of the group to difference equations. Another technique relies on the concept of differential approximations. It consists in finding a numerical scheme such that its differential approximation is invariant under the Lie group admitted by the equation [161–163]. It generally leads to only partially invariant schemes. A third method to build Lie symmetry-preserving schemes is the invariantization process. It consists in transforming a classical scheme into an invariant one using Cartan’s moving frame approach [162, 164–166]. To illustrate this method, consider a numerical scheme of equation (6):

$$\begin{cases} \Omega_h(\mathbf{m}) = 0, \\ E_h(\mathbf{m}) = 0 \end{cases}$$

where  $\Omega_h$  represents the grid equation,  $E_h$  is the discrete equation and  $\mathbf{m} = (\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^J, \mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^J)$  represents the lattice and the discrete approximate solution. Denote  $N = (\Omega_h, E_h)$  and  $\mathbb{G}$  the symmetry group of equation (6). Scheme  $N$  is said invariant under  $\mathbb{G}$  if <sup>1</sup>

$$N(\mathbf{m}) = 0 \implies N(g \cdot \mathbf{m}) = 0 \quad \forall g \in \mathbb{G}. \tag{17}$$

Under some conditions on  $\mathbb{G}$ , if  $N(\mathbf{m})$  is a discretisation scheme of equation (6) then  $\tilde{N}(\mathbf{m}) = N(\rho(\mathbf{m}) \cdot \mathbf{m})$  is an invariant discretisation scheme of (6), where  $\rho$  is a moving frame relative to  $\mathbb{G}$ .



**Figure 5.** Burgers solution at  $t = 1$  with  $\lambda = 0, \lambda = 0.5$  and  $\lambda = 1$

<sup>1</sup>Each  $g \in \mathbb{G}$  extends into a transformation, also denoted  $g$ , acting on the space described by the variable  $\mathbf{m}$ .



Figure 5, in part extracted from [165], compares the numerical compatibility of some classical discretization schemes of Burgers equation and their invariantized versions with the Galilean invariance. In this simulation, a Galilean boost is applied to the original referential frame. The initial solution is a pseudo-shock. Since the Galilean boost is a symmetry of Burgers equation, the analytical solution at each time is simply a shift of the initial condition. However, spurious oscillation near the shock location appears when classical schemes are used in the numerical resolution. These oscillations grows with the boost velocity  $\lambda$ . With invariantized schemes, no such oscillation appears; the solution at each discrete time remains a shift of the initial one.

Before concluding, note that some concepts related to Lie groups have been adapted to the discrete case. For example, the notion of Lie symmetry group of differential equations, their computation and the symmetry reduction method have been formalized for difference equations [157, 167–171]. Noether's theorem has also been formulated for discrete equations and discrete conservation laws were computed [172–176].

## 5. Conclusion

In this paper, we presented a quick survey of the today use of Lie group techniques in continuum mechanics that, although not exhaustive, gives a glimpse of the benefits that these methods can bring both from a theoretical and numerical point of view. As geometric approaches spread in the mechanics community, there is no doubt that the link between Lie groups and continuous mechanics is bound to develop in the future. Through this work, we hope to have contributed to raise the reader's interest in several facets of this topic.

## Conflicts of interest

The authors declare no competing financial interest.

## Dedication

The manuscript was written through contributions of all authors. All authors have given approval to the final version of the manuscript.

## References

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden, R. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Applied Mathematical Sciences, vol. 75, Springer New York, 2012.
- [2] D. Bump, *Lie groups*, 2nd ed., Graduate texts in mathematics, vol. 225, Springer, 2013.
- [3] S. Lie, "Theorie der Transformationsgruppen I", *Math. Ann.* **16** (1880), p. 441-528.
- [4] S. Lie, R. Hermann, *Sophus Lie's 1880 Transformation Group Paper. Vol. I. Sophus Lie's 1880 transformation group paper*, Math. Sci. Press., 1975.
- [5] S. Lie, J. Merker, *Theory of Transformation Groups I: General Properties of Continuous Transformation Groups. A Contemporary Approach and Translation*, Springer, 2015.
- [6] E. Galois, "Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux", *Journal de mathématiques pures et appliquées* **1846** (1830), p. 417-433.
- [7] F. Borceux, G. Janelidze, *Galois Theories*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 72, Cambridge University Press, 2001.
- [8] P. Neumann, *The Mathematical Writings of Évariste Galois*, Heritage of European Mathematics, European Mathematical Society, 2011.
- [9] S. Kobayashi, *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer, 1972.
- [10] J. L. Koszul, Z. Yi Ming, *Introduction to symplectic geometry*, Springer, 2019.
- [11] R. H. Cushman, L. M. Bates, *Global Aspects of Classical Integrable Systems*, Birkhäuser, 1997.

- [12] J.-M. Souriau, *Structure of Dynamical Systems. A Symplectic View of Physics*, Birkhäuser, 1997.
- [13] R. Abraham, J. Marsden, *Foundation of Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Group, 1987.
- [14] V. Guillemin, S. Sternberg, *Symplectic techniques in physics*, Cambridge University Press, 1984.
- [15] L. Ryvkin, T. Wurzbacher, “An invitation to multisymplectic geometry”, *J. Geom. Phys.* **142** (2019), p. 9-36.
- [16] R. Toupin, “World invariant kinematics”, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **1** (1958), p. 181-211.
- [17] W. Noll, “Lectures on the foundations of continuum mechanics and thermodynamics”, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **52** (1973), p. 62-92.
- [18] H. P. Künzle, “Galilei and Lorentz structures on space-time: comparison of the corresponding geometry and physics”, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor.* **4** (1972), p. 337-362.
- [19] G. de Saxcé, C. Vallée, *Galilean Mechanics and Thermodynamics of Continua*, Mechanical Engineering and Solid Mechanics Series, Wiley-ISTE, 2016.
- [20] J.-M. Souriau, *Géométrie et relativité*, Collection Enseignement des Sciences, vol. 6, Hermann, 1964.
- [21] C. Eckart, “The Thermodynamics of Irreversible Processes, III. Relativistic Theory of the Simple Fluid”, *Phys. Rev., II. Ser.* **58** (1940), p. 919-924.
- [22] L. Landau, E. Lifchitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1959.
- [23] J.-M. Souriau, “Thermodynamique et géométrie”, in *Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics II*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 676, Springer, 1976, p. 369-397.
- [24] J.-M. Souriau, “Thermodynamique relativiste des fluides”, *Rend. Semin. Mat., Torino* **35** (1978), p. 21-34.
- [25] C. Vallée, *Lois de comportement des milieux continus dissipatifs compatibles avec la physique relativiste*, PhD Thesis, University of Poitiers, Poitiers, France, 1978.
- [26] C. Vallée, “Relativistic thermodynamics of continua”, *Int. J. Eng. Sci.* **19** (1981), p. 589-601.
- [27] E. Rouhaud, B. Panicaud, R. Kerner, “Canonical frame-indifferent transport operators with the four-dimensional formalism of differential geometry”, *Comput. Mater. Sci.* **77** (2013), p. 120-130.
- [28] B. Panicaud, E. Rouhaud, “A frame-indifferent model for a thermo-elastic material beyond the three-dimensional Eulerian and Lagrangian descriptions”, *Contin. Mech. Thermodyn.* **26** (2014), p. 79-93.
- [29] G. Altmeyer, B. Panicaud, E. Rouhaud, W. Mingchuan, A. Roos, R. Kerner, “Viscoelasticity behavior for finite deformations, using a consistent hypoelastic model based on Rivlin materials”, *Contin. Mech. Thermodyn.* **28** (2016), p. 1741-1758.
- [30] V. Bargmann, “On unitary representation of continuous groups”, *Ann. Math.* **59** (1954), p. 1-46.
- [31] K. Grabowska, J. Grabowski, P. Urbanski, “AV-differential geometry: Poisson and Jacobi structures”, *J. Geom. Phys.* **52** (2004), p. 398-446.
- [32] É. Cartan, “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie)”, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **40** (1923), p. 325-412.
- [33] É. Cartan, “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. I. (suite)”, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **41** (1924), p. 1-25.
- [34] J. P. Boehler, A. Kirillov, E. T. Onat, “On the polynomial invariants of elasticity tensors”, *J. Elasticity* **34** (1994), no. 2, p. 97-110.
- [35] S. Forte, M. Vianello, “Symmetry classes for elasticity tensors”, *J. Elasticity* **43** (1996), no. 2, p. 81-108.
- [36] M. Olive, N. Auffray, “Symmetry classes for even-order tensors”, *Math. Mech. Complex Syst.* **1** (2013), no. 2, p. 177-210.
- [37] G. de Saxcé, C. Vallée, “Invariant measures of the lack of symmetry with respect to the symmetry groups of 2D elasticity tensors”, *J. Elasticity* **111** (2013), no. 1, p. 21-39.
- [38] S. Forte, M. Vianello, “A unified approach to invariants of plane elasticity tensors”, *Meccanica* **49** (2014), no. 9, p. 2001-2012.
- [39] G. Verchery, “Les invariants des tenseurs d'ordre 4 du type de l'élasticité”, in *Proceedings of Euromech 115, Villard-de-Lance (1979)*, Colloques Internationaux du CNRS, vol. 295, Edition du CNRS, 1982, p. 93-104.
- [40] P. Vannucci, G. Verchery, “Anisotropy of plane complex elastic bodies”, *Int. J. Solids Struct.* **47** (2010), no. 9, p. 1154-1166.
- [41] P. Vannucci, G. Verchery, “Stiffness design of laminates using the polar method”, *Int. J. Solids Struct.* **38** (2001), no. 50-51, p. 9281-9294.
- [42] A. Antonelli, B. Desmorat, B. Kolev, R. Desmorat, “Distance to plane elasticity orthotropy by Euler-Lagrange method”, *C. R. Mécanique* **350** (2022), p. 413-430.
- [43] H. Abdoul-Anziz, N. Auffray, B. Desmorat, “Symmetry Classes and Matrix Representations of the 2D Flexoelectric Law”, *Symmetry* **12** (2020), no. 4, p. 674-702.
- [44] M. François, “A damage model based on Kelvin eigentensors and Curie principle”, *Mech. Mater.* **44** (2012), p. 23-24.
- [45] P. Curie, “Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique”, *J. Phys. Theor. Appl.* **3** (1894), no. 1, p. 393-415.
- [46] P. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 107, Springer, 1986.

- [47] S. V. Meleshko, “Complete group classification of the two-Dimensional shallow water equations with constant coriolis parameter in Lagrangian coordinates”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **89** (2020), article no. 105293.
- [48] K. S. Platonova, A. V. Borovskikh, “Group Analysis of the Boltzmann and Vlasov Equations”, *Theor. Math. Phys.* **203** (2020), no. 3, p. 794-823.
- [49] T. Özer, “Symmetry group classification for two-dimensional elastodynamics problems in nonlocal elasticity”, *Int. J. Eng. Sci.* **41** (2003), no. 18, p. 2193-2211.
- [50] A. V. Mikhailov, A. B. Shabat, V. V. Sokolov, “The Symmetry Approach to Classification of Integrable Equations”, in *What Is Integrability?* (V. E. Zakharov, ed.), Springer, 1991, p. 115-184.
- [51] R. Cherniha, M. Serov, Y. Prystavka, “A complete Lie symmetry classification of a class of  $(1 + 2)$ -dimensional reaction-diffusion-convection equations”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **92** (2021), article no. 105466.
- [52] N. H. Ibragimov, *CRC handbook of Lie group analysis of differential equations. Volume 1: Symmetries, exact solutions and conservation laws*, CRC Press, 1994.
- [53] Q. Huang, S. Shen, “Lie symmetries and group classification of a class of time fractional evolution systems”, *J. Math. Phys.* **56** (2015), article no. 123504.
- [54] M. S. Hashemi, D. Baleanu, *Lie Symmetry Analysis of Fractional Differential Equations*, CRC Press, 2020.
- [55] F. Oliveri, “Lie Symmetries of Differential Equations: Classical Results and Recent Contributions”, *Symmetry* **2** (2010), no. 2, p. 658-706.
- [56] M. S. Bruzón, M. L. Gandarias, R. de la Rosa, “Conservation Laws of a Family of Reaction-Diffusion-Convection Equations”, in *Localized Excitations in Nonlinear Complex Systems: Current State of the Art and Future Perspectives* (R. Carretero-González, J. Cuevas-Maraver, D. Frantzeskakis, N. Karachalios, P. Kevrekidis, F. Palmero-Acebedo, eds.), Nonlinear Systems and Complexity, vol. 7, Springer, 2014, p. 403-417.
- [57] M. L. Gandarias, C. Khaliq, “Symmetries, solutions and conservation laws of a class of nonlinear dispersive wave equations”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **32** (2016), p. 114-121.
- [58] R. de la Rosa, M. L. Gandarias, M. Bruzon, “On symmetries and conservation laws of a Gardner equation involving arbitrary functions”, *Appl. Math. Comput.* **290** (2016), p. 125-134.
- [59] P. Djondjorov, “Invariant properties of Timoshenko beam equations”, *Int. J. Eng. Sci.* **33** (1995), no. 14, p. 2103-2114.
- [60] U. Camci, “ $F(R, G)$  Cosmology through Noether Symmetry Approach”, *Symmetry* **10** (2018), no. 12, article no. 719.
- [61] N. Dimakis, A. Giacomini, N. Jamal, G. Leon, A. Paliathanasis, “Noether symmetries and stability of ideal gas solution in Galileon Cosmology”, *Phys. Rev. D* **95** (2017), no. 6, article no. 064031.
- [62] V. Vassilev, P. Djondjorov, I. Mladenov, “Lie Group Analysis of the Willmore and Membrane Shape Equations”, *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, vol. 73, p. 365-376, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Springer, 2014.
- [63] A. P. Marquez, M. S. Bruzón, “Symmetry Analysis and Conservation Laws of a Generalization of the Kelvin-Voigt Viscoelasticity Equation”, *Symmetry* **11** (2019), no. 7, article no. 840.
- [64] S. Senashov, O. Gomonova, I. Savostyanova, O. Cherepanova, “New Classes of Solutions of Dynamical Problems of Plasticity”, *J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys.* **13** (2020), no. 6, p. 792-796.
- [65] A. Halder, A. Paliathanasis, P. Leach, “Similarity solutions and conservation laws for the Beam Equations: a complete study”, *Acta Polytech. CTU Proc.* **60** (2020), no. 2, p. 98-110.
- [66] D. Huang, X. Li, S. Yu, “Lie Symmetry Classification of the Generalized Nonlinear Beam Equation”, *Symmetry* **9** (2017), no. 7, article no. 115.
- [67] D. D. Holm, “Euler-Poincaré Dynamics of Perfect Complex Fluids”, in *Geometry, Mechanics, and Dynamics*, Springer, New York, 2002, p. 169-180.
- [68] D. Holm, T. Schmah, C. Stoica, *Geometric Mechanics and Symmetry. From Finite to Infinite Dimensions*, Oxford Texts in Applied and Engineering Mathematics, vol. 12, Wiley-Interscience, 2009.
- [69] W. Fushchych, R. Popowych, “Symmetry reduction and exact solutions of the Navier-Stokes equations. I”, *J. Nonlinear Math. Phys.* **1** (1994), no. 1, p. 75-113.
- [70] W. Fushchych, R. Popowych, “Symmetry reduction and exact solutions of the Navier-Stokes equations. II”, *J. Nonlinear Math. Phys.* **1** (1994), no. 2, p. 158-188.
- [71] V. Grassi, R. A. Leo, G. Soliani, P. Tempesta, “Vorticities and invariant surfaces generated by symmetries for the 3D Navier-Stokes equation”, *Physica A* **286** (2000), p. 79-108.
- [72] D. Dierkes, A. Cheviakov, M. Oberlack, “New similarity reductions and exact solutions for helically symmetric viscous flows”, *Phys. Fluids* **32** (2020), no. 5, article no. 053604.
- [73] E. Noether, “Invariante Variationsprobleme”, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* (1918), p. 235-257.
- [74] E. Noether, A. Tavel, “Invariant variation problems”, *Transp. Theory Stat. Phys.* **1** (1971), no. 3, p. 183-207, english traduction of the Noether’s original paper [73] in 1918.
- [75] Y. Kosmann-Schwarzbach, *The Noether Theorems: Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century*, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer, 2011.
- [76] Y.-N. Huang, R. C. Batra, “Energy-momentum tensors in nonsimple elastic dielectrics”, *J. Elasticity* **42** (1996), p. 275-281.

- [77] P. Yu, H. Wang, J. Chen, S. Shengping, "Conservation laws and path-independent integrals in mechanical-diffusion-electrochemical reaction coupling system", *J. Mech. Phys. Solids* **104** (2017), p. 57-70.
- [78] S. El Kabir, F. Dubois, R. Moutou Pitti, N. Recho, Y. Lapusta, "A new analytical generalization of the J and G-theta integrals for planar cracks in a three-dimensional medium", *Theor. Appl. Fract. Mech.* **94** (2018), p. 101-109.
- [79] V. K. Kalpakides, E. K. Agiasofitou, "On material equations in second gradient electroelasticity", *J. Elasticity* **67** (2002), no. 3, p. 205-227.
- [80] V. Lubardpa, X. Markenscoff, "On conservation integrals in micropolar elasticity", *Philos. Mag.* **83** (2003), no. 11, p. 1365-1377.
- [81] M. Lazar, H. Kirchner, "The Eshelby stress tensor, angular momentum tensor and scaling flux in micropolar elasticity", *Int. J. Solids Struct.* **44** (2007), no. 14-15, p. 4613-4620.
- [82] P. Olver, "Conservation laws in elasticity. I: General results", *Arch. Ration. Mech. Anal.* **85** (1984), no. 2, p. 111-129.
- [83] E. Agiasofitou, M. Lazar, "Conservation and Balance Laws in Linear Elasticity of Grade Three", *J. Elasticity* **94** (2009), no. 1, p. 69-85.
- [84] S. Li, A. Gupta, X. Markenscoff, "Conservation Laws of Linear Elasticity in Stress Formulations", *Proc. R. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci.* **461** (2005), no. 2053, p. 99-116.
- [85] R. Kienzler, G. Herrmann, *Mechanics in Material Space with Applications to Defect and Fracture Mechanics*, Springer, 2000.
- [86] G. Maugin, *Material Inhomogeneities in Elasticity*, Applied Mathematics and Mathematical Computation, vol. 3, Chapman & Hall, 1993.
- [87] R. Shankar, "Symmetries and conservation laws of the Euler equations in Lagrangian coordinates", *J. Math. Anal. Appl.* **447** (2017), no. 2, p. 867-881.
- [88] M. Mellmann, M. Scholle, "Symmetries and Related Physical Balances for Discontinuous Flow Phenomena within the Framework of Lagrange Formalism", *Symmetry* **13** (2021), no. 9, article no. 1662.
- [89] E. Kaptsov, S. S. Meleshko, "Conservation laws of the two-dimensional gas dynamics equations", *Int. J. Non-Linear Mech.* **112** (2019), p. 126-132.
- [90] W. Nakpim, S. V. Meleshko, "Conservation laws of the one-dimensional equations of relativistic gas dynamics in Lagrangian coordinates", *Int. J. Non-Linear Mech.* **124** (2020), article no. 103496.
- [91] A. Yahalom, H. Qin, "Noether currents for Eulerian variational principles in non-barotropic magnetohydrodynamics and topological conservations laws", *J. Fluid Mech.* **908** (2021), article no. A4.
- [92] G. Webb, *Magnetohydrodynamics and Fluid Dynamics: Action Principles and Conservation Laws*, Lecture Notes in Physics, vol. 946, Springer, 2018.
- [93] O. Kelbin, A. Cheviakov, M. Oberlack, "New conservation laws of helically symmetric, plane and rotationally symmetric viscous and inviscid flows", *J. Fluid Mech.* **721** (2013), p. 340-366.
- [94] C. Cotter, D. Holm, "On Noether's Theorem for the Euler-Poincaré Equation on the Diffeomorphism Group with Advected Quantities", *Found. Comput. Math.* **13** (2013), p. 457-477.
- [95] L. Fatibene, M. Francaviglia, S. Mercadante, "Noether Symmetries and Covariant Conservation Laws in Classical, Relativistic and Quantum Physics", *Symmetry* **2** (2010), no. 2, p. 970-998.
- [96] I. Marvian, R. Spekkens, "Extending Noether's theorem by quantifying the asymmetry of quantum states", *Nat. Commun.* **5** (2014), no. 1, p. 3821.
- [97] S. Haywood, *Symmetries and Conservation Laws in Particle Physics: An Introduction to Group Theory for Particle Physicists*, Imperial College Press, 2010.
- [98] H. R. Brown, P. Holland, "Simple applications of Noether's first theorem in quantum mechanics and electromagnetism", *Am. J. Phys.* **72** (2004), no. 1, p. 34-39.
- [99] M. Thieullen, J.-C. Zambrini, "Probability and quantum symmetries. I. The theorem of Noether in Schrödinger's euclidean quantum mechanics", *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor.* **67** (1997), no. 3, p. 297-338.
- [100] W. Hairer, G. Wanner, C. Lubich, *Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, second ed., Springer Series in Computational Mathematics, Springer, 2006.
- [101] D. Razafindralandy, A. Hamdouni, M. Chhay, "A review of some geometric integrators", *Adv. Model. Simul. Eng. Sci.* **5** (2018), no. 1, p. 16.
- [102] D. E. Soper, *Classical Field Theory*, Dover Books on Physics, Dover Publications, 2008.
- [103] J.-F. Ganghoffer, "Symmetries in Mechanics: From Field Theories to Master Responses in the Constitutive Modeling of Materials", in *Similarity and Symmetry Methods. Applications in Elasticity and Mechanics of Materials* (J.-F. Ganghoffer, I. Mladenov, eds.), Springer, 2014, p. 271-351.
- [104] D. Razafindralandy, A. Hamdouni, M. Chhay, "Symmetry in Turbulence Simulation", in *Numerical Simulation Research Progress*, Nova Science Publishers, 2009, p. 161-207.
- [105] G. Ünal, "Application of equivalence transformations to inertial subrange of turbulence", *Lie Groups Appl.* **1** (1994), no. 1, p. 232-240.
- [106] M. Oberlack, "A unified Approach for Symmetries in Plane Parallel Turbulent Shear Flows", *J. Fluid Mech.* **427** (2001), p. 299-328.

- [107] M. Kinzel, M. Holzner, B. Lüthi, C. Tropea, W. Kinzelbach, M. Oberlack, "Scaling Laws of Turbulent Diffusion – An Experimental Validation", in *14<sup>th</sup> Int. Symp. on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics*, 2008.
- [108] D. Razafindralandy, A. Hamdouni, N. A. Sayed, "Lie-symmetry group and modeling in non-isothermal fluid mechanics", *Phys. A: Stat. Mech. Appl.* **391** (2012), no. 20, p. 4624-4636.
- [109] H. Sadeghi, M. Oberlack, M. Gauding, "On new scaling laws in a temporally evolving turbulent plane jet using Lie symmetry analysis and direct numerical simulation", *J. Fluid Mech.* **854** (2018), p. 233-260.
- [110] H. Sadeghi, M. Oberlack, "New scaling laws of passive scalar with a constant mean gradient in decaying isotropic turbulence", *J. Fluid Mech.* **899** (2020), article no. A10.
- [111] H. Sadeghi, M. Oberlack, M. Gauding, "New symmetry-induced scaling laws of passive scalar transport in turbulent plane jets", *J. Fluid Mech.* **919** (2021), article no. A5.
- [112] M. M. El Telbany, A. J. Reynolds, "Velocity distributions in plane turbulent channel flows", *J. Fluid Mech.* **100** (1980), no. 1, p. 1-29.
- [113] G. I. Barenblatt, "Scaling laws for fully developed turbulent shear flows. Part 1. Basic hypotheses and analysis", *J. Fluid Mech.* **248** (1993), p. 513-520.
- [114] G. I. Barenblatt, V. M. Prostokishin, "Scaling laws for fully developed turbulent shear flows. Part 2. Processing of experimental data", *J. Fluid Mech.* **248** (1993), p. 521-529.
- [115] G. I. Barenblatt, A. J. Chorin, "New Perspectives in Turbulence: Scaling Laws, Asymptotics, and Intermittency", *SIAM Rev.* **40** (1998), no. 2, p. 265-291.
- [116] M. Oberlack, "Invariant modeling in large-eddy simulation of turbulence", in *Annual Research Briefs 1997*, Stanford University, 1997, p. 3-22.
- [117] D. Razafindralandy, A. Hamdouni, "Consequences of Symmetries on the Analysis and Construction of Turbulence Models", *SIGMA, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* **2** (2006), article no. 052.
- [118] U. Schaefer-Rolffs, R. Knöpfel, E. Becker, "A scale invariance criterion for LES parametrizations", *Meteorologische Zeitschrift* **24** (2015), no. 1, p. 3-13.
- [119] D. Klingenberg, M. Oberlack, D. Pluemacher, "Symmetries and turbulence modeling", *Physics of Fluids* **32** (2020), no. 2, article no. 025108.
- [120] D. Razafindralandy, A. Hamdouni, "Subgrid models preserving the symmetry group of Navier–Stokes equations", *C. R. Mécanique* **333** (2005), p. 481-486.
- [121] D. Razafindralandy, A. Hamdouni, "Consequences of symmetries on the analysis and construction of turbulence models", in *6<sup>th</sup> International Conference on Symmetry in Non-linear Mathematical Physics*, 2005.
- [122] D. Razafindralandy, A. Hamdouni, C. Béghein, "A class of subgrid-scale models preserving the symmetry group of Navier–Stokes equations", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **12** (2007), no. 3, p. 243-253.
- [123] D. Razafindralandy, A. Hamdouni, M. Oberlack, "Analysis and development of subgrid turbulence models preserving the symmetry properties of the Navier–Stokes equations", *Eur. J. Mech. B Fluids* **26** (2007), p. 531-550.
- [124] D. Razafindralandy, A. Hamdouni, "Invariant subgrid modelling in large-eddy simulation of heat convection turbulence", *Theor. Comput. Fluid Dyn.* (2007).
- [125] D. Razafindralandy, A. Hamdouni, "Analysis of subgrid models of heat convection by symmetry group theory", *C. R. Mécanique* **335** (2007), no. 4, p. 225-230.
- [126] N. A. Sayed, A. Hamdouni, E. Liberge, D. Razafindralandy, "The Symmetry Group of the Non-Isothermal Navier–Stokes Equations and Turbulence Modelling", *Symmetry* **2** (2010), p. 848-867.
- [127] K. Vu, J. Carminati, "Symbolic Computation and Differential Equations: Lie Symmetries", *J. Symb. Comput.* **29** (2000), no. 2, p. 95-116.
- [128] M. Torres-Torriti, H. Michalska, "A Software Package for Lie Algebraic Computations", *SIAM Rev.* **47** (2005), no. 4, p. 722-745.
- [129] A. Cheviakov, "Symbolic Computation of Nonlocal Symmetries and Nonlocal Conservation Laws of Partial Differential Equations Using the GeM Package for Maple", in *Similarity and Symmetry Methods: Applications in Elasticity and Mechanics of Materials* (J.-F. Ganghoffer, I. Mladenov, eds.), Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, vol. 73, Springer, 2014, p. 165-184.
- [130] M. Abramowitz, I. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, U. S. Government Printing Office, 1964.
- [131] L. Ovsiannikov, *Group Analysis of Differential Equations*, Academic Press Inc., 1982.
- [132] G. W. Bluman, A. Cheviakov, S. Anco, *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 168, Springer, 2010.
- [133] G. Frederico, D. Torres, "A formulation of Noether's theorem for fractional problems of the calculus of variations", *J. Math. Anal. Appl.* **334** (2007), no. 2, p. 834-846.
- [134] J. Cresson, "Fractional embedding of differential operators and Lagrangian systems", *J. Math. Phys.* **48** (2007), no. 3, article no. 033504.
- [135] E. Buhe, G. W. Bluman, C. Alataancang, H. Yulan, "Some Approaches to the Calculation of Conservation Laws for a Telegraph System and Their Comparisons", *Symmetry* **10** (2018), no. 6, article no. 182.

- [136] T. Wolf, "A comparison of four approaches to the calculation of conservation laws", *Eur. J. Appl. Math.* **13** (2002), no. 2, p. 129-152.
- [137] S. Anco, "Generalization of Noether's Theorem in Modern Form to Non-variational Partial Differential Equations", in *Recent Progress and Modern Challenges in Applied Mathematics, Modeling and Computational Science* (M. R. Melnik R., B. J., eds.), Fields Institute Communications, vol. 79, Springer, 2017, p. 119-182.
- [138] S. Anco, G. W. Bluman, "Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. Part I: Examples of conservation law classifications", *Eur. J. Appl. Math.* **13** (2002), p. 545-566.
- [139] S. Anco, G. W. Bluman, "Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. Part II: General treatment", *Eur. J. Appl. Math.* **13** (2002), p. 567-585.
- [140] N. H. Ibragimov, T. Kolsrud, "Lagrangian approach to evolution equations: symmetries and conservation laws", *Nonlinear Dyn.* **36** (2004), no. 1, p. 29-40.
- [141] N. H. Ibragimov, "A new conservation theorem", *J. Math. Anal. Appl.* **333** (2007), p. 311-328.
- [142] N. H. Ibragimov, "Construction of conservation laws using symmetries", in *Similarity and symmetry methods. Applications in elasticity and mechanics of materials* (J.-F. Ganghoffer *et al.*, eds.), Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, vol. 73, Springer, 2014, p. 61-164.
- [143] N. H. Ibragimov, "Conservation laws and non-invariant solutions of anisotropic wave equations with a source", *Nonlinear Anal., Real World Appl.* **40** (2018), no. Suppl. C, p. 82-94.
- [144] P. Sagaut, *Large eddy simulation for incompressible flows. An introduction*, 3<sup>rd</sup> edition ed., Scientific Computation, Springer, 2006.
- [145] A. Müller, P. Maißer, "A Lie-Group Formulation of Kinematics and Dynamics of Constrained MBS and Its Application to Analytical Mechanics", *Multibody System Dynamics* **9** (2003), no. 4, p. 311-352.
- [146] B. Kolev, "Lie Groups and Mechanics: An Introduction", *J. Nonlinear. Math. Phys.* **11** (2004), no. 4, p. 480-498.
- [147] P. Woit, *Quantum Theory, Groups and Representations: An Introduction*, Springer, 2017.
- [148] A. Iserles, H. Munthe-Kaas, S. Nørsett, A. Zanna, "Lie-group methods", *Acta Numerica* **9** (2000), p. 215—365.
- [149] C. J. Budd, A. Iserles, A. Iserles, S. Norsett, "On the solution of linear differential equations in Lie groups", *Philos. Trans. R. Soc. A* **357** (1999), no. 1754, p. 983-1019.
- [150] J. Hall, M. Leok, "Lie Group Spectral Variational Integrators", *Found. Comput. Math.* **17** (2017), no. 1, p. 199-257.
- [151] S. Christiansen, H. Munthe-Kaas, B. Owren, "Topics in structure-preserving discretization", *Acta Numer.* **20** (2011), p. 1-119.
- [152] E. Celledoni, H. Marthinsen, B. Owren, "An introduction to Lie group integrators – basics, new developments and applications", *J. Comput. Phys.* **257** (2014), no. Part B, p. 1040-1061.
- [153] C. Curry, B. Owren, "Variable stepsize commutator free Lie group integrators", *Numer. Algor.* **82** (2019), p. 1359-1376.
- [154] E. Celledoni, E. Çokaj, A. Leone, D. Murari, B. Owren, "Lie group integrators for mechanical systems", *Int. J. Comput. Math.* **99** (2022), no. 1, p. 58-88.
- [155] L. Drumetz, A. Reiffers-Masson, N. E. Bekri, F. Vermet, "Geometry-preserving Lie Group Integrators For Differential Equations On The Manifold Of Symmetric Positive Definite Matrices", *preprint*, arXiv:2210.08842, 2022.
- [156] V. A. Dorodnitsyn, "Finite difference models entirely inheriting continuous symmetry of original differential equations", *Int. J. Mod. Phys. C* **5** (1994), no. 4, p. 723-734.
- [157] V. A. Dorodnitsyn, *Applications of Lie Groups to Difference Equations*, Differential and Integral Equations and Their Applications, vol. 8, Chapman & Hall, 2010.
- [158] A. Bihlo, "Invariant meshless discretization schemes", *J. Phys. A. Math. Theor.* **46** (2013), no. 6, article no. 062001.
- [159] A. Bihlo, J. Jackaman, F. Valiquette, "On the development of symmetry-preserving finite element schemes for ordinary differential equations", *J. Comput. Dyn.* **7** (2020), no. 2, p. 339-368.
- [160] T.-T. Zhang, M.-J. Xu, "The symmetry-preserving difference schemes and exact solutions of some high-dimensional differential equations", *Appl. Math. Lett.* **112** (2021), article no. 106813.
- [161] E. Hoarau, C. David, P. Sagaut, T.-H. Lê, "Lie group stability of finite difference schemes", *preprint*, arXiv:math/0608757v1, 2006.
- [162] M. Chhay, E. Hoarau, A. Hamdouni, P. Sagaut, "Comparison of some Lie-symmetry-based integrators", *J. Comput. Phys.* **230** (2011), no. 5, p. 2174-2188.
- [163] D. Levi, P. Winternitz, "Lie groups and numerical solutions of differential equations", *Acta Polytechnica* **53** (2013), no. 5, p. 438—443.
- [164] P. Kim, "Invariantization of Numerical Schemes Using Moving Frames", *BIT* **47** (2007), no. 3, p. 525-546.
- [165] M. Chhay, A. Hamdouni, "A new construction for invariant numerical schemes using moving frames", *C. R. Mécanique* **338** (2010), no. 2, p. 97-101.
- [166] P. Olver, "Lectures on Moving Frames", in *Symmetries and Integrability of Difference Equations* (D. Levi, P. Olver, Z. Thomova, P. Winternitz, eds.), London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 381, Cambridge University Press, 2011, p. 207-246.
- [167] G. R. W. Quispel, R. Sahadevan, "Lie symmetries and the integration of difference equations", *Phys. Lett., A* **184** (1993), no. 1, p. 64-70.

- [168] D. Levi, L. Vinet, P. Winternitz, "Lie group formalism for difference equations", *J. Phys. A, Math. Gen.* **30** (1997), no. 2, p. 633-649.
- [169] A. Iserles, "Numerical analysis in Lie groups", in *Foundations of Computational Mathematics* (R. Devore, A. Iserles, E. Süli, eds.), London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 2001, p. 105--124.
- [170] E. Hoarau, C. David, "Lie group computation of finite difference schemes", *preprint*, arXiv:math/0611895, 2006.
- [171] E. Hoarau, P. Sagaut, T. Lê, "Lie group study of finite difference schemes", *Discrete and Continuous Dynamical Systems* (2007), no. Suppl., p. 495-505.
- [172] P. Hydon, E. Mansfield, "Extensions of Noether's Second Theorem: from continuous to discrete systems", *Proc. R. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci.* **467** (2011), no. 2135, p. 3206-3221.
- [173] L. Bourdin, J. Cresson, I. Greff, "A continuous/discrete fractional Noether's theorem", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **18** (2013), no. 4, p. 878-887.
- [174] M. Skopenkov, "Discrete Field Theory: Symmetries and Conservation Laws", *Math. Phys. Anal. Geom.* **26** (2023), no. 19, article no. 19.
- [175] Z. Bartosiewicz, D. Torres, "Noether's theorem on time scales", *J. Math. Anal. Appl.* **342** (2008), no. 2, p. 1220-1226.
- [176] B. Anerot, J. Cresson, K. Hariz Belgacem, E. Pierret, "Noether's-type theorems on time scales", *J. Math. Phys.* **61** (2020), no. 11, article no. 113502.





# *Comptes Rendus*

---

## *Mécanique*

### **Objet de la revue**

Les *Comptes Rendus Mécanique* sont une revue électronique évaluée par les pairs de niveau international, qui couvre l'ensemble des domaines de la discipline. Ils publient des articles originaux de recherche, des articles de revue, des mises en perspective historiques, des textes à visée pédagogique ou encore des actes de colloque, sans limite de longueur, en anglais ou en français. Les *Comptes Rendus Mécanique* sont diffusés selon une politique vertueuse de libre accès diamant, gratuit pour les auteurs (pas de frais de publication) comme pour les lecteurs (libre accès immédiat et pérenne).

**Directeur de la publication :** Étienne Ghys

**Rédacteur en chef :** Jean-Baptiste Leblond

**Comité éditorial :** Olga Budenkova, Francisco Chinesta, Jean-Michel Coron, Luc Dormieux, Florian Gosselin, Nicolas Moës, Léo Morin, Benoit Perthame, Guillaume Ribert, Géry de Saxcé, Emmanuel Villermaux

**Secrétaire éditoriale :** Adenise Lopes

### **À propos de la revue**

Toutes les informations concernant la revue, y compris le texte des articles publiés qui est en accès libre intégral, figurent sur le site <https://comptes-rendus.academie-sciences.fr/mecanique/>.

### **Informations à l'attention des auteurs**

Pour toute question relative à la soumission des articles, les auteurs peuvent consulter le site <https://comptes-rendus.academie-sciences.fr/mecanique/>.

### **Contact**

Académie des sciences

23, quai de Conti, 75006 Paris, France

CR-Mecanique@academie-sciences.fr



Les articles de cette revue sont mis à disposition sous la licence  
Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.fr>

# COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

## *Mécanique*

Volume 351, n° S3, 2023

### **Special issue / Numéro spécial**

The French “Année de la Mécanique”: some views on recent advances in solid and fluid mechanics /  
*L'année de la mécanique : quelques points de vue sur des avancées récentes en mécanique des solides et des fluides*

### **Guest editors / Rédacteurs en chef invités**

Francisco Chinesta (PIMM, UMR CNRS 8006, Arts et Métiers Institute of Technology, Paris, France)  
and Aziz Hamdouni (LaSIE, UMR CNRS 7356, La Rochelle Université, France)

### **Cover illustration / Illustration de couverture**

Francesco dell'Isola and Anil Misra

## Contents / Sommaire

### **Aziz Hamdouni**

Préface ..... 1-2

### **François Charru**

La mécanique des fluides en France dans la première moitié du xx<sup>e</sup> siècle ..... 3-41

### **Jean-Jacques Marigo**

La mécanique de l'endommagement au secours de la mécanique de la rupture : l'évolution de cette idée  
en un demi-siècle ..... 43-63

### **Francesco dell'Isola, Anil Misra**

Principle of Virtual Work as Foundational Framework for Metamaterial Discovery and Rational De-  
sign ..... 65-89

### **Francesco dell'Isola, Roberto Fedele**

Irreducible representation of surface distributions and Piola transformation of external loads sustainable  
by third gradient continua ..... 91-120

### **Francisco Chinesta, Elias Cueto**

Conciliating accuracy and efficiency to empower engineering based on performance: a short jour-  
ney ..... 121-133

### **Géry de Saxcé, Dina Razafindralandy**

Lie groups and continuum mechanics: where do we stand today? ..... 135-159

# COMPTONS PENNDS DE LA CADÉMIE DES SCIENCES MAGNIN

---

NOUVEAU  
SERIES 2023