INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus
Physique

Yves Colin de Verdière

Des bruits et des ondes: mathématiciens et physiciens en interaction

Volume 21, issue 2 (2020), p. 199-202

Published online: 3 November 2020
Issue date: 3 November 2020

https://doi.org/10.5802/crphys.25

Part of Special Issue: Prizes of the French Academy of Sciences 2019

Les Comptes Rendus. Physique *sont membres du*
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org
e-ISSN : 1878-1535

Comptes Rendus
Physique
2020, 21, nº 2, p. 199-202
https://doi.org/10.5802/crphys.25

Prizes of the French Academy of Sciences 2019 / *Prix 2019 de l'Académie des sciences*

Des bruits et des ondes : mathématiciens et physiciens en interaction

Noises and waves : mathematicians and physicists interacting

Yves Colin de Verdière[a]

[a] Université Grenoble-Alpes, Institut Fourier, Unité mixte de recherche CNRS-UGA 5582, BP 74, 38402-Saint Martin d'Hères Cedex, France
Courriel : yves.colin-de-verdiere@univ-grenoble-alpes.fr

Résumé. Nous décrivons la collaboration de l'auteur mathématicien avec deux groupes de physiciens : des sismologues et des physiciens des ondes dans les fluides.

Abstract. We describe the collaboration of the author, a mathematician, with two groups of physicists: seismologists and physicists of waves in fluids.

Mots-clés. Ondes internes, Bruit sismique.

Keywords. Internal waves, Seismic noise.

Depuis longtemps, les mathématiciens trouvent dans la physique de nombreuses sources d'inspiration. Dans cette petite note, je voudrais raconter deux expériences personnelles de cette interaction : l'utilisation du bruit sismique en imagerie découverte par mon collègue grenoblois Michel Campillo et la nature mathématique précise des attracteurs pour les ondes internes observés dans l'équipe de Thierry Dauxois à l'ENS de Lyon.

1. Bruit sismique et imagerie avec Michel Campillo (2003–2010)

Un beau jour de 2003, mon collègue physicien Bart van Tiggelen me dit à peu près ceci : « Tu sais, Michel Campillo fait de l'imagerie à partir du bruit sismique ». Je suis évidemment très intrigué, car tout le monde sait que le bruit est plutôt nuisible dans les expériences de physique. En tout cas, je n'en ai jamais entendu parler comme une source d'information. Me voilà donc parti rendre visite à Michel dont le laboratoire ISterre (Institut des sciences de la terre) est à deux pas de l'Institut Fourier. Michel m'explique entre autres que le grand géophysicien japonais Keiiti

Aki a posé depuis longtemps la question d'utiliser la coda sismique[1] dans l'imagerie. Il écrit une première publication (avec Anne Paul) [1] sur ce sujet avant de réaliser qu'on peut tirer parti du bruit enregistré en permanence par les sismomètres. Son idée est de considérer la corrélation temporelle donnée par

$$C_{A,B}(t) := \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \langle u(A,\tau)|u(B,t-\tau)\rangle \mathrm{d}\tau$$

où $u(x,t)$ est le champ de vitesse, i.e. le bruit au point x enregistré par un sismomètre. L'observation cruciale de Michel Campillo est que la corrélation $C_{A,B}(t)$ est très semblable au signal qui arrive en B s'il y a un tremblement de terre ou une explosion au point A. Cette remarquable idée ouvre la porte à de nouvelles possibilités d'imagerie sismique qui ont au moins deux avantages essentiels : la possibilité d'étudier des régions non sismiques et la possibilité de suivre les déformations au cours du temps, par exemple celle des cônes volcaniques.

Un enjeu est alors de concevoir des modèles mathématiques reflétant cette similitude. C'est ce que nous avons fait. Il y a deux difficultés principales :

1. Utiliser des sources de bruits localisées et non un bruit blanc, car on s'attend à ce que, par exemple, l'interaction de l'océan avec la croûte terrestre[2] soit une telle source localisée.
2. Décrire la propagation des ondes élastiques au sens de l'optique géométrique.

Il se trouve que ces deux difficultés trouvent leurs solutions, dans un contexte largement idéalisé, grâce à la boîte à outils développée depuis les années 70 par les mathématiciens pour étudier les équations aux dérivées partielles, soit les opérateurs pseudo-différentiels et les opérateurs intégraux de Fourier.

Nous avons alors décidé de démarrer un petit groupe de travail avec Michel et son équipe. Cette expérience m'a beaucoup marqué. Nous avons eu du mal à nous comprendre au début. Ensuite, à mon avis, le plus intéressant fut que nous avons réussi à échanger sur nos représentations mentales de ces phénomènes et cela fut source de progrès pour les deux parties. Je me souviens en particulier de leur avoir expliqué que la théorie de la diffusion n'est pas seulement une théorie de la propagation des ondes en présence d'un obstacle, mais qu'elle donne aussi une décomposition spectrale de l'Hamiltonien. Ce qui a contribué dans [2] à rendre très général un calcul compliqué fait sur un exemple « intégrable ».

Pour le lecteur intéressé, ma contribution mathématique est expliquée dans les articles [3–6], alors que la physique est expliquée dans [7].

2. Attracteurs pour les ondes internes observés par l'équipe de Thierry Dauxois (2016–?)

Il s'agit de travaux récents et en cours avec la mathématicienne Laure Saint-Raymond. Lors de son arrivée en 2016 à l'ENS de Lyon, Laure est allée voir les physiciens locaux et en particulier les expériences menées par Thierry Dauxois et ses élèves sur les ondes internes, voir par exemple la thèse de Christophe Brouzet [8]. Il s'agit d'une très belle expérience : dans un « aquarium », essentiellement bi-dimensionnel, dont les dimensions sont de l'ordre du mètre, de forme trapézoïdale, rempli d'eau salée stratifiée, on observe les ondes forcées par un oscillateur périodique. Pour un choix générique de la fréquence du forçage et de la géométrie du trapèze, l'onde se concentre sur une courbe fermée, sorte de trajectoire de billard. Comme j'avais jadis travaillé sur les fonctions propres du laplacien et leur éventuelle localisation sur les trajectoires périodiques du billard

[1] La coda sismique est la fin du signal sismique que l'on voit après les signaux nets dont on peut interprêter la nature géométrique.

[2] C'est ainsi que les géophysiciens Strasbourgeois voyaient la venue d'une tempête atlantique sur leurs sismomètres.

associé (les géodésiques périodiques), Laure eut l'idée de me proposer de collaborer en vue de comprendre la nature de ces attracteurs. Sous des hypothèses très simplifiées, nous avons décrit de tels attracteurs. L'équation d'onde forcée à laquelle on arrive est de la forme simplifiée

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Hu - \nu\Delta u = f\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad u(t=0)=0$$

où

- Δ est le laplacien, ici en dimension 2,
- $u(t)$ représente le champ de vitesse du fluide au temps t et donc u est aussi une fonction de la position x,
- H est un opérateur antisymétrique, non local et borné, qui résulte de l'élimination de la pression dans l'équation de Navier–Stokes. L'antisymmétrie provient de la conservation de l'énergie pour l'équation non forcée et à viscosité nulle,
- le membre de droite, où f est donnée, représente le forçage périodique.

On s'intéresse dans un premier temps, dans le cas où la viscosité ν est nulle, au comportement asymptotique de la solution $u(t)$ quand $t \to +\infty$. Ce que nous avons montré est que, pour un milieu générique, $u(t)$ converge, quand $t \to +\infty$, vers une distribution de Schwartz dont le support singulier est formé d'une (ou plusieurs) courbe(s) fermée(s). C'est cette courbe qui est l'attracteur. Ici l'opérateur H est borné dans l'espace de Hilbert naturel et son spectre près de la fréquence de forçage est absolument continu. On est donc en présence d'un spectre continu dans un domaine borné, ce qui n'a rien à voir avec le spectre discret d'un laplacien dans un tel domaine. La théorie spectrale de tels opérateurs n'avait jamais été étudiée faute de motivation et même le phénomène de résonance en présence de spectre continu n'avait pas été décrit. Nos travaux font appel à des concepts de géométrie différentielle (théorie des feuilletages génériques sur les surfaces : les feuilletages de Morse-Smale) et d'analyse (théorie de Mourre, opérateurs pseudo-différentiels) et font l'objet des publications [9, 10].

Le contexte de notre étude est un peu différent de celui des expériences : nous regardons ce qui se passe en l'absence de frontière, sur une surface fermée comme un tore. Les mêmes méthodes s'appliquent aussi aux ondes inertielles qui sont des solutions des équations de Navier–Stokes en présence de la force de Coriolis induite par la rotation. Ce comportement étrange (observé à la fois pour des fluides stratifiés ou en rotation) est lié à une brisure d'isotropie dans la propagation des ondes. Notre modèle montre que c'est alors un comportement générique de développer des attracteurs. Ces premiers travaux ouvrent un grand chantier : traiter le cas à bord, le cas de viscosité petite, la nature du spectre dans le complémentaire du spectre continu que nous avons décrit. Toutes ces questions donnent lieu à des échanges très constructifs avec la communauté des physiciens, et en particulier avec Michel Rieutord, astrophysicien de Toulouse qui s'intéresse au spectre des étoiles, voir [11].

3. Conclusions

Quitte à simplifier drastiquement la réalité physique très complexe, il est souvent possible d'en obtenir une description mathématique reproduisant bien, même si ce n'est que de façon qualitative, la phénoménologie physique. Ces descriptions ne sont finalement pas beaucoup plus éloignées de la nature que les expériences de laboratoire. Elles peuvent aider à une meilleure compréhension de la physique sous-jacente et donc à de futurs progrès. En tout cas, ces travaux permettent de prendre conscience de la grande unité de la science, au-delà de notre séparation moderne en des myriades de sous-disciplines. J'ajouterai que c'est un grand plaisir de travailler avec des chercheurs, mathématiciens ou physiciens, ayant une culture très différente de la sienne, surtout si l'on arrive à faire progresser ainsi les connaissances.

Références

[1] M. Campillo, A. Paul, « Long range correlations of seismic codas », *Science* **299** (2003), p. 547-549.

[2] Y. Colin de Verdière, « Scattering and correlations », *preprint*, arXiv :1103.4450 (2011).

[3] Y. Colin de Verdière, « Mathematical models for passive imaging I : general background », *preprint*, arXiv :math-ph/0610043 (2006).

[4] Y. Colin de Verdière, « Mathematical models for passive imaging II : Effective Hamiltonians associated to surface waves », *preprint*, arXiv :math-ph/0610044 (2006).

[5] Y. Colin de Verdière, « Semiclassical analysis and passive imaging », *Nonlinearity* **22** (2009), p. 45-75, Article le plus cité de ce journal pour l'année 2009.

[6] Y. Colin de Verdière, « A Semi-classical calculus of correlations », *C. R. Géosci.* **343** (2011), n° 8–9, p. 496-501, Thematic issue « Imaging and Monitoring with Seismic Noise ».

[7] P. Gouédard, L. Stéhly, F. Brenguier, M. Campillo, Y. Colin de Verdière, E. Larose, L. Margerin, P. Roux, F. J. Sànchez-Sesma, N. Shapiro, R. Weaver, « Cross-correlation of random fields : mathematical approach and applications », *Geophys. Prospect.* **56** (2008), p. 375-393, Loránd Eötvös Award 2009 de l'association des géophysiciens Européens (EAGE).

[8] C. Brouzet, « Internal wave attractors : from geometrical focusing to non-linear energy cascade and mixing », PhD thesis, ENS Lyon, 2016, https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01361201v1.

[9] Y. Colin de Verdière, L. Saint-Raymond, « Attractors for two dimensional waves with homogeneous Hamiltonians of degree 0 », *Comm. Pure Appl. Math.* **73** (2020), n° 2, p. 421-462.

[10] Y. Colin de Verdière, « Spectral theory of pseudo-differential operators of degree 0 and application to forced linear waves », *Anal. PDE* **13** (2020), n° 5, p. 1521-1537.

[11] M. Rieutord, L. Valdettaro, « Axisymmetric inertial modes in a spherical shell at low Ekman numbers », *J. Fluid Mech.* **844** (2018), p. 597-834.