

Singularité anguleuse d'une ligne de contact en mouvement sur un substrat solide

Howard A. Stone^a, Laurent Limat^b, Stephen K. Wilson^c, J.-M. Flesselles^{b,1},
Thomas Podgorski^{b,2}

^a Division of Engineering and Applied Sciences, Harvard University, Cambridge, MA 02138, USA

^b Laboratoire de physique et de mécanique des milieux hétérogènes, UMR 7636 du CNRS, ESPCI, 10, rue Vauquelin, 75005 Paris, France

^c Department of Mathematics, University of Strathclyde, Glasgow G1 1XH, United Kingdom

Reçu le 28 février 2001 ; accepté après révision le 30 octobre 2001

Note présentée par Pierre Gilles de Gennes.

Résumé

A suffisamment haut nombre capillaire Ca , une ligne de contact dynamique qui recule sur une surface partiellement mouillante prend une forme anguleuse. Nous montrons que l'écoulement dans le « coin » liquide correspond à une solution de similarité des équations de la lubrification gouvernant les films minces, dans laquelle l'interface peut être assimilée à un cône. La pente Ω de l'interface définie dans son plan de symétrie est liée à l'angle au sommet du coin 2ϕ par la relation approchée $\Omega^3 \approx (3/2) Ca \tan^2 \phi$. Nous suggérons également une origine possible de la déposition de gouttelettes à partir de la pointe, qui survient à plus haut Ca quand ϕ atteint $\pi/6$. Pour citer cet article : H.A. Stone et al., C. R. Physique 3 (2002) 103–110. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

mouillage / démouillage / lignes de contact / écoulement en film / enduisage / singularités / théorie de la lubrification

Corner singularity of a contact line moving on a solid substrate

Abstract

In conditions of partial wetting and at sufficiently high capillary number Ca , a dynamic contact line that recedes on a solid surface assumes a 'saw-tooth' shape. We show that the flow inside this liquid 'corner' is a similarity solution of the lubrication equations governing steady thin-film flows in which the free surface is cone shaped. The interface slope Ω defined in its symmetry plane is linked to the corner angle 2ϕ by the approximate relationship $\Omega^3 \approx (3/2) Ca \tan^2 \phi$. We also suggest a possible explanation of droplet emission from the corner which occurs when ϕ reaches $\pi/6$. To cite this article: H.A. Stone et al., C. R. Physique 3 (2002) 103–110. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

wetting / dewetting / contact lines / film flows / singularities / lubrication theory

Abridged English version

Drops sliding down an inclined plane in conditions of partial wetting exhibit an unexpected cascade of shape bifurcations [1,2], beginning with the appearance of a 'corner-shaped' contact line at the rear when the velocity U is large enough (Fig. 1a). A similar phenomenon occurs when a plate or a tape is withdrawn from a bath of liquid at constant velocity U , also in conditions of partial wetting. The contact line assumes

Adresse e-mail : limat@pmmh.espci.fr (L. Limat).

a triangular shape (Fig. 1b), where the corner angle 2ϕ decreases with the capillary number $Ca = \eta U/\gamma$ [3–5], where η denotes viscosity and γ surface tension. At larger Ca , droplets are emitted from the corner tip (Figs. 1c and 1d), this so called ‘pearling’ transition appearing when ϕ reaches approximately $\pi/6$ [1].

Only a partial understanding of these phenomena is presently available. It is supposed that liquid entrainment by the plane occurs when the capillary number exceeds a threshold Ca_c at which the receding dynamic contact angle $\theta_d = F(Ca)$ vanishes [3–5] (or becomes equal to a critical value θ_c [6]). For Ca just above Ca_c inclination of the contact line is supposed to allow the system to delay liquid entrainment, by maintaining a non-zero dynamic contact angle $\theta_d = F(Ca \sin \phi)$ governed by the component of velocity normal to the contact line $U \sin \phi$ [1–3]. Assuming that the system stays at marginal equilibrium ($F(Ca \sin \phi) = 0$ or θ_c) leads [1–3] to the scaling:

$$\sin \phi \propto \frac{1}{Ca} \quad (1)$$

in which the prefactor depends upon the model of the dynamics at the contact line that specifies the function $F(Ca)$ [6–8]. This scaling is in good agreement with experimental data [1–3], but the hydrodynamics involved at the corner tip remains to be modelled. We show here that the corner is a similarity solution of the lubrication equations governing steady thin-film flows. Physically, in the corner framework, the flow induced by the relative motion of the plane is balanced by that resulting from the capillary pressure singularity at the corner tip. We examine the implications of this idea on the corner geometry and we also try to interpret qualitatively the onset of drop emission when ϕ reaches $\pi/6$.

In the framework suggested in Fig. 2, the free surface of liquid $z = h(x, y)$ is static. For a sufficiently slender liquid layer, the fluid velocity $\mathbf{u}(x, y, z) = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y$ is deduced from lubrication theory with the conditions $\mathbf{u} = -U \mathbf{e}_x$ at $z = 0$, and $\partial \mathbf{u}/\partial z = \mathbf{0}$ at $z = h$:

$$\mathbf{u}(x, z) = \frac{1}{2\eta} (z^2 - 2zh) \nabla P - U \mathbf{e}_x \quad (2)$$

where P is the pressure field and $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ is the gradient operator defined in the plane (x, y) . Near the corner tip, P is nearly equal to the capillary pressure $P \approx -\gamma \Delta h(x, y)$ that dominates over hydrostatic effects. Using the continuity equation leads to the governing equation for $h(x, y)$:

$$3Ca \frac{\partial h}{\partial x} = \nabla \cdot [h^3 \nabla (\Delta h)] \quad (3)$$

with $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. A careful analysis of this equation reveals that it admits similarity solutions of the form $h(x, y) = Ca^{1/3} x H(\zeta)$, where H is an even function of $\zeta = y/x$, with a maximum at $\zeta = 0$ and that vanishes at a value of $\zeta > 0$ that depends on $H(0)$ [11]. Such solutions, the existence of which were first mentioned by Betelú and Diez [9] in a different context (namely dry line inside a flowing film, i.e. with $\phi = \pi$), clearly exhibit a corner structure for the contact lines, the angle ϕ being defined by $H(\tan \phi) = 0$.

To simplify the discussion, we only consider here the large $\tan \phi$ limit in which the liquid flux in the (Oy) direction can be neglected. This approximation, which appears to be nearly valid in fact for the whole range of interest of ϕ values [11] leads to:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta h = 3 \frac{Ca}{h^2} \quad (4)$$

with which the similarity solution $h(x, y) = Ca^{1/3} x H(\zeta)$ implies that $H(\zeta)$ must satisfy the ordinary differential equation:

$$\frac{d}{d\zeta} \left[\zeta (1 + \zeta^2) \frac{d^2 H}{d\zeta^2} \right] = -\frac{3}{H^2} \quad (5)$$

A numerical solution of this equation is given in Fig. 3a, starting the calculation from $H(0) = H_0$, $H'(0) = 0$ and $H''(0) = -3/H_0^2$ for different H_0 values. The $H(\zeta)$ curves always cross the $\zeta > 0$ axis somewhere, which shows that we have found a solution of the present problem involving two straight contact lines meeting at an angle 2ϕ . This angle is a function of H_0 and is plotted in Fig. 3b. After noting that the slope of the interface in its symmetry plane (see Fig. 2) is linked to H_0 by the relationship $\Omega \approx \text{Ca}^{1/3} H_0$, this curve can be understood as a strong geometrical constraint imposed by lubrication theory on the two angles Ω and ϕ . An approximate explicit form of this law can be obtained by replacing H with its Taylor expansion $H(\zeta) \approx H_0(1 - 3\zeta^2/2H_0^3)$ that touches down at $\zeta = (2H_0^3/3)^{1/2}$:

$$H_0^3 \approx \text{Ca}^{-1} \Omega^3 \approx \frac{3}{2} \tan^2 \phi \quad (6)$$

As Fig. 3b shows, this approximate law is very close to that obtained from the numerical solutions to the ordinary differential equation (5).

To interpret the pearling threshold at $\phi = \pi/6$, we suggest that in this situation of a relatively narrow cone, the gravity component parallel to the plane $\rho g \sin \alpha$ could play a significant role. Neglecting the effect of the other gravity component for a sufficiently inclined plane, this suggests replacing the approximate equation (4) by:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta h + \frac{\sin \alpha}{l_c^2} = 3 \frac{\text{Ca}}{h^2} \quad (7)$$

where $l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ is the capillary length. Seeking solutions of the form $h(x, y) \approx h_0(x)[1 - y^2/(x \tan \phi)^2]$ and approximating Δh along (Ox) by $\Delta h \approx d^2 h_0/dx^2 - 2h_0(x)/(x^2 \tan^2 \phi)$ yields:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{d^2 h_0}{dx^2} - 2 \frac{h_0(x)}{x^2 \tan^2 \phi} \right] + \frac{\sin \alpha}{l_c^2} \approx 3 \frac{\text{Ca}}{h_0^2(x)} \quad (8)$$

the solution of which can be expanded in powers of x as:

$$h_0(x) \approx \left(\frac{3}{2} \text{Ca} \tan^2 \phi \right)^{1/3} x - \frac{\tan^2 \phi}{1 + 3 \tan^2 \phi} \frac{\sin \alpha}{2l_c^2} x^3 + O(x^5) \quad (9)$$

in which the first term is the former solution discussed above. This solution exists for any value of ϕ , but another solution of (9) can also be found in the limit $\text{Ca} = 0$, namely:

$$h_0(x) = \frac{\tan^2 \phi}{1 - 3 \tan^2 \phi} \frac{\sin \alpha}{2l_c^2} x^3 \quad (10)$$

This other solution represents a ‘static’ free surface shape, moving with the plane at the same velocity. It begins to exist when ϕ becomes smaller than $\pi/6$, i.e. exactly when droplet emission is observed experimentally. We therefore suggest that this phenomenon could be linked to the sudden appearance of this new solution, the liquid at the tip being able to undergo a transition between a dynamic and a static state. Alternatively, it is possible to explain this transition using equation (3) as numerical solutions suggest a transition in the response near $\pi/6$ [11].

This note is a summary of discussions between the authors that took place during the stay of Prof. H.A. Stone and Dr. S.K. Wilson at ESPCI in June 2000, as Visiting Professors. We thank ESPCI and the City of Paris for their financial support. More recent observations of the drops from the side [10] support our

model, especially with respect to the conical structure of the interface and to the non-zero value of the apparent contact angle implied by Fig. 3a.

1. Introduction

Suivant leur vitesse U , des gouttes glissant sur un plan incliné, en mouillage partiel, présentent différentes formes [1,2]. Au dessus d'une valeur seuil de U , les gouttes arrondies sont remplacées par des gouttes présentant un coin à l'arrière (Fig. 1a), dont l'angle 2ϕ décroît avec U . Un phénomène similaire est observé lorsqu'on essaie d'entraîner un film liquide sur un ruban ou une plaque hors d'un bain [3–5] : lorsque la vitesse de tirage U est assez élevée, la ligne de contact adopte également cette forme en « coin » suggérée sur la Fig. 1b. Lorsqu'on augmente encore U , le coin émet des gouttelettes (Figs. 1c et 1d), cette transition se produisant quand ϕ atteint approximativement $\pi/6$ [1,2].

La compréhension de ces phénomènes n'est pour l'instant que partielle [1–5]. On suppose que l'inclinaison de la ligne de contact a son origine dans la relation liant le nombre capillaire $Ca = \eta U / \gamma$ (η viscosité, γ tension de surface) à l'angle de contact dynamique $\theta_d = F(Ca)$ [6–8]. La plaque commence à entraîner un film lorsque Ca atteint une valeur critique Ca_c telle que θ_d s'annule (ou atteint une valeur critique θ_c non-nulle [6]). Pour $Ca > Ca_c$ ce film se limite à un contour triangulaire le long duquel la vitesse normale $U \sin \phi$ reste plus faible que la vitesse critique, ce qui retarde l'annulation de $\theta_d = F(Ca \sin \phi)$. On admet ensuite qu'à l'équilibre marginal, $F(Ca \sin \phi) = 0$ (ou θ_c), ce qui mène à des lois d'échelle du type :

$$\sin \phi \propto \frac{1}{Ca} \tag{1}$$

qui sont bien vérifiées par les données expérimentales [1–5]. La structure de l'écoulement dans le coin liquide reste toutefois à comprendre.

Nous proposons ici une approche simplifiée basée sur la théorie de la lubrification des films minces. Une solution en cône de la surface libre peut être construite (Section 2), dans laquelle le flux de liquide entraîné par la plaque est compensé par un écoulement de retour sous l'action de la pression capillaire qui diverge près de la pointe. Nous proposons ensuite une explication du phénomène d'émission de gouttelettes en

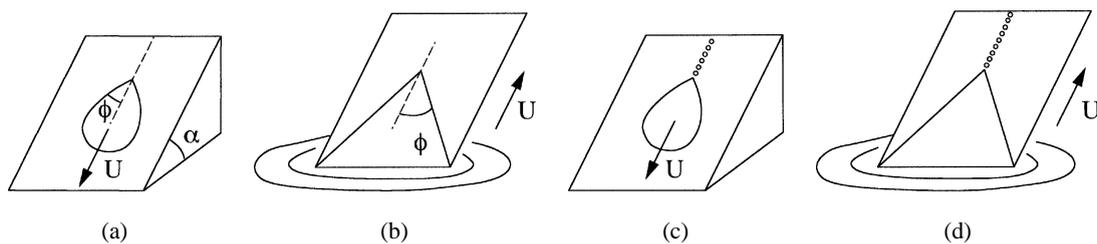


Figure 1. (a) Une goutte glissant le long d'un plan incliné, en situation de mouillage partiel, présente une ligne de contact arrière anguleuse lorsque le nombre capillaire est suffisamment grand. (b) Un phénomène similaire est observé par tirage d'une plaque hors d'un bain et peut donner lieu à l'entraînement d'un film triangulaire. (c), (d) Pour des nombres capillaires encore plus élevés, et lorsque l'angle au sommet 2ϕ devient plus petit que $\pi/3$, on observe l'émission de gouttelettes qui restent collées à la plaque.

Figure 1. (a) A drop sliding along an inclined plane, in situation of partial wetting, exhibits a 'corner-shaped' contact line at its rear when the capillary number is sufficiently large. (b) A similar phenomenon occurs when a partially wetting plate is pulled out of a bath of liquid, which leads to entrainment of a film of triangular shape. (c), (d) When the corner angle 2ϕ becomes smaller than $\pi/3$, droplets are emitted by the corner tip and thereafter remain pinned on the solid surface.

prenant en compte la gravité (Section 3) : des cônes « statiques » (équilibre capillarité/gravité) entraînés par la plaque commencent à exister dès que ϕ devient plus petit que $\pi/6$, ce qui pourrait expliquer la déposition de liquide par le coin.

2. Un modèle planaire de l'écoulement près de la pointe

Dans un repère où la surface libre du liquide $z = h(x, y)$ est immobile (Fig. 2a), et dans l'approximation de lubrification, la vitesse du liquide $\mathbf{u}(x, y, z) = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y$ se calcule à partir des conditions $\mathbf{u} = -U \mathbf{e}_x$ pour $z = 0$, et $\partial \mathbf{u} / \partial z = 0$ pour $z = h$:

$$\mathbf{u}(x, z) = \frac{1}{2\eta} (z^2 - 2zh) \nabla P - U \mathbf{e}_x \quad (2)$$

où P est la pression et $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ le gradient défini dans le plan (x, y) . Près de la pointe, P est pratiquement égale à la pression capillaire $P \approx -\gamma \Delta h(x, y)$ qui domine la pression hydrostatique. En écrivant la conservation de la masse, intégrée sur l'épaisseur, on obtient l'équation qui gouverne $h(x, y)$:

$$3 \text{Ca} \frac{\partial h}{\partial x} = \nabla \cdot [h^3 \nabla (\Delta h)] \quad (3)$$

avec $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Dans la limite des grandes valeurs de $\tan(\phi)$ (cônes très ouverts), le flux de liquide suivant (Oy) peut être négligé [11] et l'équation (3) se simplifie en donnant :

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta h = 3 \frac{\text{Ca}}{h^2} \quad (4)$$

On peut retrouver plus physiquement cette équation : le mouvement de la plaque induit un flux linéique suivant (Ox) égal à $Uh(x, y)$, qui est compensé par un écoulement de retour sous l'action de la gravité et de la pression capillaire. Près de la pointe, où la courbure de l'interface diverge, ce deuxième effet dominera le premier en engendrant un flux de retour égal à $-(h^3/3\eta) dP/dx$ où $P = -\gamma \Delta h(x, y)$ est la pression du liquide.

Près de la pointe, la seule longueur pertinente est la distance x , d'où l'idée de rechercher des solutions de similarité en $h(x, y) = \text{Ca}^{1/3} x H(\zeta)$ où $\zeta = y/x$. L'existence d'une fonction $H(\zeta)$ pouvant s'annuler

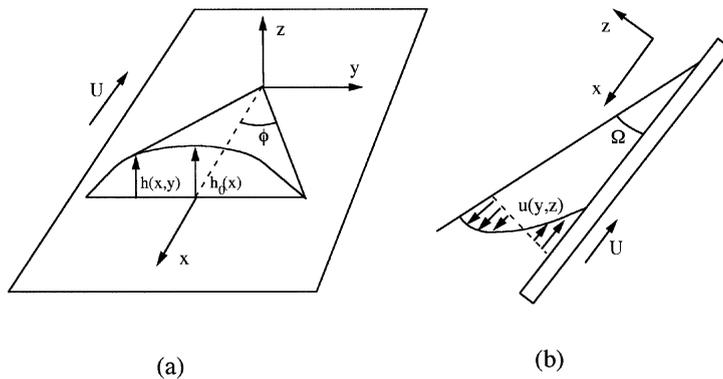


Figure 2. (a) Notations utilisées dans la description d'un coin liquide immobile sur une plaque en mouvement à vitesse U . (b) On suppose un écoulement dans lequel se compense l'entraînement du liquide par la plaque et le flux refoulé par le gradient de pression capillaire.

Figure 2. (a) Notation used in the description of a liquid corner supposed static on a solid plane moving at a velocity U . (b) Structure of the assumed flow in a vertical plane.

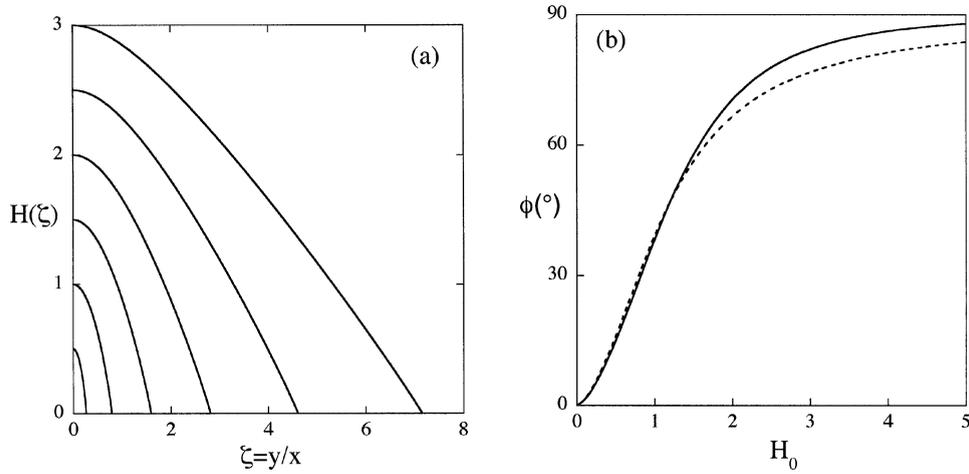


Figure 3. (a) Profils $H(\zeta)$ de la section du coin liquide simulés à partir de l'équation (4) pour différentes valeurs de H_0 . (b) Relation liant $H_0 \approx Ca^{-1/3} \Omega$ et ϕ , déduite du critère $H(\tan \phi) = 0$. La loi approchée (6), déduite d'une section de cône parabolique, apparaît en pointillés.

Figure 3. (a) Profiles $H(\zeta)$ of the liquid cone cross-section calculated numerically from equation (5) for different values of $H_0 \approx Ca^{-1/3} \Omega$. (b) Relationship linking H_0 to ϕ deduced from the equation $H(\tan \phi) = 0$. The law (6) obtained from a parabolic approximation to $H(\zeta)$ is indicated with a dotted line.

de part et d'autre de l'axe (Ox) n'est toutefois pas triviale. On peut la démontrer dans le cas général de l'équation (3) [11], mais, pour simplifier, nous nous limitons ici au cas des grandes valeurs de $\tan \phi$, c'est à dire au cas de l'équation (4). Celle-ci conduit à l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d}{d\zeta} \left[\zeta (1 + \zeta^2) \frac{d^2 H}{d\zeta^2} \right] = -\frac{3}{H^2} \quad (5)$$

Une résolution numérique de cette équation est reproduite Fig. 3a. Pour « amorcer » la simulation en $\zeta = 0$, on se donne $H(0) = H_0$, on remarque que $H'(0) = 0$ par symétrie et que $H''(0) = -3/H_0^2$. Un algorithme de Runge Kutta d'ordre deux donne alors les profils $H(\zeta)$ paramétrés par H_0 . Physiquement, ces profils représentent des vues en coupe de la pointe, pour différentes valeurs de la pente de l'interface $\Omega \approx Ca^{1/3} H_0$ définie dans son plan de symétrie (x, z) (Fig. 2b). Ils finissent toujours par couper l'axe horizontal en un lieu qui définit la position $\zeta = \tan \phi$ d'une des deux lignes de contact, l'autre étant située en $\zeta = -\tan \phi$. En répétant les simulations pour différents H_0 on peut alors tracer la courbe liant H_0 à ϕ , reproduite sur la Fig. 3b.

Pour extraire une relation explicite liant les deux angles Ω et ϕ , on peut remplacer $H(\zeta)$ par son approximation parabolique $H(\zeta) \approx H_0(1 - \frac{3}{2}(\zeta^2/H_0^3))$ qui s'annule pour $\zeta = (2H_0^3/3)^{1/2}$. Ceci mène à la relation approchée :

$$H_0^3 \approx Ca^{-1} \Omega^3 \approx \frac{3}{2} \tan^2 \phi \quad (6)$$

qui coïncide pratiquement avec la valeur numérique dans une large gamme de valeurs de ϕ (Fig. 3b).

Mentionnons ici qu'une étude du cas général de l'équation (3) a également été réalisée [11], et conduit à une courbe $H_0(\phi)$ pratiquement identique à celle calculée pour l'équation (4). Enfin, l'existence de ces solutions de similarité des équations de lubrification a été mentionnée pour la première fois par Betelú et Diez [9] pour $\phi = \pi$.

3. Une interprétation possible de la transition de perlage

Afin d'interpréter la transition de perlage à $\phi = \pi/6$, nous remarquons qu'elle se produit pour des cônes liquides plus étroits, et, dans le cas des gouttes, plus allongés. Dans cette limite on peut penser soit à l'effet de la composante de la gravité dans le plan de la plaque $g_{//} = g \sin \alpha$, soit à une possible déstabilisation du cône par une instabilité de type Rayleigh. Nous discutons ici la première possibilité. En ajoutant l'effet de la composante $g_{//} = g \sin \alpha$ de la gravité, et en négligeant l'autre composante pour une plaque suffisamment inclinée, on est conduit à remplacer l'équation approchée (4) par :

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta h + \frac{\sin \alpha}{l_c^2} = 3 \frac{\text{Ca}}{h^2} \quad (7)$$

où $l_c = \sqrt{\gamma/\rho g}$ désigne la longueur capillaire. On peut alors chercher directement une solution en $h(x, y) \approx h_0(x)[1 - y^2/(x \tan \phi)^2]$ et en approximant la courbure par $d^2 h_0/dx^2$ sur l'axe (Ox). On aboutit alors à l'équation suivante :

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{d^2 h_0}{dx^2} - 2 \frac{h_0(x)}{x^2 \tan^2 \phi} \right] + \frac{\sin \alpha}{l_c^2} \approx 3 \frac{\text{Ca}}{h_0^2(x)} \quad (8)$$

dont la solution se développe sur x comme :

$$h_0(x) \approx \left(\frac{3}{2} \text{Ca} \tan^2 \phi \right)^{1/3} x - \frac{\tan^2 \phi}{1 + 3 \tan^2 \phi} \frac{\sin \alpha}{2 l_c^2} x^3 + O(x^5) \quad (9)$$

On retrouve près de la pointe la solution de la partie précédente, à laquelle s'ajoute un aplatissement progressif qui annonce le raccordement au film de la Fig. 1a, ou à la goutte de la Fig. 1b. Cette solution ne présente pas de comportement particulier pour $\phi = \pi/6$, mais assez remarquablement, une solution d'un autre problème apparaît pour cette valeur de ϕ . Dans un repère lié à la plaque, ce qui correspond formellement à $\text{Ca} = 0$, des cônes « statiques » (entraînés par la plaque) commencent à exister pour $\phi < \pi/6$:

$$h_0(x) = \frac{\tan^2 \phi}{1 - 3 \tan^2 \phi} \frac{\sin \alpha}{2 l_c^2} x^3 \quad (10)$$

Cette solution « statique » par rapport à la plaque mobile, est caractérisée par le même angle ϕ que la solution « dynamique ». Une conjecture assez naturelle concernant l'entraînement de gouttes par la plaque à l'arrière du coin liquide, consiste à dire que cet entraînement n'apparaît que lorsque les deux solutions coexistent, le liquide pouvant alors passer d'un état à l'autre par un mécanisme qui reste à préciser. On peut imaginer qu'un fragment de la pointe puisse se détacher en passant en mode statique puis se réorganiser en une gouttelette circulaire piégée sur la surface mobile.

4. Conclusions

- A notre avis, la formation du coin résulte à la fois de la dynamique des lignes de contact qui fixe l'angle ϕ mais également de la possibilité pour l'approximation de lubrification des films minces de donner naissance à des solutions auto similaires en pointe sous la forme très générale $h(x, y) = \text{Ca}^{1/3} x H(y/x)$.
- Ces solutions résultent d'un équilibre subtil entre le flux entraîné par la plaque et le flux de retour dû à la pression capillaire laquelle devient infinie vers la pointe.
- Nous conjecturons que l'émission de gouttes par le coin liquide lorsque son angle d'ouverture 2ϕ devient plus petit que $\pi/3$ pourrait résulter de l'apparition d'une autre solution, toujours en pointe, mais statique par rapport à la plaque, le liquide « hésitant » entre ces deux états caractérisés par le même angle de coin.

- Il resterait maintenant à rediscuter la condition à la ligne de contact, l'angle de contact apparent étant ici non-nul (cf. Fig. 3a). En fait, comme nombre d'approches de la dynamique des lignes de contact [7,8], notre solution y présente une singularité logarithmique (non visible sur la Fig. 1), qu'il faudrait tronquer. On peut alors imaginer que la condition de Blake $\theta_d = 0$ doit être remplacée par une condition du type $\theta_d = \theta_c$ (angle critique apparent non-nul) pour fixer l'angle ϕ via l'équation (1), et que le système ajuste alors l'angle Ω via l'équation (6). On peut au contraire considérer qu'il faut recalculer θ_d à partir de l'approximation parabolique de notre solution et le réinjecter dans une loi de Cox–Voïnov modifiée $\theta_d = F(Ca \sin \phi)$ pour construire une autre loi $\phi = f(Ca)$. Des vues de coté récentes de gouttes sur plan incliné [10] favorisent la première idée, avec θ_c proche de 0,6 fois l'angle statique. Elles confirment également l'idée défendue dans cette note d'une structure cônica de la pointe, avec un angle de contact apparent non-nul.

¹ Adresse actuelle : Saint-Gobain Recherche, BP 135, 39, quai Lucien-Lefranc, 93303 Aubervilliers cedex, France.

² Adresse actuelle : Department of Mathematics, Pennsylvania State University, 218 McAllister Building, University Park, PA 16802, USA.

Remerciements. Cette note résume les discussions qui ont eu lieu entre les auteurs à l'occasion d'un séjour à l'ESPCI de H. Stone et S.K. Wilson durant le mois de juin 2000 comme Professeurs Invités. Nous remercions l'ESPCI et la Ville de Paris pour leur soutien financier.

Références bibliographiques

- [1] T. Podgorski, J.-M. Flesselles, L. Limat, Corners, cusps and pearls in running drops, *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001) 036102-1–036102-4.
- [2] T. Podgorski, Ruissellement en situation de mouillage partiel, Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6, 2000.
- [3] T.D. Blake, K.J. Ruschak, A maximum speed of wetting, *Nature* 282 (1979) 489–491.
- [4] R. Burley, B. Kennedy, An experimental study of air entrainment at a solid/liquid/gas interface, *Chem. Eng. Sci.* 31 (1976) 901–911.
- [5] S.F. Kistler, P.M. Schweizer, *Liquid Film Coating*, Chapman and Hall, London, 1997; T.D. Blake, K.J. Ruschak, Wetting: static and dynamic contact lines, in: S.F. Kistler, P.M. Schweizer (Eds.), *Liquid Film Coating*, Chapman and Hall, London, 1997, pp. 63–97.
- [6] P.G. de Gennes, Deposition of Langmuir–Blodgett layers, *Coll. Polym. Sci.* 264 (1986) 463–465.
- [7] O.V. Voinov, Hydrodynamics of wetting, *Fluid Dynamics* 11 (1976) 714–721.
- [8] R.G. Cox, The dynamics of spreading of liquids on a solid surface—Part 1: Viscous flow, *J. Fluid Mech.* 168 (1986) 169–194.
- [9] S.I. Betelú, J.A. Diez, A two-dimensional similarity solution for capillary driven flows, *Physica D* 126 (1999) 136–140.
- [10] L. Limat, T. Podgorski, J.-M. Flesselles, M. Fermigier, S. Moal, H.A. Stone, S.K. Wilson, B. Andreotti, Shape of drops sliding down an inclined surface, in: J. Anthoine, J.-M. Buchlin (Eds.), *Proceedings of 4th European Coating Symposium*, Bruxelles, 1–4 October 2001.
- [11] H.A. Stone, L. Limat, Three-dimensional solutions of the 'corner-shaped' contact lines, in preparation.