



Astrophysique/Techniques astronomiques

Instabilités de calibration de phase

André Lannes

Cerfacs/Suc, 42, avenue Gaspard Coriolis, 31057 Toulouse cedex, France

Reçu le 26 février 2003 ; accepté le 24 juin 2003

Présenté par Pierre Encrenaz

Résumé

En interférométrie à très longues lignes de base, les procédures de reconstruction d'image sont très sensibles aux instabilités potentielles de l'opération de calibration de phase. L'analyse présentée dans cette Note montre que ces instabilités sont dues à l'existence de minima secondaires (plus ou moins critiques) de la fonctionnelle objectif de calibration de phase. En résolvant les problèmes d'ambiguïtés entières correspondants d'une manière appropriée, ces minima peuvent être explicitement identifiés et comparés. La stabilité des procédures d'auto-calibration peut être ainsi facilement contrôlée. *Pour citer cet article : A. Lannes, C. R. Physique 4 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Phase calibration instabilities. In very long baseline interferometry, the image reconstruction procedures are very sensitive to the potential instabilities of the phase calibration operation. The analysis presented in this Note reveals that these instabilities are due to the existence of secondary minima (more or less critical) of the phase calibration objective functional. By resolving the corresponding integer ambiguity problems in an appropriate manner, these minima can be explicitly identified and compared. The stability of the self-calibration procedures can thus be easily controlled. *To cite this article: A. Lannes, C. R. Physique 4 (2003).*

© 2003 Académie des sciences. Publié par Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Synthèse d'ouverture ; Imagerie à clôture de phase ; Auto-calibration

Keywords : Aperture synthesis; Phase closure imaging; Self-calibration

Abridged English version

Introduction

In radio imaging and in optical interferometry, a “bias phase” $\Phi(j, k)$ of the form $\Upsilon(j) - \Upsilon(k)$ is basically involved in the relationship between $\Theta_d(j, k)$, the phase of the “complex visibility” data, and $\Theta_m(j, k)$, the equivalent for the model (Eq. (1)). This relation is defined on the set \mathcal{B} of the baselines (j, k) of the interferometric array \mathcal{A} . In this context specified in [1], the phase calibration operation consists in finding a bias phase Φ_\star that minimizes the functional c defined in Eq. (2). The weight function (3) and the arc function (4) play an essential part in the definition of this functional. The main result of such an operation is the “optimal model phase shift” Δ_\star (Eq. (6)).

The potential instabilities of the phase calibration operation are due to the fact that functional c may have secondary minima. To analyse this problem it is convenient to introduce the “linear ramp function” (7). This function is related to the arc function

Adresse e-mail : lannes@cerfacs.fr (A. Lannes).

as indicated in Eq. (8). Minimizing c is then equivalent to minimizing f (Eq. (9)). For clarity, our study is therefore presented at the level of f .

Theoretical framework

This section is devoted to the concepts basically involved in the statement of the phase calibration problem. As illustrated in Fig. 1, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ is an interferometric graph, and $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_t)$ a spanning tree of this graph [1,2]. The edge-function space G is the linear space of real-valued functions θ that take their values on the directed edges (i.e., on the directed baselines) and that are antisymmetric: $\theta(k, j) = -\theta(j, k)$. Endowed with the inner product (10), G is a Euclidean space. The following algebraic elements are also introduced: the bias operator B , the bias-function space L (the range of B), and its orthogonal complement L^\perp . Note that f is a functional from L into \mathbb{R} . The projections of G onto L and L^\perp are denoted by R and S , respectively.

The subset of G whose elements are functions μ with values in \mathbb{Z} is denoted by $G(\mathbb{Z})$. This subset is a lattice of G in the sense defined in [3]. The μ 's are therefore the points of this lattice. By construction, $\text{ramp}(\theta)$ is the discrepancy vector between θ and its nearest lattice point [see Eqs. (7) and (10)].

The number of “cycles” defined through a given (fixed but arbitrary) spanning tree $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_t)$ is the number of edges of \mathcal{B} that do not lie in \mathcal{B}_t : $p = n_b - (n_a - 1)$. These edges are said to be “cycle-entry edges” (see Fig. 1). In the sense of Kirchhoff, the “closure terms” of a function θ lying in G are the sums of the values of θ along the directed cycles defined through the selected spanning tree. These closure terms, denoted by $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(p)}$, are the components of a vector θ lying in \mathbb{R}^p . In this context, the operator C , from G onto \mathbb{R}^p , defined by the relation $C\theta := \theta$, is the closure operator; L proves to be its null space. The space K that is formed by the functions θ that vanish on the edges of $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_t)$ is said to be the “cycle-entry function space”; $\{\xi_i\}_{i=1}^p$ is its standard basis (ξ_i is the antisymmetric characteristic function of the i -th cycle-entry edge). The pseudo-inverse of C (in the sense of Moore–Penrose) is then explicitly given by Eq. (11). In this framework, it can also be shown that G is the direct sum of K and L . Likewise, its lattice can be regarded as the direct sum of the sublattices $K(\mathbb{Z}) := G(\mathbb{Z}) \cap K$ and $L(\mathbb{Z}) := G(\mathbb{Z}) \cap L$.

Global minimum and secondary minima

We first note that functional f is periodic. More precisely, for any v in $L(\mathbb{Z})$, we have $f(\phi + v) = f(\phi)$. The minimizers of f are therefore defined up to a vector of $L(\mathbb{Z})$. For all μ in $G(\mathbb{Z})$, we first define ϕ_μ and δ_μ as indicated in Eq. (12). The study of the minima of f then derives from the following characterization property. (Its proof, which cannot be presented in this note, is to be found in [4].)

Property. *The minimizers of f are the bias functions ϕ_μ for which $|\delta_\mu|$ is strictly less than $1/2$ (all over \mathcal{B}). As a corollary, δ_μ is then equal to $\text{ramp}(\psi - \phi_\mu)$.*

Identifying the minima of f therefore amounts to finding the points μ of $G(\mathbb{Z})$ for which $|\delta_\mu|$ is strictly less than $1/2$ all over \mathcal{B} . At these points, we have $f(\phi_\mu) = \|\delta_\mu\|^2$. The corresponding model phase shifts are then given by the formula $\Delta_\mu = 2\pi\delta_\mu$ (see Eqs. (6) and (8)).

As $\delta_\mu := S(\psi - \mu)$ with $S = C^+C$, we have $\delta_\mu = C^+(\psi - \mu)$ where $\psi = C\psi$ and $\mu = C\mu$. Clearly, when ψ is fixed, δ_μ depends only on the closure vector of μ , a vector of \mathbb{Z}^p . It then follows that $\|\delta_\mu\|^2 = q(\mu - \psi)$ where q is the positive-definite quadratic form on \mathbb{R}^p : $q(\gamma) := [\gamma]^t [C^+*C^+] [\gamma]$. Note that in the standard basis of \mathbb{R}^p , the matrix elements of C^+*C^+ are the scalar products $(\eta_i | \eta_{i'})$ (see Eq. (11)). As the values of f are bounded by $1/4$ (see Eqs. (9), (7) and (3)), we are then led to consider the set $\mathcal{E}(\mathbb{Z})$ of the points of \mathbb{Z}^p lying in the “minima confinement ellipsoid” \mathcal{E} defined in Eq. (13). The minima of f correspond to the points of $\mathcal{E}(\mathbb{Z})$ for which $|C^+(\psi - \mu)|$ is strictly less than $1/2$ all over \mathcal{B} . The problem can therefore be solved by using the techniques that allow the points of $\mathcal{E}(\mathbb{Z})$ to be listed (see, for example, the discrete search algorithms presented in [5,6]).

In what follows, we consider the general case where the minimum of $q(\mu - \psi)$ on \mathbb{Z}^p is attained at a unique point denoted by μ_\star . For the distance induced by q , μ_\star is then the point of \mathbb{Z}^p closest to ψ : $q(\mu_\star - \psi)$ is the smallest value of $q(\mu - \psi)$ on \mathbb{Z}^p . Let us now denote by \mathcal{M} the set of points γ of \mathbb{R}^p such that $|C^+(\psi - \gamma)|$ is less than or equal to $1/2$ all over \mathcal{B} . It is easy to show that \mathcal{M} is a bounded convex subset of \mathcal{E} centered on ψ , i.e., symmetric with respect to ψ . The minima of f correspond to the points of \mathbb{Z}^p that lie inside \mathcal{M} ; μ_\star is such a point, and $q(\mu_\star - \psi)$ is the global minimum of f [4].

In the special case where f has no secondary minimum, the phase calibration operation is very stable. In the general case, with regard to the reliability of the results, the parameters Γ_1 and Γ_2 defined in Eq. (14) prove to play a key role. A large value

of Γ_1 (compared to unity) ensures a good stability whatever Γ_2 . When the arcs of the closure terms of $\Theta_d - \Theta_m$ are weak, say less than 30° in absolute value, Γ_1 is relatively strong, say of the order of 5, a value which of course depends on the weight function (3). The situation is then stable. As this threshold increases, Γ_1 decreases. When some of these closure arcs are strong, for example of the order of 120° in absolute value, Γ_1 may be very weak (of the order of 0.01, for example), with, however, very different model phase shifts (Γ_2 of the order of 2, for example). In the self-calibration procedures [7], these critical situations must of course be discarded.

1. Introduction

En imagerie radio et en interférométrie optique, la relation données/modèle fait intervenir des phases de biais $\Phi(j, k)$ de la forme $\Upsilon(j) - \Upsilon(k)$. Plus précisément, dans la modélisation de référence [1], sur chaque ligne de base (j, k) du réseau interférométrique \mathcal{A} , la phase Θ_d des données de « visibilité complexe » est liée à Θ_m , celle du modèle, par la relation

$$\Theta_d(j, k) = \Theta_m(j, k) + \Phi(j, k) + \varepsilon(j, k) \pmod{2\pi}. \tag{1}$$

Les $\varepsilon(j, k)$ sont les termes d'erreur correspondants. L'opération de calibration de phase consiste à trouver une « phase de biais » Φ_\star telle que dans le sens défini ci-dessous, $\Theta_d - \Phi_\star$ soit la meilleure approximation possible de Θ_m . L'idée de référence [1], sur laquelle est fondée notre analyse, est de minimiser une fonctionnelle de la forme

$$c(\Phi) := \sum_{(j,k) \in \mathcal{B}} w(j, k) \text{arc}^2\{[\Theta_d(j, k) - \Phi(j, k)] - \Theta_m(j, k)\}. \tag{2}$$

Dans cette relation, où \mathcal{B} désigne l'ensemble des lignes de base du réseau interférométrique \mathcal{A} , w est une fonction de pondération normalisée du type

$$w(j, k) := \frac{\varpi(j, k)\rho_d(j, k)\rho_m(j, k)}{\sum_{(j,k) \in \mathcal{B}} \varpi(j, k)\rho_d(j, k)\rho_m(j, k)}; \tag{3}$$

ρ_d désigne l'amplitude (i.e., le module) des données de visibilité complexe, et ρ_m l'équivalent pour le modèle; ϖ est une fonction de pondération introduite a priori: $\varpi(j, k)$ est d'autant plus grand que $|\varepsilon(j, k)|$ est petit (voir Éq. (1)). Par définition,

$$\text{arc}\{\Theta(j, k)\} := \Theta(j, k) - 2\pi \left\lfloor \frac{\Theta(j, k)}{2\pi} \right\rfloor; \tag{4}$$

$\lfloor x \rfloor$ désigne l'entier relatif le plus proche de x . (Quand $x = m + 1/2$ avec m dans \mathbb{Z} , $\lfloor x \rfloor$ est arbitrairement défini comme étant m ou $m + 1$.) Dans une notation plus synthétique (qui se réfère au produit scalaire défini plus loin dans l'Éq. (10)), l'on a donc $c(\Phi) = \|\text{arc}\{(\Theta_d - \Phi) - \Theta_m\}\|^2$, soit encore

$$c(\Phi) = \|\text{arc}(\Psi - \Phi)\|^2 \quad (\Psi := \Theta_d - \Theta_m). \tag{5}$$

Dans ce contexte, Φ_\star est une phase de biais pour laquelle le minimum global de cette fonctionnelle est atteint. La phase du « modèle contraint par les données » est alors définie par la relation $\Theta_{m\star} := \Theta_d - \Phi_\star$. La quantité $\Delta_\star := \text{arc}(\Theta_{m\star} - \Theta_m)$ est donc la « variation de phase optimale du modèle ». Noter que

$$\Delta_\star = \text{arc}(\Psi - \Phi_\star) \quad (\Psi := \Theta_d - \Theta_m). \tag{6}$$

Les instabilités potentielles de l'opération de calibration de phase sont dues au fait que la fonctionnelle c peut avoir des minima secondaires. Pour aborder cette problématique, il s'avère commode d'introduire la fonction « dents de scie » (« the linear ramp function »)

$$\text{ramp}(x) := x - \lfloor x \rfloor. \tag{7}$$

D'après (4),

$$\text{arc}(\Theta) = 2\pi \text{ramp}(\theta) \quad \left(\theta := \frac{\Theta}{2\pi}\right). \tag{8}$$

En adoptant cette notation, on est alors conduit à introduire la fonctionnelle

$$f(\phi) := \|\text{ramp}(\psi - \phi)\|^2 \quad (\psi := \theta_d - \theta_m). \tag{9}$$

Comme $c(\Phi) = 4\pi^2 f(\phi)$ (voir Éq. (5)), il est préférable, pour des raisons de clarté, d'analyser le problème au niveau de f qu'au niveau de c .

2. Cadre théorique

2.1. Graphes interférométriques

Les « sommets » d'un graphe interférométrique $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sont les éléments pupillaires du dispositif interférométrique : les antennes en imagerie radio, les télescopes en interférométrie optique. Les « arêtes » correspondent aux lignes de base. Ces graphes sont connexes et finis ; n_a est le cardinal de \mathcal{A} , et n_b celui de \mathcal{B} . Comme illustré sur le Fig. 1, n_b peut être inférieur à $n_a(n_a - 1)/2$: les arêtes manquantes correspondent, par exemple, aux lignes de base pour lesquelles ρ_d est dans le bruit. Un « arbre maximal » (« spanning tree ») de $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est un sous-graphe connexe $(\mathcal{A}, \mathcal{B}_t)$ ayant n_a sommets et $n_a - 1$ arêtes [2]. Le nombre des « cycles » définis via un arbre maximal choisi de façon arbitraire est le nombre des arêtes de \mathcal{B} qui n'appartiennent pas à \mathcal{B}_t : $p = n_b - (n_a - 1)$. Ces arêtes sont appelées « arêtes d'entrée de cycle ».

Dans la formulation du problème en question, l'on est conduit à distinguer deux familles de fonctions à valeurs réelles : des fonctions v qui prennent leurs valeurs sur les sommets du graphe, et des fonctions θ qui prennent leurs valeurs sur les arêtes orientées et qui sont antisymétriques : $\theta(k, j) = -\theta(j, k)$. L'opérateur $(Bv)(j, k) := v(j) - v(k)$ joue alors le rôle d'un « opérateur de biais ». Muni du produit scalaire (voir Éqs. (2), (3), (5) et (9))

$$(\theta_1 | \theta_2) := \sum_{(j,k) \in \mathcal{B}} w(j, k) \theta_1(j, k) \theta_2(j, k), \quad (10)$$

ces fonctions forment un espace euclidien G de dimension n_b : l'espace des « fonctions d'arêtes ». L'image de B , L , l'espace des « fonctions de biais », est un sous-espace de G de dimension $n_a - 1$. Comme f est une fonctionnelle de L dans \mathbb{R} [voir Éq. (9)], la décomposition $G = L \oplus L^\perp$ structure donc naturellement notre approche. Les projections orthogonales de G dans L et L^\perp sont respectivement désignées par les symboles R et S .

Dans ce qui suit, l'on désigne par $G(\mathbb{Z})$ le sous-ensemble de G formé des fonctions μ à valeurs dans \mathbb{Z} ; $G(\mathbb{Z})$ est un réseau de G , au sens de « lattice » [3]. Les μ sont donc les points de ce réseau. Par construction, $\text{ramp}(\theta)$ est le vecteur d'écart entre θ et son point du réseau le plus proche (voir Éqs. (7) et (10)).

2.2. Notion de clôture au sens de Kirchhoff

Les « termes de clôture » de θ , au sens de Kirchhoff, sont les sommes des valeurs de θ le long des cycles orientés définis à partir d'un arbre maximal choisi de façon arbitraire. Ces termes de clôture, notés $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(p)}$, sont les composantes d'un vecteur $\boldsymbol{\theta}$ appartenant à \mathbb{R}^p . L'opérateur C , de G dans \mathbb{R}^p , défini par la relation $C\boldsymbol{\theta} := \boldsymbol{\theta}$, est « l'opérateur de clôture ». Son noyau n'est autre que L .

L'espace K formé des fonctions qui s'annulent sur les arêtes de l'arbre maximal est dit être l'espace des « fonctions d'entrées de cycles ». Dans ce qui suit $\{\xi_i\}_{i=1}^p$ est la base standard de K : ξ_i vaut 1 sur la i ème arête d'entrée de cycle et 0 sur les autres. Il est facile de voir que S est égal à C^+C , où C^+ (le pseudo-inverse de C au sens de Moore–Penrose) est explicitement défini par la relation

$$C^+ \boldsymbol{\gamma} = \sum_{i=1}^p \gamma^{[i]} \eta_i \quad \text{où } \eta_i := S\xi_i. \quad (11)$$

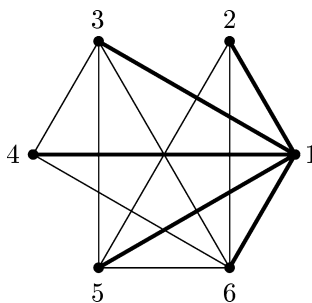


Fig. 1. Exemple de graphe interférométrique. Les lignes en gras correspondent aux arêtes de l'arbre maximal choisi. Comme c'est ici le cas, dans la plupart des situations rencontrées en imagerie à clôture de phase, les cycles sont des boucles comportant trois arêtes.

Fig. 1. Example of interferometric graph. The thick lines correspond to the edges of the selected spanning tree. As is the case here, in most situations encountered in phase closure imaging, the cycles are three-edge loops.

Les $\gamma^{[i]}$ désignent ici les composantes de $\boldsymbol{\gamma}$ dans la base standard de \mathbb{R}^P . Dans ce même contexte, l'on montre que G est la somme directe de K et L , et que son réseau $G(\mathbb{Z})$ est la somme directe des sous-réseaux $K(\mathbb{Z}) := G(\mathbb{Z}) \cap K$ et $L(\mathbb{Z}) := G(\mathbb{Z}) \cap L$.

3. Minimum global et minima secondaires

Notons tout d'abord que la fonctionnelle (9) est périodique. Plus précisément, pour tout ν dans $L(\mathbb{Z})$, l'on a $f(\phi + \nu) = f(\phi)$. Les minimiseurs de f sont donc définis à un vecteur près de $L(\mathbb{Z})$.

3.1. Caractérisation des minima

Pour chaque point μ de $G(\mathbb{Z})$, nous définissons tout d'abord les quantités

$$\phi_\mu := R(\psi - \mu), \quad \delta_\mu := S(\psi - \mu). \tag{12}$$

L'étude des minima de f découle alors de la propriété de caractérisation suivante (sa démonstration, qui sortirait du cadre de cette note, est présentée dans la référence [4]).

Propriété. *Les minimiseurs de f sont les fonctions de biais ϕ_μ pour lesquelles $|\delta_\mu|$ est strictement inférieur à $1/2$ (sur tout \mathcal{B}). En corollaire, δ_μ est alors égal à $\text{ramp}(\psi - \phi_\mu)$.*

Identifier les minima de f revient donc à identifier les points μ de $G(\mathbb{Z})$ pour lesquels $|\delta_\mu|$ est strictement inférieur à $1/2$ sur tout \mathcal{B} . En ces points, l'on a $f(\phi_\mu) = \|\delta_\mu\|^2$. Les variations de phase correspondantes du modèle sont alors données par la formule $\Theta_\mu = 2\pi \delta_\mu$ (voir Éqs. (6) et (8)).

3.2. Ellipsoïde de confinement des minima

Comme $\delta_\mu := S(\psi - \mu)$ avec $S = C^+C$, l'on a $\delta_\mu = C^+(\psi - \mu)$ où $\psi = C\psi$ et $\mu = C\mu$. Il est donc clair qu'à ψ fixé, δ_μ ne dépend que du vecteur de clôture de μ , un vecteur de \mathbb{Z}^P . Il en résulte que $\|\delta_\mu\|^2 = q(\mu - \psi)$ où q est la forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^P : q(\boldsymbol{\gamma}) := [\boldsymbol{\gamma}]^t [C^{+*}C^+] [\boldsymbol{\gamma}]$. Noter que dans la base standard de \mathbb{R}^P , les éléments de matrice de $C^{+*}C^+$ sont les produits scalaires $(\eta_i | \eta_{i'})$ (voir Éq. (11)). Comme les valeurs de f sont bornées par $1/4$ (voir Éqs. (9), (7) et (3)), l'on est alors conduit à considérer l'ensemble $\mathcal{E}(\mathbb{Z})$ des points de \mathbb{Z}^P contenus dans « l'ellipsoïde de confinement des minima »

$$\mathcal{E} := \{ \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^P : q(\boldsymbol{\gamma} - \psi) \leq 1/4 \}. \tag{13}$$

Les minima de f correspondent aux points μ de $\mathcal{E}(\mathbb{Z})$ pour lesquels $|C^+(\psi - \mu)|$ est strictement inférieur à $1/2$ sur tout \mathcal{B} . Le problème peut donc être résolu en utilisant les techniques qui permettent de lister les points de $\mathcal{E}(\mathbb{Z})$ (voir, par exemple, les algorithmes de recherche discrète présentés dans les références [5,6]).

Dans ce qui suit, nous considérons le cas général où le minimum de $q(\mu - \psi)$ sur \mathbb{Z}^P est atteint en un point unique désigné par μ_\star ; μ_\star est donc le point de \mathbb{Z}^P le plus proche de ψ relativement à la distance induite par $q : q(\mu_\star - \psi)$ est la plus petite valeur de $q(\mu - \psi)$ sur \mathbb{Z}^P . Désignons à présent par \mathcal{M} l'ensemble des points $\boldsymbol{\gamma}$ de \mathbb{R}^P tels que $|C^+(\psi - \boldsymbol{\gamma})|$ est inférieur ou égal à $1/2$ sur tout \mathcal{B} . On peut montrer que \mathcal{M} est un sous-ensemble convexe borné de \mathcal{E} centré sur ψ , i.e., symétrique par rapport à ψ . Les minima of f correspondent aux points μ de \mathbb{Z}^P qui sont à l'intérieur de \mathcal{M} ; μ_\star est un tel point, et $q(\mu_\star - \psi)$ est le minimum global de f [4].

Dans le cas particulier où f n'a pas de minimum secondaire, l'opération de calibration de phase est très stable. Dans le cas général, désignons par $\mu_{\star\star}$ le point de \mathbb{Z}^P correspondant au minimum secondaire le plus proche du minimum global, et utilisons la notation $\delta_\star := \delta_{\mu_\star}$ et $\delta_{\star\star} := \delta_{\mu_{\star\star}}$. En ce qui concerne la stabilité de l'opération de calibration de phase, les paramètres

$$\Gamma_1 := \frac{\|\delta_{\star\star}\| - \|\delta_\star\|}{\|\delta_\star\|} \quad \text{et} \quad \Gamma_2 := \frac{\|\delta_{\star\star} - \delta_\star\|}{\|\delta_\star\|} \tag{14}$$

jouent alors un rôle clé. Une grande valeur de Γ_1 (par rapport à 1) assure une bonne stabilité, quel que soit Γ_2 .

3.3. Application aux procédures d'auto-calibration

Lorsque les arcs des termes de clôtures de $\Theta_d - \Theta_m$ sont faibles, disons inférieurs à 30° en valeur absolue, Γ_1 est généralement de l'ordre de 5, une valeur qui dépend bien sûr de la fonction de pondération (3). La situation est alors relativement

stable. Au fur et à mesure que l'on augmente ce seuil, Γ_1 diminue. Lorsque certains arcs de clôture sont grands, par exemple de l'ordre 120° en valeur absolue, Γ_1 peut être très faible (de l'ordre de 0.01 par exemple), avec cependant des variations de la phase du modèle très différentes (Γ_2 de l'ordre de 2, par exemple). Dans les procédures d'auto-calibration [7], il faut naturellement éviter ces situations critiques.

Références

- [1] A. Lannes, Phase calibration on interferometric graphs, *J. Opt. Soc. Am. A* 16 (1999) 443–454.
- [2] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Second edition, Cambridge University Press, 1996.
- [3] H. Cohen, *A Course in Computational Algebraic Number Theory*, Third corrected printing, Springer-Verlag, 1996.
- [4] A. Lannes, Phase calibration instabilities, *J. Opt. Soc. Am. A* (2003/2004), in preparation.
- [5] A. Lannes, Integer ambiguity resolution in phase closure imaging, *J. Opt. Soc. Am. A* 18 (2001) 1046–1055.
- [6] E. Agrell, T. Eriksson, A. Vardy, K. Zeger, Closest point search in lattices, *IEEE Trans. Inform. Theory* 48 (2002) 2201–2214.
- [7] T.J. Cornwell, P.N. Wilkinson, A new method for making maps with unstable interferometers, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 196 (1981) 1067–1086.