

Hydrostatique d'un liquide pesant paramagnétique

Mohamed Dellagi

12, rue Zobeir Ibn El Aouam, Menzah VI Ariana, Tunisie

Reçu le 21 juin 2004 ; accepté après révision le 10 juin 2005

Disponible sur Internet le 26 septembre 2005

Présenté par Jacques Villain

Résumé

La surface libre d'un liquide pesant paramagnétique au repos n'est pas plane et horizontale, en présence d'un champ magnétique, cette propriété est appliquée à la mesure de la susceptibilité paramagnétique statique. *Pour citer cet article : M. Dellagi, C. R. Physique 6 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Hydrostatics of a paramagnetic liquid in the gravity field. The surface of a paramagnetic liquid in the gravity field is not planar and horizontal in the presence of a magnetic field. This property is applied to the measurement of the static magnetic susceptibility. *To cite this article: M. Dellagi, C. R. Physique 6 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

On considère un liquide incompressible, pesant, paramagnétique, au repos dans un récipient ayant la forme d'un cylindre de révolution de rayon R . Il est soumis au champ de pesanteur terrestre g et à un champ magnétique \vec{H} , créé par un courant qui parcourt un fil vertical suivant l'axe du cylindre (Fig. 1).

Soient, au point M :

- $\vec{H}(M)$ et $\vec{B}(M) = \mu_0 \vec{H}(M)$ le champ et l'induction magnétiques ;
- dv le volume élémentaire, de masse dm entourant M ;
- $\rho = dm/dv$ la masse volumique supposée uniforme ;
- χ la susceptibilité magnétique supposée également uniforme.

La densité volumique d'énergie $w(M)$ est, à la hauteur $z(M)$

$$w(M) = \rho g z(M) - (1/2)\mu_0 \chi H^2(M)$$

où le second terme est la somme de l'interaction $-\mu_0 \chi H^2$ entre le champ et l'aimantation, et de l'énergie interne magnétique $(1/2)\mu_0 \chi H^2$ du fluide aimanté [1].

Le champ créé par un courant électrique I est au point M , situé à la distance r de l'axe du fil $H(r) = I/(2\pi r)$.

Adresse e-mail : hichem_khelil@yahoo.fr (M. Dellagi).

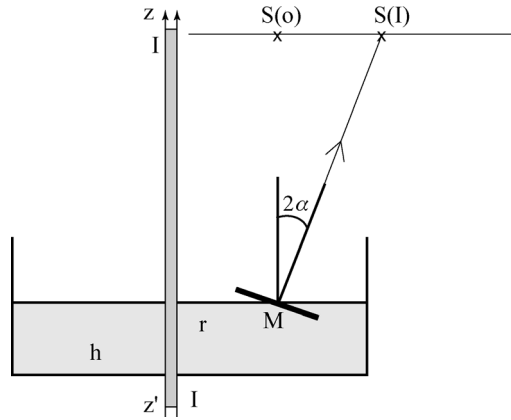


Fig. 1. Schéma du dispositif.

L'énergie totale est donc, si $h(r)$ est la hauteur de la surface du liquide à distance r de l'axe,

$$U = \int d^3r w(r) = \int_a^R \pi r dr \left[\rho g h^2(r) - \mu_0 \chi h(r) \frac{I^2}{4\pi^2 r^2} \right] \tag{1}$$

Cette relation néglige l'énergie interfaciale entre le fluide et le récipient, et aussi entre le fluide et la gaine qui entoure le fil. Elle néglige aussi l'énergie de surface du liquide.

La forme de la surface est donnée par la minimisation de (1) par rapport à h pour une valeur fixée de la masse totale $\int_a^R \pi r dr \rho h(r)$. Il en résulte [2] que

$$h(r) = \frac{\mu_0 \chi I^2}{8\pi^2 g \rho} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right] + h(R) \tag{2}$$

où $h(R)$ peut être considéré comme un multiplicateur de Lagrange et est déterminé par la masse totale du fluide. L'expression (2) divergerait quand r devient trop petit. Cette divergence est en pratique évitée parce que le rayon de la gaine qui entoure le fil a une valeur r_1 qui n'est pas nulle.

Quand $I = 0$, la surface libre, au repos, est plane et horizontale et s'élève au niveau h . Quand on fait passer le courant, cette surface se creuse. La Fig. 2 montre une méridienne possible.

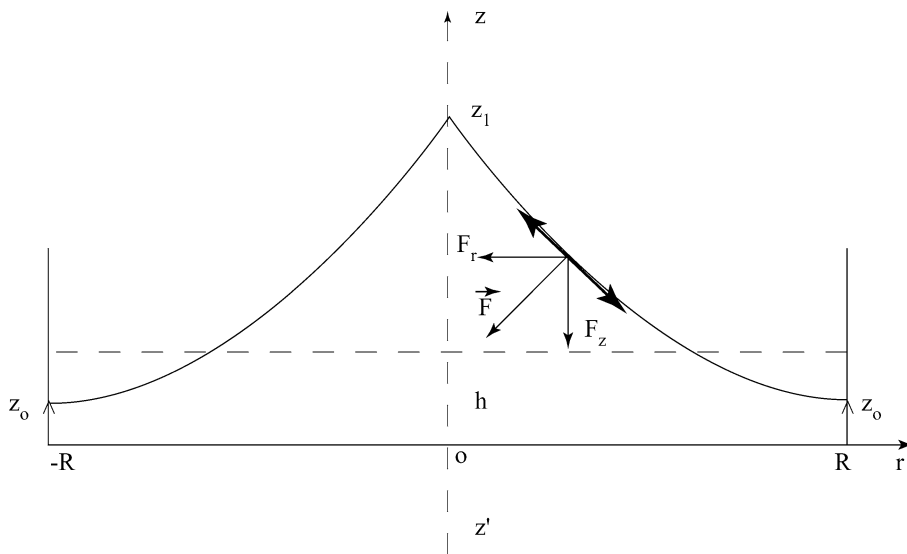


Fig. 2. Méridienne de la surface libre d'un fluide paramagnétique ($\chi > 0$).

On peut appliquer le résultat (2) à une solution aqueuse concentrée de chlorure ferrique à la température T . En réalité $\chi(M)$ est donnée dans les tables ; il nous servira ici pour tester la méthode.

On peut ainsi mesurer la susceptibilité paramagnétique de la solution via la méthode de Poggendorff. Sur le point $M(r)$ de la surface de séparation air—solution, et parallèlement à l'axe, on projette un pinceau ΩM de lumière, réfléchi sur lui-même quand $I = 0$. Sinon il tourne de l'angle $2|\alpha|$ où (Fig. 1) :

$$|\alpha(r)| = \frac{dz}{dr} = 2 \cdot \frac{\omega^2 I^2}{8\pi^2 g r^3}$$

est l'angle dont a tourné la surface réfléchissante en $M(r)$.

Sur la règle graduée, normale au rayon lumineux incident ΩM et placé à la distance d de M , le spot se déplace en $S(I)$, de

$$\delta = 2\alpha d = \frac{4\omega^2 I^2 d}{8\pi^2 g r^3} = \frac{\chi 4\mu_0 I^2 d}{8\pi^2 g \rho r^3} = \frac{A\chi}{r^3} \quad \text{où } A = \frac{4\mu_0 I^2 d}{8\pi^2 g \rho}$$

2. Application numérique

Les conditions sont données dans le Tableau 1.

D'où :

$$\begin{cases} \omega^2 = \frac{\mu_0 \chi}{\rho} = 1,26 \cdot 10^{-12} \text{ SI} \\ \delta = \frac{4\omega^2 I^2 d}{8\pi^2 g r^3} = 6,3 \text{ mm} \end{cases}$$

où SI signifie « unités du système international ».

Composantes, radiale F_r et verticale F_z de \vec{F} , dérivant de la densité massique d'énergie :

$$U(r, z) = -\frac{\omega^2 I^2}{8\pi^2 r^2} + gz + Cte : \vec{F} \begin{cases} F_r = -\frac{\partial U(r, z)}{\partial r} = -\frac{\omega^2 I^2}{4\pi^2 r^3} \\ F_z = -\frac{\partial U(r, z)}{\partial z} = -g \end{cases}$$

Nous évaluerons maintenant la précision sur la mesure de $\chi = \delta r^3 / A$. On peut rendre les incertitudes sur A et δ négligeables par rapport à l'incertitude sur r :

$$\frac{\Delta \chi}{\chi} \neq 3 \frac{\Delta r}{r}$$

On peut prendre $\frac{\Delta r}{r} = 0,01$, d'où $\frac{\Delta \chi}{\chi} = 3\%$.

Une remarque s'impose sur la faisabilité de la technique de mesure de χ proposée : pour que le déplacement du spot $\delta(r) = \frac{4\omega^2 I^2 d}{8\pi^2 g r^3}$, ne soit pas trop faible, on a intérêt à se placer très près du fil, quitte à tenir compte de l'effet des forces capillaires, ce qui incite à imaginer le montage suivant.

La source est laser Ω à précision chirurgical émettant un rayon horizontal Ωm qui frappe la lame couvre-objet m , inclinée à 45° (voir la Fig. 3). Cette lame surplombe le segment PQ , à quoi est nécessairement réduite la portion active du fil. La distance de m à PQ est $r = 2,1$ mm.

Tableau 1

Les conditions pour l'application numérique (SI signifie « unités du système international »)

$\alpha =$	10°
$\mu_0 =$	$1,26 \times 10^{-6}$ SI
$\chi =$	10^{-3}
$\rho =$	10^3 SI
$R =$	$2,1 \times 10^{-3}$ mètre = 2,1 mm
$I =$	33 ampère
$g =$	10 m s^{-2}
$\pi^2 =$	10

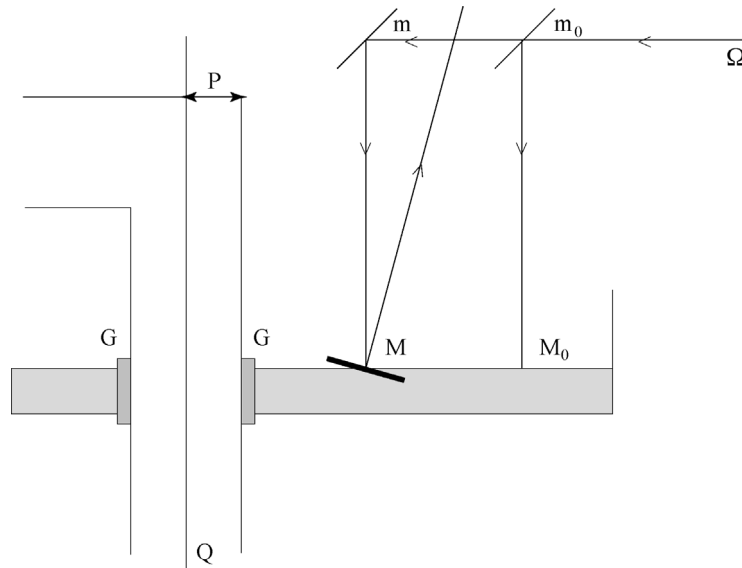


Fig. 3. Proposition de montage permettant la correction des effets capillaires. Plan passant par le fil PQ et Ω ; la figure n'est pas à l'échelle.

C'est aussi la distance du rayon réfléchi sur m , qui reste vertical quand r est assez grand et $I = 0$; la surface de la solution est plane et horizontale. Sur une règle graduée, située à la distance $d = 10$ mètres, un spot apparaît.

On fait $r = 2,1$ mm avec $I = 0$ ampère ; le spot disparaît ; un réglage du laser le fait réapparaître, mais pas à la même place.

On garde r et on fait $I = 33$ ampère. Un nouveau réglage du laser fait réapparaître le spot qui s'est déplacé de $\delta = 6,3$ mm.

- Rayon de la section du fil $PQ = 1$ mm.
- Épaisseur de la gaine GG thermiquement et électriquement isolante et assurant l'étanchéité du vase : $0,1$ mm.
- Distance de M à la gaine = 1 mm.
- Distance de M à l'axe $PQ = 1 + 1 + 0,1 = 2,1$ mm.

Références

- [1] M. Dellagi, Bulletin de l'union des physiciens Paris, vol. 97, février 2003, p. 133.
 [2] J.P. Sarmant, Dictionnaire de physique (classiques Hachette) article hydrostatique, Hachette, Bd. St Germain, Paris, 1979.