

Résolution de l'équation de Young–Laplace par une méthode géométrique utilisant la courbure

Mathieu Gentes^a, Germain Rousseaux^{a,*}, Pierre Coulet^a, Pierre-Gilles De Gennes^b

^a Université de Nice Sophia-Antipolis, Institut Robert Hooke de Culture Scientifique, parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France

^b Institut Curie, 11, rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris, France

Reçu le 30 mai 2005 ; accepté après révision le 7 novembre 2005

Disponible sur Internet le 2 décembre 2005

Présenté par Jacques Villain

Résumé

Nous revisitons de manière moderne une méthode graphique de résolution de l'équation de Young–Laplace proposée par Thomson en 1886 et améliorée par Boys en 1893. Cette méthode, reposant sur des propriétés d'axisymétrie, a été appliquée aux cas des gouttes pendantes, des gouttes sur un plan horizontal et des ménisques. Les multiples conditions initiales ont nécessité une programmation informatique de l'algorithme de Thomson, notamment afin d'obtenir des gouttes pendantes avec plusieurs ventres. Une loi d'échelle naïve pour la variation du rayon des gouttes formant ce chapelet est proposée. **Pour citer cet article :** *M. Gentes et al., C. R. Physique 6 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Resolution of the Young–Laplace equation by a geometrical method using curvature. We revisit from a modern viewpoint a graphical method of resolution of the Young–Laplace equation proposed by Thomson in 1886 and improved by Boys in 1893. This method, relying on some axisymmetry properties, was applied to the case of pendant drops, drops on a horizontal plane and menisci. The several initials conditions necessitated a numerical implementation of the Thomson's algorithm, particularly in order to obtain pendant drops with multiple bulges. A scaling law for the variation of the drops radii forming this rosary (string of drops) is presented. **To cite this article:** *M. Gentes et al., C. R. Physique 6 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Équation de Young–Laplace ; Algorithme de Thomson ; Goutte pendante ; Chapelet de gouttes

Keywords: Young–Laplace equation; Thomson's algorithm; Pendant drop; String of drops

1. Introduction

L'étude des phénomènes capillaires fait souvent appel à la géométrie car son but principal est de pouvoir prédire la forme des fluides sous l'action de la tension de surface. L'exemple canonique est celui de la goutte pendante [1] à partir de laquelle on

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : Germain.Rousseaux@inln.cnrs.fr (G. Rousseaux), pgg@curie.fr (P.-G. De Gennes).

peut mesurer la tension de surface [2]. Sir W. Thomson a mis au point une méthode graphique utilisant la courbure qui permet d'obtenir l'allure des solutions de l'équation de Young–Laplace pour une goutte pendante. Un cas tout à fait spectaculaire utilisant cette démarche géométrique correspond à l'apparition d'un chapelet de gouttes. Bien que ce dernier soit une structure instable, il nous a semblé pertinent de réactualiser la technique graphique de Thomson en la modernisant.

2. Méthode de résolution graphique

Lors d'une conférence sur l'attraction capillaire faite devant l'Institution Royale le 29 janvier 1886 [3,4], Sir W. Thomson affirmait que : « *Quand le solide est symétrique autour d'un axe vertical, la figure prise par le liquide est celle d'un solide de révolution. Voici une méthode graphique simple permettant d'obtenir ce qui constitue une solution mathématique complète. Dessinons une ligne représentant l'axe de la surface de révolution. Cette ligne est verticale dans l'application qui va être faite, et dans le dessin nous l'appellerons verticale, de même que toutes celles qui lui seront parallèles ; toute ligne perpendiculaire à celle-là sera appelée horizontale. La distance entre deux lignes horizontales dans le dessin sera appelée différence de niveau. Par un point quelconque N de l'axe, tirez une ligne NP , coupant cet axe sous un angle quelconque. D'un point O de la ligne NP , pris comme centre, décrivez un très petit arc de cercle PP' , et soit N' le point où la ligne OP' coupe l'axe. Mesurez NP , $N'P'$, et la différence de niveau entre P et P' . Désignant cette dernière par δ , et prenant a comme paramètre linéaire, calculer la valeur de :*

$$\frac{1}{\frac{\delta}{a^2} + \frac{1}{OP} + \frac{1}{NP} - \frac{1}{N'P'}} = O'P' \quad (1)$$

Prenez une ouverture de compas égale à cette longueur, puis, plaçant en P' la pointe munie du crayon, placer l'autre pointe en O' sur la ligne $P'N'$, et de O' comme centre, décrivez un petit arc $P'P''$. Continuez la construction en suivant la même règle et les très petits arcs successifs que vous aurez ainsi décrits formeront une ligne courbe qui est la génératrice de la surface de révolution limitant le liquide, dans les conditions du cas particulier considéré. »

2.1. Énoncé du théorème de Laplace

Dans le cas particulier des gouttes pendantes, le théorème de Laplace peut s'énoncer en fonction des courbures :

$$\frac{z}{a^2} + K_0 = (K_1 + K_2) \quad (2)$$

où :

- $K_0 = \frac{\Delta p^*}{\gamma}$ avec Δp^* la différence de pression à la sortie du robinet entre le liquide et l'atmosphère,
- $a = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ est la *longueur capillaire* avec γ le coefficient de tension superficielle.

On sait que la surface présente deux courbures principales associées à des directions principales. Des propriétés de symétrie que présentent les surfaces de révolution découle le fait que les centres de courbure se situent dans un plan contenant l'axe de révolution (Fig. 1). Prenons un repère orthonormé (O, r, y, z) : on appelle Oz l'axe de révolution et on considère la méridienne dans le plan $\{y = 0\}$ paramétrée par $(r(s), 0, z(s))$. La première courbure principale K_1 est associée au cercle tangent à la section de la surface de révolution par ce plan au point considéré. D'autre part le centre de courbure de la seconde courbure principale K_2 se situe à l'intersection entre l'axe de révolution et la normale à la surface au point considéré.

2.2. Justification de la méthode de construction

En partant de l'équation de Young–Laplace dans le cas des gouttes pendantes, on peut effectivement trouver un algorithme qui va permettre la construction. On donne la description de cet algorithme :

2.2.1. Initialisation

On fixe le rayon du support R et l'angle de contact θ . On peut lire dans l'explication que Thomson donne de sa méthode « ... d'un point O de la ligne NP ... » ce qui suggère que l'utilisateur choisit également la première courbure principale $K_1^{(0)}$, ce qui fixe la valeur de Δp^* . On en déduit :

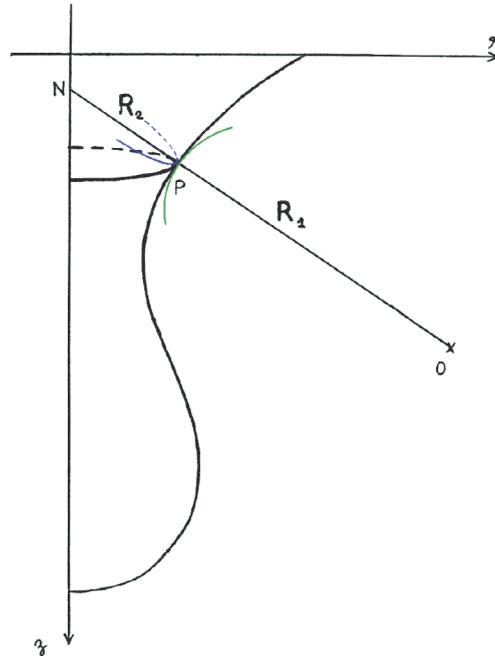


Fig. 1. Les rayons de courbure pour des surfaces de révolution.

- la position des points N_0 et O_0 , centres de courbure,
- la valeur de $K_2^{(0)}$, qui n'est autre que l'inverse de la distance N_0P_0 .

On peut inversement se donner une valeur pour Δp^* et en déduire la valeur de la première courbure initiale $K_1^{(0)}$ à l'aide de l'équation de Young–Laplace en $z = 0$:

$$K_1^{(0)} + K_2^{(0)} = \frac{\Delta p^*}{\gamma}$$

Dans ce travail les profils ont été tracés en fixant $K_1^{(0)}$ plutôt que Δp^* , ce qui n'est toutefois en rien préjudiciable dans la mesure où la valeur exacte de Δp^* n'est connue que dans certains cas particuliers.

2.2.2. Récurrence

On appelle P_0, \dots, P_n les n premiers points construits et on suppose connues les courbures principales $K_1^{(0)}, K_2^{(0)}, \dots, K_1^{(n-1)}, K_2^{(n-1)}$ ainsi que $K_2^{(n)}$. Afin de trouver le point P_{n+1} en traçant un petit arc de cercle, on cherche le rayon de courbure $K_1^{(n)}$ à l'étape n , ou encore l'inverse du rayon de ce cercle.

On a :

- à l'étape $n - 1$:

$$z(P_{n-1}) = a^2(K_1^{(n-1)} + K_2^{(n-1)})$$

- à l'étape n :

$$z(P_n) = a^2(K_1^{(n)} + K_2^{(n)})$$

On en déduit alors que :

$$K_1^{(n)} = K_1^{(n-1)} + K_2^{(n-1)} - K_2^{(n)} + \frac{\delta_n}{a^2} \tag{3}$$

où $\delta_n = z(P_n) - z(P_{n-1})$ est la différence de niveau à l'étape n .

Cette équation n'est finalement qu'une reformulation en terme de courbure de celle proposée en (8) par Thomson.

2.3. Améliorations apportées par C.V. Boys en 1893

Ces améliorations consistent principalement en l'utilisation d'une règle particulière que l'on appellera règle de Boys et d'un trépied [5]. Ces deux outils permettent, en effet, une construction à la fois plus rapide et plus précise qu'à l'aide d'un compas et d'une règle classique. C.V. Boys a eu l'idée de fabriquer une règle dont les graduations correspondent non pas à la longueur entre un point et le point origine mais à son inverse. Ainsi, la « mesure » de NP avec cette règle fournit directement la courbure K_2 . Inversement, connaissant K_1 , on est désormais capable de placer avec la règle le centre de courbure O . Le point origine sera noté ∞ : il est important de souligner que c'est en ce point que l'utilisateur va positionner son crayon, et donc que ce point ∞ décrit en pratique la surface de la goutte. Lors de ce travail, il a tout d'abord fallu fabriquer une règle « en mètre ». Sur une feuille de papier, on choisit un point arbitraire comme origine, noté ∞ , et on trace un côté de la règle. À gauche du point ∞ , les courbures seront notées positivement (resp. négativement à droite). Ensuite, on marque les diverses graduations de la règle correspondant par exemple aux courbures K_1 positives, en plaçant la graduation x (en m^{-1}) à $1/x$ (en m) du point ∞ . On prendra soin d'augmenter le nombre de graduations par unité de courbure à mesure que celle-ci diminue. En effet l'échelle réalisée n'est de loin plus linéaire contrairement à une règle classique. Le tout est de disposer les graduations de façon optimale, à savoir qu'il y en ait suffisamment pour une lecture précise mais pas trop afin de ne pas surcharger la règle. Le trépied est un outil utilisé par C.V. Boys en guise de pointe de compas. En effet, l'une des trois branches est munie à l'extrémité d'une pointe qui va venir s'enfoncer sur la règle au niveau du centre de courbure sur le bord supérieur de la règle. Les deux autres branches contribuent uniquement à la stabilité de l'outil lors des tracés et doivent reposer sur la feuille (et non sur la règle comme la première).

2.4. La construction proprement dite

Le tracé d'un profil de goutte par la méthode de Thomson nécessite, à longueur capillaire a donnée, la connaissance de trois paramètres initiaux (Fig. 2) :

- la première courbure principale initiale $K_1^{(0)}$ ou celle de Δp^* ,
- le rayon R du support,
- l'angle initial θ formé avec le support (pente du vecteur tangent au point initial P_0).

La connaissance de l'angle θ permet de trouver la position de N_0 comme intersection de l'axe de révolution et de la normale au vecteur tangent initial. On en déduit la valeur de la seconde courbure principale initiale $K_2^{(0)}$ qui n'est autre que la longueur N_0P_0 . D'autre part, la donnée de la première courbure principale initiale $K_1^{(0)}$ (ici $K_1^{(0)} < 0$) permet de positionner sur la normale le centre O_0 du cercle osculateur en P_0 et l'équation de Young–Laplace en $z = 0$ fixe la valeur de Δp^* . On place alors la règle le long de la normale en P_0 , le point ∞ est en P_0 . On pique le trépied dans la règle au niveau de la courbure $K_1^{(0)}$ et on décrit, à l'aide d'un crayon à pointe fine placé en ∞ , un petit arc de cercle selon une différence de niveau δ_1 (que l'on fixe selon la précision voulue) en faisant pivoter la règle sous la pointe du trépied. On obtient le point P_1 puis le point N_1 en traçant la droite (O_0P_1). Dès lors, on dispose de $K_2^{(1)}$, la seconde courbure principale en P_1 . L'algorithme nous fournit la valeur de $K_1^{(1)}$, la première courbure principale en P_1 , par la formule $K_1^{(1)} = \delta_1/a^2 + K_1^{(0)} + K_2^{(0)} - K_2^{(1)}$. Ainsi il est possible de déterminer la position du centre O_1 du cercle osculateur en P_1 . On trace ensuite un petit arc de cercle selon une différence de niveau δ_2 (que l'on fixe à nouveau selon la précision voulue ...) pour obtenir P_2 , puis N_2 et de fait $K_2^{(2)}$.

L'apparition de plusieurs « ventres » lors du tracé d'un profil de goutte étant un phénomène tellement peu prévisible, que l'usage de l'outil informatique est apparu indispensable pour la détermination de « bonnes conditions initiales », d'autant plus que ces dernières sont au nombre de quatre :

- le rayon R du contact avec le support,
- la première courbure principale initiale $K_1^{(0)}$ ou Δp^* ,
- la longueur capillaire a ,
- l'angle initial θ formé avec le support (pente du vecteur tangent).

Ce programme a été réalisé à l'aide du logiciel DELPHI par François SCHWARZENTRUBER. Ce programme présente l'avantage de fournir quasi instantanément le profil d'une goutte à conditions initiales données [8]. D'autre part, il permet de tracer des profils qu'il serait impossible d'obtenir à la main, à la fois pour des raisons de temps et de précision : on ne peut pas espérer

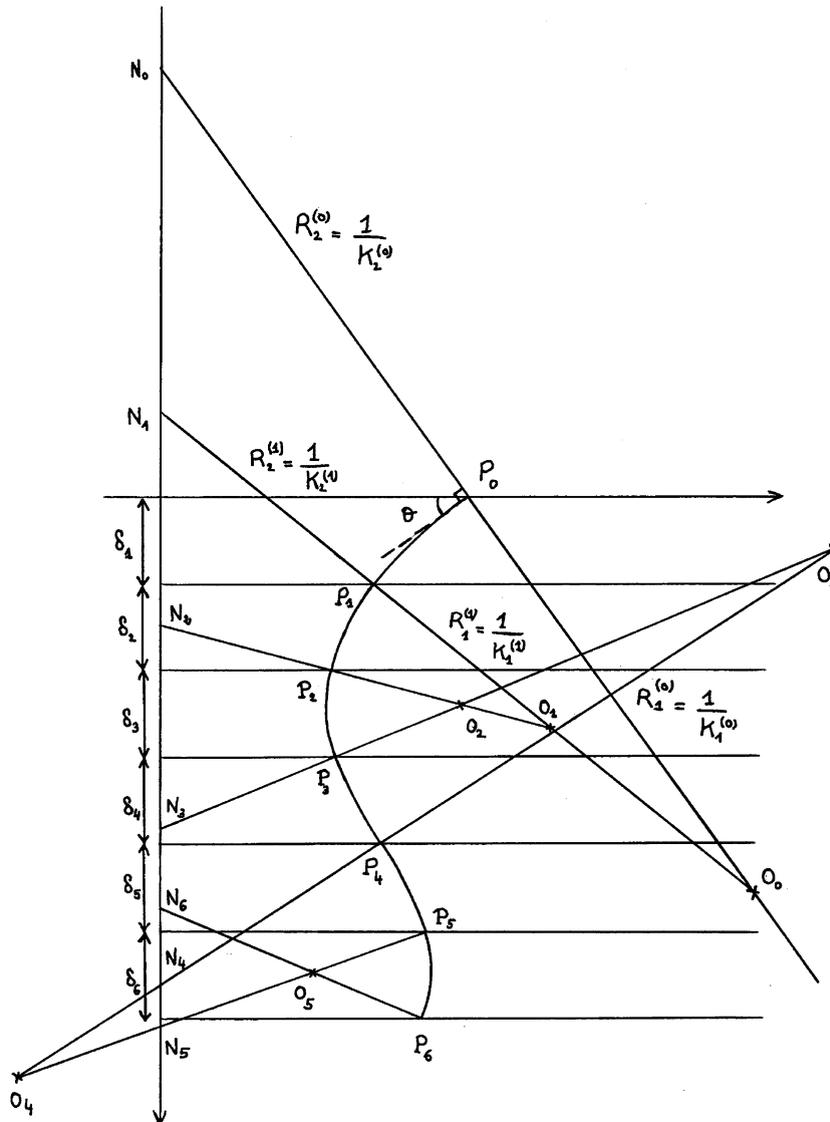


Fig. 2. Les différentes étapes de la construction de la goutte.

prendre des différences de niveau largement plus petites que le millimètre. Malheureusement, le nombre de lobes observés numériquement dépend du pas d'espace : le premier croît avec le second. Nous n'avons pas été capable d'interpréter cette dépendance. Ceci pose un problème car cela signifie que les dessins obtenus dépendent de la différence de niveau qui est de l'ordre du mm.

2.5. Les tracés obtenus

Les tracés ont été effectués à l'aide des outils de Boys. La différence de niveau initiale choisie pour chaque dessin n'est très souvent pas restée fixée tout au long du tracé. En effet, l'apparition de ventres entraîne des variations de courbure de plus en plus fortes. Il est bon de noter qu'avant le réalisation du dessin, il n'est pas vraiment possible de déterminer le nombre de ventres que l'on va obtenir. Les paramètres utilisés comme la longueur capillaire ne correspondent pas à des cas réels. Cependant, l'équation de Young–Laplace est covariante par un changement des longueurs avec le même facteur. On peut donc toujours se ramener à un cas réel par un changement d'échelle. Nous reproduisons les dessins pour une goutte simple (Fig. 3) et un chapelet (Fig. 4) dont nous tentons une modélisation théorique dans la suite.

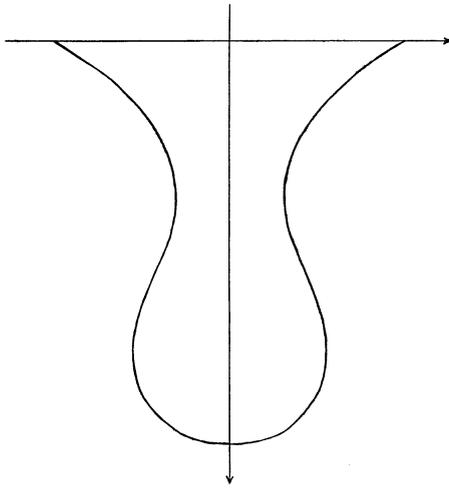


Fig. 3. $R = 0,1$ m, $K_1(0) = -6$ m $^{-1}$, $K_2^{(0)} = 4,65$ m $^{-1}$, $a = 0,071$ m, $\theta = 29,7^\circ$.

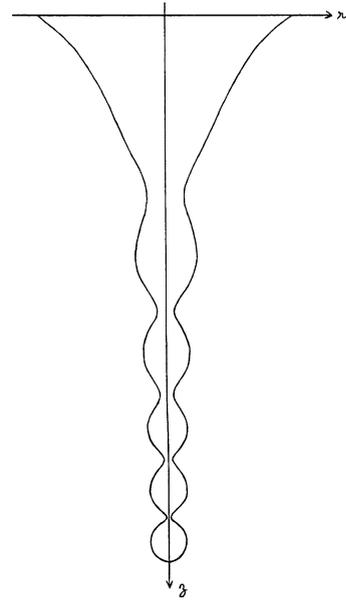


Fig. 4. $R = 0,1$ m, $K_1(0) = -10,585$ m $^{-1}$, $K_2^{(0)} = 5,185$ m $^{-1}$, $a = 0,05366$ m, $\theta = 39,2^\circ$.

3. Le chapelet de gouttes : un modèle naïf

On numérote les gouttes de 0 à n à partir de la plus basse et on les traite comme des petites sphères, de côté z_n (dirigé vers le haut) et de rayon R_n , dans la limite continue :

L'incrément de hauteur s'exprime en fonction de l'incrément du nombre de gouttes :

$$\frac{dz_n}{dn} = 2R_n \quad (4)$$

La hauteur du chapelet est prise égale à la somme des diamètres en première approximation. La variation de pression à travers la surface de la goutte n due à la tension de surface s'écrit :

$$\Delta p_n^\gamma = \frac{2\gamma}{R_n} \quad (5)$$

alors que le poids de la colonne de liquide au dessus de la même goutte est :

$$\Delta p_n^g = \rho g h_n - \rho g z_n = \text{constante} - \rho g z_n \quad (6)$$

L'équilibre est donné par l'équation de Young–Laplace :

$$\frac{1}{R_n} = \text{constante}' - \frac{\kappa^2}{2} z_n \quad (7)$$

où $\kappa^2 = 1/a^2 = \rho g/\gamma$ avec a la longueur capillaire. En dérivant par rapport à la position de la goutte n dans la limite continue, on obtient :

$$\frac{1}{R_n^2} \frac{dR_n}{dn} = \kappa^2 R_n \quad (8)$$

que l'on intègre de bas en haut :

$$\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R_n^2} = 2\kappa^2 n \quad (9)$$

où l'on introduit :

$$n_* = \frac{1}{2\kappa^2 R_0^2} = \frac{a^2}{2R_0^2} \quad (10)$$

La loi de variation des rayons s'écrit donc :

$$R_n = \frac{R_0}{\sqrt{1 - n/n_*}} \quad (11)$$

Le nombre final de goutte n_f s'obtient en remarquant que le rayon final est égale à la taille de la buse du robinet R_b :

$$n \rightarrow n_f \quad \Rightarrow \quad R \rightarrow R_b \quad (12)$$

On a alors :

$$n_f = n_* \left(1 - \frac{R_0^2}{R_b^2} \right) \quad (13)$$

Lorsque le rayon du bas est négligeable devant le rayon de la buse, le nombre final de goutte est donné par n_* :

$$R_0 \ll R_b \quad \Rightarrow \quad n_f \simeq n_* \quad (14)$$

- On s'est placé dans la limite continue, cela suppose un nombre de gouttes important sinon la modélisation ne fonctionne pas en particulier pour 2 ou 3 lobes.
- h_n la hauteur de la goutte est prise comme constante dans le calcul de la pression hydrostatique. Néanmoins, c'est une inconnue du problème qui est fixée par la forme finale de la goutte pour un volume donné. En effet, le volume et les contraintes géométriques issues de la compétition entre la gravité déstabilisante et la tension de surface stabilisante dictent le nombre de gouttes finales donc la hauteur du chapelet.
- La loi de variation des rayons ne s'applique pas stricto sensu pour $x = 1$ ($n = n_*$). Il faut une coupure que l'on a modélisé par le rayon de la buse que l'on peut faire tendre vers l'infini ensuite ce qui est problématique car h_n dépend du rayon a priori qui fixe la forme avec le volume et la longueur capillaire

4. Conclusions et perspectives

Malheureusement, nos résultats quantitatifs sur les chapelets ne sont pas en accord avec le modèle naïf de la Section 3. En effet, nous avons constaté que le nombre de lobes observés numériquement dépend du pas d'espace d'où une impossibilité de comparer le nombre de gouttes prédit par le modèle et celui issu du calcul numérique. Nous ne savons pas non plus si les solutions que nous avons obtenues sont stables. Cependant, ce travail a permis une certaine réactualisation de la méthode graphique de Thomson–Boys, quelque peu laissée pour compte, pour la résolution de l'équation de Young–Laplace [8]. L'intérêt majeur de cette méthode réside dans le fait de pouvoir tracer en un temps raisonnable, à l'aide d'outils des plus rudimentaires, des solutions de cette équation différentielle non triviale en l'envisageant sous sa formulation géométrique. Remarquons à ce propos que le recours à la géométrie est très clairement suggéré dans l'énoncé même du théorème de Young–Laplace. Nous avons suggéré une loi d'échelle théorique via l'équilibre de Laplace pour des chapelets modélisés par des empilement de gouttes dont le poids est équilibré par la tension de surface. En outre, nous avons rappelé que les chapelets de gouttes sont instables [6,7]. Or, peut-être qu'un forçage paramétrique de la buse du robinet pourrait permettre de stabiliser un chapelet. Auquel cas, l'algorithme de Thomson–Boys permettrait de prédire la forme du chapelet en modifiant la gravité qui serait fonction de l'excitation

Remerciements

Nous remercions Gérard Iooss pour ses remarques très constructives.

Références

- [1] C.S. Riera, E. Risler, Axisymmetric capillary surfaces as a dynamical system, *Nonlinearity* 15 (2002) 1843–1879.
- [2] P.-G. De Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré, Gouttes, bulles, perles et ondes. Collection Échelles, Belin, 2002.
- [3] D. Tournès, L'intégration graphique des équations différentielles ordinaires, *Historia Mathematica* 30 (2003) 457–493.
- [4] W. Thomson, L'attraction capillaire, Conférences scientifiques et allocutions, Gauthier–Villars, Paris, 1893, pp. 1–37. Trad. P. Lugol.
- [5] C.V. Boys, On the drawing of curves by their curvature, *Philos. Mag.* 36 (5) (1893) 75–82.
- [6] P. Concus, R. Finn, The shape of a pendant liquid drop, *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* 292 (1979) 307–340.
- [7] R. Finn, *Equilibrium Capillary Surfaces*, Springer-Verlag, Belin/New York, 1986 (Chapitres 1 et 4, pp. 1–16 et 67–109).
- [8] M. Gentes, Résolution de l'équation de Young–Laplace par une méthode géométrique utilisant la courbure, Rapport de Stage de Maîtrise de Mathématiques à l'INLN, juin–juillet 2004, <http://www.inln.cnrs.fr/~rousseau/Gentes.pdf>.