

Physique/Électromagnétisme, optique
La notion de spectre angulaire sphérique

Pierre Pellat-Finet^{a,b,*}, Pierre-Emmanuel Durand^a

^a Groupe d'optique théorique et appliquée, université de Bretagne Sud, BP 92116, 56321 Lorient cedex, France

^b Laboratoire d'optique, UMR CNRS 6082, École nationale supérieure des télécommunications de Bretagne, 29238 Brest cedex 3, France

Reçu le 23 janvier 2006 ; accepté après révision le 18 mai 2006

Disponible sur Internet le 12 juin 2006

Présenté par Jacques Villain

Résumé

La notion de spectre angulaire sphérique conduit à décomposer une onde électromagnétique en une superposition d'ondes sphériques. Elle explique clairement le rôle des pupilles dans la formation d'une image en lumière cohérente. La propagation du spectre angulaire sphérique s'exprime de la même manière que le transfert de l'amplitude du champ, ce qui le distingue du spectre angulaire habituel. *Pour citer cet article : P. Pellat-Finet, P.-E. Durand, C. R. Physique 7 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

The notion of a spherical angular spectrum. The notion of a spherical angular spectrum leads to the representation of an electromagnetic wave as a superposition of spherical waves. It provides a direct way of interpreting the role of the pupil in the theory of image formation. The spherical angular spectrum propagation takes the same form as the field amplitude transfer from a spherical emitter to a spherical receiver. *To cite this article: P. Pellat-Finet, P.-E. Durand, C. R. Physique 7 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Diffraction ; Formation des images ; Ondes sphériques ; Optique de Fourier ; Spectre angulaire

Keywords : Angular spectrum; Diffraction; Fourier optics; Image formation theory; Spherical waves

Abridged English version

Spherical angular spectrum

We refer to a scalar theory of diffraction applied to spherical emitters and receivers, which are portions of spheres with revolution symmetry (see Fig. 1) [1–3]. A spherical emitter (or receiver) \mathcal{A} has a vertex S and a curvature center C ; its curvature radius is $R_{\mathcal{A}} = SC$ and can be positive or negative according to the convexity of \mathcal{A} . A point M on \mathcal{A} is located by the coordinates x and y of its projection m on the plane tangent to \mathcal{A} at its vertex S ; we use vectorial notations: $\mathbf{Sm} = \mathbf{r} = (x, y)$, $r = \|\mathbf{r}\|$ and $d\mathbf{r} = dx dy$. We denote $U_{\mathcal{A}}(\mathbf{r})$ the field amplitude at a point \mathbf{r} on \mathcal{A} and omit

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : pierre.pellat-finet@univ-ubs.fr (P. Pellat-Finet), pierre-emmanuel.durand@univ-ubs.fr (P.-E. Durand).

its temporal dependence. We call Fourier sphere of \mathcal{A} the sphere \mathcal{F} whose vertex is the center of \mathcal{A} and whose center is the vertex of \mathcal{A} (see Fig. 1).

The spatial frequency \mathbf{F} is the conjugate variable of \mathbf{r} ; the spatial angular frequency is $\boldsymbol{\Phi} = \lambda \mathbf{F}$ (λ is the wavelength).

The spherical angular spectrum of the field amplitude on \mathcal{A} is $W_A(\boldsymbol{\Phi})$ defined by Eq. (1), where \widehat{U}_A is the Fourier transform of U_A . We invert Eq. (1) and obtain Eq. (2) which shows that U_A can be thought of as the sum of field amplitudes $\exp[-(2i\pi/\lambda)\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{r}]$ weighted by the spherical angular spectrum. Such an amplitude is no more than the field generated on \mathcal{A} by the spherical wave converging at the point $R_A \boldsymbol{\Phi}$ on the Fourier sphere \mathcal{F} .

The spherical angular spectrum leads us to represent the wave on \mathcal{A} like the sum of spherical waves, every one of them converging on \mathcal{F} at its focus.

If \mathcal{A} is a plane, the spherical angular spectrum becomes the usual angular spectrum as defined in Fourier Optics [5].

Application to the study of image formation

We consider an optical system \mathcal{S} (a lens) whose entrance pupil is \mathcal{P} and exit pupil is \mathcal{P}' (Fig. 2). The formation of an image can be decomposed into a Fourier transform, from the object \mathcal{A} to \mathcal{P} , followed by an imaging with spatial limitation, from \mathcal{P} to \mathcal{P}' , and another Fourier transform from \mathcal{P}' to the image [5,6]. The pupil function appears to be the imaging transfer function, after changing the signs of variables, and we come to the following interpretation. The object is referred to coordinates x, y, z , being along the lens axis. A plane wave is associated with the spatial frequency \mathbf{F} : it propagates along the wave vector \mathbf{k} whose cosine directors related to x and y are α and β such that $(\alpha, \beta) = \boldsymbol{\Phi} = \lambda \mathbf{F}$. We consider the ‘ray’ parallel to \mathbf{k} and passing by the point where z and the object intersect. The spatial frequency \mathbf{F} is resolved by the lens if, and only if, the former ray falls into the transparent part of the pupil [6]. On Fig. 2 the spatial frequency \mathbf{F} is resolved on \mathcal{A} but not on \mathcal{B} .

Despite its correctness, the former result is based on a paradox: the plane waves associated to a given spatial frequency on \mathcal{A} and \mathcal{B} are a unique plane wave that generates a non zero field amplitude on the entrance pupil plane (Fig. 2). Nonetheless, the plane wave is transmitted if it is generated by \mathcal{A} ; if generated by \mathcal{B} , it is not transmitted; here is the paradox!

Image formation can be approached with the help of the spherical angular spectrum. Let \mathcal{A} be a spherical emitter centred on the entrance pupil of a lens (Fig. 3) [7]. A spherical wave converging on the Fourier sphere \mathcal{F} is associated with every spatial frequency on \mathcal{A} . If the wave focus falls into the transparent part of the pupil, the spatial frequency is resolved (this holds true for the object \mathcal{A} on Fig. 3). If it falls into the opaque part, \mathbf{F} is not resolved, as for \mathcal{B} . There is no paradox any more, since the spherical wave produced by \mathcal{B} is totally stopped by the pupil.

Propagation of the spherical angular spectrum

Let \mathcal{A} be an emitter and let \mathcal{B} (radius R_B , spatial variable s) be a receiver at a distance D (taken from vertex to vertex). The field transfer from \mathcal{A} to \mathcal{B} is expressed by Eq. (3).

If $R_A = D = -R_B$, then \mathcal{B} becomes the Fourier sphere \mathcal{F} and the field transfer reduces to a Fourier transform as shown by Eq. (4). Eq. (6) shows that the spherical angular spectrum on \mathcal{F} is also related to the spherical angular spectrum on \mathcal{A} by a Fourier transform.

If \mathcal{A} and \mathcal{B} are concentric spheres, then $D = R_A - R_B$. We introduce $\kappa = R_B/R_A$ and the function h_{BA} defined by Eq. (7). The field transfer from \mathcal{A} to \mathcal{B} is expressed as a convolution product as shown by Eq. (8), if spatial variables are used. With frequential variables, the field transfer is expressed by a simple product according to (9) or (10). The field transfer is a spatial linear filtering.

To express the general transfer from \mathcal{A} to \mathcal{B} we introduce the sphere \mathcal{A}' , concentric to \mathcal{A} , whose vertex is the center of \mathcal{B} , and the sphere \mathcal{B}' , concentric to \mathcal{B} , whose vertex is the center of \mathcal{A} (Fig. 4). The sphere \mathcal{B}' is the Fourier sphere of \mathcal{A}' . The field transfer from \mathcal{A} to \mathcal{B} can be decomposed into a linear filtering from \mathcal{A} to \mathcal{A}' followed by a Fourier transform from \mathcal{A}' to \mathcal{B}' and a linear filtering from \mathcal{B}' to \mathcal{B} . Mathematically, the result is given by Eq. (12), where $R_{A'}$ is the radius of \mathcal{A}' ($R_{A'} = R_A - D - R_B$) and κ', κ'', D' and D'' are defined by Eq. (11).

Eq. (12) shows that the propagation of the spherical angular spectrum takes the same form as the field amplitude transfer, expressed by Eq. (3). As a consequence, methods that are used to mathematically represent the field amplitude

transfer can also be applied to the transfer of the spherical angular spectrum (for example methods based on the fractional order Fourier transform [3,8]).

1. Spectre angulaire sphérique

Nous considérons des émetteurs et récepteurs sphériques : ce sont des calottes sphériques, réelles ou virtuelles, aériennes ou matérielles, sur lesquelles est défini le champ électromagnétique [1–3]. Un point M de la calotte \mathcal{A} est représenté par le vecteur $S\mathbf{m}$ où S est le sommet de \mathcal{A} et m la projection de M sur le plan tangent à \mathcal{A} en S . Avec des coordonnées cartésiennes dans ce plan, le point M se représente par $\mathbf{r} = (x, y)$. Nous notons $r = \|\mathbf{r}\|$ le module du vecteur \mathbf{r} et $d\mathbf{r} = dx dy$ l'élément de surface sur \mathcal{A} . Le rayon de courbure de \mathcal{A} est R_A , orienté, par convention, du sommet au centre de courbure : $R_A = \overline{SC}$ (Fig. 1).

Dans le cadre d'une théorie scalaire, nous désignons par $U_A(\mathbf{r})$ l'amplitude du champ au point \mathbf{r} de l'émetteur (ou récepteur) \mathcal{A} (la dépendance temporelle est omise). La sphère de Fourier de \mathcal{A} est la calotte sphérique \mathcal{F} qui échange avec \mathcal{A} son sommet et son centre de courbure (Fig. 1) [1–3]. Le rayonnement est supposé monochromatique de longueur d'onde λ .

Nous désignons par \mathbf{F} une fréquence spatiale, variable conjuguée de la variable spatiale \mathbf{r} , et par Φ la fréquence angulaire, liée à \mathbf{F} par $\Phi = \lambda\mathbf{F}$.

Nous appelons spectre angulaire sphérique de l'amplitude du champ sur la calotte sphérique \mathcal{A} la fonction (ou distribution) W_A définie par

$$W_A(\Phi) = \frac{1}{\lambda^2} \widehat{U}_A\left(\frac{\Phi}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda} \Phi \cdot \mathbf{r}\right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \tag{1}$$

où \widehat{U}_A désigne la transformée de Fourier de U_A . La relation (1) s'inverse et donne

$$U_A(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} W_A(\Phi) \exp\left[-\frac{2i\pi}{\lambda} \Phi \cdot \mathbf{r}\right] d\Phi \tag{2}$$

La relation (2) conduit à représenter l'amplitude du champ sur \mathcal{A} comme la superposition d'amplitudes élémentaires de la forme $\exp[-(2i\pi/\lambda)\Phi \cdot \mathbf{r}]$ sur la sphère \mathcal{A} . Que représente une telle amplitude ? Dans les limites d'une approximation du deuxième ordre, la fonction $\exp[-(2i\pi/\lambda)\Phi \cdot \mathbf{r}]$ représente le champ créé sur la sphère \mathcal{A} par l'onde sphérique convergeant au point $R_A\Phi$ de la sphère de Fourier \mathcal{F} . (Ce résultat se démontre en deux étapes : la relation (4), qui apparaîtra plus loin dans le texte, montre qu'une amplitude de la forme $\exp[-(2i\pi/\lambda)\Phi \cdot \mathbf{r}]$ engendre sur \mathcal{F} un point lumineux ; par réciprocité [4], une source lumineuse ponctuelle placée au point $R_A\Phi$ de \mathcal{F} engendre sur \mathcal{A} un champ de la forme précitée. Or cette source est le foyer d'une onde sphérique.)

Ainsi, selon cette approche, l'onde émise par \mathcal{A} est la somme pondérée d'ondes sphériques ayant chacune son foyer sur la sphère de Fourier \mathcal{F} . La pondération est donnée par le spectre angulaire sphérique.

Si la calotte \mathcal{A} devient un plan, le spectre angulaire sphérique devient le spectre angulaire habituellement défini en optique de Fourier [5] et que nous baptisons « spectre angulaire plan ». L'onde émise par \mathcal{A} se décompose alors en ondes planes.

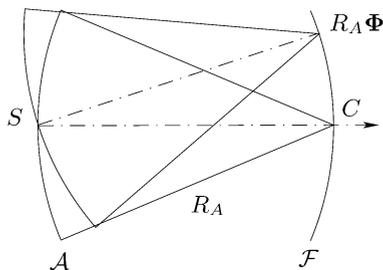


Fig. 1. Une amplitude du champ sur \mathcal{A} égale à $\exp[-(2i\pi/\lambda)\Phi \cdot \mathbf{r}]$ correspond à une onde sphérique convergeant au point $R_A\Phi$ de la sphère \mathcal{F} . La sphère \mathcal{F} est la sphère de Fourier de \mathcal{A} : elle échange avec elle son sommet et son centre de courbure.

Fig. 1. A spherical wave converging at a point $R_A\Phi$ on the Fourier sphere \mathcal{F} generates a field amplitude on \mathcal{A} equal to $\exp[-(2i\pi/\lambda)\Phi \cdot \mathbf{r}]$.

2. Application à l'étude de la formation des images

La notion de spectre angulaire sphérique permet de résoudre un paradoxe qui se présente dans l'approche classique de la formation d'une image par un objectif S de pupille d'entrée \mathcal{P} et pupille de sortie \mathcal{P}' (Fig. 2) [5,6]. Le transfert de l'amplitude du champ de l'objet (en toute rigueur centré sur la pupille [7]) à son image se décompose en une transformation de Fourier traduisant la propagation de la lumière de l'objet à la pupille d'entrée, suivie d'une imagerie avec troncature de la pupille d'entrée à la pupille de sortie, et enfin d'une deuxième transformation de Fourier représentant la propagation de la pupille de sortie à l'image (cela reste vrai en première approximation pour un objet non centré sur la pupille, à condition de pouvoir négliger des termes de phase quadratique qui apparaissent dans l'expression de la diffraction sous la forme d'une intégrale). Cette approche s'exprime mathématiquement en termes de variables d'espace, et non en termes de fréquences spatiales, essentiellement parce qu'on ne connaît pas a priori l'effet des pupilles sur le spectre angulaire plan. A posteriori, on découvre cependant que la fonction de transfert du système optique s'identifie à sa fonction pupille (à une symétrie près sur la variable). Ce résultat conduit à une analyse simple de la résolution d'une fréquence spatiale par un système optique, qui est la suivante.

Si on choisit un repère orthogonal x, y, z où z est selon l'axe du système optique, à la fréquence spatiale F sur l'objet est associée une onde plane dont la direction de propagation est définie par le vecteur d'onde \mathbf{k} , de cosinus directeurs α et β , relatifs aux axes x et y , tels que $\Phi = (\alpha, \beta) = \lambda F$. Cette direction fait avec z un angle θ tel que $|\sin \theta| = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} = \Phi$. Pour savoir si la fréquence spatiale F est résolue par l'instrument, on trace le « rayon » parallèle à \mathbf{k} et passant par le point de l'objet situé sur l'axe z (Fig. 2). Si ce rayon tombe dans la partie transparente de la pupille, la fréquence spatiale est résolue (objet \mathcal{A} de la Fig. 2) [6]; s'il tombe en dehors, elle n'est pas résolue (objet \mathcal{B} de la Fig. 2).

Même si elle conduit à un résultat correct, la description précédente, classique, repose toutefois sur un paradoxe qui vient de ce que la décomposition en ondes planes associe la même onde plane à une fréquence spatiale, quelle que soit la position de l'objet : c'est la même onde pour les objets \mathcal{A} et \mathcal{B} de la Fig. 2 (éventuellement à un déphasage près). Dans les deux cas, l'onde plane crée un champ non nul sur la partie transparente de la pupille. Cependant, dans un cas elle est transmise, dans l'autre non !

On pourrait objecter que les objets réels sont à support borné et ne sont pas vus depuis la pupille de la même façon selon leur distance ; cela ne changerait rien à l'analyse. D'abord un objet à support borné se décompose en ondes planes en théorie d'extension transversale infinie et en pratique grande par rapport aux dimensions de l'objectif. Ensuite il nous est loisible d'imaginer que l'objet représente une modulation sinusoïdale (spatiale) d'étendue transversale elle-même bien supérieure aux dimensions de l'objectif, de façon à ce qu'une partie « excentrée » de l'objet puisse créer un champ non nul sur la pupille d'entrée. Le paradoxe demeure.

Examinons maintenant comment la formation des images s'exprime à l'aide du spectre angulaire sphérique. Remarquons d'abord que si on tient compte des termes de phase quadratique qui interviennent dans la propagation des ondes en théorie scalaire, la théorie de la formation des images n'est applicable que pour un objet sphérique centré sur la pupille d'entrée de l'objectif [7]. Soit un émetteur sphérique \mathcal{A} centré sur la pupille d'entrée : sa sphère de Fourier est la sphère \mathcal{F} tangente à \mathcal{P} et centrée sur \mathcal{A} (Fig. 3). L'onde émise par \mathcal{A} se décompose en une famille d'ondes sphériques centrées sur \mathcal{F} , chacune d'elles étant associée à une fréquence spatiale de l'objet. L'onde sphérique associée à la fréquence spatiale F se focalise donc pratiquement sur la pupille dont le rôle est désormais clair : si le foyer de l'onde tombe dans la partie transparente de la pupille, l'onde sphérique est transmise et contribue à la formation de

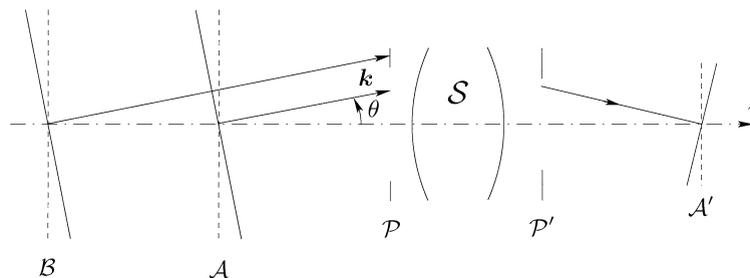


Fig. 2. La même fréquence spatiale est résolue par le système S sur l'objet \mathcal{A} mais pas sur l'objet \mathcal{B} .

Fig. 2. The same spatial frequency can be resolved on \mathcal{A} and not on \mathcal{B} .

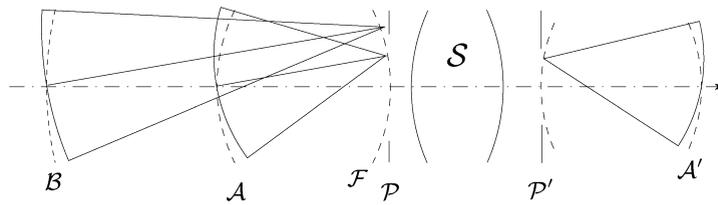


Fig. 3. Analyse de la formation d’une image par la théorie du spectre angulaire sphérique. L’onde émise par \mathcal{A} est la superposition d’ondes sphériques centrées sur \mathcal{F} . Une onde sphérique est transmise si son foyer (son centre de courbure) tombe dans la partie transparente de la pupille. Ici les ondes sphériques sur \mathcal{A} et \mathcal{B} sont associées à une même fréquence spatiale.

Fig. 3. Image formation analysis with the spherical angular spectrum. The wave on \mathcal{A} is the sum of spherical waves converging on the pupil. A spherical wave is transmitted if and only if its focus falls into the transparent part of the pupil.

l’image, comme pour l’objet \mathcal{A} sur la Fig. 3 : la fréquence spatiale F est résolue. Si son foyer tombe dans la partie opaque de la pupille, comme pour l’objet \mathcal{B} de la Fig. 3, l’onde sphérique n’est pas transmise et la fréquence spatiale F n’est pas résolue. Le paradoxe introduit par la décomposition en ondes planes est résolu : l’onde sphérique issue de \mathcal{B} est totalement arrêtée par la pupille.

3. Propagation du spectre angulaire sphérique

Le transfert du champ de l’émetteur \mathcal{A} au récepteur \mathcal{B} (rayon R_B) situé à la distance D (prise de sommet à sommet) s’écrit (à un facteur de phase près de la forme $\exp[-2i\pi D/\lambda]$) [1–3]

$$U_B(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda D} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{D}\right) s^2\right] \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{D}\right) r^2\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda D} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}\right] U_A(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} \quad (3)$$

Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des plans, alors R_A et R_B sont infinis.

Si $D = R_A = -R_B$, la sphère \mathcal{B} devient la sphère de Fourier \mathcal{F} et dans ces conditions (Fig. 1)

$$U_B(\mathbf{s}) = U_F(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda R_A} \widehat{U}_A\left(\frac{\mathbf{s}}{\lambda R_A}\right) \quad (4)$$

ce qui justifie le terme de « sphère de Fourier » déjà utilisé. Comme pour l’amplitude du champ, le spectre angulaire sphérique sur \mathcal{F} est lié au spectre angulaire sphérique sur \mathcal{A} par une transformation de Fourier. En effet, la relation (4) s’écrit aussi

$$U_F(\mathbf{s}) = \frac{i\lambda}{R_A} W_A\left(\frac{\mathbf{s}}{R_A}\right) \quad (5)$$

dont il résulte

$$W_F(\boldsymbol{\Phi}) = \frac{1}{\lambda^2} \widehat{U}_F\left(\frac{\boldsymbol{\Phi}}{\lambda}\right) = \frac{iR_A}{\lambda} \widehat{W}_A\left(\frac{R_A \boldsymbol{\Phi}}{\lambda}\right) \quad (6)$$

Considérons encore un cas particulier de transfert : supposons que \mathcal{A} et \mathcal{B} soient concentriques : $D = R_A - R_B$. Soit $\kappa = R_B/R_A$. Introduisons la fonction h_{BA} telle que

$$h_{BA}(\mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda D} \exp\left[\frac{-i\pi\kappa}{\lambda D} r^2\right] \quad (7)$$

si bien que la relation (3) s’écrit

$$U_B(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^2} h_{BA}\left(\frac{\mathbf{s}}{\kappa} - \mathbf{r}\right) U_A(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = [h_{BA} * U_A]\left(\frac{\mathbf{s}}{\kappa}\right) \quad (8)$$

c’est-à-dire sous la forme d’un produit de convolution. Les transformées de Fourier de U_A et U_B satisfont

$$\widehat{U}_B(\mathbf{F}) = \kappa \exp[i\pi\kappa\lambda D F^2] \widehat{U}_A(\kappa \mathbf{F}) \quad (9)$$

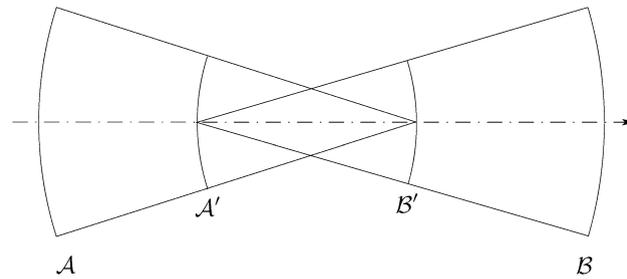


Fig. 4. Le transfert général du champ de \mathcal{A} à \mathcal{B} se décompose en un filtrage linéaire de \mathcal{A} à \mathcal{A}' , une transformation de Fourier \mathcal{A}' à \mathcal{B}' et un filtrage linéaire de \mathcal{B}' à \mathcal{B} . Ce point de vue permet de donner au transfert du spectre angulaire sphérique la même forme que celui de l'amplitude du champ.

Fig. 4. The field transfer from \mathcal{A} to \mathcal{B} can be decomposed into a linear filtering from \mathcal{A} to \mathcal{A}' followed by a Fourier transform from \mathcal{A}' to \mathcal{B}' and another linear filtering from \mathcal{B}' to \mathcal{B} .

et il existe une relation équivalente pour les spectres angulaires sphériques qui s'obtient en remplaçant la fréquence spatiale F par Φ/λ et qui prend la forme

$$W_B(\Phi) = \kappa \exp\left[\frac{i\pi\kappa D\Phi^2}{\lambda}\right] W_A(\kappa\Phi) \quad (10)$$

Les relations (8) et (9) indiquent que la diffraction entre deux sphères concentriques est un filtre linéaire spatial : elle se décrit par un produit de convolution à l'aide des variables d'espace et comme un simple produit en variables fréquentielles.

Nous sommes désormais en mesure de traiter le cas général du transfert de \mathcal{A} à \mathcal{B} quelconques (Fig. 4). Introduisons la sphère \mathcal{A}' concentrique à \mathcal{A} et passant par le centre de \mathcal{B} , et la sphère \mathcal{B}' concentrique à \mathcal{B} et passant par le centre de \mathcal{A} . La sphère \mathcal{B}' est la sphère de Fourier de \mathcal{A}' et le transfert de \mathcal{A} à \mathcal{B} est la succession de trois opérations qui se décrivent à l'aide du spectre angulaire sphérique : d'abord un filtrage linéaire de \mathcal{A} à \mathcal{A}' , puis une transformation de Fourier de \mathcal{A}' à \mathcal{B}' et enfin un filtrage linéaire de \mathcal{B}' à \mathcal{B} . Les données du problème sont la distance D du sommet de \mathcal{A} au sommet de \mathcal{B} et les rayons R_A et R_B de \mathcal{A} et \mathcal{B} . Le rayon de \mathcal{A}' est $R_{A'} = R_A - D - R_B$ et celui de \mathcal{B}' lui est opposé. Introduisons les paramètres κ' et κ'' et les distances D' et D'' tels que

$$\kappa' = \frac{R_{A'}}{R_A} = 1 - \frac{D}{R_A} - \frac{R_B}{R_A}, \quad \kappa'' = \frac{R_B}{R_{B'}} = \frac{1}{1 + \frac{D}{R_B} - \frac{R_A}{R_B}}, \quad D' = D + R_B, \quad D'' = D - R_A \quad (11)$$

La combinaison des relations (6) et (10) conduit à

$$W_B(\Phi) = \frac{iR_{A'}\kappa''}{\lambda\kappa'} \exp\left[\frac{i\pi\kappa''D''\Phi^2}{\lambda}\right] \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[\frac{i\pi D'\Phi'^2}{\lambda\kappa'}\right] \exp\left[\frac{2i\pi\kappa''R_{A'}}{\lambda\kappa'} \Phi \cdot \Phi'\right] W_A(\Phi') d\Phi' \quad (12)$$

La relation (12) est formellement identique à la relation (3) : présence de termes de phase quadratique devant et sous l'intégrale, noyau de Fourier. La notion de spectre angulaire sphérique permet d'exprimer de la même façon le transfert du champ sous forme spatiale ou sous forme fréquentielle. Les mêmes techniques employées pour exprimer le transfert de l'amplitude du champ sont donc susceptibles d'être appliquées au transfert de son spectre angulaire sphérique (notamment celles qui se fondent sur la transformation de Fourier fractionnaire [3,8]). En particulier des amplitudes invariantes par propagation ont des spectres sphériques eux-mêmes invariants (par exemple les faisceaux gaussiens). Cette propriété distingue le spectre angulaire sphérique du spectre angulaire plan : ce dernier est utilisé pour transférer l'amplitude du champ d'un plan à un autre, dans des conditions de filtrage linéaire puisque deux plans parallèles sont un cas particulier de deux sphères concentriques ; le filtrage se traduit par une convolution pour les variables d'espace et par un produit simple pour les variables fréquentielles, comme nous l'avons souligné, c'est-à-dire de deux façons différentes.

Références

- [1] G. Bonnet, Introduction à l'optique métaxiale. Première partie : diffraction métaxiale dans un espace homogène : trilogie structurale, dioptrique sphérique, Ann. Télécomm. 33 (1978) 143.

- [2] G. Bonnet, Introduction à l'optique métaxiale. Deuxième partie : systèmes dioptriques centrés (non diaphragmés et non aberrants), *Ann. Télécomm.* 33 (1978) 225.
- [3] P. Pellat-Finet, *Lecciones de óptica de Fourier*, Ediciones Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga (Colombie), 2004.
- [4] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, 7^{ème} éd., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [5] J. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, 2^{ème} éd., Mc Graw Hill, New York, 1996.
- [6] A. Maréchal, M. Françon, *Diffraction, structure des images*, Masson, Paris, 1960.
- [7] P. Pellat-Finet, Y. Torres, Image formation with coherent light: the fractional Fourier transform approach, *J. Modern Opt.* 44 (1997) 1581.
- [8] P. Pellat-Finet, Transfert du champ électromagnétique par diffraction et transformation de Fourier fractionnaire, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. Iib* 329 (1995) 91.