Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Physique 7 (2006) 307–309
COMPTES RENDUS
PHYSIQUE
http://france.elsevier.com/direct/COMREN/

Statistical mechanics of non-extensive systems/Mécanique statistique des systèmes non-extensifs

Foreword

Many physical systems with a large number of degrees of freedom do not relax towards some kind of homogeneous equilibrium (as does the perfect gas), but instead display, at macroscopic scales, a spectacular form of spontaneous organization. Well known cases of such behavior are, for example, the coherent vortices which systematically emerge in turbulent two-dimensional flows, like the large cyclones or anticyclones in meteorology or the great red spot on Jupiter. Other striking examples are given in astrophysics by galaxies and globular clusters. Such systems are subject to global conservation constraints (energy, angular momentum, ...) and long range interactions (gravitational, incompressibility, ...). They are called *nonextensive* since they do not result from a mere juxtaposition of similar subsystems. Traditional Gibbsian canonical statistical mechanics fails to describe accurately such systems. An obvious failure is that the essential phenomenon of negative heat capacity is forbidden in the canonical formalism.

More fundamentally, the Gibbs canonical formalism has a priori no theoretical justification. It is only justified when there is equivalence between canonical and microcanonical ensembles, and this equivalence is broken for the nonextensive systems. By contrast, the Boltzmann microcanonical approach is justified, in a natural way, by a rigorous property of concentration of the probability of the system (to be in some subset of the phase space). This concentration property is expressed in terms of the entropy functional. This is a particular case of what is usually called large deviation theory.

It has been shown in many situations that the equivalence between canonical and microcanonical ensembles fails to hold in the presence of long range interactions, so that the canonical approach has no justification at all. One more argument in favour of a microcanonical approach is that in many cases we study isolated Hamiltonian dynamical systems for which a number of constants of the motion are exactly conserved and not only in the mean.

It follows that to study nonextensive systems one has to come back to a Boltzmann microcanonical approach and associate a relevant macroscopic description of the system to an entropy functional which is uniquely defined. Solving the associated variational problem then gives the equilibrium state.

Of course while following this program, difficulties may arise, the most common being that the maximum entropy state may not exist (unbounded self gravitating systems, gravothermal catastrophe, ...). It may also happen that the relaxation time towards the theoretical equilibrium is very large so that the physical meaning of such equilibria is questionable. In such case we have to complete the study by dynamical considerations on the relaxation towards equilibrium. This led, for example, to the important discovery of the violent relaxation mechanism by Hénon, King and Lynden-Bell.

To our knowledge, the suggestion that the appearance of a macroscopic organisation in nonextensive systems could be explained by an appropriate statistical mechanics come back to Onsager (1949) with his pioneering ideas on the formation of vortices in two dimensional turbulence.

One will find in the following papers various contributions along these lines. They concern mainly self-gravitating systems and some aspects of two and three-dimensional turbulence. We have chosen to enlarge the subject to the analysis of financial markets, as it appears more and more clearly (as Mandelbrot suggested) that there is a deep analogy between financial markets and three-dimensional turbulence, and the relevant thermodynamics of such systems with multi-fractal scaling does not exist at the present time. This is a fascinating issue.

doi:10.1016/j.crhy.2006.05.004

Avant-propos

Beaucoup de systèmes physiques avec un grand nombre de degrés de liberté, ne relaxent pas vers un état d'équilibre homogène (comme pour le gaz parfait), mais au contraire montrent aux échelles macroscopiques une forme spectaculaire d'organisation spontanée. Les cas bien connus d'un tel comportement sont par exemple les vortexs cohérents qui émergent systématiquement dans des écoulements bidimensionnels turbulents, comme les grands cyclones ou anticyclones en météorologie ou la grande tache rouge sur Jupiter. D'autres exemples saisissants sont donnés en astrophysique par les galaxies et les amas globulaires. De tels systèmes sont sujets aux contraintes globales de conservation (énergie, moment angulaire, ...) et à des interactions à longue portée (gravité, incompressibilité, ...). Ils s'appellent nonextensifs *car ils ne peuvent pas être décrits par la simple juxtaposition de sous-ensembles semblables. La mécanique statistique canonique traditionnelle de Gibbs ne peut pas décrire de façon appropriée un tel système. Un des échecs évidents est que le phénomène fondamental de la capacité calorifique négative est interdit dans le formalisme canonique.*

Plus fondamentalement, le formalisme canonique de Gibbs n'a a priori aucune justification théorique. Il est seulement justifié quand il y a équivalence entre les ensembles canonique et microcanonique, et cette équivalence est brisée pour les systèmes nonextensifs. En revanche, l'approche microcanonique de Botzmann est justifiée d'une manière naturelle, par une propriété rigoureuse de la concentration de probabilité du système (pour être dans un certain sous-ensemble de l'espace de phase). Cette propriété de concentration est exprimée en termes de la fonctionnelle d'entropie. C'est un cas particulier de ce qui s'appelle habituellement la théorie des grandes déviations.

Il a été montré dans beaucoup de situations que l'équivalence entre les ensembles canonique et microcanonique n'est plus valable en présence d'interactions à longue portée, de sorte que l'approche canonique n'a aucune justification. Un argument de plus en faveur d'une approche microcanonique est que dans beaucoup de cas nous étudions des systèmes dynamiques hamiltoniens isolés pour lesquels un certain nombre de constantes du mouvement sont exactement conservées et pas seulement en moyenne.

Il s'ensuit que pour étudier les systèmes nonextensifs on doit revenir à l'approche microcanonique de Boltzmann et associer une description macroscopique appropriée du système à la fonctionnelle d'entropie qui est définie de façon univoque. La solution du problème variationnel associé donne alors l'état d'équilibre.

Naturellement en suivant ce programme des difficultés peuvent surgir, la plus commune étant que l'état d'entropie maximale peut ne pas exister (systèmes auto-gravitants non liés, catastrophe gravothermale). Il peut arriver également que le temps de relaxation vers l'équilibre théorique est très grand de sorte que la signification physique d'un tel equilibre soit incertaine. Dans ce cas nous devons achever l'étude par des considérations dynamiques sur la relaxation vers l'équilibre. Ceci a mené par exemple à la découverte importante du mécanisme de relaxation violente par Hénon, King et Lynden-Bell.

A notre connaissance, la suggestion que l'apparition d'une organisation macroscopique dans les systèmes nonextensifs pourrait être expliquée par une mécanique statistique appropriée revient à Onsager (1949) avec ses idées de pionnier sur la formation des vortexs dans la turbulence à deux dimensions.

On trouvera dans les articles suivants diverses contributions le long de ces grandes lignes. Elles concernent principalement des systèmes auto-gravitants et quelques aspects de la turbulence à deux ou trois dimensions. Nous avons choisi d'élargir le sujet à l'analyse des marchés financiers, car il apparaît de plus en plus clair (comme Mandelbrot l'a suggéré) qu'il y a une analogie profonde entre les marchés financiers et la turbulence tridimensionnelle, et une thermodynamique appropriée de tels systèmes, tenant compte de l'invariance d'échelle multi-fractale, n'existe pas à l'heure actuelle. C'est un problème fascinant.

Françoise Combes
Observatoire de Paris,
LERMA,
61 avenue de l'Observatoire,
75014 Paris,
France
E-mail address: Francoise.Combes@obspm.fr (F. Combes)

Raoul Robert
Institut Fourier,
UFR de mathématiques,
université Grenoble 1,
BP 74,
38402 Saint-Martin D'Hères cedex,
France
E-mail address: Raoul.Robert@ujf-grenoble.fr (R. Robert)

Available online 12 June 2006