



Physique/Relativité, gravitation

La cinématique relativiste sous-jacente à l'ellipse de Poincaré

Yves Pierseaux

Université Libre de Bruxelles, physique des particules, boulevard du Triomphe, C.P. 230, B-1050 Bruxelles, Belgique

Reçu le 25 septembre 2006 ; accepté après révision le 15 juin 2007

Disponible sur Internet le 20 juillet 2007

Présenté par Jacques Villain

Résumé

La transformation de Lorentz d'un front d'onde sphérique (un ensemble d'événements simultanés) est-elle un front sphérique (Einstein, 1905) ou un front ellipsoïdal (Poincaré, 1908) ? Nous démontrons, sur la seule base d'une ellipse allongée et de sa tangente, que la réponse à cette question sur la représentation des fronts d'onde et la *relativité de la simultanéité* dépend d'une définition préalable de la *simultanéité* (convention de synchronisation des horloges). Cette convention est liée au *choix* de jauge électromagnétique adopté respectivement par Einstein (jauge transverse) et par Poincaré (jauge de Lorenz). Les deux théories de l'espace-temps ne diffèrent donc pas au niveau (dynamique) des champs électromagnétiques, mais au niveau (cinématique) de la convention de synchronisation. Nous donnons une forme concrète au choix de l'implémentation de la simultanéité avec l'effet Sagnac pour le GPS. **Pour citer cet article :** Y. Pierseaux, C. R. Physique 8 (2007).

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

The relativistic kinematics underlying Poincaré's ellipse. What is the Lorentz transformation (LT) of a spherical wavefront (a set of simultaneous events)? According to Einstein (1905) the LT produces a spherical wavefront whilst according to Poincaré (1908) the LT produces an ellipsoidal wavefront (the events are no longer simultaneous). What is the LT of a plane wavefront (a set of simultaneous events)? According to Einstein the LT is a space transversal (to the direction of propagation) plane wavefront. According to Poincaré, the LT is a non transversal spacetime wavefront (the tangent plane to the ellipsoid). We show that this contrast between Einstein's and Poincaré's theory of wavefronts is not connected with the electromagnetic fields but with electromagnetic potentials. Poincaré's explicit choice is the Lorenz gauge while Einstein's implicit choice is the transverse gauge. In other words, the convention of synchronization of clocks with light signals is not the same. We show that Poincaré's elongated ellipse in the system of the source is not only a direct explanation of the null result of Michelson's experiment but also a direct explanation of the non null Sagnac's experiment. The fruitless historical polemics of priority between Poincaré and Einstein has been replaced by a very current scientific problematic about the best implementation of simultaneity in the GPS system. **To cite this article:** Y. Pierseaux, C. R. Physique 8 (2007).

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Relativité ; Einstein ; Poincaré ; Front d'onde elliptique ; Jauges électromagnétiques ; Sagnac ; GPS

Keywords : Relativity ; Einstein ; Poincaré ; Elliptic wavefront ; Electromagnetic gauges ; Sagnac ; GPS

1. Ellipse de Poincaré et transformation de Lorentz

Considérons un couple de systèmes K et K' en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. Supposons le cas de figure standard où la source S est au repos en O dans K . Soit, au temps t_1 , un front d'onde circulaire émis en $t' = t = t_0 = 0$ (les deux origines O et O' coïncident) par cette source S . Quelle est la transformation de Lorentz (TL) dans K' de ce front dans K ? La TL peut s'écrire de manière parfaitement symétrique (en x, t) en adoptant les « unités spatio-temporelles $c = 1$ de Poincaré » [1] :

$$x' = \gamma(x + \beta t), \quad y' = y, \quad t' = \gamma(t + \beta x) \tag{1}$$

L'observateur O' est donc ici en mouvement vers la gauche de la source (Fig. 1). Considérons l'invariant de la TL :

$$x^2 + y^2 = r_1^2 = t_1^2 \text{ (a)}, \quad x'^2 + y'^2 = r'^2 = t'^2 \text{ (b)} \tag{2}$$

La relation (2a) représente par définition un front circulaire de rayon $r_1 = OP$ dans le système K . Le temps $t = t_1$ est fixé par définition mais le temps t' n'est pas fixé (les temps t' sont différents sur le front primé) dans le système K' . On obtient immédiatement, avec la TL (1) $t' = \gamma^{-1}t_1 + \beta x'$, une équation cartésienne qui est celle d'une ellipse allongée dans le système primé K' (Fig. 1) :

$$x'^2 + y'^2 = (\gamma^{-1}t_1 + \beta x')^2 \quad \text{ou} \quad (\gamma^{-1}x' - \beta t_1)^2 + y'^2 = t_1^2 \tag{3}$$

La relation (2b) représente ainsi un front elliptique allongé, dont l'observateur O' occupe le foyer, qui généralise la définition de la relativité de la simultanéité donnée par Einstein en 1905 pour deux événements (d'abscisses différentes) [2] : une classe d'événements simultanés dans K (en temps t) ne correspond pas à une classe d'événements simultanés (en temps t') dans K' (événements opposés, $\pm x$, Fig. 1) :

$$t_{P^+} - t_{P^-} = r^+ - r^- = 0 \quad \rightarrow \quad t'_{P'^+} - t'_{P'^-} = r'^+ - r'^- \neq 0 \tag{4}$$

Si le temps t' est constant sur le front primé, le rayon $r' = O'P'$ est alors aussi constant et la relation (2b) représente un front circulaire (convention einsteinienne de synchronisation, §3). Si le temps t' n'est pas constant sur le front primé, le rayon $r' = O'P'$ est alors variable, ce qui se traduit directement par l'équation de l'ellipse allongée en coordonnées polaires [3] : $r' = \frac{r_1}{\gamma(1 - \beta \cos \theta')}$ (avec $x' = r' \cos \theta'$, $y' = r' \sin \theta'$ avec θ' comme angle polaire et F comme pôle). L'ellipse est donc bien définie en temps t' de K' (2b). Avec la formule de transformation relativiste de l'angle, $\cos \theta' = \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta}$, on retrouve la TL d'un point du front circulaire $r' = \gamma r_1 (1 + \beta \cos \theta) = t'$ (avec $x = r_1 \cos \theta$, $y = r_1 \sin \theta$). On peut définir pour des événements opposés (4), à partir de $t'^+ = \gamma t_1 (1 + \beta \cos \theta)$ et $t'^- = \gamma t_1 (1 - \beta \cos \theta)$, un « terme elliptique » ou « un écart à la simultanéité » $\Delta t'$ (Fig. 1) :

$$\Delta t' = \frac{t'^+ - t'^-}{2} = \gamma \beta r_1 \cos \theta = \gamma \beta x \tag{5}$$

qui traduit le fait que le temps aller n'est pas égal au temps retour : $t'^+ \neq t'^-$. Installons en effet un miroir parfaitement réfléchissant en P^+ tangentiellement au cercle. Au temps $t = t_1$, le front « aller » est réfléchi vers S . Au temps $2t_1$

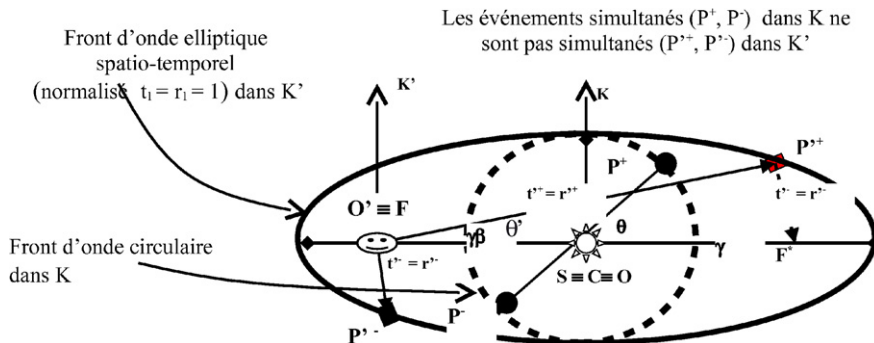


Fig. 1. La source est au centre C et l'observateur O' est au foyer de l'ellipse. L'excentricité $e = \beta \approx 0,9$ ($c = 1$). Le grand axe est allongé par le facteur $\gamma \approx 2,3$. Le rayon focal $SO' = CF$ est $\gamma\beta \approx 2,1$. Nous avons représenté par les signes $+$ et $-$ les temps t^+ et t^- (les distances r^+ et r^-) pour les événements opposés P^+ et P^- (primés et non-primés).

(retour du front à la source) l'observateur O' sera à la distance $2\beta\gamma$ de la source $S \equiv O$ située à l'autre foyer F^* , lequel représente physiquement le point autour duquel l'onde « retour » se concentre (propriété géométrique élémentaire de la réflexion sur un miroir tangent à l'ellipse d'observation). Nous obtenons, outre l'équation $\Delta t'(5)$, un temps de parcours « aller-retour moyen » t'_M qui est le même dans toutes les directions :

$$t'_M = \frac{t'^+ + t'^-}{2} = \gamma t_1 \tag{6}$$

On retrouve ainsi la dilatation einsteinienne du temps. L'ellipse allongée généralise à toutes les directions « l'aller-retour standard », autrement dit l'oscillateur purement transversal d'Einstein (1913), où un miroir est placé dans la direction transversale au mouvement. Remarquons que le seul cas (transversal) traité par Einstein correspond précisément à $\theta = \pi/2$ et donc $\Delta t' = 0$ (ondes planes, §2). L'ellipse allongée consiste à effectuer dans le cône de Minkowski une section non transversale qui définit la notion relativiste de front spatio-temporel (les coupes transversales einsteiniennes sont purement spatiales, §2) ; l'intervalle entre l'événement « émission » et tout événement du front elliptique étant par définition un intervalle spatio-temporel. Dans la littérature scientifique ([4]), l'ellipse de base ou « l'ellipse d'observation » (3) n'est pas mise en rapport avec l'ellipse allongée définie par Poincaré en 1908 [3]. Pourtant il suffit de considérer la TL inverse (2), en intervertissant les primes et les non-primes et en changeant le signe de la vitesse relative β , pour obtenir l'ellipse inverse de (3) (Fig. 2) [5] :

$$[(\gamma^{-1}x' - \beta t_1)^2 + y'^2 = t_1^2]_{\text{ellipse directe}}, \quad [(\gamma^{-1}x + \beta t'_1)^2 + y^2 = t'^2_1]_{\text{ellipse inverse}} \tag{7}$$

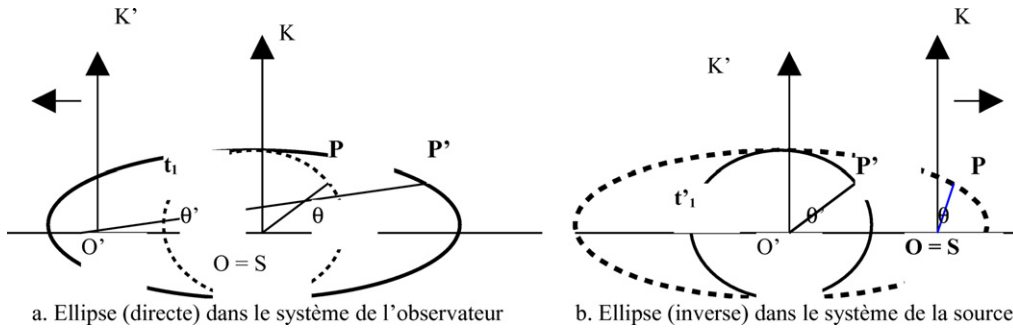


Fig. 2. La symétrie de Poincaré entre les deux cas de figure « ellipse d'observation » ou « ellipse source » (ellipse historique « inverse »). Dans les deux cas de figure (direct ou inverse), si on veut traiter un signal qui revient à la source, il faut utiliser l'autre foyer (de l'ellipse d'observation ou de l'ellipse source) pour avoir le temps retour (changement de signe ou de foyer).

Cette ellipse allongée inverse, avec la source S au foyer et l'observateur O' au centre, n'est autre que l'ellipse historique de Poincaré (la TL inverse revient à définir le front sphérique dans K' en fixant $t' = t'_1$). D'un point de vue relativiste on doit pouvoir intervertir les rôles (centre et foyer) attribués à la source et à l'observateur : soit l'observateur O' est en mouvement (au foyer) vers la gauche (Fig. 2a) par rapport à la source S au repos (au centre), soit la source S est en mouvement (au foyer) vers la droite (Fig. 2b) par rapport à l'observateur O' au repos (au centre). L'ellipse d'observation permet seulement de généraliser la relativité de la simultanéité à une classe d'événements situés sur un front d'onde tandis que l'ellipse dans le système de la source est à la base d'une convention de synchronisation fondamentalement différente de celle d'Einstein (§3). La procédure de synchronisation supposant un retour du signal à la source, on utilisera également l'autre foyer de l'ellipse historique de Poincaré pour évaluer le temps retour.

2. Tangente à l'ellipse de Poincaré et jauge de Lorenz

Après la TL d'un front d'onde sphérique, voyons maintenant la TL d'un front d'onde plan. Supposons une deuxième source S_2 à l'infini au repos dans K dans la direction θ (Fig. 3). Supposons qu'un « front plan » (à deux dimensions spatiales une « droite d'onde » ou d'un « front droit ») passe en O à l'instant $t = t = t_0 = 0$ (à l'instant où S_1 émet le front circulaire). Il sera en $t = t_1$ tangent au front circulaire émis par la source à l'instant $t = t' = 0$ par S_1 . On constate ainsi que les événements $P_1 T P_2$, simultanés dans K ne sont pas des événements simultanés ($P'_1 T' P'_2$) dans K' . On obtient respectivement pour le front objet et pour le front image (primé), les deux relations suivantes :

$$x \cos \theta + y \sin \theta = t = t_1 \text{ (a)}, \quad y' \sin \theta' + x' \cos \theta' = t' \text{ (b)} \tag{8}$$

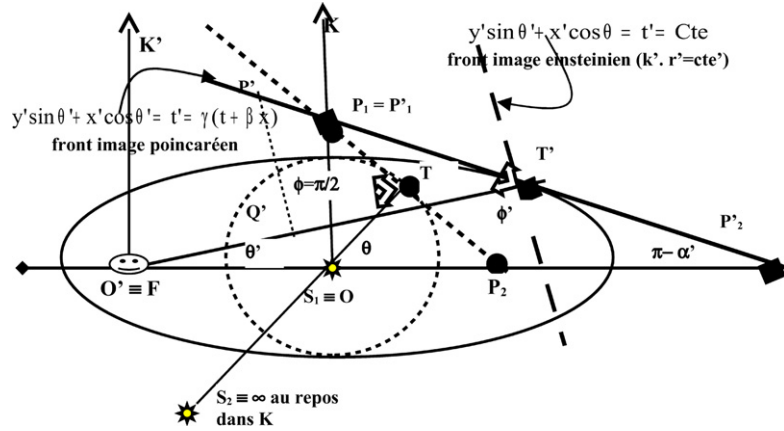


Fig. 3. Le front d'onde « objet » est défini dans K ($\Phi = \pi/2$). Son « image » einsteinienne est transversale dans K' ($\Phi' = \pi/2$) tandis que l'image poincaréenne (tangente à l'ellipse) n'est pas transversale dans K' ($\Phi' \neq \pi/2$). La composante longitudinale du vecteur $T'P'$ est $T'Q' = A'_{\parallel}$ (composante de Poincaré du vecteur potentiel A').

Exactement comme pour les fronts circulaires (2b), il y a deux possibilités :

(1) Si t' n'est pas constant (Poincaré), les différents temps primés t' sont donnés par la TL, $t' = \gamma(t + \beta x) = \gamma^{-1}t + \beta x'$, et donc l'équation primée (8b) est l'équation de la tangente à l'ellipse (sur laquelle se trouve P'_1 et P'_2) au point T' : $y' \sin \theta' + x' (\cos \theta' - \beta) = \gamma^{-1}t$. Le front d'onde poincaréen (non-transversal) a comme coefficient angulaire en fonction de θ' (angle dans K') : $a_{\text{Poincaré}} = \text{tg } \alpha' = \frac{\beta - \cos \theta'}{\sin \theta'}$.

(2) Si t' est constant (Einstein), l'équation primée (8b) où t' est constant devient l'équation de la tangente au cercle (centre O' et rayon r'_T). Le front d'onde einsteinien (transversal) a comme coefficient angulaire : $a'_{\text{Einstein}} = -\text{cotg } \theta'$. Les coefficients angulaires coïncident pour $\theta' = 0$. Comme Einstein n'utilise pas le concept de « front » (d'onde) mais bien le concept d'onde sphérique ou plane, son attention n'est pas attirée par l'application de la relativité de la simultanéité (de 2 événements) à une classe d'événements simultanés situés sur un front d'onde. Einstein conserve ainsi une représentation prérelativiste du front d'onde.¹ La double transversalité $\phi = \phi' = 90^\circ$ (ou double simultanéité) implique pour le front primé : $a' = -\text{cotg } \theta' \Leftrightarrow (\Delta t')_{\text{front}} = 0$.

Puisque le point de vue d'Einstein est caractérisé par la transversalité des fronts (« En appelant θ' l'angle formé par la normale de l'onde dans le système en mouvement et la « direction du mouvement ». » [2, paragraphe 7]), essayons de spécifier celui de Poincaré au moyen d'une composante longitudinale. Plaçons un vecteur $\mathbf{T} = T\hat{P}$ avec les composantes ($T_x = \Delta x$, $T_y = \Delta y$) sur la direction du front objet. On déduit avec la TL les composantes du vecteur $\mathbf{T}' = T'\hat{P}'$ situé sur la tangente à l'ellipse : $T'_x = \Delta x' = \gamma \Delta x$, $T'_y = \Delta y' = \Delta y$, $\Delta t' = \gamma \beta \Delta x$. Projétons maintenant le vecteur \mathbf{T} et \mathbf{T}' selon la direction de propagation du front d'onde (et la normale à cette direction) dans K ($T_{\parallel} = 0$, T_{\perp}) et dans K' (T'_{\parallel} , T'_{\perp}). On obtient la composante transversale invariante, $T = T_{\perp} = T'_{\perp}$, et la composante longitudinale T'_{\parallel} :

$$T'_{\parallel} = \gamma \beta T_x = \Delta t' \quad \text{avec} \quad T'^2 = T'^2_{\parallel} + T'^2_{\perp} \quad (9)$$

La composante longitudinale de Poincaré $T'_{\parallel} = T'Q'$ (Fig. 3) n'est rien d'autre que l'écart à la simultanéité $\Delta t'$ (4, 6) sur le front d'onde image (primé). On peut définir un quadrivecteur $(T_x, T_y, 0, \Delta t = 0) \rightarrow (T'_x, T'_y, 0, \Delta t')$ dont la norme est invariante (9) :

$$\|(T_x, T_y, 0, 0)\| = T^2 = T^2_{\perp}, \quad \|(T'_x, T'_y, 0, \Delta t')\| = T'^2 - \Delta t'^2 = T'^2_{\perp} + T'^2_{\parallel} - \Delta t'^2 = T'^2_{\perp}$$

Le vecteur \mathbf{T} et « l'écart à la simultanéité » Δt ont une structure quadrivectorielle $(\mathbf{T}, \Delta t) \rightarrow (\mathbf{T}', \Delta t')$ du genre espace : on peut toujours annuler la quatrième composante dans un des systèmes ($\Delta t = 0$) mais pas dans l'autre

¹ La phase écrite de façon standard $\Psi = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' = \Psi'$ avec le produit scalaire $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ ($\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'$) suppose que la direction de propagation (\mathbf{k} et \mathbf{k}') est perpendiculaire au front dans chaque système. C'est un invariant galiléen au sens où l'angle droit $\phi = \phi' = 90^\circ$ n'est pas modifié. La TL modifie ϕ : $\tan \phi' = \tan(\alpha' - \theta') = \frac{\beta \cos \theta' - 1}{\beta \sin \theta'}$. Einstein admet par définition que l'invariant de phase galiléen ($t = t'$) est un invariant de phase lorentzien ($t \neq t'$) duquel il extrait une formule Doppler [6].

($\Delta t' \neq 0$). Si on établit maintenant un lien entre les ondes traitées jusqu'ici de façon abstraite et les ondes électromagnétiques de Maxwell (dans le vide), il suffit de prendre en compte le *quadrivecteur* potentiel (\mathbf{A}, V) introduit par Poincaré en 1905 [1]. En plaçant le *vecteur potentiel* \mathbf{A} transversalement sur le front objet (Fig. 3), on a l'équivalence ($\mathbf{T}', \Delta \mathbf{t}'$)_{mathématique} \Leftrightarrow (\mathbf{A}', V')_{physique} (9) :

$$A'_{\parallel} = V'(c = 1) \quad \text{avec} \quad A'^2 = A'_{\parallel}{}^2 + A'_{\perp}{}^2 \quad (10)$$

La condition de Lorenz, $\text{div} \mathbf{A}'_{\parallel} + \frac{\partial V'}{\partial t'} = 0$, écrite longitudinalement selon la *décomposition de Helmholtz*, $A'^2 = A'_{\parallel}{}^2 + A'_{\perp}{}^2$, est vérifiée. G. Rousseaux et moi-même montrons ainsi que ce n'est pas seulement la *transformation* de Lorentz qui est inscrite géométriquement dans l'ellipse de Poincaré mais aussi la *jauge* de Lorenz [7]. La composante longitudinale A'_{\parallel} du potentiel vecteur de l'onde se propage à la vitesse de la lumière. *Rien ne change au niveau des champs électromagnétiques puisque la composante longitudinale du champ électrique est nulle* :

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = -\partial_t \mathbf{A}'_{\parallel} - \nabla V' = 0 \quad (11)$$

L'onde électromagnétique est donc purement transversale au niveau des champs. Le choix de jauge poincaréen («*éther relativiste*», $V' \neq 0$ ou jauge de Lorenz) et einsteinien («*suppression de l'éther*» $V' = 0$ ou jauge transverse) est ainsi respectivement :

$$(A_{\parallel} = V = 0 \text{ mais } A'_{\parallel} = V' \neq 0)_{\text{Poincaré}}, \quad (A_{\parallel} = V = A'_{\parallel} = V' = 0)_{\text{Einstein}} \quad (12)$$

Dans l'optique des fronts d'onde la jauge *implicitement* adoptée par Einstein est la jauge de Coulomb dite *transverse*, $\text{div} \mathbf{A} = \text{div} \mathbf{A}' = 0$, qui n'est pas covariante relativiste (la représentation einsteinienne des fronts d'onde ne tient pas compte de la relativité de la simultanéité).

3. Convention de synchronisation et expérience de Sagnac

Rappelons tout d'abord la convention de synchronisation d'Einstein qui est définie aux paragraphes 1, 2 & 3 de son article fondamental de 1905 [2]. Il considère d'abord (§1) le système $K(x, y, z, t)$. «*Supposons qu'un rayon lumineux parte à l'instant t_A de A vers B qu'il soit réfléchi à l'instant t_B et qu'il soit de retour en A à l'instant t_A^* . Les deux horloges sont donc synchrones si*»

$$t_B - t_A = t_A^* - t_B \quad (\text{a}), \quad t_1 = \frac{1}{2}(t_0 + t_2) \quad (\text{b}) \quad (13)$$

L'Éq. (13a) écrite par Einstein peut aussi s'écrire (13b) en numérotant les 3 événements (0, 1, 2 respectivement l'émission, la réflexion et le retour). Avec les notations de Poincaré (en supposant $A = O$), on a $t^+ = t_B - t_A = t^- = t_A^* - t_B$, $\Delta t = 0$ autrement dit le «*temps aller = le temps retour*». Einstein conclut son §1 : «*Ce qui est essentiel c'est définir le temps au moyen d'horloges au repos dans un système au repos ; à cause de cette relation étroite avec le système au repos, nous appellerons le temps que nous venons de définir « temps du système au repos »*». Einstein définit de la même manière le temps au repos de l'autre système K' : «*Nous supposons de même que le temps τ du système en mouvement $K'(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ soit déterminé au moyen de la méthode des signaux lumineux décrite au paragraphe 1, pour tous les points de ce système K' où se trouvent des horloges au repos relativement à ce dernier*». On a donc

$$\tau_B - \tau_A = \tau_A^* - \tau_B \quad (\text{a}), \quad \tau_1 = \frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) \quad (\text{b}) \quad (14)$$

Einstein écrit explicitement (14b) en numérotant les événements (première équation de son §3). Avec les notations de Poincaré (en supposant $A' = O'$), on a $t'^+ = t'^-$, $\Delta t' = 0$. L'élément capital est que la *vitesse RELATIVE* β n'intervient pas dans la procédure einsteinienne de synchronisation (ni dans K , ni dans K'). Comme l'écrit Einstein dans son paragraphe 3, dans chaque système du couple relativiste on a une onde sphérique («*temps aller = le temps retour*», 13 et 14) [2] : «*Soit envoyée à l'instant $t = \tau = 0$ une onde sphérique de l'origine commune, à cet instant, des coordonnées des deux systèmes, qui se propage dans le système K avec la vitesse c . Si (x, y, z) est un point entraîné par cette onde, on aura $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$. En transformant cette équation à l'aide de nos équations de transformation, nous aurons, après un calcul simple $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2 \tau^2$. L'onde en question reste par conséquent aussi dans le système en mouvement K' une onde sphérique dont la vitesse de propagation est c .*» Einstein ne se

soucie donc manifestement pas du fait que la TL d'un front (sphérique) d'événements simultanés ne peut pas donner un front (sphérique) d'événements simultanés car ce qu'il a en tête ce sont des fronts sphériques de synchronisation : tout se passe comme s'il y avait une source dans chaque système (il ne précise pas dans quel système la source est au repos) et que chacune des ces sources (S et S') émettait dans son système propre un front sphérique (principe d'identité voir [8]).

Selon Poincaré la distinction fondamentale entre une optique prérelativiste (non relativiste) et une optique relativiste est que dans le premier cas les fronts sphériques se *transforment* (Galilée) en front sphériques (concentriques ou non-concentriques) tandis que dans le second cas les fronts sphériques se *transforment* (Lorentz) en fronts ellipsoïdaux. La découverte de l'ellipse (1906) n'est donc pas marginale mais constitue la substance même de la théorie *relativiste* de l'espace–temps de Poincaré (développement historique [9]). Le modèle que Poincaré a en tête est directement issu de l'expérience de Michelson : le mouvement de translation de la Terre relativement à un éther par définition au repos (il distingue radicalement « éther » et « espace absolu »). Pendant 12 ans (1900–1912), Poincaré considère le modèle de deux stations A et B fixées dans un système supposé en mouvement par rapport à l'éther. Cela implique une prise en considération, dans la procédure d'échange de signaux lumineux entre A et B , du concept de vitesse RELATIVE par rapport à l'éther qui n'a aucun sens dans la cinématique d'Einstein. Comme chez Einstein, il faut installer une source S et S' dans chaque système (en O et en O') pour synchroniser les horloges au repos de chaque système. La différence d'implémentation de la simultanéité est qu'il y aura toujours un des systèmes du couple (choisissons K puisque nous sommes dans le cas de l'ellipse inverse, Fig. 2b) où les fronts (autour de A et de B) seront ellipsoïdaux et un système (K') où les fronts seront sphériques (au repos relatif par rapport à l'éther ici K'). Donc concrètement, selon Poincaré, la source $S \equiv O \equiv A$ de l'*interféromètre de Michelson émet des fronts ellipsoïdaux dans le système de la Terre (K)* et « sphériques » dans le système K' . Dans la représentation directe (Fig. 1), les sphères sont concentriques et les ellipsoïdes « non-concentriques » (non-homothétiques pour utiliser le langage de Poincaré). Dans la représentation inverse (Fig. 2b), les sphères qui émanent de S vues dans K' sont non-concentriques (le signal ne revient pas au même endroit, on aura successivement $A'_0, B'_0, A'_1, B'_1, A'_2, B'_2$ avec une distance constante $A'B'$) tandis que les ellipsoïdes qui se forment autour de la source $S \equiv A$ au foyer dans K sont homothétiques (idem autour de B). Il s'agit donc bien d'une ellipse de synchronisation au sens où le signal *revient* de B en A autrement dit à la source S dans K (changer le sens de la vitesse de la lumière revient à évaluer le temps retour t^- avec B à l'autre foyer). L'ellipse dont la source est au FOYER constitue un modèle où les horloges de K ne sont pas synchronisées de telle manière que le « *temps aller = le temps retour* ». Il suffit d'inverser (5), (6) :

$$\left(t_M = \frac{t^+ + t^-}{2} = \gamma t' \right)_{\text{Michelson}} \quad (\text{a}), \quad \left(\Delta t = \frac{t^+ - t^-}{2} = \beta \gamma x' = \beta \gamma A'B' \cos \theta' \right)_{\text{Sagnac}} \quad (\text{b}) \quad (15)$$

Selon Poincaré, les deux horloges A et B sont synchrones si les temps qu'elles mesurent, $t^+ = t_B - t_A$ et $t^- = t_A^* - t_B$, vérifient les relations (15). La convention de synchronisation de Poincaré (15b) n'est donc pas la même que celle d'Einstein (13). Selon Poincaré, la première relation (15a) explique directement le résultat nul de l'expérience de Michelson (même temps aller–retour dans les deux directions perpendiculaires). Nous allons montrer que la seconde (15b) peut expliquer le résultat non-nul de l'expérience de Sagnac.²

Comment la différence entre les deux conventions peut-elle se manifester ? Il faudrait mettre en évidence une différence dans les temps de parcours (aller et retour) qui ne peut être mesurée qu'au moyen d'horloges A et B dont la synchronisation dépend précisément de la convention choisie. On tombe alors dans l'impasse bien connue de l'impossibilité logique de mesurer le « one way speed of light ». Pour éviter le « cercle logique », la seule solution est d'imaginer un « cercle physique », autrement dit un parcours fermé, auquel cas le temps de parcours serait évalué par la même horloge (théorique) $A = B$. Une telle expérience existe : c'est l'expérience de Sagnac. Contrairement à l'expérience de Michelson, l'expérience de Sagnac (1913) permet de comparer un temps aller simple « one way » t^+ avec un temps retour simple « one way » t^- (15b). Citons Langevin [10] : « *On sait que M Sagnac fait interférer*

² Le contraste entre les deux conventions de synchronisation peut être mis en évidence avec le paramètre ϵ de Reichenbach $t_B = \epsilon(t_A^* + t_A)$, $\tau_{B'} = \epsilon'(\tau_{A'}^* + \tau_{A'})$ avec $0 \leq \epsilon < 1$ et $0 \leq \epsilon' < 1$. Selon Einstein : $\epsilon = \epsilon' = \frac{1}{2}$ et selon Poincaré : $\epsilon' = \frac{1}{2}$ mais $\epsilon = \frac{1 + \beta \cos \theta'}{2}$ dépend de la vitesse RELATIVE. La convention einsteinienne stipule que les deux systèmes sont synchronisés *comme si ils étaient au repos* l'un par rapport à l'autre. Une énigme historique est ainsi résolue : la dualité de Poincaré « temps vrai (sphérique)–temps local (ellipsoïdal) » n'est pas superposable à la dualité d'Einstein–Minkowski « temps propre–impropre » car le temps propre est attaché à la source tandis que le temps vrai est attaché au « milieu » (théorie relativiste de l'éther).

deux rayons lumineux issus d'une même source après leur avoir fait parcourir, grâce à des miroirs convenablement placés, un même circuit fermé dans des sens opposés. Il constate que la mise en rotation avec la vitesse angulaire ω de la plateforme qui porte l'ensemble du système optique produit un déplacement des franges qui correspond à une différence $\frac{4\omega A}{c^2}$ entre les durées de parcours du même circuit dans les deux sens ($t^+ - t^-$), A représentant l'aire intérieure au circuit projeté sur un plan normal à l'axe de rotation et c la vitesse de la lumière ». La source lumineuse et la plaque photographique sont entraînées (dans le système K) avec une vitesse constante en intensité (mais pas en direction) par rapport au système K' du laboratoire. Sagnac obtient avec un calcul prérelativiste avec $v = R\omega$, $A = \pi R^2$, $R = R'$, $A' = A$:

$$\Delta t = \frac{t^+ - t^-}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi R}{c+v} - \frac{2\pi R}{c-v} \right) = \frac{1}{2} 2\pi R \frac{2v}{c^2 - v^2} \approx \frac{2\pi v R}{c^2} \approx \frac{2\pi \omega R^2}{c^2} \approx \frac{2\omega A}{c^2} \quad (16)$$

Le terme elliptique de Poincaré (15b) donne un résultat exact au second ordre avec

$$(\Delta t)_{\text{Poincaré}} = \frac{t^+ - t^-}{2} = \gamma \beta 2\pi R' = \gamma \frac{v}{c^2} 2\pi R' = \gamma \frac{2\omega A'}{c^2}$$

(il suffit de décomposer le mouvement de rotation en une série de petits mouvements de translation uniforme et d'intégrer sur l'ensemble du contour). Avec les vitesses petites du plateau $\gamma \rightarrow 1$ on retrouve le résultat mesuré au premier ordre par Sagnac $(\Delta t)_{\text{Poincaré}} \approx \frac{2\omega A}{c^2}$. Par contre en vertu du choix einsteinien d'implémentation de la simultanéité le « temps infinitésimal aller » = le « temps infinitésimal retour » ($dt = 0$) dans chaque système inertiel successif (l'observateur et la source sont sur le plateau K). Avec une série de sphères infinitésimales, la cinématique einsteinienne *restreinte* donne un résultat nul $\Delta t = 0$, comme Langevin et Sagnac l'avaient remarqué. Selon Sagnac son expérience invalidait la cinématique einsteinienne. En fait, comme l'a montré Langevin, elle impose d'utiliser la relativité générale. L'expérience de Sagnac n'invalidé donc pas la relativité d'Einstein, dans toute sa généralité, mais son résultat positif (1913) est directement compatible avec l'implémentation de la simultanéité sous-jacente à l'ellipse de Poincaré (mort en 1912).

4. Conclusion : Einstein, Poincaré et le GPS

Seulement récemment la conception relativiste de l'espace-temps a pu être mise en place de façon pratique avec le GPS (Global Positioning System). L'effet Sagnac, forme concrète mesurable du terme elliptique de Poincaré y joue un rôle important [11] : « *The Sagnac effect has an important influence on the system. Since most GPS users are at rest or nearly so on earth's surface, it would be highly desirable to synchronize clocks in a rotating frame fixed to the earth. However because the earth rotates, this is prevented by the Sagnac effect, which is large enough in the GPS to be significant. [...] Thus the Sagnac effect forces a different choice for synchronization convention.* » Le débat Poincaré–Einstein passe ainsi (enfin !) du statut de polémique historique stérile à celui de question scientifique féconde et actuelle : quel est le meilleur choix de jauge (12) ou de l'implémentation de la simultanéité (13), (15b) pour un problème physique aussi concret que le GPS ?

Remerciements

Je remercie Jean Reignier, Germain Rousseaux, Nicolas Vansteenkiste et Jacques Villain.

Références

- [1] H. Poincaré, Sur la dynamique de l'électron, C. R. de l'Ac. des Sci. de Paris 140 (juin 1905) 1504–1508.
- [2] A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Ann. d. Ph. 17 (1905) 892–921 (traduction française de Solovine).
- [3] H. Poincaré, La dynamique de l'électron, R. Gén. des Sciences Pures et Appl. 19 (1908) 386–402.
- [4] N. Abramson, Ellipsoids in holography and relativity, in : I. Prigogine, S.A. Rice (Eds.), Modern Nonlinear Optics, J. Wiley & Sons, 2001.
- [5] Y. Piereaux, Einstein's spherical light waves versus Poincaré's ellipsoidal light waves, London, September 2004, Annales de la Fondation de Broglie, vol. 30, n° 3–4, 2005 (<http://www.ensmp.fr/aflb/AFLB-303/table303.htm>).
- [6] Y. Piereaux, La cinématique relativiste avec photons d'Einstein et la cinématique relativiste avec ondes électromagnétiques de Poincaré, les Nouvelles d'Archimède, USTL, Octobre, Novembre, Décembre 2005.
- [7] Y. Piereaux, G. Rousseaux, Les structures fines de l'électromagnétisme et de la relativité, <http://arxiv.org/abs/physics/0601023>.

- [8] Y. Piereaux, La « structure fine » de la relativité restreinte, L'Harmattan, Paris, 1999, 432 p. (PhD, ULB).
- [9] Y. Piereaux, La cinématique relativiste sous-jacente à l'ellipse de Poincaré, <http://arxiv.org/abs/physics/0601090>, publié dans le bulletin de l'IIHE, ULB, janvier 2006.
- [10] P. Langevin, Sur la théorie de la relativité et l'expérience de M. Sagnac, C. R. Acad. Sci. 173 (1921) 831.
- [11] N. Ashby, Introduction to relativistic effects in the global positioning system, in: B.W. Parkinson, J.J. Spilker (Eds.), The Global Positioning System, 1996.