



Few body problem / Problème à petit nombre de corps

Foreword

The few-body problem, that is the search for a solution of the equations of motion of a few interacting particles, is a long standing, notoriously challenging problem, already in classical physics. In quantum physics, it was historically raised in particular in the context of nuclear physics, where large values of the scattering lengths (for example, for the neutron–neutron interaction) permit one to replace the interactions by contact conditions on the wavefunction where two particle positions coincide, the Hamiltonian differential operator being then simply the one of the non-interacting system. In this zero-range approach, a breakthrough was performed in 1971, when Efimov solved the model for three bosons (and two years later for three arbitrary particles) in the infinite scattering length limit, and discovered the existence of an infinite number of trimer states with an accumulation point in the energy spectrum.

Theoretical and experimental progress has been achieved since this breakthrough, and was recently boosted by the possibility to study in the lab the few-body problem in the large scattering length regime, using a magnetic Feshbach resonance for ultracold atoms. One of the advantages of an experimental study is to give access to the so-called three-body parameter, setting up the global energy scale of an otherwise geometric Efimov spectrum. This three-body parameter depends on the microscopic details of the atomic interactions and cannot be determined within the theoretical frame used by Efimov. In this Special Issue, the experimental group of Lev Khaykovich, in collaboration with the theorist Servaas Kokkelmans, reports on investigations of the dependence of the three-body parameter with the nuclear spin for a bosonic isotope of lithium. Another direct question raised by the experiments is the importance of deviations of the trimer spectrum from the universal asymptotic formula obtained by Efimov, which is in principle valid only for the most weakly bound trimers. As shown by Pascal Naidon and Masahito Ueda in this Special Issue, adjusting with theory the experimental data obtained for two Efimov trimer states (binding three different atomic sublevels of a fermionic isotope of lithium) is challenging, and may lead to the introduction of an energy dependent three-body parameter. There is however a limiting physical case, the so-called ultra-narrow Feshbach resonances, where the three-body parameter may be evaluated analytically, in terms of the effective range of the two-body scattering problem. This is one of the results presented by Christophe Mora, Alexander Gogolin and Reinhold Egger, that may be obtained from their analytical solution for the zero energy three-boson problem. Finally, the three-body problem may of course be considered in a variety of configurations, e.g. the particles may experience tunneling from one lattice site to another rather than propagate in free space, and this may take place along one spatial dimension rather than three, as studied by Giuliano Orso, Evgeni Burovski and Thierry Jolicœur. Such few-body lattice studies give insight in the many-body properties of the Hubbard model.

The situation is more open in the four-body problem, which is still under active investigation by the nuclear physics community. Efficient reformulation of the problem, in terms of the Faddeev–Yakubovsky integral equations, remarkably allows one to numerically solve this problem exactly for realistic real space interaction potentials, see the contribution of Jaume Carbonell, Arnoldas Deltuva and Rimantas Lazauskas. The four-body problem has also recently received much interest in the zero-range limit. One of the issues is to determine the minimal number of interaction parameters that one has to introduce to make the problem universal: For four bosons, does one have to introduce a four-body parameter, or are the three-body parameter and the scattering length sufficient? Recently, this problem was considered in free space, but it also relevant for four particles in a harmonic trap, see the contribution of Simon Tölle, Hans-Werner Hammer and Bernard Metsch in this Special Issue. Another perspective is to realize that universal physics is not the only issue in cold atom experiments, as experimentalists have often access to the lowest energy bound states. As Pascal Naidon and Masahito Ueda did here for the three-body problem, one can try to include in the four-body problem a realistic description of the experimentally used magnetic Feshbach resonance, within the so-called two-channel model, see the contribution of Christophe Mora, Yvan Castin and Ludovic Pricoupenko.

Finally, interest has also drifted towards the few-body problem with five or more particles, to eventually make the link with the many-body problem. In the absence of the Efimov effect, that is here for equal mass two-component fermions, see the contribution of Dorte Blume and Kevin Daily, efficient numerical techniques and extrapolation to the zero-range limit give access to the low lying universal energy levels for up to six particles in a trap, with an excellent precision allowing a test of approximate many-body calculations.

As exemplified by this Special Issue, studies on the few-body problem are thus rapidly developing, in various promising directions, both theoretically and experimentally. We warmly thank all the authors for their contributions, and we are very grateful to Jacques Villain (Coordinator of the Editorial Committee for the Physics series) for having accepted this Special Issue of the *Comptes Rendus de l'Académie des sciences*, to Christine Gray (Publishing Coordinator at Elsevier) for having edited it, and, last but not least, to Jean Dalibard (Member of the French Academy of Sciences) for having proposed it.

Avant-propos

Le problème à petit nombre de corps, c'est-à-dire la résolution des équations du mouvement pour un petit nombre de particules en interaction, est un thème de recherche ambitieux historiquement introduit en mécanique classique. En mécanique quantique, le problème a émergé en particulier en physique nucléaire, où a été introduite l'idée de remplacer les interactions par des conditions de contact sur la fonction d'onde (conditions aux limites aux points où deux particules se rencontrent), l'opérateur Hamiltonien du système étant par ailleurs celui du système sans interaction. Ceci est un modèle légitime dans le cas d'interactions résonnantes à basse énergie, lorsque les longueurs de diffusion entre les particules sont bien plus grandes que la portée de l'interaction. C'est dans ce cadre qu'Efimov a effectué une percée en 1971, en résolvant le cas de la longueur de diffusion infinie, pour trois bosons puis pour trois particules quelconques deux ans plus tard. Il a découvert ainsi le phénomène qui porte son nom, l'existence d'un nombre infini d'états trimères, dont le spectre forme asymptotiquement une suite géométrique tendant vers zéro pour les grands nombres quantiques.

La compréhension du problème a bien progressé depuis, à la fois d'un point de vue théorique et expérimental, et se développe avec une vigueur particulière depuis que les atomes froids permettent de réaliser en laboratoire, grâce aux résonances de Feshbach magnétiques, des systèmes à petit nombre de corps avec de très grandes longueurs de diffusion. En particulier, les mesures donnent accès à l'échelle d'énergie, c'est-à-dire au facteur global, apparaissant dans la formule d'Efimov. Cette échelle d'énergie, reliée au fameux "paramètre à trois corps", dépend des détails microscopiques de l'interaction, sa valeur n'est donc pas prédite par la théorie d'Efimov. Dans ce Dossier, Lev Khaykovich et son groupe, en collaboration avec le théoricien Servaas Kokkellmans, présentent justement une étude expérimentale de la dépendance du paramètre à trois corps en le spin nucléaire des atomes, pour un isotope bosonique du lithium. Une autre question soulevée par les expériences est l'importance des déviations entre le spectre de trimères vrai et la formule asymptotique d'Efimov valable seulement pour les états suffisamment peu liés. Comme le montrent Pascal Naidon et Masahito Ueda dans ce Dossier, l'ajustement de la théorie aux mesures effectuées sur deux états trimères (liant trois sous-niveaux du lithium fermionique) conduit à l'ajout d'ingrédients nouveaux, par exemple un paramètre à trois corps dépendant de l'énergie. Il y a cependant un cas limite, celui des résonances de Feshbach très étroites, pour lequel le paramètre à trois corps peut être exprimé en termes de la portée effective de l'amplitude de diffusion à deux corps. C'est l'un des résultats que l'on peut déduire de la solution analytique du problème à trois bosons à énergie nulle, obtenue par Christophe Mora, Alexander Gogolin et Reinhold Egger pour une longueur de diffusion quelconque. Pour terminer, le problème à trois corps peut se présenter bien sûr dans une grande variété de situations, par exemple pour des particules qui passent par effet tunnel d'un site d'un réseau à un autre (au lieu de se propager librement dans l'espace libre), et ceci en dimension un plutôt que trois, voir la contribution de Giuliano Orso, Evgeni Burovski et Thierry Jolicœur dans ce Dossier. Ces études du problème à petit nombre de corps dans un réseau peuvent ainsi apporter un éclairage fort utile sur les propriétés à N corps du modèle de Hubbard.

La problématique est encore plus ouverte dans le cas de quatre corps. Elle fait l'objet d'efforts continus de la communauté de physique nucléaire, où la reformulation de l'équation de Schrödinger sous la forme intégrale de Faddeev–Yakubovsky permet, de façon remarquable, de résoudre numériquement un problème à quatre corps "réaliste" avec de vrais potentiels $V(r_{ij})$, voir la contribution de Jaume Carbonell, Arnoldas Deltuva et Rimantas Lazauskas. Dans la limite de portée nulle, le problème à quatre corps est également très à l'honneur actuellement. Pour le système à quatre bosons, l'un des enjeux est de déterminer le nombre minimum de paramètres rendant le problème universel : faut-il introduire un paramètre à quatre corps, ou bien la longueur de diffusion et le paramètre à trois corps suffisent-ils ? Récemment, la question a été abordée dans l'espace libre, mais elle se pose aussi pour des particules piégées, voir la contribution de Simon Tölle, Hans-Werner Hammer et Bernard Metsch dans ce Dossier. Un autre point de vue fructueux est de réaliser que la compréhension de la physique universelle n'est pas le seul enjeu pour les atomes froids, car l'expérience donne accès le plus directement aux premiers états liés, qui peuvent être sensibles aux détails microscopiques de l'interaction. Comme Pascal Naidon et Masahito Ueda l'ont fait pour le problème à trois corps, on peut donc chercher à inclure dans le problème à quatre corps une représentation réaliste des résonances de Feshbach magnétiques à l'aide d'un modèle à deux voies, ce qui conduit à une équation intégrale soluble numériquement, voir la contribution de Christophe Mora, Yvan Castin et Ludovic Pricoupenko.

À plus long terme, se pose la question du problème à cinq corps, à six corps, etc, jusqu'au raccordement avec le problème à N corps. En l'absence de phénomène d'Efimov, dans ce Dossier dans le cas de fermions à deux composantes de masses égales, Dorte Blume et Kevin Daily ont calculé les premiers états propres universels d'un système comportant jusqu'à six particules piégées, en utilisant des méthodes numériques très efficaces et une extrapolation à la limite de portée nulle. La grande précision des résultats obtenus permet de tester les études numériques approchées du problème à N corps.

Comme le montre donc ce Dossier, le problème à petit nombre de corps pour des interactions résonnantes se développe avec vitalité dans plusieurs directions prometteuses, aussi bien d'un point de vue théorique qu'expérimental. Nous sommes très redevables aux auteurs de leurs belles contributions, nous remercions chaleureusement Jacques Villain (Coordinateur du Comité éditorial pour la série Physique) d'avoir accueilli ce Dossier dans les Comptes Rendus de l'Académie des sciences, Christine Gray (Coordonnatrice de la

publication chez Elsevier) d'en avoir assuré l'édition, et en particulier Jean Dalibard (membre de l'Académie des sciences) d'en avoir fort à propos suscité la création.

Yvan Castin

Laboratoire Kastler-Brossel, École normale supérieure, CNRS and UPMC, 24, rue Lhomond, 75231 Paris, France

E-mail address: yvan.castin@kb.ens.fr

Ludovic Pricoupenko

Laboratoire de physique théorique de la matière condensée, UPMC and CNRS, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

E-mail address: pricoupenko@lptmc.jussieu.fr

Available online 28 January 2011