



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

Comptes Rendus Physique

www.sciencedirect.com



Quantum Hall Effect and Metrology / Effet Hall quantique et Métrologie

Foreword

This special issue is about the Quantum Hall effect (QHE) and its implication for resistance metrology. The remarkable accurate quantization of the Hall resistance of a two-dimensional (2D) electron gas under a high perpendicular magnetic field at low temperature, called the Quantum Hall effect, has been discovered in 1980 by K. von Klitzing. This has given a new unit of resistance: the Klitzing, $R_K = 25812.807$ Ohms. Although the properties of a 2D electron system in a magnetic field were already extensively studied theoretically, the theory failed to predict the Quantum Hall effect. The formation of large Hall resistance plateaus quantized as h/pe^2 , p an integer, upon varying density or magnetic field came as an experimental surprise. Counter-intuitively, the accuracy was found stabilized by disorder, the larger the disorder the wider and more accurate the quantization of the Hall plateaus.

In its simplest form the Quantum Hall Effect requires few physical ingredients: charges confined in a plane and in a perpendicular magnetic field, obeying Fermi statistics and experiencing a random potential. It is thus expected to be a universal phenomenon. It is even expected to hold for a cold 2D atomic gas in rotation where the Coriolis force replaces the Lorenz force. First observed in a 2D electron gas (2DEG), realized in semi-conductor Si-MOSFETs, it was soon after found in 2DEGs formed in a GaAs/Ga(Al)As semiconductor heterojunction, followed by observations in InGaAs/InP and in other III–V semiconductor heterojunctions. Very recently, in 2005, the Quantum Hall Effect was observed in graphene, a monolayer of carbon atoms arranged along a honeycomb lattice. Here not only the material is different but also the electron dynamics: the Schrödinger equation being replaced by a pseudo-ultrarelativistic Dirac equation, further extending the universal Physics of the Quantum Hall phenomenon. The phenomenon also occurs when the electron interaction is important. Interestingly, the Coulomb interaction has not the effect to waive the quantization but instead to favor the appearance of new Hall plateaus, still quantized, but at new fractions of hq/pe^2 , where q and p are integers. Regarding accuracy, comparisons at a metrological level of quantized Hall resistance arising from materials of different nature, from different samples of same nature, and comparison of the integer and fractional effect integer, all showed universality at an accuracy level at present only limited by measurements.

But does universality warrants that the Klitzing constant R_K is actually equal to the ratio h/e^2 ? This is an important question in the context of the project of redefinition of the physical units kg, Ampere, Kelvin and mole directly linked to fixed values of h , e , k_B , N_A (c being already fixed). One of the motivations of this new definition of units is to get rid of the kg definition based on the mass of the International Prototype that drifts in time. To this end, and before proceeding to the change of the S.I. units, it is important to know the consistency of the determination of the fundamental constants obtained through various remarkable quantum effects, with a target uncertainty of 10^{-8} . The Quantum Hall effect is one of them. For example, the von Klitzing constant R_K is directly linked to the fine structure constant α through the fixed vacuum permittivity and the fixed speed of light. Comparison with determination of α based on other physical effects leads to small discrepancies (about one standard uncertainty) and it is worthwhile analyzing the source of these. The question of a possible deviation of the von Klitzing constant with respect to h/e^2 is a good opportunity to go back to the underlying principles which theoretically support the equality. First there are what we could call the trivial corrections due to a finite longitudinal conductance or imperfect sample geometry. They are usually extremely small and the efficient metrology measurement strategy developed during few decades can easily get rid of them. At a fundamental level there is up to now no argument against the conjecture of a pure equality, but there is no proof of it. General arguments based on gauge invariance and on topological Chern numbers are strongly supporting it. A mathematical proof can be made for non-interacting electrons in a disordered medium (as it is the case in a real sample). This is already quite an impressive result, but the technical difficulty to elaborate a possible proof for interacting electrons (and electrons do interact) make it still outstanding. Also possible, are Quantum Electrodynamics corrections. They would lead to extremely tiny effect ($\sim 10^{-20}$), typically α times the square of the ratio of the magnetic flux on the electron Compton wavelength to flux quantum h/e . Awaiting for a definitive answer, the following articles of this special issue are aimed at enlightening the reader interested by these fundamental questions and helping him to make up his mind.

Two articles discuss the foundation of the quantum Hall resistance quantization, an article describes in details how to achieve measurements with metrological accuracy and how to check the universality, this is followed by an introductory article on graphene and finally by an article, not on QHE, but on the determination of α in atomic physics.

The first article, by B. Douçot, gives a pedagogical introduction to the Quantum Hall Effect, particularly in the case of a smooth random potential, and review the topological arguments supporting $R_K = h/e^2$: the Laughlin gauge invariance argument and the Hall conductance viewed as a topological invariant (Chern number) as first proposed by D. Thouless. The second article presented by S. Bieri and J. Fröhlich deals with the electron interaction in the more general Field Theory approach. The importance of the chiral edge currents which carry the Hall current is emphasized. The finite number of modes leads to a rational conductance in conductance quantum units. Extra predictions of the field theory approach concern interference experiments using tunneling between edge channels whose observation would be of great value.

The third article by W. Poirier et al. is on the application of the quantum Hall effect to resistance metrology. It presents the importance of QHE in the SI units, the challenge of closing the metrology triangle relating voltage, frequency and currents by combining Josephson effect, QHE et single electron pumps, a brief presentation of the QHE and of universality tests. A particular emphasis is laid on the powerful technique of Quantum Hall arrays developed first at the Laboratoire national d'essais (Trappes). The cryogenic current comparator which allows one to transfer R_K to practical 100 Ohms resistors, the ac QHE and, not least, the calculable Thompson–Lampard capacitor which allows direct determination of the QHE R_K . Finally the exciting perspective offered by bi- or mono-layer of graphene for quantum Hall metrology are discussed.

The fourth article by M.O. Goerbig presents the physics of graphene: the energy momentum dispersion relation is that of electron obeying a massless Dirac equation. It gives rise to the so-called anomalous quantum Hall effect and half integer quantization of the Hall resistance in units of $R_K/4$, the factor 4 coming from the unlifted (orbital) valley degeneracy characteristic of the underlying honeycomb carbon atom lattice and from the spin degeneracy. The article also includes a discussion of the implication of spin or valley degeneracy lifting on the edge. The last article by Cadoret et al. is not on QHE, but on the determination of α using atomic Physics methods. It is based on the measurement of the ratio h/m_{Rb} . The cold atom technique allows one to measure accurately the momentum recoil of Rubidium atoms interacting with the photons of a frequency chirp standing wave. Combined with the very well-known Rydberg constant this allows to provide one of the most accurate measure of α . It is weakly affected by a possible QED correction error (the most accurate determination of α is based on the electron gyromagnetic anomaly which was found in the past affected by QED calculation errors and fixed now). The article gives also a useful overview of all α determinations, in particular that given by the QHE which yields a value close but about one standard uncertainty from h/m_{Rb} . The article ends by pointing the necessity to revisit the determination of the Josephson constant $K_J = 2e/h$.

The project to redefine the S.I. units based on fundamental physical constants gives rise to very challenging and exciting fundamental questions. In this context, we hope the present series of articles on the quantum Hall effect and metrology, although not exhausting, will help the reader to have a clearer view on the status of this field.

Avant propos

Ce Numéro Spécial est un dossier sur l'Effet Hall Quantique (EHQ) et son implication pour la métrologie de résistance. La quantification remarquable de la résistance Hall dans un gaz d'électron bidimensionnel (2DEG) sous fort champ magnétique à basse température, un phénomène appelé Effet Hall Quantique, a été découvert en 1980 par K. von Klitzing. Cela a donné lieu à une nouvelle façon de définir l'unité de résistance : le Klitzing $R_K = 25812.807$ Ohms. Bien que les propriétés remarquables d'électrons bidimensionnels sous champ magnétique aient été auparavant étudiées théoriquement en détail, la théorie n'avait pu prédire l'E HQ. La formation de large plateaux de résistance Hall quantifiés comme h/pe^2 , p entier, en variant le champ ou la densité électronique fut une surprise expérimentale. De plus, de manière contre intuitive, la précision de la quantification est favorisée par le désordre.

Dans sa forme la plus simple l'Effet Hall Quantique requiert peu d'ingrédients : des charges confinées à un plan sous champ magnétique perpendiculaire, obéissant la statistique de Fermi et soumises à un potentiel aléatoire. Le phénomène apparaît ainsi universel. Et on s'attend même à l'observer avec des atomes froids confinés à 2D qui seraient en rotation et où la force de Coriolis remplacerait la force de Lorentz. D'abord observé avec des électrons dans un semiconducteur MOSFET Silicium, il a été sitôt après observé pour des électrons confinés dans une hétérojonction de semiconducteurs AsGa/AsGaAl, suivis d'observations dans InGaAs/InP et dans d'autres hétérojonctions de semi-conducteurs III–V. Plus récemment, en 2005, il a été observé dans le Graphène, une monocouche d'atomes de carbone arrangés en un réseau périodique de structure type nid d'abeille. Ici, non seulement le matériau hôte est très différent, mais la dynamique des électrons l'est aussi : l'équation de Schrödinger est remplacée par une pseudo-équation de Dirac ultra-relativiste (particules sans masse). Ceci étend encore l'universalité de l'E HQ.

Le phénomène se produit aussi quand les interactions entre les électrons sont importantes. Il est alors remarquable que l'interaction de Coulomb n'a pas pour conséquence d'altérer la quantification de la résistance, mais simplement de donner lieu à de nouveaux plateaux, eux aussi quantifiés, mais en fraction hq/pe^2 cette fois, où q and p sont des entiers. Concernant la précision de la quantification, des comparaisons à un niveau métrologique ont été faites pour des matériaux de différente

nature, pour différents échantillons de même nature, et aussi entre l'effet Hall entier et l'effet Hall fractionnaire. Toutes ont montré l'universalité à un très haut niveau de précision seulement limité par la mesure.

Mais est-ce que l'universalité garantie que la constante de von Klitzing R_K est vraiment le rapport h/e^2 ?

C'est une question importante dans le contexte du projet de redéfinition des unités physiques : le kg, l'Ampère, le Kelvin and la mole qui seraient directement liées à des valeurs fixées de h , e , k_B , N_A (c ayant été déjà fixé). Une des motivations est de se défaire de l'actuelle définition du kilogramme basée sur la masse du prototype international qui dérive dans le temps. Avant de procéder à un tel changement, il est important de s'assurer de la cohérence de la détermination des constantes fondamentales obtenues à travers différents effets physiques quantiques avec une incertitude cible de 10^{-8} . L'effet Hall quantique est un de ceux-là. Par exemple, R_K est directement lié à la constante de structure fine α à travers la permittivité du vide (fixée) et la vitesse de la lumière (fixée). Comparer avec d'autres déterminations de α basées sur d'autres effets physiques donne des petites différences (de l'ordre d'une incertitude standard) et il est raisonnable d'examiner la source de celles-ci.

La question pourrait se poser d'une déviation possible de la constante de von Klitzing par rapport à h/e^2 . C'est en tout cas une bonne opportunité pour revenir sur les principes fondamentaux supportant théoriquement l'égalité. D'abord, la déviation pourrait provenir de corrections triviales dues à la conductivité longitudinale finie et des imperfections géométriques de l'échantillon. Les corrections sont généralement extrêmement petites et des stratégies efficaces pour ces mesures métrologiques ont été développées depuis plusieurs décades et elles peuvent aisément soustraites. Au niveau fondamental, on ne trouve jusqu'ici pas d'arguments ne supportant pas la conjecture d'une pure égalité mais il n'y a pas de preuve rigoureuse de celle-ci. En effet des arguments généraux basés sur l'invariance de jauge et les nombres topologiques de Chern supportent fortement l'égalité. Une preuve mathématique de l'égalité a été faite dans le cadre d'électrons sans interactions en potentiel aléatoire (comme c'est le cas dans des échantillons réels). Ce résultat est déjà assez impressionnant mais la difficulté technique pour élaborer une preuve possible dans le cas d'électrons interagissant (et c'est le cas en réalité) fait que la réponse est toujours en attente. Des corrections d'électrodynamique quantique pourraient être possible. Elles devraient donner lieu à de très petits effets ($\sim 10^{-20}$), typiquement α fois le carré du flux du champ magnétique appliqué sur une aire de la taille de la longueur Compton divisée par le quantum de flux h/e .

En attendant une réponse définitive, les articles suivants du Dossier Spécial ont pour but d'éclairer le lecteur intéressé par ces questions fondamentales et à l'aider à faire son opinion. Deux articles discutent des fondements de la quantification de la résistance Hall, un article présente en détail comment réaliser les mesures avec une précision à caractère métrologique et comment on peut vérifier l'universalité. Ils sont suivis par un article introductif sur le Graphène et finalement par un article, non sur l'EHQ, mais sur la détermination de α en physique atomique.

Le premier article, par B. Douçot donne une introduction pédagogique à l'Effet Hall Quantique, particulièrement dans le cas d'un potentiel aléatoire lisse et il présente les arguments topologiques supportant l'égalité $R_K = h/e^2$: l'invariance de jauge de Laughlin et la conductance Hall vue comme un invariant topologique (nombre de Chern) comme proposé initialement par D. Thouless. Le second article présenté par S. Biéri et J. Fröhlich traite de l'interaction électronique dans le cadre plus général de la Théorie des Champs. L'importance de courant de bords chiraux qui portent le courant Hall est souligné. Le nombre fini de modes conduit à une conductance égale à un nombre rationnel en unité du quantum de conductance. Des prédictions supplémentaires de cette approche de Théorie des Champs concernent des effets d'interférence en utilisant l'effet tunnel entre état de bord dont l'observation expérimentale serait de grande valeur. Le troisième article par W. Poirier et collaborateurs est sur l'application des l'EHQ à la métrologie. Il présente l'importance de l'EHQ dans le système d'unité S.I., le défi de fermer le triangle métrologique reliant tension, courant et fréquence via les effets Josephson et Hall Quantique et la pompe à électrons uniques. Il contient aussi une brève présentation de l'EHQ, des test d'universalité et une partie importante est consacrée aux réseaux de barres Hall, développées d'abord au Laboratoire National d'Essais (Trappes). L'article décrit aussi le comparateur de courant cryogénique qui permet de transférer R_K à une résistance pratique de 100 Ohms, l'EHQ alternatif et, aussi très important, l'étalon de capacité Thompson-Lampard qui permet une détermination directe du R_K de l'EHQ. Finalement les perspectives très intéressantes du Graphène pour la métrologie sont discutées.

Le quatrième article par M.O. Goerbig présente la physique du Graphène : la relation de dispersion en énergie est celle d'un électron obéissant une équation de Dirac sans masse. Cela donne lieu à l'Effet Hall Quantique anormal avec quantification demi-entière de la résistance Hall en unité de $R_K/4$. Le facteur quatre provient de la dégénérescence de spin et de la double dégénérescence de vallée, cette dernière étant caractéristique du réseau de carbone en nid d'abeille. L'article inclus aussi une discussion sur la levée de cette dégénérescence au bord d'une feuille de Graphène. Le dernier article par Cadoret et collaborateurs n'est pas sur l'Effet Hall Quantique mais sur la détermination de α utilisant les méthodes de la physique atomique. Elle est basée sur la mesure du rapport h/m_{Rb} . La technique d'atomes froids permet la mesure précise de l'impulsion de recul d'atomes de Rubidium interagissant avec les photons d'une onde stationnaire de fréquence balayée. Combinée avec la constante de Rydberg, très bien connue, elle permet une détermination très précise de α . De plus elle est peu affectée par une possible erreur de correction d'électrodynamique quantique (QED) (la plus précise détermination de α est basée sur l'anomalie gyromagnétique de l'électron qui a été affectée dans le passée d'une erreur de calcul QED maintenant éliminée). L'article donne aussi une revue des différentes déterminations de α , en particulier celle donnée par l'EHQ qui donne une valeur de α proche d'une incertitude standard de celle donnée par h/m_{Rb} . L'article fini par une remarque sur la nécessité de revoir la constante Josephson $K_J = 2e/h$.

La proposition de redéfinir les unités S.I. à partir des constantes de physique fondamentale pose de difficiles et passionnantes questions fondamentales. Dans ce contexte nous espérons que ce dossier, bien que non exhaustif, éclairera le lecteur qui souhaiterait avoir une vue plus claire de l'état de ce domaine.

Christian Glattli ^{a,b,*}

^a*Nanoelectronics Group, service de physique de l'état condensé, IRAMIS, CEA Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France*

^b*Mesoscopic Physics Group, Ecole normale supérieure, laboratoire Pierre-Aigrain, 24, rue Lhomond, 75231 Paris, France*
E-mail addresses: christian.glattli@cea.fr, christian.glattli@lpa.ens.fr

Available online 31 May 2011

* Correspondence to: Nanoelectronics Group, service de physique de l'état condensé, IRAMIS, CEA Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France.