



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

## Comptes Rendus Physique

www.sciencedirect.com



## Topological insulators/Isolants topologiques

## Foreword

This dossier of *Comptes rendus Physique* focuses on topological insulators. The discovery and understanding of these new phases of electronic matter is a remarkable example of irruption of an abstract domain of mathematics – topology – in physics, here the study of insulating materials. The founding theoretical work in this domain allowed one to identify a new and subtle order that existed in known materials that had been studied in particular for their thermoelectric and optical properties. While the understanding of phases in solids was elaborated around the notion of symmetry breaking, this new order is of a new type and does not fit into this standard scheme.

According to the band theory of solids, the behavior of an electron in a periodic potential is described quantum mechanically by a Bloch wave function. This function is indexed by a quasi-momentum  $k$  that takes value in the so-called Brillouin zone. This Brillouin zone is periodic in all directions, and thus is a torus. The ensemble of energies for the different values of  $k$  defines an energy band. The topological order of the phases discussed in this issue is associated with insulators: a material possessing an energy gap between bands occupied by electrons and empty bands. The mentioned topological order is a property of the ensemble of Bloch wave functions for the filled bands of the insulator. A topological property is a mathematical property that characterizes an object independently of its continuous deformations. Hence it is a global property that cannot be described locally. In the case of filled bands in a solid, this mathematical object is a vector fiber, consisting of the ensemble of Bloch states over the Brillouin torus. When the momentum  $k$  winds around the torus, the wave functions phase can also wind. This winding does not depend on the chosen path around the torus, and is indeed a topological property, a so-called Chern number. The associated phase is called a Chern insulator. Historically, this topological property was discovered in the context of the quantum Hall effect of two-dimensional electrons submitted to a strong perpendicular magnetic field. It was later extended to other crystalline two-dimensional phases.

For more than two decades, this kind of topological property was considered specific to the quantum Hall effect phases, requiring both two dimensions and time reversal symmetry breaking. The pioneering work of C. Kane and G. Mele in 2005 completely changed this picture by identifying a new kind of topological index in insulators characterized by a strong spin-orbit coupling, without external perturbations. This topological property was the consequence of the constraints imposed by time reversal symmetry on spin 1/2 particles such as electrons, the electronic spectrum being twofold degenerate. The two eigenstates associated with a given energy are called Kramers pairs and possess two opposite spins and momenta. Then the associated constraints on the Bloch wave functions around the Brillouin torus allow two inequivalent possibilities: a trivial standard configuration and a twisted configuration associated with the so-called topological insulators. The first discovered topological insulator is a two-dimensional phase that has been called quantum spin hall effect by analogy with the standard quantum hall effect. Soon after this discovery, several theoretical groups realized that this property was not restricted to two-dimensional phases and extended its definition to three dimensions. This discovery was the starting point of an intense activity to identify topological insulating materials.

The year following the discovery by C. Kane and G. Mele, S.C. Zhang and its collaborators proposed a realization of the quantum spin hall effect in mercury telluride quantum wells. The associated experimental signature was discovered by the group of L. Molenkamp. More recently, this quantum spin hall effect was also detected in InAs/GaSb quantum wells. In parallel, the search for three-dimensional topological materials soon focused on bismuth-based semi-conductors:  $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ,  $\text{Bi}_2\text{Se}_3$  and  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ . Since then, several other topological materials have been proposed and tested. A unique and fundamental property of a topological insulators is the existence of metallic states at their surface. At an interface between a trivial and a topological insulator, the continuity of band wave functions and the topological character of the property of bands on one side of the interface imposes the existence of surface states. These surface metals are remarkable: they are characterized by a linear dispersion relation and a coupling between momentum and spin. The associated particles follow a relativistic equation of motion and are called Dirac quasi-particles. Hence detecting this topological order amounts to characterize experimentally, e.g. by photo-emission, the existence of such Dirac metals at the surface of the insulators.

The first article of this dossier, by Jérôme Cayssol, proposes an introduction to Dirac materials and two-dimensional topological insulators, which are Bloch band insulators realizing the integer Hall (or the spin Hall effect) in the absence of Landau level quantization. The second article, by Michel Fruchart and David Carpentier, introduces the notion of topological

insulators as a property of Bloch wave functions. The article by Siddharth A. Parameswaran et al. focuses on the effect of interactions in Chern insulators, leading to the notion of fractional Chern insulators and provides a comparison with the physics of fractional Hall insulators. A superconductor whose bands below the gap have a topological property is known as a topological superconductor, and possesses remarkable edge states, which are Majorana fermions. The article by Driss Badiane et al. describes the properties associated with such Majorana bound states in out-of-equilibrium Josephson junctions. The following article by Pavan Hosur and Xiaoliang Qi introduces the notion of Weyl fermions, and reviews recent results on three-dimensional Weyl semi-metals. Finally, the article by Akira Furusaki et al. proposes a new and general scheme to define topological matter, by discussing the electromagnetic and thermal responses of the corresponding phases.

## Avant-propos

Ce dossier des *Comptes rendus Physique* constitue un dossier sur les phases isolantes topologiques. La découverte et la compréhension de ces nouvelles phases est un exemple particulièrement remarquable de l'irruption d'un domaine abstrait des mathématiques – la topologie – en physique, ici l'étude des matériaux isolants. Les travaux théoriques fondateurs de ce domaine ont permis de réaliser qu'un ordre subtil existait dans des matériaux connus, et utilisés par ailleurs pour leurs propriétés thermoélectriques ou optiques. Alors que la compréhension des phases des différents matériaux s'est élaborée autour de la notion d'ordre étroitement liée à la présence d'une symétrie, l'ordre topologique n'est pas associé à une brisure de symétrie et bouleverse donc la classification usuelle des phases des solides.

D'après la théorie des bandes des solides, le comportement d'un électron dans le cristal périodique est décrit en mécanique quantique par une fonction d'onde de Bloch. Cette fonction d'onde est paramétrée par un quasi-moment  $k$  qui ne prend que des valeurs restreintes à une région appelée zone de Brillouin. Cette zone de Brillouin est périodique dans toutes les directions, et correspond donc à un tore. L'ensemble des énergies correspondant aux différentes valeurs du moment  $k$  définit une structure de bandes. L'ordre topologique qui nous intéresse caractérise un isolant : un matériau dans lequel un gap en énergie sépare les bandes occupées par des électrons, des bandes vides d'électrons. La topologie en question est celle de l'ensemble des fonctions de Bloch des bandes remplies de l'isolant. Une propriété topologique est une propriété mathématique qui caractérise un objet indépendamment des déformations continues de celui-ci. Il s'agit donc d'une propriété globale, qui ne peut être décrite à partir d'une étude locale de cet objet. Dans le cas des bandes d'un solide, l'objet considéré est l'ensemble des fonctions de Bloch sur le tore de Brillouin, que l'on appelle un fibré. Lorsque le moment s'enroule autour du tore, la phase des fonctions de Bloch peut évoluer en s'enroulant elle-même. Cette enroulement de phase ne dépend pas du chemin choisi pour faire le tour du tore et est une propriété topologique associée à un invariant de Chern : l'isolant caractérisé par une telle propriété est appelé un isolant de Chern. Historiquement, cette propriété topologique a été découverte en 1982 dans le contexte de l'effet Hall quantique, une phase d'un ensemble d'électrons confinés dans un plan et soumis à un fort champ magnétique perpendiculaire. Par la suite, elle a été étendue à d'autres phases cristallines bidimensionnelles en présence d'une brisure d'invariance par renversement du temps.

Pendant près de deux décennies, cet ordre topologique a été considéré comme une propriété spécifique à l'effet Hall quantique, nécessitant le confinement dans un plan et la brisure de renversement du temps par un fort champ magnétique. Cette image a été remise en cause par le travail remarquable de C. Kane et G. Mele en 2005, qui ont réalisé qu'un autre type d'ordre topologique pouvait exister dans les solides possédant un fort couplage spin-orbite intrinsèque, et pouvait donc caractériser des matériaux dans leur état naturel. La propriété topologique associée résulte des contraintes imposées par la symétrie de renversement du temps sur des particules de spin 1/2 comme les électrons : cette symétrie impose que le spectre du système est doublement dégénéré. Les deux états propres associés à chaque énergie sont appelés paire de Kramers, et possèdent deux quasi-moments et deux spins opposés. La contrainte imposée sur les fonctions de Bloch autour du tore de Brillouin laisse alors deux possibilités d'enroulement de ces paires de Kramers : une configuration habituelle, dite « triviale », et une configuration non triviale ou « twistée », caractérisant une nouvelle phase de la matière appelée isolant topologique. Cette première phase d'isolant topologique était une phase de deux dimensions d'espace : elle décrit également une propriété d'électrons confinés dans un plan. Par analogie avec l'effet Hall quantique, elle a été dénommée l'effet Hall quantique de spin. Cependant, plusieurs groupes de théoriciens ont réalisé que la nouvelle propriété topologique associée à l'interaction spin-orbite admet une généralisation naturelle pour les matériaux en dimension trois. Cette découverte allait fournir une nouvelle dimension à cet ordre topologique, et donner lieu à une réelle chasse aux matériaux isolants topologiques.

Dans l'année qui a suivi la découverte de C. Kane et G. Mele, S.C. Zhang et ses collaborateurs ont proposé de réaliser l'effet Hall quantique de spin dans des puits quantiques de tellurure de mercure. La signature expérimentale correspondante a été détectée en transport électronique dans le groupe de L. Molenkamp. Plus récemment, l'effet Hall quantique de spin a été observé dans un second alliage d'arséniure d'indium inséré dans de l'antimoniure de gallium. Parallèlement, la recherche d'éventuels matériaux possédant un ordre topologique en dimension 3 s'est rapidement orientée vers les semi-conducteurs à base de bismuth :  $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ ,  $\text{Bi}_2\text{Se}_3$  et  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ . Depuis, de nombreux composés d'isolants topologiques ont été proposés et découverts expérimentalement. Une propriété fondamentale de ces isolants topologiques est l'existence d'états métalliques à leur surface. À l'interface entre un isolant « trivial » et un isolant topologique, la continuité entre les structures de bandes des deux isolants et la caractéristique topologique de la propriété de l'isolant non trivial impose l'existence d'états de surface dans le gap d'énergie. Les métaux ainsi obtenus sont remarquables : ils sont caractérisés par une relation de

dispersion linéaire et un couplage entre moment et spin des excitations. L'équation de propagation des électrons confinés à cette interface est donc une équation décrivant également le comportement de particules relativistes : on parle ainsi d'excitations de Dirac. Détecter ce nouvel ordre topologique consiste donc à caractériser expérimentalement l'existence de ces métaux de Dirac à la surface des composés considérés. Une technique de choix pour les matériaux tri-dimensionnels est la photo-émission (ARPES) résolue en spin, qui a permis de découvrir la nature topologique de nombreux composés.

Le premier article de ce dossier, par Jérôme Cayssol, introduit les matériaux de de Dirac et les isolants topologiques 2D. Le second article, par Michel Fruchart et David Carpentier, introduit la notion d'isolant topologique comme une propriété des fonctions de Bloch associées. L'article de S.A. Parameswaran et al. décrit les effets d'interactions dans les phases isolantes de Chern, qui conduisent à la notion d'isolants de Chern fractionnaires, et expose une comparaison avec les isolants de Hall fractionnaires. Un supraconducteur peut aussi présenter une structure de bande avec une nature topologique non triviale : un tel supraconducteur topologique possède alors des états de bord remarquables, qui sont des fermions de Majorana. L'article de Driss Badiane et al. présente les propriétés associées à la présence de tels fermions de Majorana dans une hétérojonction Josephson hors équilibre. L'article suivant, par Pavan Hosur et Xiaoliang Qi, introduit les fermions de Weyl et expose des travaux récents sur les semi-métaux de Weyl 3D. Finalement, l'article d'Akira Furusaki et al. propose une étude générale de la matière topologique à travers les propriétés électromagnétiques et thermiques des phases correspondantes.

David Carpentier

*Laboratoire de physique, École normale supérieure de Lyon (UMR CNRS 5672), 46, allée d'Italie, 69007 Lyon, France*

Jérôme Cayssol

*Max-Planck-Institut für Physik komplexer Systeme, Nöthnitzer Str. 38, 01187 Dresden, Germany  
LOMA (UMR-5798), CNRS and University Bordeaux-1, 33045 Talence, France*

Available online 5 November 2013