



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

Comptes Rendus Physique

www.sciencedirect.com



Brouillage thermique d'un gaz cohérent de fermions

*Thermal blurring of a coherent Fermi gas*

Hadrien Kurkjian, Yvan Castin*, Alice Sinatra

Laboratoire Kastler-Brossel, ENS-PSL, CNRS, UPMC–Sorbonne Universités et Collège de France, Paris, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 29 septembre 2015

Accepté le 17 février 2016

Disponible sur Internet le 22 avril 2016

Mots-clés :

Gaz de fermions

Fluides quantiques

Cohérence quantique

Atomes froids

Keywords:

Fermi gases

Quantum fluids

Quantum coherence

Ultracold atoms

R É S U M É

On considère généralement que la fonction d'onde macroscopique décrivant un condensat de paires de fermions possède une phase parfaitement définie et immuable. En réalité, il n'existe que des systèmes de taille finie, préparés, qui plus est, à température non nulle ; le condensat possède alors un temps de cohérence fini, même lorsque le système demeure isolé tout au long de son évolution et que le nombre de particules N est fixé. La mémoire de la phase initiale se perd à mesure que le condensat interagit avec les modes excités, qui agissent comme un environnement déphasant. Cet effet fondamental, crucial pour les applications qui exploitent la cohérence macroscopique du condensat de paires, reste très peu étudié. Dans cet article, nous relient le temps de cohérence à la dynamique de phase du condensat, et nous montrons, par une approche microscopique, que la dérivée de l'opérateur phase du condensat $\hat{\theta}_0$ par rapport au temps est proportionnelle à un opérateur potentiel chimique que nous construisons, et qui inclut les deux branches d'excitations du gaz, tant par brisure des paires que par mise en mouvement de leur centre de masse. Pour une réalisation donnée d'énergie E , $\hat{\theta}_0$ évolue aux temps longs comme $-2\mu_{mc}(E)t/\hbar$, où $\mu_{mc}(E)$ est le potentiel chimique microcanonique ; les fluctuations de l'énergie d'une réalisation à l'autre conduisent alors à un brouillage balistique de la phase, et à une décroissance gaussienne de la fonction de cohérence temporelle avec un temps caractéristique $\propto N^{1/2}$. En revanche, en l'absence de fluctuations d'énergie, le temps de cohérence diverge linéairement en N à cause du mouvement diffusif de $\hat{\theta}_0$. Enfin, nous proposons une méthode permettant de mesurer avec un gaz d'atomes froids ce temps de cohérence, que nous prédisons être de l'ordre de la dizaine de millisecondes pour un gaz de fermions préparé dans l'ensemble canonique à la limite unitaire.

© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND

(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

A B S T R A C T

It is generally assumed that a condensate of paired fermions at equilibrium is characterized by a macroscopic wavefunction with a well-defined, immutable phase. In reality, all systems have a finite size and are prepared at non-zero temperature; the condensate has then a finite coherence time, even when the system is isolated in its evolution and the particle number N is fixed. The loss of phase memory is due to interactions of the condensate with the excited modes that constitute a dephasing environment. This fundamental effect, crucial for applications using the condensate of pairs' macroscopic

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : yvan.castin@lkb.ens.fr (Y. Castin).

coherence, was scarcely studied. We link the coherence time to the condensate phase dynamics, and we show with a microscopic theory that the time derivative of the condensate phase operator $\hat{\theta}_0$ is proportional to a chemical potential operator that we construct including both the pair-breaking and pair-motion excitation branches. In a single realization of energy E , $\hat{\theta}_0$ evolves at long times as $-2\mu_{\text{mc}}(E)t/\hbar$, where $\mu_{\text{mc}}(E)$ is the microcanonical chemical potential; energy fluctuations from one realization to the other then lead to a ballistic spreading of the phase and to a Gaussian decay of the temporal coherence function with a characteristic time $\propto N^{1/2}$. In the absence of energy fluctuations, the coherence time scales as N due to the diffusive motion of $\hat{\theta}_0$. We propose a method to measure the coherence time with ultracold atoms, which we predict to be tens of milliseconds for the canonical ensemble unitary Fermi gas.

© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

1. Position du problème

Les gaz cohérents d'atomes froids dans des pièges immatériels non dissipatifs sont des exemples uniques de systèmes quantiques macroscopiques isolés. Se pose alors le problème de leur temps de cohérence intrinsèque. Cette question fondamentale présente également un intérêt pratique, pour toutes les applications qui mettent à profit la cohérence macroscopique, par exemple en interférométrie ou en ingénierie quantique où l'on crée des états intriqués non triviaux par évolution cohérente [1–3]. Des mesures de temps de cohérence sont déjà accessibles avec des gaz de bosons [4–6]. Les expériences sur les gaz de fermions, qui se sont pour l'instant concentrées sur les propriétés thermodynamiques [7,8], donc sur les aspects traditionnels du problème à N corps, commencent à s'intéresser aux mesures de corrélations et de cohérence [9], ce qui ouvrira un nouveau domaine de recherche, y compris dans le régime d'interaction forte : l'optique quantique fermionique [10]. Cependant, il n'y a à ce jour aucune prédiction sur le temps de cohérence d'un condensat de paires de fermions, sauf à température nulle [11]. Dans cet article nous présentons la première théorie microscopique permettant de combler ce vide théorique en toute généralité. Notre analyse vaut pour d'autres systèmes physiques, tels que les jonctions de Josephson mésoscopiques, pourvu qu'on arrive à réduire suffisamment la décohérence due à l'environnement.

Pour un gaz de bosons condensé, le temps de cohérence est déterminé par l'étalement de la distribution de probabilité du changement de phase du condensat pendant t . À température nulle et en présence d'interactions, cet étalement, balistique, est dû aux fluctuations du nombre de particules. Cet effet a été observé par interférence de deux condensats initialement cohérents, dont le nombre de particules fluctue du fait du bruit de partition [4,6]. Contrairement au cas du laser, qui est un système quantique ouvert, et de façon inattendue, un étalement balistique de la phase subsiste dans ces systèmes isolés pour un nombre de particules fixé si le gaz est à température non nulle [12,13], les fluctuations de cette autre quantité conservée qu'est l'énergie remplaçant celles du nombre de particules.

Dans le cas d'un gaz non polarisé de fermions condensés par paires, l'étude du temps de cohérence présuppose une définition claire de la phase du condensat, et une construction explicite de l'opérateur $\hat{\theta}_0$ correspondant [11]. À température non nulle elle requiert en outre de pouvoir inclure dans la vitesse de variation de la phase la contribution des deux branches d'excitation, celle fermionique (par brisure des paires) et celle bosonique (par excitation du centre de masse des paires). Pour la branche fermionique, la RPA d'Anderson [14] suffit. Pour la branche bosonique en revanche, nous avons besoin d'un équivalent pour les fermions de la méthode de Bogolioubov permettant de construire les opérateurs de création \hat{b}_α^\dagger et d'annihilation \hat{b}_α de quasi-particules et d'exprimer $d\hat{\theta}_0/dt$ en termes de ces opérateurs. Qui plus est, il faut prendre en compte les interactions entre les quasi-particules dans l'évolution des \hat{b}_α . Ceci est une conséquence non évidente du fait que la fonction d'onde du condensat de paires dépend du nombre total de particules N , même dans un système spatialement homogène, et va au-delà du programme de la RPA.

2. Décroissance de la fonction de cohérence

Aux températures inférieures à la température critique, la fonction de cohérence temporelle du champ de paires $\hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r})\hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}')$, où $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$ est l'opérateur champ fermionique pour la composante de spin σ , est dominée aux temps longs par celle du condensat :

$$g_1(t) = \langle \hat{a}_0^\dagger(t)\hat{a}_0(0) \rangle \quad (1)$$

où $\hat{a}_0 = \int d^3r d^3r' \varphi_0^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r})\hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}')$ est la composante du champ de paires sur la fonction d'onde du condensat [11]. Comme le système à l'équilibre est dans un mélange statistique d'états propres à N corps $|\psi_\lambda\rangle$, avec des poids Π_λ , nous sommes ramenés à l'étude de la fonction de cohérence $g_1^\lambda(t)$ dans l'état propre $|\psi_\lambda\rangle$, d'énergie E_λ et de nombre de particules N_λ . Pour tirer parti des faibles fluctuations relatives du nombre de paires condensées pour un grand système, on utilise la décomposition [11] en les opérateurs hermitiens phase et module

$$\hat{a}_0 = e^{i\hat{\theta}_0} \hat{N}_0^{1/2} \tag{2}$$

et on approxime \hat{N}_0 , opérateur nombre de paires condensées, par sa valeur moyenne \bar{N}_0 dans l'état d'équilibre du système, pour obtenir

$$g_1^\lambda(t) \simeq \bar{N}_0 e^{iE_\lambda t/\hbar} \langle \psi_\lambda | e^{-i(\hat{H}+\hat{W})t/\hbar} | \psi_\lambda \rangle \tag{3}$$

où l'opérateur \hat{W} , différence entre le transformé de \hat{H} par $e^{i\hat{\theta}_0}$ et \hat{H} ,

$$\hat{W} = e^{-i\hat{\theta}_0} \hat{H} e^{i\hat{\theta}_0} - \hat{H} = -i[\hat{\theta}_0, \hat{H}] - \frac{1}{2}[\hat{\theta}_0, [\hat{\theta}_0, \hat{H}]] + \dots \tag{4}$$

est approximativement N fois plus petit que \hat{H} . En effet, comme \hat{a}_0 , $e^{i\hat{\theta}_0}$ change le nombre total de particules d'un $O(N^0)$. Alors que \hat{H} est une observable extensive, \hat{W} est un opérateur intensif et le double commutateur dans (4) est d'ordre $1/N$. Il apparaît formellement dans l'équation (3) un opérateur d'évolution correspondant au hamiltonien \hat{H} perturbé par \hat{W} , restreint à l'état propre $|\psi_\lambda\rangle$ de \hat{H} . La fonction g_1^λ/\bar{N}_0 est donc, à un facteur de phase près, proportionnelle à l'amplitude de probabilité que le système initialement préparé dans $|\psi_\lambda\rangle$ y soit encore au bout d'un temps t en présence de \hat{W} . Une approche naturelle pour obtenir une approximation non perturbative de cette amplitude est celle des fonctions de Green ou de l'opérateur résolvante $\hat{G}(z) = (z\hat{1} - (\hat{H} + \hat{W}))^{-1}$ du hamiltonien perturbé. Par la méthode des projecteurs (voir la sous-section §III.B.2 de la référence [15]), on définit un hamiltonien effectif non hermitien $\hat{H}_{\text{eff}}(z)$ gouvernant l'évolution restreinte à $|\psi_\lambda\rangle$, donc tel que $\langle \psi_\lambda | \hat{G}(z) | \psi_\lambda \rangle = (z - \langle \psi_\lambda | \hat{H}_{\text{eff}}(z) | \psi_\lambda \rangle)^{-1}$. Ceci conduit à

$$g_1^\lambda(t) \simeq \bar{N}_0 \int_C \frac{dz}{2i\pi} \frac{e^{-i(z-E_\lambda)t/\hbar}}{z - \langle \hat{H}_{\text{eff}}(z) \rangle_\lambda} \text{ avec } \langle \hat{H}_{\text{eff}}(z) \rangle_\lambda = E_\lambda + \langle \hat{W} \rangle_\lambda + \langle \hat{W} \hat{Q}_\lambda \frac{\hat{Q}_\lambda}{z\hat{Q}_\lambda - \hat{Q}_\lambda(\hat{H} + \hat{W})\hat{Q}_\lambda} \hat{Q}_\lambda \hat{W} \rangle_\lambda \tag{5}$$

Le domaine d'intégration C dans le plan complexe est toute droite $z = x + i\eta$, $\eta > 0$ fixé, décrite dans le sens des réels x décroissant de $+\infty$ à $-\infty$, et l'on a introduit la notation $\langle \hat{A} \rangle_\lambda \equiv \langle \psi_\lambda | \hat{A} | \psi_\lambda \rangle$ et l'opérateur $\hat{Q}_\lambda = \hat{1} - |\psi_\lambda\rangle\langle \psi_\lambda|$, projecteur orthogonal à $|\psi_\lambda\rangle$. En se limitant dans $\langle \hat{H}_{\text{eff}}(z) \rangle_\lambda$ à l'ordre deux en \hat{W} , donc en omettant $\hat{Q}_\lambda \hat{W} \hat{Q}_\lambda$ au dénominateur, et en négligeant sa dépendance en z (approximation du pôle), $\langle \hat{H}_{\text{eff}}(z) \rangle_\lambda \approx \langle \hat{H}_{\text{eff}}(E_\lambda + i0^+) \rangle_\lambda$, on obtient^{1,2}

$$g_1^\lambda(t) \simeq \bar{N}_0 e^{-i\langle \hat{W} \rangle_\lambda t/\hbar} e^{-i(\delta_\lambda + \gamma_\lambda)t} \text{ avec } \hbar(\delta_\lambda - i\gamma_\lambda) = \langle \hat{W} \hat{Q}_\lambda \frac{\hat{Q}_\lambda}{(E_\lambda + i0^+)\hat{Q}_\lambda - \hat{Q}_\lambda \hat{H} \hat{Q}_\lambda} \hat{Q}_\lambda \hat{W} \rangle_\lambda \tag{6}$$

On notera que $2\gamma_\lambda$ n'est autre que le taux de départ de l'état $|\psi_\lambda\rangle$ induit par \hat{W} tel que le prédit la règle d'or de Fermi.

Le terme dominant sous l'exponentielle dans (6) est $\langle \hat{W} \rangle_\lambda$, d'ordre N^0 comme \hat{W} . Afin de l'interpréter, on constate d'abord que, d'après le développement (4), en point de vue de Heisenberg,

¹ Il y a derrière l'approximation du pôle l'hypothèse selon laquelle le continuum auquel $|\psi_\lambda\rangle$ est couplé est large en fréquence [15]. Aussi la loi exponentielle dans (6) ne vaut-elle qu'aux temps longs devant l'inverse de cette largeur, c'est-à-dire ici devant le temps de corrélation τ_c des quasi-particules introduit plus bas.

² Pour faire apparaître une ligne de coupure dans la résolvante puis un pôle dans son prolongement analytique, donc pour justifier rigoureusement l'émergence d'une partie imaginaire γ_λ non nulle et donner un sens précis à l'équation (6), il faut passer à la limite thermodynamique ($N \rightarrow +\infty$ à densité fixée). Mais c'est ici inhabituellement subtil : comme le montre une généralisation du raisonnement autour de l'équation (10), la fonction déplacement [15] $\Delta_\lambda(z) \equiv \langle \hat{W} \hat{Q}_\lambda \frac{\hat{Q}_\lambda}{z\hat{Q}_\lambda - \hat{Q}_\lambda(E_\lambda - \hat{H})\hat{Q}_\lambda} \hat{Q}_\lambda \hat{W} \rangle_\lambda$, avec $\text{Im} z > 0$, tend vers zéro en $1/N$, tout comme $\delta_\lambda - i\gamma_\lambda$ dans (6). L'astuce consiste alors à se placer à une échelle de temps d'ordre N , en posant $t = N\tau$ et en gardant τ fixé à la limite thermodynamique. On effectue le changement de variable $z = E_\lambda + \langle \hat{W} \rangle_\lambda + z'/N$ dans l'intégrale de (5), on choisit $\eta = \eta'/N$ ($\eta' > 0$ fixé) dans le domaine d'intégration $C = \{z = x + i\eta, x = +\infty \rightarrow -\infty\}$, ce qui conduit au domaine d'intégration $C' = \{z' = x' + i\eta', x' = +\infty \rightarrow -\infty\}$ sur z' , et l'on néglige le terme $\langle \hat{W} \rangle_\lambda$ qui apparaît au dénominateur de la fonction déplacement ainsi que $\text{Re} z'/N$ (par cohérence avec l'omission de $\hat{Q}_\lambda \hat{W} \hat{Q}_\lambda$). Le facteur $1/N$ dans l'élément d'intégration $dz = dz'/N$ permet de sortir un facteur $1/N$ au dénominateur de l'intégrande, et l'on obtient à la limite thermodynamique le résultat suivant, indépendant de η' par analyticité de l'intégrande dans le demi-plan $\text{Im} z' > 0$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{g_1^\lambda(t) e^{i\langle \hat{W} \rangle_\lambda t/\hbar}}{\bar{N}_0} \simeq \int_{C'} \frac{dz'}{2i\pi} \frac{e^{-iz'\tau/\hbar}}{z' - \hbar\Omega_\lambda} = e^{-i\Omega_\lambda \tau} \text{ avec } \hbar\Omega_\lambda = \lim_{N \rightarrow +\infty} N\Delta_\lambda(i\eta'/N)$$

Voilà qui fournit, pour un système de taille assez grande mais finie, la définition $N(\delta_\lambda - i\gamma_\lambda) \equiv \Omega_\lambda$. Si l'on avait pris la limite thermodynamique à t fixé avant de faire tendre t vers l'infini, on serait tombé, en développant l'intégrande de (5) au premier ordre en la fonction déplacement, sur une autre définition : $\lim_{N \rightarrow +\infty} N[\bar{N}_0^{-1} g_1^\lambda(t) e^{i\langle \hat{W} \rangle_\lambda t/\hbar} - 1] \sim (-it)N(\delta_\lambda - i\gamma_\lambda)$ avec $N(\delta_\lambda - i\gamma_\lambda) \equiv \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow +\infty} N\Delta_\lambda(i\eta)$. Pour montrer l'équivalence de ces deux définitions, injectons dans la fonction déplacement une relation de fermeture sur les états propres de \hat{H} , $\Delta_\lambda(z) = \sum_{\mu \neq \lambda} |\langle \psi_\mu | \hat{W} | \psi_\lambda \rangle|^2 / (z + E_\lambda - E_\mu)$, et voyons si la granularité de la distribution des $E_\mu - E_\lambda$ dans cette somme pondérée tend vers zéro plus vite que η'/N . Pour cela, voyons chaque état propre comme la superposition cohérente d'un état de Fock central de phonons et d'un faible halo d'états de Fock de phonons s'en déduisant par des processus Beliaev–Landau 1 phonon \leftrightarrow 2 phonons. Même si \hat{W} conserve les nombres de phonons, cf. (8), il peut coupler l'état de Fock central de $|\psi_\mu\rangle$ au halo de $|\psi_\lambda\rangle$. Au pire, un seul processus Beliaev–Landau est mis en jeu, auquel cas $E_\mu - E_\lambda = \pm(\epsilon_{\mathbf{B}, \mathbf{k}_1} + \epsilon_{\mathbf{B}, \mathbf{k}_2} - \epsilon_{\mathbf{B}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2})$, où \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 sont les vecteurs d'onde des deux phonons émis ou absorbés ; comme la paire $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$ prend $\propto V^2$ valeurs différentes, où V est le volume du système, $E_\mu - E_\lambda$ varie alors par pas $\propto 1/V^2$, ce qui est bien $\ll \eta'/N$.

$$\hat{W}(t) = \hbar \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (7)$$

À ce stade il pourrait sembler difficile d'obtenir une expression explicite de $d\hat{\theta}_0/dt$ qui permettrait d'aller au-delà d'une description purement formelle de la dynamique de phase. Heureusement il n'en est rien car, comme nous le montrerons dans la section suivante, la moyenne temporelle à gros grains de $d\hat{\theta}_0/dt$ dans un gaz faiblement excité est proportionnelle à un opérateur potentiel chimique, quantité thermodynamique par nature :

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} = \mu_0(\hat{N}) + \sum_{s=F,B} \sum_{\alpha} \frac{d\epsilon_{s,\alpha}}{dN} \hat{n}_{s,\alpha} \quad (8)$$

La somme au second membre porte sur les deux branches d'excitation, celle des quasi-particules fermioniques (α inclut un indice de spin et un indice orbital, $\alpha = \mathbf{k}, \sigma$ pour un système spatialement homogène) qui présente une bande interdite, et celle des quasi-particules bosoniques (α est uniquement orbital, $\alpha = \mathbf{q}$ dans l'exemple précédent) dont le départ, à la limite thermodynamique et pour un système homogène, est phononique. Lorsque nous disons que le gaz doit être faiblement excité, nous voulons dire que la déplétion thermique du condensat doit rester petite. Ceci suppose en particulier que le nombre moyen de quasi-particules soit une faible fraction du nombre total de particules. La moyenne temporelle à gros grains est prise sur un temps long devant l'inverse des pulsations propres $\epsilon_{s,\alpha}/\hbar$ de ces quasi-particules mais court devant leur temps de collision, c'est-à-dire le temps typique de variation des opérateurs nombres de quasi-particules $\hat{n}_{s,\alpha}$, ce qui suppose que ces quasi-particules sont dans le régime faiblement collisionnel. Enfin $\mu_0(N)$ est le potentiel chimique à température nulle du gaz non polarisé à N particules, autrement dit la dérivée de l'énergie du fondamental par rapport à N . Nous interprétons le deuxième terme du second membre de (8) comme un « opérateur potentiel chimique » au sens où sa moyenne quantique est la dérivée adiabatique, c'est-à-dire à populations des quasi-particules $\langle \hat{n}_{s,\alpha} \rangle$ fixées, de l'énergie des quasi-particules $\sum_{s=F,B} \sum_{\alpha} \epsilon_{s,\alpha} \langle \hat{n}_{s,\alpha} \rangle$ par rapport à N . L'équation (8) relie la dérivée de la phase au potentiel chimique au niveau des opérateurs quantiques d'une théorie microscopique multimode. De ce point de vue, elle va au-delà de la seconde relation de Josephson établie pour la phase du paramètre d'ordre d'un supraconducteur (cf. la section §3.4 de la référence [16]).

En prenant la moyenne de l'équation (8) dans $|\psi_{\lambda}\rangle$ et en utilisant l'hypothèse de thermicité des états propres [17] pour identifier moyenne dans un état propre et moyenne d'ensemble microcanonique, on fait donc apparaître le potentiel chimique microcanonique μ_{mc} à l'énergie E_{λ} et au nombre de particules N_{λ} :

$$\hbar \left\langle \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} \right\rangle_{\lambda} = -2 \mu_{mc}(E_{\lambda}, N_{\lambda}) \quad (9)$$

Nous omettons la moyenne temporelle à gros grains, ici superflue puisque la moyenne quantique est prise dans un état stationnaire du système.

Le terme suivant sous l'exponentielle dans (6) est d'ordre N^{-1} donc sous-dominant. Pour le voir, on le relie à la fonction de corrélation temporelle de $d\hat{\theta}_0/dt$ dans l'état $|\psi_{\lambda}\rangle$. À une contribution d'ordre $1/N^2$ près :

$$\gamma_{\lambda} + i\delta_{\lambda} = \int_0^{+\infty} dt \left[\left\langle \frac{d\hat{\theta}_0(t)}{dt} \frac{d\hat{\theta}_0(0)}{dt} \right\rangle_{\lambda} - \left\langle \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} \right\rangle_{\lambda}^2 \right] \quad (10)$$

qui redonne bien (6) après injection d'une relation de fermeture sur les états propres de \hat{H} . L'intégrande a comme valeur initiale $\text{Var}_{\lambda}(d\hat{\theta}_0/dt) = O(1/N)$ (ceci s'obtient en additionnant les variances des nombres de quasi-particules, ce qui correspond à un gaz parfait de quasi-particules dans l'ensemble canonique et surestime donc la variance microcanonique) et décroît sur le temps typique de corrélation τ_c des $\hat{n}_{s,\alpha}$, c'est-à-dire le temps typique de collision entre les quasi-particules. Ceci permet d'estimer $|\gamma_{\lambda} + i\delta_{\lambda}| \approx \tau_c \text{Var}(d\hat{\theta}_0/dt) = O(1/N)$. Le déplacement δ_{λ} est donc du même ordre en N que le terme sous-dominant $[\hat{\theta}_0, [\hat{\theta}_0, \hat{H}]]$ dans \hat{W} ; tous deux sont N fois plus faibles que (9) et on les néglige pour un grand système. En revanche γ_{λ} est le seul à conduire à une décroissance exponentielle de la fonction de cohérence microcanonique $g_1^{\lambda}(t)$ et doit être conservé. L'équation (10) en fournit aussi une interprétation physique, si l'on se souvient que, dans la théorie du mouvement brownien, l'intégrale de la fonction de corrélation de la vitesse donne le coefficient de diffusion de la position : γ_{λ} n'est autre que le coefficient de diffusion de la phase du condensat de paires lorsque le système est préparé dans l'ensemble microcanonique correspondant à $|\psi_{\lambda}\rangle$, et sera désormais noté $\gamma_{\lambda} = D(E_{\lambda}, N_{\lambda})$. Nous retenons finalement :

$$g_1^{\lambda}(t) \simeq \bar{N}_0 e^{2i\mu_{mc}(E_{\lambda}, N_{\lambda})t/\hbar} e^{-D(E_{\lambda}, N_{\lambda})t} \quad (11)$$

L'équation (10) fournit même une méthode de calcul de D : si l'on dispose d'équations cinétiques pour les nombres de quasi-particules apparaissant dans $d\hat{\theta}_0/dt$, voir l'équation (8), on peut calculer leur fonction de corrélation temporelle, comme il est fait dans la référence [18], et en déduire que

$$D(E, N) = -(P\vec{A}) \cdot M^{-1} C_{mc} P\vec{A} \quad (12)$$

La matrice M , de coefficients $M_{s\alpha, s'\alpha'}$, est la matrice des équations cinétiques linéarisées $\frac{d}{dt}\vec{\delta n} = M\vec{\delta n}$ donnant l'évolution des fluctuations $\delta n_{s,\alpha}$ des nombres de quasi-particules, regroupées en un vecteur $\vec{\delta n}$, autour de leurs valeurs stationnaires $\bar{n}_{s,\alpha}$. Pour définir les autres notations, on introduit comme dans [18] la matrice C_{can} des covariances des nombres de quasi-particules $\hat{n}_{s,\alpha}$ dans l'ensemble canonique à N particules et d'énergie moyenne E , le vecteur énergie $\vec{\epsilon}$ de composantes $\epsilon_{s,\alpha}$ et son vecteur dual $\vec{e} \propto C_{\text{can}}\vec{\epsilon}$ normalisé de façon que $\vec{e} \cdot \vec{\epsilon} = 1$.³ Alors le vecteur $\vec{A} = (2/\hbar)d\vec{\epsilon}/dN$ regroupe les coefficients des $\hat{n}_{s,\alpha}$ dans l'expression (8) de $-\overline{d\hat{\theta}_0/dt}$, la matrice P est le projecteur non orthogonal⁴ tel que $P\vec{\delta n} = \vec{\delta n} - \vec{\epsilon}(\vec{e} \cdot \vec{\delta n})$ pour tout δn , et la matrice des covariances microcanonique vaut $C_{\text{mc}} = P^\dagger C_{\text{can}} P$ [18].

Il nous reste maintenant à prendre la moyenne statistique de l'équation (11) sur les états $|\psi_\lambda\rangle$ constituant l'état mélange du système. Aux grands N , on suppose que l'ensemble généralisé donné par les Π_λ conduit à des fluctuations de l'énergie totale et du nombre de particules très faibles en valeur relative autour de leur valeur moyenne \bar{E} et de \bar{N} (c'est le cas par exemple des ensembles canonique et grand canonique). On en prend donc une approximation gaussienne et on linéarise μ_{mc} autour de (\bar{E}, \bar{N}) . À cet ordre, on peut remplacer D , déjà sous-dominant d'un facteur N , par $D(\bar{E}, \bar{N})$. Il n'y a plus qu'à calculer l'intégrale gaussienne du facteur de phase $\exp\{2i[(\partial\mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N})/\partial E)(E - \bar{E}) + (\partial\mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N})/\partial N)(N - \bar{N})]t/\hbar\}$ pour obtenir le résultat central de ce travail :

$$g_1(t) \simeq \bar{N}_0 e^{2i\mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N})t/\hbar} e^{-t^2/2t_{\text{br}}^2} e^{-D(\bar{E}, \bar{N})t} \tag{13}$$

En présence de fluctuations de l'énergie ou du nombre de particules, le brouillage thermique aux temps longs prend la forme d'une décroissance gaussienne de la fonction de cohérence $g_1(t)$, avec un temps caractéristique

$$(2t_{\text{br}}/\hbar)^{-2} = \text{Var} \left(N \frac{\partial\mu_{\text{mc}}}{\partial N}(\bar{E}, \bar{N}) + E \frac{\partial\mu_{\text{mc}}}{\partial E}(\bar{E}, \bar{N}) \right) \tag{14}$$

qui diverge en $N^{1/2}$ pour des fluctuations normales. Le coefficient de diffusion de la phase D donne, quant à lui, un temps de décroissance caractéristique qui diverge linéairement en N ; c'est donc bien une contribution sous-dominante aux temps longs, sauf dans l'ensemble microcanonique où cette diffusion de phase intrinsèque peut être observée directement.

3. Dérivation microscopique de l'équation sur l'opérateur phase

Comme promis, nous donnons maintenant à notre connaissance la première démonstration microscopique de l'équation (8), reliant la vitesse de variation de l'opérateur phase d'un condensat de paires à ce que l'on peut qualifier d'opérateur potentiel chimique.

La contribution de la branche d'excitation fermionique à $d\hat{\theta}_0/dt$ peut s'obtenir par des équations du mouvement linéarisées pour de faibles fluctuations des opérateurs de paires $\hat{\psi}_\downarrow\hat{\psi}_\uparrow$, $\hat{\psi}_\uparrow^\dagger\hat{\psi}_\downarrow^\dagger$ et $\hat{\psi}_\sigma^\dagger\hat{\psi}_\sigma$ autour de l'état de champ moyen, ce qui constitue la *Random Phase Approximation* (RPA) d'Anderson [14]. En effet, en calculant la moyenne temporelle de $d\hat{\theta}_0/dt$ grâce à l'équation (120) de la référence [11] et en récrivant l'équation (86) de cette référence en termes des nombres d'occupation des quasi-particules fermioniques,⁵ on obtient

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\overline{\hat{\theta}_0}}{dt} \underset{\text{RPA}}{=} \mu(\bar{N}) + \frac{d\mu}{d\bar{N}}(\hat{N} - \bar{N}) + \sum_{\alpha=\mathbf{k},\sigma} \frac{d\epsilon_{F,\alpha}}{d\bar{N}} \hat{n}_{F,\alpha} \tag{15}$$

où $\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma}$ est le spectre d'excitation BCS, ici pour un système spatialement homogène, et \bar{N} le nombre moyen BCS de particules dans l'ensemble grand canonique de potentiel chimique μ .⁶

³ On a $(C_{\text{can}})_{s\alpha, s'\alpha'} = \delta_{s\alpha, s'\alpha'} \bar{n}_{s,\alpha} (1 \pm \bar{n}_{s,\alpha})$ et $\bar{n}_{s,\alpha} = 1/[\exp(\epsilon_{s,\alpha}/k_B T) \mp 1]$ où le signe supérieur (inférieur) vaut pour la branche d'excitation bosonique (fermionique). $\vec{\epsilon}$ et \vec{e} sont des vecteurs propres à gauche et à droite de M avec la valeur propre nulle, comme le montrent la conservation de l'énergie et l'écriture plus parlante $\vec{e} \propto d\vec{n}/dT$, T étant la température de l'ensemble canonique et \vec{n} le vecteur de composantes $\bar{n}_{s,\alpha}$ [18].

⁴ $P\vec{\epsilon} = \vec{0}$ et P^\dagger projette sur le sous-espace des fluctuations $\vec{\delta n}$ d'énergie nulle, $\{\vec{\delta n} | \vec{\epsilon} \cdot \vec{\delta n} = 0\}$, à l'intérieur duquel l'inverse de M est défini.

⁵ On remarque que $\frac{\Delta_0}{\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma}} \zeta_{\mathbf{k}} = \hat{n}_{F,\mathbf{k},\uparrow} + \hat{n}_{F,-\mathbf{k},\downarrow}$, où le membre de gauche fait référence aux notations de l'article [11], et on se sert de son équation (74) pour reconnaître $d\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma}/d\mu$.

⁶ L'équation (15) est écrite en réintroduisant le terme de phase trivial $-2\mu(\bar{N})t/\hbar$ qui n'apparaît pas dans la référence [11] du fait de l'utilisation du hamiltonien grand canonique.

Des difficultés fondamentales nous empêchent d'obtenir la contribution de la branche de phonons à l'équation (8) dans le cadre de la RPA.⁷ Nous avons alors choisi de traiter le problème par une approche variationnelle avec comme Ansatz l'état cohérent de paires dépendant du temps le plus général⁸

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}(t) \exp\left(b^6 \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}')\right) |0\rangle \quad (16)$$

Cet Ansatz, fonction des variables indépendantes $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ et normalisé à l'unité grâce au facteur $\mathcal{N}(t)$, est écrit ici après discrétisation de l'espace réel en un réseau cubique de pas l (que l'on fait tendre vers 0 à la fin des calculs), les opérateurs champ obéissant alors à des relations d'anticommuation du type $\{\hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r}), \hat{\psi}_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{r}')\} = \delta_{\sigma, \sigma'} \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}/l^3$. Le jeu de variables canoniquement conjuguées associé, $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\Phi^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est construit⁹ dans la section §9.9b de la référence [19]. Il ne faut pas confondre le champ Φ avec le champ de paires $\langle \hat{\psi}_{\downarrow} \hat{\psi}_{\uparrow} \rangle$.¹⁰ Quand les paires de l'état (16) sont au repos, $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ dépend uniquement de $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ et la transformée de Fourier de Φ n'est autre que l'amplitude BCS $V_{\mathbf{k}}$ de la paire $\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow$ [11], tandis que la transformée de Fourier du champ de paires s'écrit $-U_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} = -V_{\mathbf{k}}(1 - |V_{\mathbf{k}}|^2)^{1/2}$. Lorsque les paires sont en mouvement, nous n'avons plus d'interprétation physique simple mais la norme au carré de Φ demeure égale à la moitié du nombre moyen de particules dans l'état $|\psi\rangle$:

$$\frac{N}{2} = \|\Phi\|^2 \equiv l^6 \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} |\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t)|^2 \quad (17)$$

L'hamiltonien régissant l'évolution du champ Φ , à savoir

$$\mathcal{H}(\Phi, \Phi^*) = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \quad (18)$$

pourrait être explicité à l'aide du théorème de Wick, mais nous aurons ici besoin seulement de son invariance par changement de phase globale $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow e^{i\gamma} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$ (symétrie $U(1)$), qui découle de la conservation du nombre total de particules \hat{N} par \hat{H} . À température nulle, le champ $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ à N fixé est figé, à une phase globale près, dans le minimiseur $\Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (N/2)^{1/2} \phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ de \mathcal{H} , où ϕ_0 , réel et normalisé à l'unité, dépend de N même dans le cas spatialement homogène. ϕ_0 diffère de la fonction d'onde du condensat φ_0 de la même manière que Φ diffère du champ de paires $\langle \hat{\psi}_{\downarrow} \hat{\psi}_{\uparrow} \rangle$ (voir la Note 10). À température suffisamment faible, on peut développer \mathcal{H} en puissances des petites déviations de Φ par rapport au cercle $\gamma \mapsto e^{i\gamma} \Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, lieu des minima de \mathcal{H} à N fixé. On décompose donc le champ en ses composantes colinéaire et orthogonale à ϕ_0 :

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{i\theta} [n^{1/2} \phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \quad (19)$$

⁷ Le résultat (15) restreint à l'ordre linéaire en les opérateurs de paires n'inclut pas la contribution de la branche de phonons. On pourrait espérer obtenir cette contribution en poussant le calcul par la RPA jusqu'à l'ordre quadratique comme suit : premièrement, on calcule $d\hat{\theta}_0/dt$ jusqu'à l'ordre quadratique. Deuxièmement, on forme l'ensemble des opérateurs de la RPA qui transfèrent une quantité de mouvement $\hbar\mathbf{q}$, à savoir $\hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow} \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}$ et $\hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}$, où $\hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}$ annihile un fermion de vecteur d'onde \mathbf{k} et de spin \uparrow , ensemble qui est clos au regard des équations linéarisées. Pour chaque valeur de \mathbf{q} la matrice $\mathcal{L}_{\mathbf{q}}$ de ce système d'équations possède deux modes collectifs, dont les énergies, opposées l'une de l'autre, sont linéaires en \mathbf{q} dans la limite des grandes longueurs d'onde. On développe alors les opérateurs de la RPA sur l'ensemble des modes propres de $\mathcal{L}_{\mathbf{q}}$; les amplitudes obtenues sur les modes collectifs, $\hat{b}_{-\mathbf{q}}$ et $\hat{b}_{\mathbf{q}}$, annihilent et créent respectivement une excitation collective d'impulsion $\mp\hbar\mathbf{q}$. Troisièmement, on insère cette décomposition modale dans les opérateurs de la RPA apparaissant dans $d\hat{\theta}_0/dt$ pour obtenir une expression quadratique en les amplitudes modales, et donc des termes en $\hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}}$ comme dans (8). Malheureusement, cette approche par la RPA n'est pas fiable et nous devons y renoncer car les opérateurs de la RPA, bien que linéairement indépendants, ne sont pas quadratiquement indépendants, comme on le voit en dissociant et réassociant les opérateurs de paires grâce aux relations d'anticommuation fermioniques, par exemple

$$(\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}) (\hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}) = (\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}^{\dagger}) (\hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}).$$

Ceci montre (i) qu'il n'y a pas une manière unique d'exprimer $d\hat{\theta}_0/dt$ comme une fonction quadratique des opérateurs de la RPA, (ii) que les amplitudes modales ne sont pas quadratiquement indépendantes, et (iii) que le coefficient de $\hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}}$ n'est pas déterminé de manière unique par cette approche fondée sur la RPA.

⁸ Nous nous appuyons ici par souci de simplicité un Ansatz de type BCS dépendant du temps dans lequel le nombre de particules possède des fluctuations quantiques (à ne pas confondre avec les fluctuations thermiques de l'ensemble grand canonique). Au prix d'une difficulté supplémentaire, nous aurions pu tout aussi bien choisir un Ansatz à nombre de particules fixé [16], ce qui n'aurait changé les coefficients de la fonctionnelle énergie que d'une correction relative $O(N^{-1/2})$, si bien que le spectre obtenu à la limite thermodynamique eût été le même.

⁹ Nos variables Γ et Φ correspondent aux variables z et β de la référence [19] dans le cas où l'on remplace les opérateurs et le vide de quasi-particules dans l'équation (9.132) de [19] par ceux des particules. Si $\underline{\Gamma}$ et $\underline{\Phi}$ sont les matrices de coefficients respectivement $l^3 \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ et $l^3 \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ alors $\underline{\Phi} = -\underline{\Gamma}(1 + \underline{\Gamma}^{\dagger} \underline{\Gamma})^{-1/2}$, d'après l'équation (9.144) de [19]. Leurs équations d'évolution s'obtiennent par méthode variationnelle à partir du lagrangien $L = i\hbar [(\psi | (d/dt) | \psi) - \text{c.c.}] / 2 - (\psi | H | \psi)$. Φ a été choisi astucieusement de sorte que $L = i\hbar l^6 \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} [\Phi^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial_t \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \text{c.c.}] / 2 - \mathcal{H}(\Phi, \Phi^*)$, ce qui conduit à $\partial_t \Phi = (i\hbar l^6)^{-1} \partial_{\Phi^*} \mathcal{H}$. Ceci montre que la variable conjuguée de Φ dans le formalisme hamiltonien est $i\hbar l^6 \Phi^*$ pour le crochet de Poisson traditionnel, et donc Φ^* pour le crochet de Poisson $\{\Phi, \Phi^*\} = (i\hbar l^6)^{-1}$, sachant qu'on doit avoir $\partial_t \Phi = \{\Phi, \mathcal{H}\}$.

¹⁰ Avec la même notation matricielle que dans la Note 9, nous avons $\langle \hat{\psi}_{\uparrow} \hat{\psi}_{\downarrow} \rangle = \underline{\Phi}(1 - \underline{\Phi}^{\dagger} \underline{\Phi})^{1/2}$ d'après l'équation (9.146) de la référence [19].

où l'excursion de la phase θ peut être arbitrairement grande, contrairement à celle de Λ . Ce cadre permet de développer une théorie perturbative systématique en puissances du champ Λ (voir [Annexe A](#)), qui est l'analogie pour les fermions de la théorie de Bogolioubov sans brisure de symétrie $U(1)$ pour les bosons [20]. Comme nous le verrons, la phase θ reste proche de la phase θ_0 du condensat si Λ est assez petit. On écrit donc les équations du mouvement pour θ et pour les champs de l'espace orthogonal Λ, Λ^* . Dans la forme finale des équations, on fait systématiquement disparaître les variables du condensat grâce à la relation $n = N/2 - \|\Lambda\|^2$, conséquence de (17), et on se limite à l'ordre 2 en Λ, Λ^* .

La difficulté centrale de notre problème provient de l'existence d'un terme linéaire en Λ, Λ^* dans $d\theta/dt$, conséquence de la dépendance de ϕ_0 en le nombre de paires [11]. En l'absence de ce terme linéaire, il suffirait de développer le champ Λ sur les modes propres de ses petites oscillations linéaires, déduits de l'approximation quadratique du hamiltonien \mathcal{H} à N fixé :

$$\begin{pmatrix} \Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \\ \Lambda^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \end{pmatrix} = \sum_{\alpha} b_{\alpha}(t) \begin{pmatrix} u_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ v_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{pmatrix} + b_{\alpha}^*(t) \begin{pmatrix} v_{\alpha}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ u_{\alpha}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{pmatrix} \quad (20)$$

où la somme porte sur les modes propres d'énergie positive ϵ_{α} , avec la normalisation $\|u_{\alpha}\|^2 - \|v_{\alpha}\|^2 = 1$. À cet ordre, $b_{\alpha}(t) = b_{\alpha}(0)e^{-i\epsilon_{\alpha}t/\hbar}$. Il n'y aurait qu'à injecter la décomposition (20) dans $d\theta/dt$ et à prendre une moyenne temporelle à gros grains pour tuer les termes de battement entre les modes; $\overline{d\theta/dt}$ contiendrait alors la combinaison linéaire attendue des nombres de quasi-particules bosoniques $n_{B,\alpha} = |b_{\alpha}|^2$. La réalité est plus subtile : à cause de l'interaction entre les quasi-particules, $\overline{b_{\alpha}^{\dagger}}$ n'est pas nul mais d'ordre deux en Λ et Λ^* , si bien que le terme linéaire dans $d\theta/dt$ contribue à la même hauteur que les termes quadratiques. On doit donc calculer $\overline{b_{\alpha}^{\dagger}}$, ce que l'on fait dans l'[Annexe A](#), en utilisant en particulier le caractère borné du champ Λ , conséquence du respect de la symétrie $U(1)$ dans le développement (19), puis en appliquant le théorème de Hellmann–Feynman, pour trouver :

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\overline{\theta}}{dt} = \mu_0(N) + \sum_{\alpha} \frac{d\epsilon_{\alpha}}{dN} |b_{\alpha}|^2 + O(\|\Lambda\|^3) \quad (21)$$

Discutons brièvement le spectre ϵ_{α} dans le cas d'un système spatialement homogène, à la limite continue $l \rightarrow 0$ pour une interaction de contact dans l'onde s de longueur de diffusion fixée entre fermions de spin opposé. Pour chaque valeur du vecteur d'onde total \mathbf{q} , il se compose d'au plus une énergie discrète $\epsilon_{B,\mathbf{q}}$, et d'un continuum paramétré par deux vecteurs d'onde $(\mathbf{k}_1, \uparrow; \mathbf{k}_2, \downarrow) \mapsto \epsilon_{F,\mathbf{k}_1,\uparrow} + \epsilon_{F,\mathbf{k}_2,\downarrow}$ de somme fixée $(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{q})$, où $\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma}$ est la relation de dispersion BCS. La branche $q \mapsto \epsilon_{B,\mathbf{q}}$ coïncide bien avec celle de la référence [21], comme nous l'avons vérifié. De départ phononique, elle correspond aux excitations élémentaires bosoniques du gaz de fermions dont nous cherchions la contribution à la dynamique de phase. Elle doit donc être gardée dans (21). En revanche, le continuum correspond à l'excitation de deux quasi-particules fermioniques; celles-ci ne peuvent en effet être excitées que par paires à partir du fondamental car l'hamiltonien \hat{H} contient un nombre pair de facteurs $\hat{\psi}$ et $\hat{\psi}^{\dagger}$, qui détruisent ou créent chacun une quasi-particule. Ces biexcitations ne sont pas physiquement indépendantes,¹¹ et font double emploi avec la contribution de la RPA à $d\hat{\theta}_0/dt$. Il ne faut donc pas les inclure dans (21).

Deux dernières remarques nous séparent de (8). (i) Les champs $\langle \hat{\psi}_{\downarrow} \hat{\psi}_{\uparrow} \rangle$ et Φ sont distincts, aussi les phases $\hat{\theta}_0$ et θ ne coïncident-elles pas exactement. Leur valeur moyenne temporelle à gros grains ne diffèrent cependant que par un terme d'ordre $\|\Lambda\|^2$, borné, négligeable aux temps longs, ne contribuant pas au brouillage de phase du condensat de paires.¹² (ii) La phase de notre approche variationnelle est une variable classique, alors que $\hat{\theta}_0$ dans (8) est un opérateur quantique. Ce hiatus est comblé par application au résultat (21) de la procédure de quantification du chapitre 11 de la référence [19], puisque les b_{α} de la branche bosonique y sont remplacés par des opérateurs bosoniques¹³ $\hat{b}_{\alpha}, [\hat{b}_{\alpha}, \hat{b}_{\alpha}^{\dagger}] = 1$. Nous pensons que la validité de l'équation (8), reliant $d\hat{\theta}_0/dt$ à l'opérateur potentiel chimique, et donc du résultat (13), dépasse celle de notre dérivation microscopique variationnelle et inclut le régime d'interaction forte pourvu que les quasi-particules aient une durée de vie beaucoup plus longue que l'inverse de leur fréquence propre, ce qui est le cas à température suffisamment basse. Dans le cas limite où l'on peut négliger la branche d'excitation fermionique et se limiter à la partie phononique de la branche bosonique, c'est bien ce que prédit la variante irrotationnelle de la théorie de l'hydrodynamique quantique de Landau et Khalatnikov [22] (voir l'[Annexe B](#)).

¹¹ Exciter $\alpha = (\mathbf{k}_1, \uparrow; \mathbf{k}_2, \downarrow)$ et $\alpha' = (\mathbf{k}'_1, \uparrow; \mathbf{k}'_2, \downarrow)$ revient à exciter $\alpha'' = (\mathbf{k}'_1, \uparrow; \mathbf{k}'_2, \downarrow)$ et $\alpha''' = (\mathbf{k}_1, \uparrow; \mathbf{k}_2, \downarrow)$.

¹² En exprimant dans $\langle \hat{a}_0 \rangle$ la valeur moyenne du champ de paires en fonction de Φ , on se rend compte pour Λ faible que $\langle \hat{a}_0 \rangle = e^{i\theta} \sqrt{N_0} (1 + O(\|\Lambda\|))$ et donc, étant donné que $\overline{\Lambda^{\dagger}} = O(\|\Lambda\|^2)$, on a $\overline{\hat{a}_0^{\dagger}} = \overline{\theta}^{\dagger} + O(\|\Lambda\|^2)$.

¹³ Plus précisément, ces opérateurs ne sont bosoniques que pour une faible densité d'excitations. Pour un système homogène spatialement et dans un formalisme qui brise la symétrie $U(1)$ ($\theta = 0$), nous obtenons à partir des équations (11.81c) de [19], généralisées au cas de fermions appariés ($\hat{a}_p, \hat{a}_h^{\dagger}$ sont remplacés par les opérateurs BCS $\hat{b}_{k\sigma}$ d'annihilation de quasi-particules fermioniques) et restreintes aux images bosoniques faiblement excitées ($\mathbb{B}\mathbb{B}^{\dagger}$ négligeable) : $\hat{b}_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{k}} X_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \hat{b}_{-\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{-\mathbf{k}}^{\dagger}$. Les coefficients réels $X^{\mathbf{q}}$ et $Y^{\mathbf{q}}$ sont des combinaisons linéaires des coefficients correspondants $u_{\mathbf{q}}$ et $v_{\mathbf{q}}$ dans l'équation (20), et héritent de leur condition de normalisation $\sum_{\mathbf{k}} (X_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2 - (Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2 = 1$. Alors, dans un état (16) avec $\theta = 0$, $\hat{\delta}_{\mathbf{q}} \equiv [\hat{b}_{\mathbf{q}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger}] - \hat{1}$ a une valeur moyenne et une variance $O(\|\Lambda\|^2/N)$ puisque $\hat{b}_{k\sigma} |\psi\rangle = O(\|\Lambda\|/N^{1/2})$ si $\|\Lambda\|/N^{1/2} \rightarrow 0$.

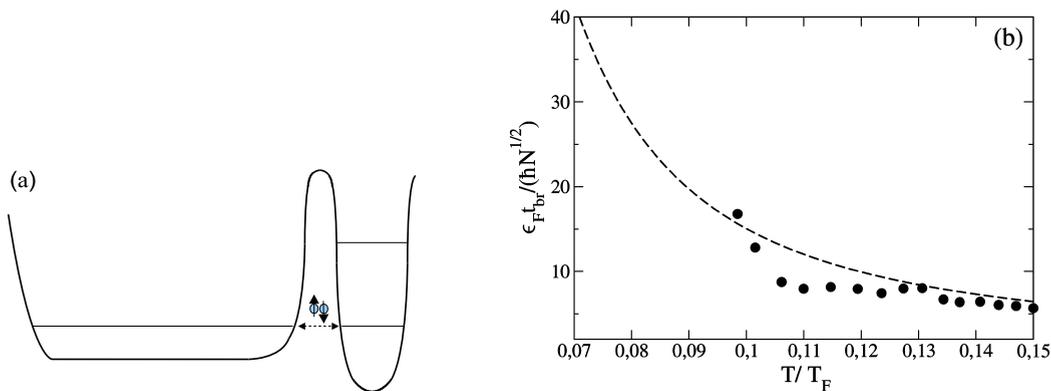


Fig. 1. Quelques considérations expérimentales. (a) Configuration de piégeage proposée pour mesurer $g_1(t)$ par interférométrie de Ramsey : le condensat de paires de fermions est confiné dans le piège principal (à fond plat sur la figure) ; on transfère au plus deux atomes en moyenne (sous forme d'un dimère) dans le piège secondaire (très étroit) par effet tunnel résonnant d'amplitude ajustable par une barrière de hauteur variable ; on crée ainsi une référence de phase avec laquelle on fait interférer le condensat de paires après un temps d'évolution t . (b) Temps de brouillage thermique pour un gaz cohérent de fermions à la limite unitaire dans l'ensemble canonique, en fonction de la température T en unités de la température de Fermi $T_F = \epsilon_F/k_B$. Disques : à partir de l'équation d'état mesurée dans la référence [8]. Ligne tiretée : formule (22) qui utilise l'équation d'état approchée décrite dans le texte.

4. En vue d'une étude expérimentale

Esquissons maintenant un protocole de mise en évidence expérimentale du brouillage thermique d'un condensat de paires. L'idée centrale est, dans les phases de préparation et de mesure, de bosoniser de manière adiabatique réversible [23] les paires de Cooper atomiques sous forme de dimères fortement liés et faiblement interagissants, en ajustant la longueur de diffusion à une faible valeur positive grâce à une résonance de Feshbach magnétique. Ceci permet (i) de produire un échantillon à nombre faiblement fluctuant de dimères, en faisant fondre une phase de Mott préparée par réalisation du modèle de Hubbard bosonique [24], (ii) de créer un couplage tunnel entre le piège principal renfermant les N particules et un piège secondaire très étroit, à travers une barrière de hauteur ajustable [2] (Fig. 1a), (iii) de détecter par fluorescence un dimère unique [25] dans ce piège secondaire. Pour mesurer la fonction $g_1(t)$, nous adaptons aux paires de fermions la méthode interférométrique de Ramsey de la référence [26], où sont appliquées deux impulsions de Rabi à un intervalle de temps t . On prépare initialement les paires bosonisées dans le piège principal. La première impulsion est d'angle ϵ suffisamment faible pour transférer en moyenne moins d'un dimère dans le piège secondaire et éviter ainsi le bruit de partition qui masquerait le brouillage thermique. On ajuste ensuite les interactions à la valeur à laquelle on souhaite étudier la dynamique de phase du condensat de paires, et on laisse évoluer pendant le temps t . On rebosonise et on applique une seconde impulsion d'angle ϵ avant de mesurer le nombre n_{sec} de dimères dans le piège secondaire. Alors la valeur moyenne de n_{sec} sur les réalisations présente, en fonction du temps t , des oscillations de demi-pulsation la différence (sur \hbar) des potentiels chimiques entre les deux zones de piégeage, et de contraste $|g_1(t)/g_1(0)|$.

5. Quelques résultats explicites sur le gaz unitaire

Pour commencer, donnons une estimation du temps de brouillage pour un gaz unitaire préparé dans l'ensemble canonique, donc avec des fluctuations d'énergie de variance $\text{Var } E = k_B T^2 \partial_T \bar{E}$. En utilisant l'équation d'état du gaz unitaire non polarisé mesurée dans la référence [8] nous trouvons, pour un système spatialement homogène (dans un piège à fond plat [27]) les temps de brouillage thermiques t_{br} représentés par des disques sur la Fig. 1b. Ainsi, à une température $T = 0,12 T_F \simeq 0,7 T_c$ où T_c est la température de condensation des paires, on trouve $t_{br} \approx 7N^{1/2}\hbar/\epsilon_F$, ce qui correspond à 20 millisecondes pour une température de Fermi typique $T_F = \epsilon_F/k_B = 1 \mu\text{K}$ et un nombre d'atomes typique $N = 10^5$. On peut aussi comme dans la référence [28] estimer l'équation d'état du gaz unitaire à partir d'un modèle de gaz parfait de quasi-particules avec des relations de dispersion simples. Pour la branche bosonique, on prend [28] $\epsilon_{B,q} = \hbar c q$ avec c la vitesse du son à $T = 0$, $mc^2 = \frac{2}{3}\xi\epsilon_F$, et ξ le paramètre de Bertsch. Pour la branche fermionique, on prend [29] $\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma} = \Delta + (\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \epsilon_0)/(2f_0)$, où Δ est la *gap* et où ϵ_0 et f_0 donnent la position du minimum et la courbure de la relation de dispersion. En gardant pour chaque branche sa contribution à l'énergie volumique moyenne d'ordre dominant à basse température $\bar{E}_F/V \simeq \frac{2m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} (\epsilon_0 f_0 k_B T)^{1/2} \Delta e^{-\Delta/k_B T}$ et $\bar{E}_B/V \simeq \frac{\pi^2}{30} (k_B T)^4 / (\hbar c)^3$ comme dans [28], et en utilisant les valeurs expérimentales [8,30] $\xi = 0,376$, $\Delta = 0,44\epsilon_F$, $\epsilon_0 = 0,85\epsilon_F$ et la valeur théorique [29] $f_0 = 0,846\epsilon_F$, nous trouvons :

$$\frac{N\hbar^2}{(t_{br}\epsilon_F)^2} \simeq \left(\frac{\Theta}{0,46}\right)^5 \frac{(1+2r)^2}{(1+r)} \quad (22)$$

où $\Theta = T/T_F$ et où $r \equiv \partial_T \bar{E}_F / \partial_T \bar{E}_B \simeq \left(\frac{0.316}{\Theta}\right)^{9/2} e^{-0.44/\Theta}$ mesure l'importance relative des deux branches d'excitation. Cette formule, représentée en tireté sur la Fig. 1b, donne un équivalent exact de t_{br} quand $\Theta \rightarrow 0$.¹⁴

Aux temps finis¹⁵ $t = O(N^0) \ll t_{br}$, la contribution de D à $g_1(t)$ dans l'équation (13) est *a priori* comparable à celle de t_{br}^{-2} puisque les deux coefficients se comportent comme $1/N$ dans l'ensemble canonique. D peut être calculé à très basse température en ne gardant que la partie phononique du spectre. Dans l'état de l'art, il est prédit par différentes approches que la branche bosonique est convexe aux faibles q dans un gaz unitaire [31–33],

$$\epsilon_{B,q} \underset{q \rightarrow 0}{=} \hbar c q + \frac{\gamma \hbar^3 q^3}{8m^2 c} + O(q^5) \text{ avec } \gamma > 0 \quad (23)$$

si bien que les phonons interagissent par des processus Landau–Beliaev 2 phonons \leftrightarrow 1 phonon comme dans un gaz de bosons en interaction faible.¹⁶ Nous pouvons alors réutiliser, en l'adaptant,¹⁷ la réduction à basse température de l'expression générale (12) effectuée dans la référence [18]. Par ailleurs, nous trouvons, par résolution numérique des équations de la RPA de la référence [21], que $\gamma \simeq 0,1$, en accord avec [33,34], si bien que

$$\frac{\hbar N D}{\epsilon_F} \underset{\Theta \rightarrow 0}{\sim} C \Theta^4 \quad \text{avec} \quad C \simeq 0,4 \quad (24)$$

Ceci achève notre description du brouillage thermique d'un gaz de fermions à la limite unitaire et à basse température.

6. Conclusion

Nous avons présenté la première théorie microscopique du brouillage thermique de la phase d'un condensat de paires de fermions (13), et mis en évidence un brouillage balistique et une diffusion de phase sous-dominante. Le temps de brouillage dépend de la variance de l'énergie totale du gaz, ainsi que de la dérivée du potentiel chimique microcanonique du gaz par rapport à l'énergie. Le coefficient de diffusion de la phase peut être déduit d'équations cinétiques sur les nombres de quasi-particules. Pour établir ces résultats, nous avons utilisé de façon centrale le fait que la vitesse de variation de la phase du condensat de paires est reliée à l'opérateur potentiel chimique du gaz par l'équation (8), dont nous avons donné une dérivation microscopique incluant les deux branches d'excitation du gaz, bosonique et fermionique. Nous avons enfin proposé un protocole expérimental de mesure de ce temps, que nous avons estimé être de l'ordre de la dizaine de millisecondes pour un gaz cohérent de fermions préparé à la limite unitaire dans l'ensemble canonique.

Remerciements

Ce travail a bénéficié d'un financement européen *via* le projet QIBEC sous le numéro de contrat 284 584.

Annexe A. Compléments sur le calcul variationnel avec un état cohérent de paires

Dans cette annexe nous démontrons l'équation (21) portant sur la moyenne temporelle de θ grâce à un modèle microscopique fondé sur l'Ansatz (16), état cohérent de paires en mouvement. Il est commode dans un premier temps de traiter la variable réelle n et le champ complexe Λ dans (19) comme des variables indépendantes, c'est-à-dire de ne pas fixer $\|\Phi\|$. Pour inclure les interactions entre les quasi-particules, il faut aller jusqu'à l'ordre trois en Λ et Λ^* comme suit :

$$\mathcal{H}(\Phi, \Phi^*) = \mathcal{T}_0[n, \phi_0(N)] + \sum_{j=1}^3 \mathcal{T}_j[n, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^4) \quad (25)$$

¹⁴ Le bon accord avec les données expérimentales est à relativiser car si l'on traite les deux branches du modèle à tous les ordres en $k_B T$, on obtient un décalage vers le haut de $t_{br, \epsilon_F} / (\hbar N^{1/2})$ à peu près constant et égal à 5 sur l'intervalle de température de la Fig. 1b.

¹⁵ Les temps que l'on considère sont néanmoins contraints par l'inégalité $t > \tau_c$ (voir la Note 1) : pour un gaz unitaire $\tau_c \simeq (0,149/\Theta)^5$ quand $\Theta \rightarrow 0$, d'après la Note 17.

¹⁶ Dans le cas convexe, les processus dominants sont les diffusions 2 phonons \leftrightarrow 2 phonons, comme dans la référence [22].

¹⁷ L'astuce universalisante à basse température est d'utiliser, quel que soit le système physique, mc/\hbar comme unité de vecteur d'onde et mc^2 comme unité d'énergie. Partons alors du coefficient de diffusion de la phase et du temps de corrélation des quasi-particules pour des bosons en interaction faible [18] : $\hbar N D / (mc^2) \sim c_1 (k_B T / mc^2)^4$ et $mc^2 \tau_c / \hbar \sim c_3 \rho [\hbar / (\sqrt{2} mc)]^3 (mc^2 / k_B T)^5$, où $c_1 \simeq 0,3036$ et $c_3 \simeq 0,05472$, et recensions tous les facteurs correctifs faisant passer du gaz de bosons en interaction faible au gaz unitaire de fermions, compte tenu du fait que D est une fonction quadratique de $P\bar{A}$ et linéaire de M^{-1} , voir l'équation (12) : (i) dans le cas d'un condensat de paires, il y a un facteur deux dans les coefficients \bar{A} de $-\dot{d}\theta_0/dt$, donc un facteur quatre sur D , (ii) l'équation d'état passe de $\mu_0(\rho) \propto \rho$ à $\mu_0(\rho) \propto \rho^{2/3}$, où ρ est la densité, donc $(N/c) dc/dN$ dans \bar{A} passe de $1/2$ à $1/3$, d'où un facteur $2/3$ sur \bar{A} et un facteur $4/9$ sur D , (iii) $P\bar{A}$, nul pour une branche d'excitation bosonique linéaire en q puisqu'alors $\bar{A} \propto \bar{\epsilon}$, est proportionnel à basse température au paramètre de courbure sans dimension γ , qui valait un dans [18], d'où un facteur γ^2 dans D , (iv) d'après l'hydrodynamique quantique [22], les amplitudes adimensionnées de couplage Beliaev–Landau entre les quasi-particules, à des valeurs fixées des vecteurs d'onde adimensionnés, dépendent du système seulement *via* un facteur global $1 + \Lambda$, où $\Lambda = \rho \mu_0''(\rho) / [3\mu_0'(\rho)]$ passe de 0 à $\Lambda_u = -1/9$, d'où un facteur $(1 + \Lambda_u)^{-2}$ sur la matrice M^{-1} donc sur D et sur le temps de corrélation τ_c induit par les collisions entre les quasi-particules. Alors, pour le gaz unitaire, $\hbar N D / (mc^2) \sim c_1 [(4\gamma/3)^2 / (1 + \Lambda_u)^2] (k_B T / mc^2)^4$ et $mc^2 \tau_c / \hbar \sim c_3 (1 + \Lambda_u)^{-2} \rho [\hbar / (\sqrt{2} mc)]^3 (mc^2 / k_B T)^5$.

Le tenseur \mathcal{T}_j est de rang j , c'est-à-dire que $\mathcal{T}_j(\Lambda, \Lambda^*)$ est d'ordre exactement j en Λ et Λ^* ; il peut s'exprimer en termes de la différentielle j -ième de \mathcal{H} prise en $(\Phi, \Phi^*) = (n^{1/2}\phi_0, n^{1/2}\phi_0)$ restreinte au sous-espace orthogonal à $(\phi_0, 0)$ et $(0, \phi_0)$, où l'on a pris ϕ_0 réelle, et il ne dépend pas de la phase θ du fait de la symétrie $U(1)$. À nombre total de particules fixé, l'énergie ne varie pas au premier ordre autour du minimiseur si bien que $\mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)] = 0$. Cette innocente équation n'est autre que la célèbre équation du *gap* lorsque le système est spatialement homogène. De plus, on vérifie que $\partial_n \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] = 2\mu_0(N)$ où $\mu_0(N) = dE_0(N)/dN$ est le potentiel chimique du gaz à température nulle, $E_0(N) = \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)]$ étant l'énergie de l'état fondamental.

Les variables phase et module au carré de l'amplitude du champ Φ dans le mode ϕ_0 sont canoniquement conjuguées, si bien que $-\hbar d\theta/dt = \partial_n \mathcal{H}(\Phi, \Phi^*)$. Une fois effectuée cette dérivée dans (25) à Λ et Λ^* fixés, on peut fixer la norme de Φ à $(N/2)^{1/2}$ (c'est-à-dire le nombre total de particules à N) et éliminer n grâce à la relation $n = \|\Phi\|^2 - \|\Lambda\|^2$; le champ Λ reste alors la seule variable dynamique du problème. L'expression est utile seulement jusqu'à l'ordre deux en Λ, Λ^* :

$$-\hbar \frac{d\theta}{dt} = \partial_n \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] - \|\Lambda\|^2 \partial_n^2 \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] + \sum_{j=1}^2 \partial_n \mathcal{T}_j[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^3) \quad (26)$$

L'hamiltonien régissant l'évolution de Λ à nombre de particules fixé s'obtient en remplaçant n par $N/2 - \|\Lambda\|^2$ dans (25) et en développant jusqu'à l'ordre trois en Λ, Λ^* :

$$\mathcal{H}_N(\Lambda, \Lambda^*) = E_0(N) + \check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) + \mathcal{T}_3[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) - \|\Lambda\|^2 \partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^4) \quad (27)$$

où la forme quadratique $\check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*)$ est obtenue en soustrayant $2\mu_0(N)\|\Lambda\|^2$ à $\mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*)$. Pour calculer la moyenne temporelle à gros grains de $\partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*)$, c'est-à-dire du terme linéaire en Λ, Λ^* posant problème dans $d\theta/dt$ (voir le corps de l'article), il est astucieux d'écrire alors directement la dérivée temporelle de la partie imaginaire du champ Λ projetée sur la fonction $(N/2)^{1/2} d\phi_0/dN$,

$$Y \equiv \frac{l^6}{2i} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \frac{d\phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{dN} (\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \Lambda^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \quad (28)$$

Comme $i\hbar \partial_t \Lambda = l^{-6} \partial_{\Lambda^*} \mathcal{H}_N(\Lambda, \Lambda^*)$, il vient

$$-2\hbar \frac{dY}{dt} = \mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N(\Lambda, \Lambda^*) = \mathcal{D} \cdot \check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) + \mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N^{\text{cub}}(\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^3) \quad (29)$$

où $\mathcal{H}_N^{\text{cub}}$ est la partie de \mathcal{H}_N d'ordre trois en Λ, Λ^* . On a introduit l'opérateur différentiel

$$\mathcal{D} = \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \frac{d\phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{dN} (\partial_{\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} + \partial_{\Lambda^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}) \quad (30)$$

Nous allons maintenant mettre à profit en cascade deux relations vérifiées pour tout Λ orthogonal à $\phi_0(N)$:

$$2\mathcal{D} \cdot \check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) = -\partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) \quad (31)$$

$$2\mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N^{\text{cub}}(\Lambda, \Lambda^*) = 2 \frac{d}{dN} \check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) - \partial_n \mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) + \|\Lambda\|^2 \partial_n^2 \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] \quad (32)$$

On établit ces relations en considérant formellement un champ Φ' à $N + \delta N$ particules et en obtenant de deux façons différentes l'approximation quadratique en Λ' et Λ'^* de $\mathcal{H}_{N+\delta N}(\Lambda', \Lambda'^*)$ où Λ' est à une phase près comme dans (19) (écrite pour $N + \delta N$ particules) la composante de Φ' orthogonale à $\phi_0(N + \delta N)$. D'une part, on remplace simplement N par $N + \delta N$ et Λ par Λ' dans (27), puis on développe au premier ordre en δN , ce qui fait apparaître $d\check{\mathcal{T}}_2/dN[N]$. D'autre part, on applique à $\mathcal{H}(\Phi', \Phi'^*)$ le développement (25) autour de $\Phi_0(N)$ sachant qu'au premier ordre en δN , la composante de Φ' orthogonale à $\phi_0(N)$ contient, en plus de celle Λ'_\perp de Λ' , une contribution venant de $d\phi_0/dN$:

$$\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta N \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \frac{d\phi_0}{dN}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \Lambda'_\perp(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + O(\delta N^2, \|\Lambda'\|^3, \delta N \|\Lambda'\|^2) \quad (33)$$

C'est ce décalage infinitésimal proportionnel à δN dans la direction de $d\phi_0/dN$ qui fait apparaître l'opérateur \mathcal{D} . Les équations (31) et (32) résultent de l'identification aux ordres un et deux en Λ' et Λ'^* des deux expressions de $\mathcal{H}_{N+\delta N}(\Lambda', \Lambda'^*)$ obtenues.

Le plus gros du travail a été accompli. Il reste à combiner les équations (26), (29), (31), et (32), ou plus précisément leur moyenne temporelle à gros grains (sur une échelle de temps longue devant la période d'oscillation des amplitudes modales b_α mais courte devant le temps d'évolution des nombres de quasi-particules $|b_\alpha|^2$) pour obtenir

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\theta^t}{dt} = \mu_0(N) + \overline{\frac{d\check{\mathcal{T}}_2}{dN}}[N](\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^3) \quad (34)$$

où nous avons utilisé de façon cruciale la nullité de $\overline{d\Lambda/dt}$ (et donc de $\overline{dY/dt}$) pour le champ Λ , dont l'excursion est bornée. La forme quadratique $\check{T}_2[N]$ est représentée par la matrice $\eta\mathcal{L}[N]$ avec $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, soit, en notation par blocs et avec le produit scalaire hermitien \langle, \rangle dont découle la norme $\| \cdot \|$:

$$\check{T}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) = \frac{1}{2} \left\langle (\Lambda \ \Lambda^*), \eta\mathcal{L}[N] \begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda^* \end{pmatrix} \right\rangle \quad (35)$$

Il reste à injecter la décomposition modale (20) dans l'équation (35) préalablement dérivée par rapport à N , les ϵ_α et (u_α, v_α) , $-\epsilon_\alpha$ et (v_α^*, u_α^*) étant les valeurs propres et vecteurs propres de \mathcal{L} . La valeur moyenne à gros grains $\overline{\quad}$ se charge d'éliminer les termes croisés et le théorème de Hellmann–Feynman assure que¹⁸ $\langle (u_\alpha, -v_\alpha), \frac{d\mathcal{L}[N]}{dN} \begin{pmatrix} u_\alpha \\ v_\alpha \end{pmatrix} \rangle = d\epsilon_\alpha/dN$, et permet ainsi de conclure sur l'équation (21).

Annexe B. Hydrodynamique quantique irrotationnelle

Dans cette annexe, nous donnons une démonstration supplémentaire de l'équation (8) à partir de l'hydrodynamique quantique. Bien que cette démonstration ne soit pas microscopique, à l'inverse de celle que nous avons donnée dans le corps de l'article et dans l'Annexe A, et bien qu'elle néglige les degrés de liberté fermioniques internes et se contente d'une description aux grandes échelles spatiales des paires de fermions, par un champ bosonique donc, elle présente l'avantage de reposer uniquement sur l'équation d'état et d'être ainsi valide dans tous les régimes d'interaction.

En 1949, pour calculer la viscosité de l'hélium superfluide à basse température, Landau et Khalatnikov ont développé la théorie de l'hydrodynamique quantique [22], qui permet de déterminer, de manière exacte à l'ordre dominant en T , les effets d'une température non nulle sur les observables d'un fluide quantique, du moins sur celles dépendant seulement des faibles échelles d'énergie et des grandes échelles de longueur. De façon remarquable, le seul ingrédient spécifique est l'équation d'état du fluide à température nulle, c'est-à-dire ici la densité volumique d'énergie $e_0(\rho)$ de l'état fondamental du système spatialement homogène de densité ρ .

Afin d'obtenir la dérivée temporelle de l'opérateur phase du condensat de paires de fermions, nous apportons deux raffinements à la théorie, une régularisation des divergences ultraviolettes et une spécialisation au cas irrotationnel.

D'une part, nous résolvons les problèmes de divergence du niveau d'énergie fondamental du hamiltonien de Landau–Khalatnikov, dus à l'énergie quantique de point zéro des modes propres du système, en discrétisant l'espace en un réseau cubique de pas l , sous-multiple de la longueur L de la boîte de quantification, beaucoup plus petit que la longueur d'onde typique $2\pi/q_{\text{th}}$ des excitations du fluide peuplées thermiquement, mais beaucoup plus grand que la distance moyenne $\rho^{-1/3}$ entre particules,

$$\rho^{-1/3} \ll l \ll q_{\text{th}}^{-1} \quad (36)$$

ce qui est réalisable à suffisamment basse température ; ce maillage souscrit au régime de validité de l'hydrodynamique, celui d'une description spatiale à gros grains, et fournit une coupure naturelle ultraviolette dans l'espace des vecteurs d'onde \mathbf{q} , en les restreignant à la première zone de Brillouin¹⁹ $\mathcal{D} = [-\pi/l, \pi/l]^3$. Dans l'hamiltonien, il faut alors remplacer les opérateurs différentiels (gradient, divergence, laplacien) par leurs équivalents discrets, comme il sera implicitement fait plus bas, et il faut utiliser la densité volumique d'énergie *nue* $e_{0,0}(\rho)$, fonction du pas du réseau l ; suivant les idées de la renormalisation, l'énergie quantique de point zéro des modes, formellement divergente lorsque $l \rightarrow 0$, s'ajoute alors à $e_{0,0}(\rho)$ pour reconstruire précisément la densité volumique d'énergie *effective* ou *vraie* $e_0(\rho)$, indépendante de l , et qui est celle mesurée expérimentalement.

D'autre part, nous spécialisons la théorie au cas d'un opérateur champ de vitesse $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$ irrotationnel, qu'on peut donc écrire comme le gradient d'un opérateur champ de phase $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$, canoniquement conjugué à l'opérateur champ de densité $\hat{\rho}(\mathbf{r}, t)$:

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \text{grad} \hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \text{ avec } [\hat{\rho}(\mathbf{r}, t), \hat{\phi}(\mathbf{r}', t)] = i \frac{\delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}}{l^3} \quad (37)$$

Ceci revient à négliger la composante transverse du champ $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$, comme l'a fait la référence [22] pour déterminer l'interaction entre phonons et avancer dans le calcul de la viscosité. Dans le cas particulier invariant d'échelle du gaz de fermions unitaire, une justification en est donnée dans la référence [35] dans le cadre de la théorie effective des champs. Notons en passant que la densité de quasi-particules fermioniques, exponentiellement petite en $1/T$, est elle directement omise par la théorie hydrodynamique.

¹⁸ $(u_\alpha, -v_\alpha)$ est le vecteur dual de (u_α, v_α) car $(\eta\mathcal{L})^\dagger = \eta\mathcal{L}$.

¹⁹ Il faut aussi que les excitations élémentaires du système restent phononiques sur tout le domaine \mathcal{D} . Ceci impose $\hbar c/l < \Delta$ donc $mcl/\hbar > mc^2/\Delta \gg 1$ dans la limite de BCS, et seulement $mcl/\hbar > 1$ ailleurs, où c est la vitesse du son et Δ le *gap* à $T = 0$. La condition nécessaire $mcl/\hbar > 1$ est plus faible que celle déjà invoquée, $\rho^{1/3}l \gg 1$, dans le régime d'interaction forte ou dans la limite de BCS, puisque c y est d'ordre de la vitesse de Fermi. Elle est plus contraignante dans la limite dite de CBE, où les paires de fermions, assimilables à des bosons, forment un condensat en interaction faible.

La suite est assez classique. On part des équations du mouvement des champs en représentation de Heisenberg, respectivement l'équation de continuité quantique et l'équation d'Euler quantique sur le potentiel (dont le gradient donne l'équation d'Euler quantique sur la vitesse) :

$$\partial_t \hat{\rho} + \text{div} \left[\frac{1}{2} \{ \hat{\rho}, \hat{\mathbf{v}} \} \right] = 0 \quad (38)$$

$$\hbar \partial_t \hat{\phi} = -\frac{1}{2} m \hat{\mathbf{v}}^2 - \mu_{0,0}(\hat{\rho}) \quad (39)$$

où $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ est l'anticommutateur de deux opérateurs et

$$\mu_{0,0}(\rho) = \frac{d}{d\rho} e_{0,0}(\rho) = e'_{0,0}(\rho) \quad (40)$$

est le potentiel chimique nu de l'état fondamental à la densité ρ . Ces équations dérivent du hamiltonien

$$\hat{H}_{\text{hydro}} = l^3 \sum_{\mathbf{r}} \left[\frac{1}{2} m \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\rho} \hat{\mathbf{v}} + e_{0,0}(\hat{\rho}) \right] \quad (41)$$

Les fluctuations spatiales de densité et de phase sont faibles, parce que $\rho^{1/3}l$ est assez grand si elles sont quantiques, parce que $q_{\text{th}}l$ est de plus assez petit si elles sont thermiques.²⁰ On peut donc, comme dans [22], linéariser les équations du mouvement autour de la solution spatialement uniforme :

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) = \hat{\rho}_0 + \delta\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) \quad (42)$$

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \hat{\phi}_0(t) + \delta\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \quad (43)$$

L'opérateur $\hat{\rho}_0$ vaut simplement \hat{N}/L^3 , où \hat{N} est l'opérateur nombre total de particules ; c'est une constante du mouvement. L'opérateur $\hat{\phi}_0$ est l'opérateur phase du condensat, ici

$$\hat{\phi}_0 = \hat{\theta}_0/2 \quad (44)$$

puisque l'opérateur phase $\hat{\theta}_0$ de l'équation (2) prend les paires pour objets élémentaires, alors que les équations (38), (39) privilégient les particules fermioniques. Les fluctuations spatiales $\delta\hat{\rho}$ et $\delta\hat{\phi}$, d'intégrale (discrète) nulle sur tout l'espace, se développent seulement sur les ondes planes de vecteur d'onde \mathbf{q} non nul, et commutent avec $\hat{\rho}_0$. Après résolution des équations linéarisées sur $\delta\hat{\rho}$ et $\delta\hat{\phi}$, on dispose de l'habituel développement sur les modes propres :

$$\delta\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{\rho}_0^{1/2}}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{q} \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^{3*} \cap \mathcal{D}} \left(\frac{\hbar \mathbf{q}}{2m\hat{c}_{0,0}} \right)^{1/2} (\hat{B}_{\mathbf{q}} + \hat{B}_{-\mathbf{q}}^\dagger) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \quad (45)$$

$$\delta\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{-i}{\hat{\rho}_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{q} \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^{3*} \cap \mathcal{D}} \left(\frac{m\hat{c}_{0,0}}{2\hbar \mathbf{q}} \right)^{1/2} (\hat{B}_{\mathbf{q}} - \hat{B}_{-\mathbf{q}}^\dagger) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \quad (46)$$

où les opérateurs de création $\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger$ et d'annihilation $\hat{B}_{\mathbf{q}}$ d'un phonon de vecteur d'onde \mathbf{q} et d'énergie $\hbar \mathbf{q} \hat{c}_{0,0}$ obéissent aux relations de commutation bosoniques, par exemple $[\hat{B}_{\mathbf{q}}, \hat{B}_{\mathbf{q}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'}$, et où l'on a introduit l'opérateur vitesse du son nue à température nulle

$$\hat{c}_{0,0} \equiv \left(\frac{\hat{\rho}_0 \mu'_{0,0}(\hat{\rho}_0)}{m} \right)^{1/2} \quad (47)$$

Il reste alors à développer le second membre de (39) jusqu'à l'ordre deux inclus en $\delta\hat{\rho}$ et $\delta\hat{\phi}$, à en extraire la composante de Fourier de vecteur d'onde nul, à effectuer une moyenne temporelle à gros grains pour supprimer les termes croisés oscillants $\hat{B}_{\mathbf{q}} \hat{B}_{-\mathbf{q}}$ et $\hat{B}_{-\mathbf{q}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger$, puis à reconnaître l'identité

²⁰ On vérifie d'abord que les fluctuations de densité sur un même site sont faibles en valeur relative, en utilisant (45). À $T = 0$, $\langle \delta\hat{\rho}^2 \rangle / \rho^2 \approx \frac{\hbar}{mcl} \frac{1}{\rho l^3} \ll 1$, compte tenu de (36) et de la condition nécessaire $mcl/\hbar > 1$ établie dans la Note 19. À $T > 0$ s'ajoute la contribution thermique $\approx \frac{\hbar}{mcl} \frac{(q_{\text{th}} l)^4}{\rho l^3}$, qui est de même $\ll 1$. On vérifie ensuite que les fluctuations de phase entre deux sites voisins sont faibles en valeur absolue. Pour cela, on constate d'abord, en utilisant (46), que $l^2 \langle (\mathbf{grad} \delta\hat{\phi})^2 \rangle = (mcl/\hbar)^2 \langle \delta\hat{\rho}^2 \rangle / \rho^2$. Il reste ensuite à utiliser la propriété $mc/(\hbar \rho^{1/3}) = O(1)$ qui vaut dans toute la zone de raccordement entre les limites de CBE et de BCS, ainsi que nos estimations précédentes de $\langle \delta\hat{\rho}^2 \rangle / \rho^2$, pour conclure.

$$\frac{d}{d\rho} [\rho \mu'_{0,0}(\rho)]^{1/2} = \frac{\mu'_{0,0}(\rho) + \rho \mu''_{0,0}(\rho)}{2[\rho \mu'_{0,0}(\rho)]^{1/2}} \quad (48)$$

pour obtenir

$$\overline{\frac{d}{dt} \hat{\phi}_0} = -\mu_{0,0}(\hat{\rho}_0) - \sum_{\mathbf{q} \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^3 \cap \mathcal{D}} \left(\hbar q \frac{d}{dN} \hat{c}_{0,0} \right) \left(\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \right) \quad (49)$$

À cet ordre du développement en les fluctuations spatiales, on peut regrouper dans (49) la contribution de point zéro des modes (le terme $1/2$ entre parenthèses) avec le potentiel chimique nu $\mu_{0,0}(\hat{\rho}_0)$ pour former le potentiel chimique vrai $\mu_0(\hat{\rho}_0)$ du fluide à température nulle, et identifier $\hat{c}_{0,0}$ dans le préfacteur des opérateurs nombres de phonons $\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{q}}$ avec la vitesse du son vraie à température nulle, $\hat{c}_0 \equiv [\hat{\rho}_0 \mu'_0(\hat{\rho}_0)/m]^{1/2}$. On obtient alors la limite phononique (de basse température) de la relation (8), et ceci sans hypothèse sur la force (ou la faiblesse) des interactions.

Références

- [1] M. Greiner, O. Mandel, T.W. Hänsch, I. Bloch, *Nature* 419 (2002) 51.
- [2] J. Estève, C. Gross, A. Weller, S. Giovanazzi, M.K. Oberthaler, *Nature* 455 (2008) 1216.
- [3] M.F. Riedel, P. Böhi, Yun Li, T.W. Hänsch, A. Sinatra, P. Treutlein, *Nature* 464 (2010) 1170.
- [4] G.-B. Jo, Y. Shin, S. Will, T.A. Pasquini, M. Saba, W. Ketterle, D.E. Pritchard, M. Vengalattore, M. Prentiss, *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 030407.
- [5] M. Egorov, R.P. Anderson, V. Ivannikov, B. Opanchuk, P. Drummond, B.V. Hall, A.I. Sidorov, *Phys. Rev. A* 84 (2011) 021605.
- [6] T. Berrada, S. van Frank, R. Bücker, T. Schumm, J.-F. Schaff, J. Schmiedmayer, *Nat. Commun.* 4 (2013) 2077.
- [7] S. Nascimbène, N. Navon, K.J. Jiang, F. Chevy, C. Salomon, *Nature* 463 (2010) 1057.
- [8] M.J.H. Ku, A.T. Sommer, L.W. Cheuk, M.W. Zwierlein, *Science* 335 (2012) 563.
- [9] C. Kohstall, S. Riedl, E.R. Sánchez Guajardo, L.A. Sidorenkov, J. Hecker Denschlag, R. Grimm, *New J. Phys.* 13 (2011) 065027.
- [10] I. Carusotto, Y. Castin, *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005) 223202.
- [11] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, *Phys. Rev. A* 88 (2013) 063623.
- [12] A. Sinatra, Y. Castin, E. Witkowska, *Phys. Rev. A* 75 (2007) 033616.
- [13] A.B. Kuklov, J.L. Birman, *Phys. Rev. A* 63 (2000) 013609.
- [14] P. Anderson, *Phys. Rev.* 112 (1958) 1900.
- [15] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, InterÉditions et Éditions du CNRS, Paris, 1988.
- [16] A.J. Leggett, *Quantum Liquids*, Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [17] M. Rigol, V. Dunjko, M. Olshanii, *Nature* 452 (2008) 854.
- [18] A. Sinatra, Y. Castin, E. Witkowska, *Phys. Rev. A* 80 (2009) 033614.
- [19] J.-P. Blaizot, G. Ripka, *Quantum Theory of Finite Systems*, MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1985.
- [20] Y. Castin, R. Dum, *Phys. Rev. A* 57 (1998) 3008.
- [21] R. Combescot, M.Yu. Kagan, S. Stringari, *Phys. Rev. A* 74 (2006) 042717.
- [22] L. Landau, I. Khalatnikov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 19 (1949) 637.
- [23] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, R. Grimm, *Phys. Rev. Lett.* 92 (2004) 120401.
- [24] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T.W. Hänsch, I. Bloch, *Nature* 415 (2002) 39.
- [25] W.S. Bakr, J.L. Gillen, A. Peng, S. Fölling, M. Greiner, *Nature* 462 (2009) 74.
- [26] Y. Castin, A. Sinatra, Spatial and temporal coherence of a Bose-condensed gas, in: A. Bramati, M. Modugno (Eds.), *Physics of Quantum Fluids: New Trends and Hot Topics in Atomic and Polariton Condensates*, Springer, Berlin, 2013.
- [27] A.L. Gaunt, T.F. Schmidutz, I. Gotlibovych, R.P. Smith, Z. Hadzibabic, *Phys. Rev. Lett.* 110 (2013) 200406.
- [28] A. Bulgac, J.E. Drut, P. Magierski, *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006) 090404.
- [29] Y. Nishida, D.T. Son, *Phys. Rev. Lett.* 97 (2006) 050403.
- [30] A. Schirotzek, Yong-il Shin, C.H. Schunck, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* 101 (2008) 140403.
- [31] Y. Castin, I. Ferrier-Barbut, C. Salomon, *C. R. Physique* 16 (2015) 241.
- [32] G. Bighin, L. Salasnich, P.A. Marchetti, F. Toigo, *Phys. Rev. A* 92 (2015) 023638.
- [33] S.N. Klimin, J. Tempere, Jeroen P.A. Devreese, *J. Low Temp. Phys.* 165 (2011) 261.
- [34] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, *Phys. Rev. A* 93 (2016) 013623.
- [35] D.T. Son, M. Wingate, *Ann. Phys.* 321 (2006) 197.