



Temps de cohérence d'un condensat de Bose–Einstein dans un gaz isolé harmoniquement piégé

Coherence time of a Bose–Einstein condensate in an isolated harmonically trapped gas

Yvan Castin*, Alice Sinatra

Laboratoire Kastler Brossel, ENS-PSL, CNRS, Sorbonne Université et Collège de France, Paris, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Disponible sur Internet le 7 mai 2018

Mots-clés :

Gaz de bosons
Condensat de Bose–Einstein
Cohérence temporelle
Gaz piégés
Atomes froids

Keywords:

Bose gases
Bose–Einstein condensate
Temporal coherence
Trapped gases
Ultracold atoms

R É S U M É

Nous étudions la dynamique de phase à l'équilibre d'un condensat dans un gaz de bosons en interaction faible harmoniquement piégé et isolé de l'environnement. Nous trouvons qu'au bout d'un temps long devant le temps de collision typique entre les quasi-particules de Bogolioubov, la variance du déphasage du condensat comporte en général un terme balistique quadratique en temps et un terme diffusif affine en temps. Nous donnons des expressions analytiques des coefficients correspondants, à la limite d'un grand système, dans le régime faiblement collisionnel et dans l'approximation ergodique pour le mouvement des quasi-particules. Correctement adimensionnés, ils sont décrits, tout comme les taux d'amortissement des modes, par des fonctions universelles de la température ramenée au potentiel chimique de Thomas–Fermi du condensat. Cette classe d'universalité diffère de celle précédemment étudiée du gaz spatialement homogène.

© 2018 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

A B S T R A C T

We study the condensate phase dynamics in a low-temperature equilibrium gas of weakly interacting bosons, harmonically trapped and isolated from the environment. We find that at long times, much longer than the collision time between Bogolioubov quasi-particles, the variance of the phase accumulated by the condensate grows with a ballistic term quadratic in time and a diffusive term affine in time. We give the corresponding analytical expressions in the limit of a large system, in the collisionless regime and in the ergodic approximation for the quasi-particle motion. When properly rescaled, they are described by universal functions of the temperature divided by the Thomas–Fermi chemical potential. The same conclusion holds for the mode damping rates. Such universality class differs from the previously studied one of the homogeneous gas.

© 2018 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : yvan.castin@lkb.ens.fr (Y. Castin).

1. Introduction et vue d'ensemble

Nous considérons ici un problème encore non résolu de la théorie des gaz quantiques, celui du temps de cohérence d'un gaz de bosons sans spin en interaction faible de portée négligeable, préparé dans un piège harmonique à l'équilibre thermique à une température T très inférieure à la température critique T_c , c'est-à-dire dans un régime fortement condensé de Bose, et parfaitement isolé dans son évolution ultérieure. Le temps de cohérence du champ bosonique est alors intrinsèque et dominé par celui du condensat. Au vu de progrès techniques récents [1–3], cette question pourrait recevoir bientôt une réponse expérimentale dans les gaz d'atomes froids confinés dans des potentiels magnétiques non dissipatifs [4–6] et, contrairement à d'autres systèmes de gaz de bosons en physique du solide [7–10], bien découplés de leur environnement et ne présentant que de faibles pertes de particules. Aussi notre étude théorique est-elle importante pour les applications à venir en optique atomique et interférométrie à ondes de matière.

Faisant suite aux travaux pionniers des références [11–13], nos études théoriques [14–17], effectuées dans un gaz de bosons spatialement homogène, s'appuient sur la méthode de Bogolioubov, qui réduit le système à un gaz de quasi-particules en interaction faible. Elles ont identifié deux mécanismes limitant le temps de cohérence et faisant intervenir tous deux la dynamique de l'opérateur phase $\hat{\theta}(t)$ du condensat :

- *le brouillage de phase* : lorsque les quantités conservées (l'énergie E du gaz et son nombre de particules N) fluctuent d'une réalisation expérimentale à l'autre, la vitesse moyenne d'évolution de la phase $[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)]/t$ sur une réalisation, fonction de ces quantités conservées, fluctue elle aussi. Après moyenne sur les réalisations, ceci induit un étalement balistique du déphasage $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$, c'est-à-dire une divergence quadratique de sa variance, avec un coefficient balistique A [14] :

$$\text{Var}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] \sim At^2 \quad (1)$$

ceci aux temps longs devant $\gamma_{\text{coll}}^{-1}$, où γ_{coll} est le taux de collision typique entre les quasi-particules de Bogolioubov thermiques ;

- *la diffusion de phase* : même si le système est préparé dans l'ensemble microcanonique, où E et N sont fixés, les interactions entre quasi-particules font fluctuer leurs nombres d'occupation, et donc la vitesse instantanée $\frac{d}{dt}\hat{\theta}$ de la phase, qui en dépend. Ceci induit un étalement diffusif de $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$ aux temps $t \gg \gamma_{\text{coll}}^{-1}$, avec un coefficient de diffusion D [15,16] :

$$\text{Var}_{\text{mc}}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] \sim 2Dt \quad (2)$$

Dans le cas général, les deux mécanismes sont présents et la variance du déphasage admet (1) comme terme dominant, (2) comme terme sous-dominant. L'étalement de la phase du condensat renseigne directement sur sa fonction de cohérence temporelle du premier ordre,

$$g_1(t) = \langle \hat{a}_0^\dagger(t) \hat{a}_0(0) \rangle \quad (3)$$

où \hat{a}_0 est l'opérateur d'annihilation d'un boson dans le mode du condensat, en vertu de la relation approchée

$$g_1(t) \simeq e^{-i(\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0))} e^{-\text{Var}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)]/2} \quad (4)$$

admise dans la référence [17] sous l'hypothèse d'une distribution gaussienne de $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$, puis justifiée dans la référence [18] à suffisamment basse température sous des conditions assez générales.¹

Nous nous proposons ici de généraliser ces premières études au cas expérimentalement plus habituel d'un système harmoniquement piégé (voir cependant la référence [19]). Les lois de dépendance des taux d'amortissement des modes de Bogolioubov en l'énergie propre des modes ou en la température sont déjà très différentes de celles du cas homogène, comme l'a montré la référence [20]. Il en ira certainement de même pour l'étalement de la phase du condensat. Le cas piégé est non trivial, puisque les modes de Bogolioubov ne sont pas connus analytiquement, et qu'il n'y a pas d'approximation d'homogénéité locale applicable à l'évolution de la phase (comme l'a vérifié la référence [21]). Nous disposons heureusement d'échappatoires :

¹ Rappelons les hypothèses utilisées dans la référence [18] pour établir l'équation (4). (i) Les fluctuations relatives du module de \hat{a}_0 sont faibles, le système étant fortement condensé de Bose. (ii) Le système est suffisamment proche de la limite thermodynamique, avec des fluctuations normales et des lois asymptotiquement gaussiennes pour l'énergie et le nombre de particules. Ceci sert, en particulier, à mettre la contribution balistique du déphasage à $g_1(t)$ sous la forme (4). (iii) Le coefficient de diffusion de la phase (d'ordre $1/N$) doit être beaucoup plus faible que le taux de collision typique γ_{coll} entre quasi-particules de Bogolioubov (d'ordre N^0), mais beaucoup plus grand que l'espacement des niveaux d'énergie (d'ordre N^{-2}) des paires de quasi-particules créées ou annihilées lors des processus de collision Beliaev–Landau. Ceci sert, pour un système préparé dans l'ensemble microcanonique, à montrer que $g_1(t)$ est de la forme (4) sur les intervalles de temps $t = O(N^0)$ et $t = O(N^1)$, avec le même coefficient de diffusion. (iv) La fonction de corrélation de $\frac{d}{dt}\hat{\theta}$ est réelle, comme le prédisent les équations cinétiques. (v) On néglige le commutateur de $\hat{\theta}(t)$ avec $\hat{\theta}(0)$, ce qui introduit une erreur de phase $O(t/N)$ dans le facteur $\exp[-i(\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0))]$. C'est une erreur d'ordre unité aux temps $t \approx N$, mais $g_1(t)$ a alors commencé à décroître sous l'effet de la diffusion de phase dans l'ensemble microcanonique (et s'est sinon déjà très fortement amortie sous l'effet du brouillage de phase balistique au bout d'un temps $t \approx N^{1/2}$).

- la limite classique pour le mouvement des quasi-particules de Bogolioubov dans le gaz piégé. En effet, à la limite thermodynamique ($N \rightarrow +\infty$ à potentiel chimique de Gross–Pitaevskii μ_{GP} et température fixés), les pulsations de piégeage ω_α , $\alpha \in \{x, y, z\}$, tendent vers zéro comme $1/N^{1/3}$, si bien que

$$\hbar\omega_\alpha \ll \mu_{GP}, k_B T \quad (5)$$

ce que l'on peut réinterpréter astucieusement comme une limite classique $\hbar \rightarrow 0$;

- la limite d'interactions très faibles entre les quasi-particules de Bogolioubov :

$$\gamma_{\text{coll}} \ll \omega_\alpha \quad (6)$$

Ceci implique que tous les modes du condensat, même ceux de plus basse pulsation $\approx \omega_\alpha$, sont dans le régime faiblement collisionnel (par opposition à hydrodynamique), et permet d'effectuer une approximation séculaire sur les équations cinétiques décrivant les collisions entre les quasi-particules ;

- l'ergodicité dans un piège complètement anisotrope : comme l'ont montré les références [22,23], le mouvement classique des quasi-particules dans un piège harmonique non isotrope à symétrie de révolution est fortement chaotique aux énergies $\epsilon \approx \mu_{GP}$, mais quasi intégrable lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ ou $\epsilon \rightarrow +\infty$. Dans un piège complètement anisotrope, aux températures ni trop petites ni trop grandes devant μ_{GP}/k_B , on peut espérer compléter l'approximation séculaire par l'hypothèse d'ergodicité, ce que nous nous attacherons à montrer.

Notre article est articulé comme suit. Dans la section 2, après quelques rappels minimaux sur la théorie de Bogolioubov dans un piège, nous spécifions l'état du système et introduisons les quantités permettant de décrire formellement l'étalement de la phase, à savoir la dérivée de l'opérateur phase du condensat et sa fonction de corrélation temporelle. Dans la section 3, nous donnons une expression du coefficient balistique A à la limite thermodynamique dans un piège harmonique quelconque (y compris isotrope), d'abord dans l'état du système le plus général considéré ici, puis dans le cas plus simple d'un mélange statistique d'ensembles canoniques de même température T . Dans la longue section 4, nous nous attaquons au cœur du problème, le calcul de la fonction de corrélation $C_{mc}(\tau)$ de $d\hat{\theta}/dt$ dans l'ensemble microcanonique, qui donne accès en toute généralité aux termes d'étalement sous-balistiques de la phase, puisqu'ils sont indépendants de l'état du système à la limite thermodynamique à énergie moyenne et nombre moyen de particules fixés. Nous passons d'abord à la limite semi-classique dans la sous-section 4.1, le mouvement des quasi-particules de Bogolioubov étant traité classiquement mais le champ des quasi-particules restant quantique bosonique ; la forme semi-classique de $d\hat{\theta}/dt$ est déduite d'un principe de correspondance. Nous écrivons ensuite, dans la sous-section 4.2, des équations cinétiques sur les nombres d'occupation des quasi-particules dans l'espace des phases classique (\mathbf{r}, \mathbf{p}) et nous montrons comment, une fois linéarisées, elles conduisent formellement à $C_{mc}(\tau)$. Le problème reste formidable, puisque les nombres d'occupation dépendent des six variables (\mathbf{r}, \mathbf{p}) et du temps. À la limite séculaire $\gamma_{\text{coll}} \ll \omega_\alpha$ et dans l'approximation ergodique sur le mouvement des quasi-particules (ce qui exclut le piège isotrope ou à symétrie de révolution), nous nous ramenons dans la sous-section 4.3 à des nombres d'occupation fonctions de la seule énergie ϵ du mouvement classique et du temps, ce qui conduit à des résultats explicites sur $C_{mc}(\tau)$, sur la diffusion de phase et, sous-produit intéressant, sur le taux d'amortissement des modes de Bogolioubov dans le piège, dans la sous-section 4.4, où nous évaluons également le déphasage du condensat dû aux pertes de particules. Enfin, nous procédons à une discussion critique de l'approximation ergodique dans la sous-section 4.5, en estimant, en particulier, l'erreur qu'elle introduit sur les quantités pilotant la diffusion de phase du condensat. Nous concluons dans la section 5.

2. Rappels sur le formalisme et les résultats

La dérivée de la phase – Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, le temps de cohérence d'un condensat est contrôlé par la dynamique de son opérateur phase $\hat{\theta}(t)$ aux temps longs devant le temps de collision $\gamma_{\text{coll}}^{-1}$ typique des quasi-particules. Le point de départ de notre étude est donc l'expression de la dérivée temporelle de $\hat{\theta}(t)$, lissée temporellement (c'est-à-dire moyennée sur un temps court devant $\gamma_{\text{coll}}^{-1}$, mais long devant l'inverse de la pulsation typique $\epsilon_k^{\text{th}}/\hbar$ des quasi-particules thermiques), telle que l'a établie en toute généralité la référence [18] à l'ordre un en la fraction non condensée :

$$-\hbar \frac{d\hat{\theta}}{dt} = \mu_0(\hat{N}) + \sum_{k \in \mathcal{F}_+} \frac{d\epsilon_k}{dN} \hat{n}_k \equiv \hat{\mu} \quad (7)$$

Ici $\mu_0(N)$ est le potentiel chimique du gaz dans l'état fondamental et \hat{N} est l'opérateur nombre total de particules. La somme sur le nombre quantique générique k (ce n'est pas un nombre d'onde) porte sur les modes de Bogolioubov d'énergie propre ϵ_k , et \hat{n}_k est l'opérateur nombre de quasi-particules dans le mode k . L'expression (7) est une version quantique de la seconde relation de Josephson : son second membre est un opérateur potentiel chimique $\hat{\mu}$ du gaz, puisque c'est la dérivée adiabatique (aux nombres d'occupation \hat{n}_k fixés) par rapport à N du hamiltonien de Bogolioubov

$$\hat{H}_{\text{Bog}} = E_0(\hat{N}) + \sum_{k \in \mathcal{F}_+} \epsilon_k \hat{n}_k \quad (8)$$

Les modes de Bogolioubov sont de la famille \mathcal{F}_+ , suivant la terminologie de la référence [24], au sens où leurs fonctions modales ($u_k(\mathbf{r})$, $v_k(\mathbf{r})$) sont solutions de l'équation aux valeurs propres

$$\epsilon_k \begin{pmatrix} |u_k\rangle \\ |v_k\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{\text{GP}} + Q g \rho_0(\hat{\mathbf{r}}) Q & Q g \rho_0(\hat{\mathbf{r}}) Q \\ -Q g \rho_0(\hat{\mathbf{r}}) Q & -[H_{\text{GP}} + Q g \rho_0(\hat{\mathbf{r}}) Q] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |u_k\rangle \\ |v_k\rangle \end{pmatrix} \equiv \mathcal{L}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} |u_k\rangle \\ |v_k\rangle \end{pmatrix} \quad (9)$$

avec la condition de normalisation $\int d^3r (|u_k(\mathbf{r})|^2 - |v_k(\mathbf{r})|^2) = 1 > 0$. On a pris la fonction d'onde $\phi_0(\mathbf{r})$ du condensat réelle, normalisée à l'unité ($\int d^3r \phi_0^2(\mathbf{r}) = 1$), et écrite à l'ordre zéro en la fraction non condensée, c'est-à-dire à l'approximation de Gross-Pitaevskii :

$$H_{\text{GP}}|\phi_0\rangle = 0 \text{ avec } H_{\text{GP}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + U(\hat{\mathbf{r}}) + g\rho_0(\hat{\mathbf{r}}) - \mu_{\text{GP}} \quad (10)$$

si bien qu'à cet ordre, la densité condensée vaut $\rho_0(\mathbf{r}) = N\phi_0^2(\mathbf{r})$. Ici, $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ est la constante de couplage, proportionnelle à la longueur de diffusion a dans l'onde s entre les bosons de masse m , et $U(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} m\omega_{\alpha}^2 r_{\alpha}^2/2$ est leur potentiel de piégeage. Le projecteur Q projette orthogonalement à $|\phi_0\rangle$ et assure que $|\phi_0\rangle \perp |u_k\rangle$ et $|\phi_0\rangle \perp |v_k\rangle$, comme il se doit [24]. Comme le condensat est dans son mode fondamental (ϕ_0 minimise la fonctionnelle énergie de Gross-Pitaevskii), les ϵ_k sont positifs.

L'état du système – Le refroidissement des gaz d'atomes froids par évaporation ne conduit *a priori* à aucun des ensembles habituels de la physique statistique. Pour couvrir tous les cas raisonnables, nous supposons donc que le gaz est préparé à l'instant 0 dans un ensemble généralisé, mélange statistique d'états propres $|\psi_{\lambda}\rangle$ du hamiltonien complet \hat{H} à N_{λ} corps et d'énergie E_{λ} , donc d'opérateur densité

$$\hat{\sigma} = \sum_{\lambda} \Pi_{\lambda} |\psi_{\lambda}\rangle \langle \psi_{\lambda}| \quad (11)$$

avec comme seule restriction l'existence de lois étroites sur E_{λ} et N_{λ} , de variances et covariance ne croissant pas plus vite que les moyennes \bar{E} et \bar{N} à la limite thermodynamique.

Déphasage moyen – Moyennons l'expression (7) dans l'état stationnaire $|\psi_{\lambda}\rangle$. Au second membre apparaît l'espérance de l'opérateur potentiel chimique dans $|\psi_{\lambda}\rangle$. À cause des interactions entre les quasi-particules de Bogolioubov, on s'attend à ce que le système à N corps soit ergodique au sens quantique du terme, c'est-à-dire qu'il souscrive au principe de microcanonicité des états propres (*Eigenstate Thermalisation Hypothesis* dans la littérature anglo-américaine, voir les références [25–27]), soit

$$\langle \psi_{\lambda} | \hat{\mu} | \psi_{\lambda} \rangle = \mu_{\text{mc}}(E_{\lambda}, N_{\lambda}) \quad (12)$$

où $\mu_{\text{mc}}(E, N)$ est le potentiel chimique dans l'ensemble microcanonique d'énergie E à N particules. Pour un grand système, il suffit de développer au premier ordre en les fluctuations, étant donné la faiblesse de leurs valeurs relatives :

$$\mu_{\text{mc}}(E_{\lambda}, N_{\lambda}) = \mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N}) + (E_{\lambda} - \bar{E})\partial_E \mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N}) + (N_{\lambda} - \bar{N})\partial_N \mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N}) + O(1/\bar{N}) \quad (13)$$

Il reste à moyennner sur les états $|\psi_{\lambda}\rangle$ avec les poids Π_{λ} comme dans l'équation (11) pour obtenir la première brique à la fonction de cohérence temporelle (4), le déphasage moyen :

$$\langle \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0) \rangle = -\mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N})t/\hbar \quad (14)$$

avec une erreur $O(1/\bar{N})$ sur le coefficient de t .

Déphasage quadratique moyen – En procédant de la même manière pour le second moment du déphasage du condensat, nous trouvons, comme il est écrit un peu implicitement dans [16,18], que

$$\text{Var}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] = At^2 + 2 \int_0^t d\tau (t - \tau) \text{Re } C_{\text{mc}}(\tau) \quad (15)$$

avec le coefficient balistique

$$A = \text{Var}[(N_{\lambda} - \bar{N})\partial_N \mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N}) + (E_{\lambda} - \bar{E})\partial_E \mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N})]/\hbar^2 \quad (16)$$

et la fonction de corrélation de la dérivée de la phase dans l'ensemble microcanonique d'énergie \bar{E} à \bar{N} particules :

$$C_{\text{mc}}(\tau) = \left\langle \frac{d\hat{\theta}}{dt}(\tau) \frac{d\hat{\theta}}{dt}(0) \right\rangle_{\text{mc}} - \left\langle \frac{d\hat{\theta}}{dt} \right\rangle_{\text{mc}}^2 \quad (17)$$

Voici qui complète notre connaissance formelle de $g_1(t)$.

En vue des observations expérimentales à venir, il reste cependant à calculer *explicitement* A et $C_{\text{mc}}(\tau)$ pour un système harmoniquement piégé. Il faudra en particulier vérifier que $C_{\text{mc}}(\tau)$ dans le cas piégé décroît assez vite pour que l'on retrouve une loi diffusive (2) comme dans le cas spatialement homogène.

3. Calcul du coefficient balistique dans la variance du déphasage

Dans l'ensemble statistique généralisé – Pour calculer le déphasage moyen (14) et le coefficient balistique (16) dans le cas général, nous devons connaître le potentiel chimique microcanonique $\mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N})$ et ses dérivées dans le piège harmonique. À la limite thermodynamique, μ_{mc} coïncide avec le potentiel chimique μ_{can} dans l'ensemble canonique de température T et nombre de particules \bar{N} , plus commode à calculer, si la température T est ajustée pour qu'il y ait égalité des énergies moyennes $E_{\text{can}}(T, \bar{N})$ et \bar{E} . En d'autres termes,

$$\mu_{\text{mc}}(E_{\text{can}}(T, \bar{N}), \bar{N}) \sim \mu_{\text{can}}(T, \bar{N}) \quad (18)$$

Il suffit de dériver cette relation par rapport à T ou \bar{N} pour obtenir les dérivées utiles de μ_{mc} , puis de remplacer E_{can} par \bar{E} , ce qui donne :

$$\partial_E \mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N}) \sim \frac{\partial_T \mu_{\text{can}}(T, \bar{N})}{\partial_T E_{\text{can}}(T, \bar{N})} \quad (19)$$

$$\partial_N \mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N}) \sim \partial_N \mu_{\text{can}}(T, \bar{N}) - \frac{\partial_N E_{\text{can}}(T, \bar{N})}{\partial_T E_{\text{can}}(T, \bar{N})} \partial_T \mu_{\text{can}}(T, \bar{N}) \quad (20)$$

Au premier ordre en la fraction non condensée, le potentiel chimique canonique se déduit de l'énergie libre F du gaz parfait de quasi-particules de Bogolioubov de hamiltonien (8) par la relation thermodynamique habituelle $\mu_{\text{can}} = \partial_N F$. L'énergie libre est une fonctionnelle simple de la densité d'états $\rho(\epsilon)$ des quasi-particules,

$$F(T, \bar{N}) = E_0(\bar{N}) + k_B T \int_0^{+\infty} d\epsilon \rho(\epsilon) \ln(1 - e^{-\beta\epsilon}) \quad (21)$$

avec $\beta = 1/k_B T$. À la limite thermodynamique, l'énergie E_0 de l'état fondamental du gaz dans le piège harmonique se déduit de celle du système homogène [28] par une approximation d'homogénéité locale, et la densité d'états $\rho(\epsilon)$ s'obtient par prise de la limite classique $\hbar \rightarrow 0$, en vertu de l'inégalité (5) [6] :

$$\rho(\epsilon) = \int \frac{d^3 r d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \delta(\epsilon - \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})) \quad (22)$$

Le hamiltonien classique $\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ est la valeur propre positive de la matrice 2×2 de Bogolioubov de l'équation (9) avec la position \mathbf{r} et l'impulsion \mathbf{p} traitées classiquement² et la densité condensée $\rho_0(\mathbf{r})$ écrite à la limite classique, c'est-à-dire dans l'approximation de Thomas–Fermi :

$$g\rho_0^{\text{TF}}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mu_{\text{TF}} - U(\mathbf{r}) \equiv \mu_{\text{loc}}(\mathbf{r}) & \text{si } U(\mathbf{r}) < \mu_{\text{TF}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (23)$$

Ici, le potentiel chimique de Thomas–Fermi, limite classique de celui μ_{GP} de Gross–Pitaevskii, vaut

$$\mu_{\text{TF}} = \frac{1}{2} \hbar \bar{\omega} [15 \bar{N} a (m \bar{\omega} / \hbar)^{1/2}]^{2/5} \quad (24)$$

et $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ est la moyenne géométrique des pulsations de piègeage. On en déduit que

$$\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \begin{cases} \left\{ \frac{p^2}{2m} \left[\frac{p^2}{2m} + 2\mu_{\text{loc}}(\mathbf{r}) \right] \right\}^{1/2} & \text{si } U(\mathbf{r}) < \mu_{\text{TF}} \\ \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r}) - \mu_{\text{TF}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (25)$$

L'intégrale sextuple (22) a été calculée dans la référence [29].³ Nous donnons ici le résultat sous une forme un peu plus compacte :

$$\rho(\epsilon) = \frac{\mu_{\text{TF}}^2}{(\hbar \bar{\omega})^3} f(\check{\epsilon} \equiv \epsilon / \mu_{\text{TF}}) \quad (26)$$

$$f(\check{\epsilon}) = \frac{1}{\pi} \left[-2\sqrt{2}\check{\epsilon}^2 \arccos \frac{\check{\epsilon} - 1}{(1 + \check{\epsilon}^2)^{1/2}} + 2\sqrt{2}\check{\epsilon} \ln \frac{1 + \sqrt{2}\check{\epsilon} + \check{\epsilon}}{(1 + \check{\epsilon}^2)^{1/2}} + \sqrt{\check{\epsilon}}(5\check{\epsilon} - 1) + (1 + \check{\epsilon})^2 \arccos \frac{1}{(1 + \check{\epsilon})^{1/2}} \right] \quad (27)$$

² Le projecteur Q , projetant sur un espace de codimension un, peut être omis à la limite thermodynamique.

³ Le cas d'un piège harmonique anisotrope se ramène au cas isotrope traité dans [29] par le changement de variable de jacobien unité $r_\alpha = \lambda_\alpha r'_\alpha$, avec $\omega_\alpha \lambda_\alpha = \bar{\omega}$, tel que $U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m \bar{\omega}^2 r'^2$.

Nous obtenons finalement le potentiel chimique canonique

$$\mu_{\text{can}}(T, \bar{N}) = \mu_0(\bar{N}) + \frac{6k_B T}{5\bar{N}} \left(\frac{\mu_{\text{TF}}}{\hbar\bar{\omega}} \right)^3 \int_0^{+\infty} d\check{\epsilon} f(\check{\epsilon}) \ln(1 - e^{-\check{\beta}\check{\epsilon}}) + \frac{2\mu_{\text{TF}}}{5\bar{N}} \left(\frac{\mu_{\text{TF}}}{\hbar\bar{\omega}} \right)^3 \int_0^{+\infty} d\check{\epsilon} \frac{f(\check{\epsilon})\check{\epsilon}}{e^{\check{\beta}\check{\epsilon}} - 1} \quad (28)$$

avec la contribution de l'état fondamental [6]

$$\mu_0(\bar{N}) = \mu_{\text{TF}} \left[1 + \pi^{1/2} \left(\mu_{\text{TF}} a^3 / g \right)^{1/2} \right] \quad (29)$$

Lorsqu'on dérivera (28) par rapport à T et \bar{N} pour évaluer les expressions (19) et (20), on se souviendra que $\check{\beta} = \mu_{\text{TF}}/k_B T$ dépend de \bar{N} au travers de μ_{TF} . Pour abrégier, nous ne donnons pas le résultat ici.

Dans un ensemble un peu moins général – Une expression plus simple⁴ du coefficient balistique A peut être obtenue lorsque l'état du système est un mélange statistique d'ensembles canoniques de même température T mais de nombre de particules variable. En exprimant les différents coefficients dans (16), (19), (20) comme des dérivées de l'énergie libre $F(T, \bar{N})$ par rapport à \bar{N} et T , et en nous souvenant de l'expression $\text{Var}_{\text{can}} E = k_B T^2 \partial_T E_{\text{can}}$ de la variance de l'énergie dans l'ensemble canonique, nous trouvons à l'ordre dominant $1/\bar{N}$ que

$$A(T) = (\text{Var } N) \left(\frac{\partial_N \mu_{\text{can}}(T, \bar{N})}{\hbar} \right)^2 + \frac{k_B T^2 [\partial_T \mu_{\text{can}}(T, \bar{N})]^2}{\hbar^2 \partial_T E_{\text{can}}(T, \bar{N})} \quad (30)$$

À température nulle, seul le premier terme contribue, et l'on retrouve la prédiction des références [30,31] poussée à l'ordre un en la fraction non condensée f_{nc} . À $T \neq 0$, mais en l'absence de fluctuations de N , seul le second terme contribue ; il n'est autre que le coefficient balistique $A_{\text{can}}(T)$ dans l'ensemble canonique. Dans le régime de validité de l'approximation de Bogolioubov, $f_{\text{nc}} \ll 1$, le potentiel chimique $\mu_{\text{can}}(T, \bar{N})$ du gaz reste proche de celui de Thomas–Fermi du condensat pur, si bien que

$$\partial_N \mu_{\text{can}}(T, \bar{N}) = \partial_N \mu_{\text{TF}} + O\left(\frac{f_{\text{nc}}}{\bar{N}}\right) \quad (31)$$

En revanche, $\partial_T \mu_{\text{can}}(T, \bar{N})$ est immédiatement du premier ordre en f_{nc} , et il en va de même pour le second terme dans l'équation (30). C'est donc seulement pour des fluctuations de N fortement subpoissonniennes ($\text{Var } N \ll \text{Var}_{\text{Pois}} N \equiv \bar{N}$) que le second terme de (30), c'est-à-dire l'effet des fluctuations thermiques, n'est pas dominé par le premier. En supposant cette condition satisfaite dans l'expérience, nous représentons sur la Fig. 1 le coefficient canonique $A_{\text{can}}(T)$ adimensionné par la valeur A_{Pois} de A dans un condensat pur avec des fluctuations de N poissonniennes,

$$A_{\text{Pois}} = \bar{N} \left(\frac{\partial_N \mu_{\text{TF}}}{\hbar} \right)^2 \quad (32)$$

le tout divisé par le petit paramètre de la théorie de Bogolioubov à température nulle,⁵ proportionnel à $f_{\text{nc}}(T=0)$:

$$[\rho_0(\mathbf{0})a^3]^{1/2} = \frac{2\sqrt{2}}{15\pi^{1/2}\bar{N}} \left(\frac{\mu_{\text{TF}}}{\hbar\bar{\omega}} \right)^3 \quad (33)$$

Le rapport ainsi formé est une fonction universelle de $k_B T/\mu_{\text{TF}}$. À partir des développements à basse et à haute énergie de la densité d'états des quasi-particules,

$$f(\check{\epsilon}) \underset{\check{\epsilon} \rightarrow 0}{=} \frac{32}{3\pi} \check{\epsilon}^{3/2} - 2\sqrt{2} \check{\epsilon}^2 + O(\check{\epsilon}^{5/2}) \quad (34)$$

$$f(\check{\epsilon}) \underset{\check{\epsilon} \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} \check{\epsilon}^2 + \check{\epsilon} + \frac{1}{2} + O(\check{\epsilon}^{-1/2}) \quad (35)$$

⁴ L'expression générale (16) de A est un peu délicate à appréhender. En effet, comme l'énergie du fondamental dépend de N , des fluctuations de N entraînent mécaniquement des fluctuations d'énergie. Par exemple, si N fluctue à $T=0$ (dans chaque sous-espace à N fixé, le système est dans l'état fondamental), on peut, pour retrouver $A(T=0)$ de l'équation (30) à partir de l'équation (16), utiliser le fait que $E_\lambda - \bar{E} = (N_\lambda - \bar{N})\mu_0(\bar{N}) + O(\bar{N}^0)$ et que $\partial_E \mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N}) \underset{T \rightarrow 0}{\sim} -2/(25\bar{N})$, dont le report dans (20) donne $\partial_N \mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N}) \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \partial_N \mu_0(\bar{N}) + 2\mu_0(\bar{N})/(25\bar{N})$.

⁵ On préfère parfois prendre comme petit paramètre $1/[\rho_0(\mathbf{0})\xi^3]$, où la longueur de relaxation ξ du condensat au centre du piège est telle que $\hbar^2/(m\xi^2) = \mu_{\text{TF}}$. On peut passer aisément d'un petit paramètre à l'autre à l'aide de la relation $[\rho_0(\mathbf{0})a^3]^{1/2} \rho_0(\mathbf{0})\xi^3 = 1/(8\pi^{3/2})$.

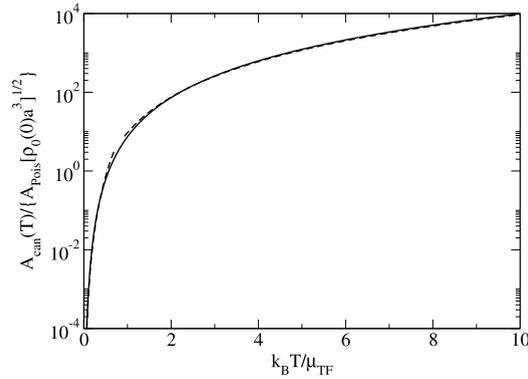


Fig. 1. Coefficient de l'étalement balistique (1) de la phase du condensat aux temps longs devant le temps de collision $\gamma_{\text{coll}}^{-1}$ des quasi-particules, pour un gaz de \bar{N} bosons préparé dans l'ensemble canonique dans un piège harmonique isotrope ou pas, en fonction de la température. Le résultat vaut à la limite thermodynamique où les pulsations de piégeage ω_α sont négligeables par rapport au potentiel chimique μ_{TF} de Thomas–Fermi (24). Trait plein : second terme de l'équation (30), déduit du potentiel chimique canonique (28) à l'approximation de Bogolioubov (interactions faibles, $T \ll T_c$). Tiretés : équivalents à basse et à haute température (termes dominants des équations (36), (37)). La division de $A_{\text{can}}(T)$ par le petit paramètre (33) de la théorie de Bogolioubov et par la valeur (32) du coefficient balistique pour des fluctuations de N poissoniennes conduit à une fonction universelle de $k_B T / \mu_{\text{TF}}$.

nous obtenons les développements à basse et à haute température ($\check{T} = k_B T / \mu_{\text{TF}} = 1/\check{\beta}$)

$$\frac{A_{\text{can}}(T)}{A_{\text{Pois}}[\rho_0(\mathbf{0})a^3]^{1/2}} \underset{\check{T} \rightarrow 0}{=} \frac{21\zeta(7/2)}{\sqrt{2}} \check{T}^{9/2} \left[1 + \frac{4\sqrt{2}\pi^{9/2}}{525\zeta(7/2)} \check{T}^{1/2} + O(\check{T}) \right] \quad (36)$$

$$\underset{\check{T} \rightarrow +\infty}{=} \frac{15\pi^{1/2}}{2\sqrt{2}} \frac{3\zeta(3)^2}{4\zeta(4)} \check{T}^3 \left[1 + \check{\beta} \left(\frac{4\zeta(2)}{3\zeta(3)} - \frac{\zeta(3)}{2\zeta(4)} \right) + O(\check{\beta}^{3/2}) \right] \quad (37)$$

dont les termes dominants⁶ sont représentés en tireté sur la Fig. 1. Signalons une réécriture particulièrement simple et belle de l'équivalent à haute température, accidentellement opérationnel déjà à $k_B T / \mu_{\text{TF}} \geq 2$:

$$\frac{A_{\text{can}}(T)}{A_{\text{Pois}}} \underset{k_B T \gg \mu_{\text{TF}}}{\sim} \frac{3\zeta(3)}{4\zeta(4)} \left(\frac{T}{T_c^{(0)}} \right)^3 \quad (38)$$

où $T_c^{(0)}$ est la température critique du gaz parfait de bosons dans un piège harmonique à la limite thermodynamique, $k_B T_c^{(0)} = \hbar\bar{\omega}[\bar{N}/\zeta(3)]^{1/3}$. Dans cette limite, $A_{\text{can}}(T)$ est donc plus faible que A_{Pois} par un facteur proportionnel à la fraction non condensée $(T/T_c^{(0)})^3 \ll 1$.

4. Variance du déphasage du condensat dans l'ensemble microcanonique

Nous calculons ici la fonction de corrélation de $d\hat{\theta}/dt$, à savoir $C_{\text{mc}}(\tau)$, pour un système préparé dans l'ensemble microcanonique, en utilisant, à la limite thermodynamique $\frac{\hbar\omega_\alpha}{\mu_{\text{TF}}} \rightarrow 0$, une description semi-classique des quasi-particules et en prenant en compte l'effet de leur interaction par des équations cinétiques de type Boltzmann quantique sur leur distribution dans l'espace des phases classique (\mathbf{r}, \mathbf{p}) .

4.1. Forme semi-classique du hamiltonien de Bogolioubov et de $d\hat{\theta}/dt$

Dans la description semi-classique, le mouvement des quasi-particules de Bogolioubov est traité *classiquement*, c'est-à-dire qu'elles ont à chaque instant une position \mathbf{r} et une impulsion \mathbf{p} bien définies [6], dont l'évolution dans l'espace des phases dérive du hamiltonien $\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ donné dans l'équation (25) [22] :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \partial_{\mathbf{p}} \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (39)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\partial_{\mathbf{r}} \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (40)$$

mais l'on traite *quantiquement* le champ bosonique des quasi-particules en introduisant leurs opérateurs nombres d'occupation $\hat{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ dans l'espace des phases, ce qui permet de prendre en compte la nature discrète des nombres de quasi-particules et les effets de statistique quantique (loi de Bose plutôt que loi d'équipartition du champ classique à l'équilibre).

⁶ Dans la fenêtre de valeurs de la Fig. 1, en pratique $1/10 \leq \check{T} \leq 10$, l'inclusion des termes sous-dominants ne rapproche pas utilement du résultat exact.

Dans cette limite semi-classique, le hamiltonien de Bogolioubov (8) (sans interaction entre les quasi-particules) s'écrit immédiatement

$$H_{\text{Bog}}^{\text{sc}} = E_0(\hat{N}) + \int \frac{d^3r d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \hat{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (41)$$

On pourrait croire, au vu de la formule (7), que $d\hat{\theta}/dt$ admet une écriture similaire, avec $\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ remplacé par $\frac{d}{dN}\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. Il n'en est rien, la raison étant que la dérivée $\frac{d}{dN}\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ n'est pas constante sur la trajectoire classique. L'opérateur $d\hat{\theta}/dt$ fait partie d'une classe générale d'observables quantiques dites de Fock (diagonales dans la base de Fock des quasi-particules donc fonctionnelles – ici linéaires – des nombres d'occupation des modes de Bogolioubov) :

$$\hat{A} = \sum_{k \in \mathcal{F}_+} a_k \hat{n}_k \quad \text{avec} \quad a_k = (\langle u_k |, \langle v_k |) \mathcal{A}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} |u_k\rangle \\ |v_k\rangle \end{pmatrix} \quad (42)$$

où $\mathcal{A}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})$ est un opérateur matriciel 2×2 hermitien et a_k sa moyenne dans le mode de Bogolioubov d'énergie propre ϵ_k . L'observable $d\hat{\theta}/dt$ correspond au choix $\mathcal{A}_j = \sigma_z \frac{d}{dN} \mathcal{L}$ où σ_z est la troisième matrice de Pauli et $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})$ est l'opérateur apparaissant dans l'équation (9) : en vertu du théorème de Hellmann-Feynman,⁷ on a en effet

$$(\langle u_k |, -\langle v_k |) \left(\frac{d}{dN} \mathcal{L} \right) \begin{pmatrix} |u_k\rangle \\ |v_k\rangle \end{pmatrix} = \frac{d\epsilon_k}{dN} \quad (43)$$

Pour ces opérateurs de Fock, nous utilisons le principe de correspondance semi-classique

$$\hat{A}^{\text{sc}} = \int \frac{d^3r d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \overline{a(\mathbf{r}, \mathbf{p})} \hat{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (44)$$

où $a(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (U(\mathbf{r}, \mathbf{p}), V(\mathbf{r}, \mathbf{p})) \mathcal{A}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \begin{pmatrix} U(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \\ V(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \end{pmatrix}$, $\mathcal{A}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ étant l'équivalent classique de $\mathcal{A}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})$, et $\overline{a(\mathbf{r}, \mathbf{p})}$ représente la moyenne temporelle de $a(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ sur l'unique trajectoire classique passant par (\mathbf{r}, \mathbf{p}) à l'instant $t = 0$:

$$\overline{a(\mathbf{r}, \mathbf{p})} \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t d\tau a(\mathbf{r}(\tau), \mathbf{p}(\tau)) \quad (45)$$

Le vecteur $(U(\mathbf{r}, \mathbf{p}), V(\mathbf{r}, \mathbf{p}))$, normalisé selon la condition $U^2 - V^2 = 1$, est vecteur propre de l'équivalent classique $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ de $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})$ avec la valeur propre $\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})$; d'où

$$\begin{pmatrix} U(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \\ V(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{p^2/2m}{\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})} \right)^{1/2} + \left(\frac{p^2/2m}{\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})} \right)^{-1/2} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{p^2/2m}{\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})} \right)^{1/2} - \left(\frac{p^2/2m}{\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})} \right)^{-1/2} \right] \end{pmatrix} & \text{si} \quad U(\mathbf{r}) < \mu_{\text{TF}} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{sinon} \end{cases} \quad (46)$$

À la base de ce principe de correspondance réside l'idée que l'équivalent d'un mode quantique stationnaire $(|u_k\rangle, |v_k\rangle)$ dans le monde classique est une trajectoire classique de même énergie, elle aussi stationnaire dans son ensemble par évolution temporelle. À l'espérance quantique a_k de l'observable $\mathcal{A}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})$ dans le mode $(|u_k\rangle, |v_k\rangle)$ il faut donc associer *une moyenne* sur une trajectoire de l'espérance $a(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ de l'équivalent classique $\mathcal{A}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ dans le mode local $(U(\mathbf{r}, \mathbf{p}), V(\mathbf{r}, \mathbf{p}))$. Nous retenons donc pour la version semi-classique de la dérivée de l'opérateur phase du condensat :

$$-\hbar \frac{d\hat{\theta}^{\text{sc}}}{dt} = \mu_0(\hat{N}) + \int \frac{d^3r d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{dN} \hat{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (47)$$

Ici, répétons-le, l'espérance $a(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{d\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{dN}$ n'est pas une constante du mouvement, au contraire de $\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, donc on ne peut pas faire comme dans (41) l'économie de la moyenne temporelle.

⁷ Le théorème est ici généralisé au cas d'un opérateur \mathcal{L} non hermitien, $(\langle u_k |, -\langle v_k |)$ étant le vecteur dual du vecteur propre $(|u_k\rangle, |v_k\rangle)$ de \mathcal{L} .

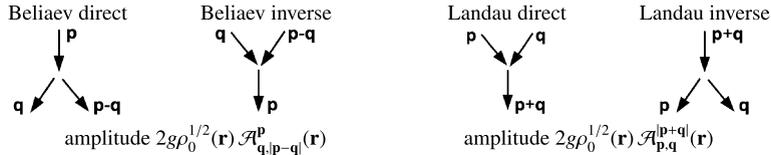


Fig. 2. Processus de Beliaev et de Landau à trois quasi-particules et amplitudes de couplage correspondantes.

4.2. De l'utilité des équations cinétiques dans le calcul de la fonction de corrélation de $d\hat{\theta}/dt$

Nous devons déterminer, dans la limite semi-classique, la fonction de corrélation de $d\hat{\theta}/dt$ pour un système préparé dans l'ensemble microcanonique. Compte tenu des équations (17) et (47), il faut calculer

$$C_{\text{mc}}^{\text{sc}}(\tau) = \int \frac{d^3r d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3r' d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\hbar dN} \frac{d\epsilon(\mathbf{r}', \mathbf{p}')}{\hbar dN} \langle \delta\hat{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) \delta\hat{n}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', 0) \rangle \quad (48)$$

où (...) représente la moyenne dans l'état du système et où l'on a introduit les fluctuations des opérateurs nombres d'occupation dans l'espace des phases à l'instant τ ,

$$\delta\hat{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) = \hat{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) - \bar{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \quad (49)$$

L'ensemble microcanonique peut être vu semi-classiquement comme un mélange statistique à énergie constante d'états de Fock $|\mathcal{F}\rangle = |n(\mathbf{r}', \mathbf{p}')\rangle_{(\mathbf{r}', \mathbf{p}') \in \mathbb{R}^6}$ dans l'espace des phases, états propres de $H_{\text{Bog}}^{\text{sc}}$, où tous les $n(\mathbf{r}', \mathbf{p}')$ sont entiers. On suppose dans un premier temps que le système est préparé dans un tel état de Fock $|\mathcal{F}\rangle$ à l'instant initial $t = 0$. C'est un état propre de $\delta\hat{n}(\mathbf{r}', \mathbf{p}', 0)$ avec la valeur propre $n(\mathbf{r}', \mathbf{p}') - \bar{n}(\mathbf{r}', \mathbf{p}')$; il reste donc à calculer dans l'équation (48) la quantité

$$\langle \mathcal{F} | \delta\hat{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) | \mathcal{F} \rangle = n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) - \bar{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \equiv \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) \quad (50)$$

à $\tau > 0$, c'est-à-dire l'évolution des nombres moyens d'occupation $n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau)$ dans l'espace des phases, leurs valeurs initiales étant connues, en tenant compte (i) du transport hamiltonien des quasi-particules et (ii) de l'effet des collisions entre quasi-particules par les processus à trois quasi-particules de Beliaev ou de Landau⁸ représentés sur la Fig. 2. C'est exactement ce que les équations cinétiques habituelles de type Boltzmann quantique savent faire, à la différence près que la fonction de distribution semi-classique $n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau)$ ne correspond pas ici à un état d'équilibre thermique local du système, mais au nombre moyen d'occupation à l'instant τ conditionné au fait que l'état initial du système est un état de Fock de quasi-particules. L'équation d'évolution des nombres d'occupation moyens $n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau)$ est de la forme

$$\frac{D}{D\tau} n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) + I_{\text{coll}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) = 0 \quad (51)$$

Le premier terme est la dérivée convective résultant des équations de Hamilton classiques :

$$\frac{D}{D\tau} = \partial_\tau + \partial_{\mathbf{p}\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \cdot \partial_{\mathbf{r}} - \partial_{\mathbf{r}\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \cdot \partial_{\mathbf{p}} \quad (52)$$

Il conserve la densité dans l'espace des phases le long d'une trajectoire classique (théorème de Liouville). Le second terme décrit l'effet des collisions entre les quasi-particules, locales dans l'espace des positions, et qui ne peuvent se produire, à l'ordre de Beliaev–Landau, qu'aux points où la densité de Thomas–Fermi du condensat $\rho_0(\mathbf{r})$ est non nulle (voir les diagrammes sur la Fig. 2)⁹ :

$$\begin{aligned} I_{\text{coll}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3} \frac{2\pi}{\hbar} \left[2g\rho_0^{1/2}(\mathbf{r}) \mathcal{A}_{\mathbf{q}, |\mathbf{p}-\mathbf{q}|}^{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \right]^2 \delta(\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{q}) + \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}-\mathbf{q}) - \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})) \\ &\quad \times \{-n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau)[1+n(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \tau)][1+n(\mathbf{r}, \mathbf{p}-\mathbf{q}, \tau)] + n(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \tau)n(\mathbf{r}, \mathbf{p}-\mathbf{q}, \tau)[1+n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau)]\} \\ &+ \int \frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3} \frac{2\pi}{\hbar} \left[2g\rho_0^{1/2}(\mathbf{r}) \mathcal{A}_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}(\mathbf{r}) \right]^2 \delta(\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{q}) - \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}+\mathbf{q})) \\ &\quad \times \{-n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau)n(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \tau)[1+n(\mathbf{r}, \mathbf{p}+\mathbf{q}, \tau)] + n(\mathbf{r}, \mathbf{p}+\mathbf{q}, \tau)[1+n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau)][1+n(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \tau)]\} \end{aligned} \quad (53)$$

Dans ce processus sont mis en jeu, au point \mathbf{r} , une quasi-particule d'impulsion \mathbf{p} (dont il faut déterminer l'évolution du nombre moyen $n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau)$), une deuxième quasi-particule sortante ou entrante d'impulsion \mathbf{q} sur laquelle il faut intégrer, et une troisième quasi-particule dont l'impulsion est fixée par la conservation de la quantité de mouvement. Dans l'équation

⁸ Les processus à quatre quasi-particules, d'ordre supérieur en la fraction non condensée, sont supposés ici négligeables.

⁹ Ces diagrammes font intervenir de manière cachée des processus d'absorption ou d'émission stimulée dans le mode du condensat.

(53), la première intégrale prend en compte les processus de Beliaev ; elle est affectée d'un facteur 1/2 pour éviter le double comptage des états finals ou initiaux à deux quasi-particules $(\mathbf{q}, \mathbf{p} - \mathbf{q})$ et $(\mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{q})$; la deuxième intégrale prend en compte les processus de Landau. On notera dans les deux cas : (i) le facteur $\frac{2\pi}{\hbar}$, provenant de la règle d'or de Fermi, (ii) la prise en compte des processus directs avec un signe $-$ (ils dépeuplent le mode \mathbf{p} au point \mathbf{r}) et des processus inverses avec un signe $+$, avec les facteurs d'amplification bosonique $1 + n$, (iii) la présence d'un Dirac de conservation de l'énergie au point \mathbf{r} . Les amplitudes de couplage réduites à trois quasi-particules sont données au point \mathbf{r} par [14,32]

$$\mathcal{A}_{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3}^{\mathbf{p}_1}(\mathbf{r}) = \frac{s^2(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2) + s^2(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3) - s^2(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1)}{4s(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1)s(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2)s(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3)} + \frac{3}{4}s(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1)s(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2)s(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3) \quad (54)$$

avec $s(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = U(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + V(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. Les équations cinétiques admettent bien comme solution stationnaire les nombres d'occupation moyens de l'équilibre thermique¹⁰

$$\bar{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{e^{\beta\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})} - 1} \quad (55)$$

La propriété bien connue de la loi de Bose $1 + \bar{n} = e^{\beta\epsilon} \bar{n}$ permet de le vérifier aisément : jointe à la conservation de l'énergie, elle conduit à la compensation parfaite en tout point des processus directs et inverses, c'est-à-dire à l'annulation des quantités entre accolades dans l'équation (53), suivant le principe de microréversibilité ; on a également $\frac{D}{Dt} \bar{n} = 0$, puisque $\bar{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ est une fonction de $\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, quantité conservée par le transport hamiltonien.

Comme notre système fluctue faiblement autour de l'équilibre, nous linéarisons les équations cinétiques autour de $n = \bar{n}$ comme dans la référence [16] pour obtenir

$$\frac{D}{Dt} \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) = -\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) + \int \frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3} K(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \tau) \quad (56)$$

Le terme diagonal provient de la fluctuation $\delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau)$ au second membre de l'équation (53), et le terme non local en impulsion provient des fluctuations $\delta n(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \tau)$ et $\delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p} \pm \mathbf{q}, \tau)$ dont on regroupe les contributions grâce aux changements de variables $\mathbf{q}' = \mathbf{p} \pm \mathbf{q}$ dans $\int d^3q$. L'expression de $K(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ n'est pas utile pour la suite, donnons donc seulement celle du taux d'amortissement local des quasi-particules de Bogolioubov d'impulsion \mathbf{p} au point \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= \frac{4\pi\rho_0(\mathbf{r})g^2}{\hbar} \int \frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3} \left[\mathcal{A}_{\mathbf{q}, |\mathbf{p}-\mathbf{q}|}^{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \right]^2 \delta(\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{q}) + \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p} - \mathbf{q}) - \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})) [1 + \bar{n}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) + \bar{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p} - \mathbf{q})] \\ &+ \frac{8\pi\rho_0(\mathbf{r})g^2}{\hbar} \int \frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3} \left[\mathcal{A}_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{|\mathbf{p}+\mathbf{q}|}(\mathbf{r}) \right]^2 \delta(\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{q}) - \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \mathbf{q})) [\bar{n}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) - \bar{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \mathbf{q})] \end{aligned} \quad (57)$$

Cette expression coïncide avec le taux d'amortissement d'un mode d'impulsion \mathbf{p} dans un gaz spatialement homogène de densité condensée $g\rho_0(\mathbf{r})$ [32]. Tout comme $\delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau)$, $\langle \mathcal{F} | \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) \delta n(\mathbf{r}', \mathbf{p}', 0) | \mathcal{F} \rangle$ considéré comme une fonction de $(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau)$, obéit à l'équation (56) ; il en va de même pour sa moyenne $\langle \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) \delta n(\mathbf{r}', \mathbf{p}', 0) \rangle$ sur tous les états de Fock initiaux $|\mathcal{F}\rangle$, puisque les coefficients Γ et K ne dépendent pas de $|\mathcal{F}\rangle$. Contractons cette dernière par

$$B(\mathbf{r}', \mathbf{p}') \equiv \frac{1}{\hbar} \frac{d\epsilon(\mathbf{r}', \mathbf{p}')}{dN} \quad (58)$$

comme dans l'équation (48) pour former l'inconnue auxiliaire

$$X(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) = \int \frac{d^3r' d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} B(\mathbf{r}', \mathbf{p}') \langle \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) \delta n(\mathbf{r}', \mathbf{p}', 0) \rangle \quad (59)$$

Alors $X(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau)$ évolue selon les équations cinétiques linéarisées (56) avec la condition initiale

$$X(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 0) = \int \frac{d^3r' d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} Q(\mathbf{r}, \mathbf{p}; \mathbf{r}', \mathbf{p}') B(\mathbf{r}', \mathbf{p}') \quad (60)$$

où l'on a introduit la matrice des covariances des nombres de quasi-particules aux temps égaux :

$$Q(\mathbf{r}, \mathbf{p}; \mathbf{r}', \mathbf{p}') = \langle \delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 0) \delta n(\mathbf{r}', \mathbf{p}', 0) \rangle \quad (61)$$

¹⁰ À strictement parler, cette solution stationnaire correspond aux nombres d'occupation moyens dans l'ensemble canonique, plutôt que dans l'ensemble microcanonique. La différence, calculable comme dans l'appendice C de la référence [16], mais hors de portée de nos équations cinétiques, tend vers zéro à la limite thermodynamique et est négligeable ici. On notera aussi que la non-conservation du nombre total de quasi-particules par les processus Beliaev-Landau impose à la loi de Bose \bar{n} d'avoir une fugacité unité.

dont l'expression dans l'ensemble microcanonique sera reliée à celle dans l'ensemble canonique en temps utile, dans la sous-section 4.3. La fonction de corrélation microcanonique de $d\hat{\theta}^{\text{sc}}/dt$ cherchée vaut alors

$$C_{\text{mc}}^{\text{sc}}(\tau) = \int \frac{d^3r d^3p}{(2\pi\hbar)^3} B(\mathbf{r}, \mathbf{p}) X(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) \quad (62)$$

4.3. Solution dans l'approximation sécularo-ergodique

Notre étude se place dans le régime faiblement collisionnel $\Gamma_{\text{th}} \ll \omega_\alpha$, où Γ_{th} est la valeur thermique typique du taux d'amortissement $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ des quasi-particules et ω_α sont les pulsations de piégeage. Les quasi-particules ont alors le temps d'effectuer un grand nombre d'oscillations hamiltoniennes dans le piège avant de subir une collision. Nous pouvons donc effectuer l'approximation séculaire consistant à remplacer les coefficients de l'équation cinétique linéarisée (56) par leur moyenne temporelle sur une trajectoire. Ainsi,

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \xrightarrow[\text{séculaire}]{\text{approx.}} \overline{\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p})} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t d\tau \Gamma(\mathbf{r}(\tau), \mathbf{p}(\tau)) \quad (63)$$

et l'inconnue auxiliaire $X(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau)$ de l'équation (59), tout comme les fluctuations des nombres d'occupation $\delta n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, dépendent seulement de la trajectoire $\tau \mapsto (\mathbf{r}(\tau), \mathbf{p}(\tau))$ passant par (\mathbf{r}, \mathbf{p}) et du temps. Le problème reste formidable.

Heureusement, comme nous l'avons dit, dans un piège complètement anisotrope, la dynamique hamiltonienne des quasi-particules devrait être fortement chaotique, sauf dans les limites de très basse énergie $\epsilon \ll \mu_{\text{TF}}$ ou de très haute énergie $\epsilon \gg \mu_{\text{TF}}$ [22,23]. Nous effectuons donc l'hypothèse ergodique, en identifiant la moyenne temporelle sur une trajectoire d'énergie ϵ à la moyenne « uniforme » dans l'espace des phases sur la couche d'énergie ϵ :

$$\overline{\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p})} \stackrel{\text{hypothèse}}{\underset{\text{ergodique}}{=}} \Gamma(\epsilon) = \langle \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \rangle_\epsilon \equiv \frac{1}{\rho(\epsilon)} \int \frac{d^3r d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \delta(\epsilon - \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})) \quad (64)$$

où la densité d'états $\rho(\epsilon)$ est donnée par l'équation (22). Nous reviendrons sur cette hypothèse dans la section 4.5. Dans ce cas, la fonction $X(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau)$ dépend seulement de l'énergie $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ et du temps :

$$X(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau) \stackrel{\text{hypothèse}}{\underset{\text{ergodique}}{=}} X(\epsilon, \tau) \quad (65)$$

Nous obtenons l'équation d'évolution de $X(\epsilon, \tau)$ en moyennant celle de $X(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \tau)$ sur la couche d'énergie ϵ ¹¹ :

$$\begin{aligned} \partial_\tau X(\epsilon, \tau) = & -\Gamma(\epsilon) X(\epsilon, \tau) - \frac{1}{2\rho(\epsilon)} \int_0^\epsilon d\epsilon' L(\epsilon - \epsilon', \epsilon') \{X(\epsilon', \tau) [\bar{n}(\epsilon) - \bar{n}(\epsilon - \epsilon')] + X(\epsilon - \epsilon', \tau) [\bar{n}(\epsilon) - \bar{n}(\epsilon')]\} \\ & - \frac{1}{\rho(\epsilon)} \int_0^{+\infty} d\epsilon' L(\epsilon, \epsilon') \{X(\epsilon', \tau) [\bar{n}(\epsilon) - \bar{n}(\epsilon + \epsilon')] - X(\epsilon + \epsilon', \tau) [1 + \bar{n}(\epsilon) + \bar{n}(\epsilon')]\} \end{aligned} \quad (66)$$

avec

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{2\rho(\epsilon)} \int_0^\epsilon d\epsilon' L(\epsilon - \epsilon', \epsilon') [1 + \bar{n}(\epsilon') + \bar{n}(\epsilon - \epsilon')] + \frac{1}{\rho(\epsilon)} \int_0^{+\infty} d\epsilon' L(\epsilon, \epsilon') [\bar{n}(\epsilon') - \bar{n}(\epsilon + \epsilon')] \quad (67)$$

Dans ces expressions, la première intégrale, limitée à des énergies ϵ' inférieures à l'énergie de la quasi-particule ϵ considérée, correspond aux processus de Beliaev, et la deuxième intégrale aux processus de Landau. Le noyau intégral¹²

$$L(\epsilon, \epsilon') = \int \frac{d^3r d^3p d^3q}{(2\pi\hbar)^6} \frac{8\pi g^2 \rho_0(\mathbf{r})}{\hbar} \left[A_{\epsilon, \epsilon'}^{\epsilon + \epsilon'}(\mathbf{r}) \right]^2 \delta(\epsilon - \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})) \delta(\epsilon' - \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{q})) \delta(\epsilon + \epsilon' - \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \mathbf{q})) \quad (68)$$

$$= \frac{32\sqrt{2}}{\pi^{1/2}} \frac{[\rho_0(\mathbf{0}) a^3]^{1/2}}{\hbar \mu_{\text{TF}}} \left(\frac{\mu_{\text{TF}}}{\hbar \bar{\omega}} \right)^3 \int_0^{\mu_{\text{TF}}} \frac{\mu_0 d\mu_0 (\mu_{\text{TF}} - \mu_0)^{1/2} \epsilon \epsilon' (\epsilon + \epsilon') \left[A_{\epsilon, \epsilon'}^{\epsilon + \epsilon'}(\mu_0) \right]^2}{\mu_{\text{TF}}^{5/2} (\epsilon^2 + \mu_0^2)^{1/2} (\epsilon'^2 + \mu_0^2)^{1/2} [(\epsilon + \epsilon')^2 + \mu_0^2]^{1/2}} \quad (69)$$

¹¹ Le plus simple est de moyennner les équations cinétiques complètes (51), puis de linéariser le résultat autour de la solution stationnaire (55).

¹² Pour obtenir (69), on a réduit l'équation (68) à une intégrale simple sur le module r (après s'être ramené formellement au cas d'un piège isotrope comme dans la note 3) en intégrant en coordonnées sphériques sur p, q et sur u , le cosinus de l'angle entre \mathbf{p} et \mathbf{q} . Dans $\int_{-1}^1 du$, l'argument du troisième Dirac s'annule en un point u_0 et un seul, compte tenu des inégalités $\epsilon_{|p-q|}^{\text{Bog}} \leq \epsilon_p^{\text{Bog}} + \epsilon_q^{\text{Bog}} \leq \epsilon_{p+q}^{\text{Bog}}$ satisfaites par la relation de dispersion de Bogolioubov $\epsilon_p^{\text{Bog}} = \left[\frac{p^2}{2m} \left(\frac{p^2}{2m} + 2\mu_0 \right) \right]^{1/2}$, $\forall \mu_0 \geq 0$.

fait intervenir l'amplitude de couplage réduite (54) au point \mathbf{r} , reparamétrisée en termes des énergies $\epsilon_i = \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}_i)$ ($1 \leq i \leq 3$) ou même du potentiel chimique de Gross–Pitaevskii local $\mu_0 = g\rho_0(\mathbf{r})$. Il jouit de la propriété de symétrie $L(\epsilon, \epsilon') = L(\epsilon', \epsilon)$.

Écrivons d'abord le résultat avant de donner quelques indications sur son obtention (on consultera aussi la référence [16]). Dans l'approximation sécularo-ergodique, la fonction de corrélation microcanonique de $d\hat{\delta}^{\text{sc}}/dt$ vaut

$$C_{\text{mc}}^{\text{ergo}}(\tau) = \int_0^{+\infty} d\epsilon \rho(\epsilon) B(\epsilon) X(\epsilon, \tau) \quad (70)$$

Ici $B(\epsilon)$ est la moyenne ergodique de la quantité $B(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ introduite dans l'équation (58) :

$$B(\epsilon) = \frac{1}{\rho(\epsilon)} \int \frac{d^3r d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\hbar dN} \delta(\epsilon - \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})) \quad (71)$$

$$= \frac{d\mu_{\text{TF}}/dN}{\hbar\pi f(\check{\epsilon})} \left[2\check{\epsilon}^{1/2}(\check{\epsilon} + 1) - \sqrt{2}(\check{\epsilon}^2 + 1) \operatorname{argsh} \frac{(2\check{\epsilon})^{1/2}}{(1 + \check{\epsilon}^2)^{1/2}} - \check{\epsilon}^{1/2}(\check{\epsilon} - 1) - (1 + \check{\epsilon})^2 \operatorname{acos} \frac{1}{(1 + \check{\epsilon})^{1/2}} \right] \quad (72)$$

$$B(\epsilon) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{=} \frac{d\mu_{\text{TF}}}{\hbar dN} \left[-\frac{\check{\epsilon}}{5} - \frac{3\pi}{40\sqrt{2}} \check{\epsilon}^{3/2} + O(\check{\epsilon}^2) \right], \quad B(\epsilon) \underset{\epsilon \rightarrow +\infty}{=} \frac{d\mu_{\text{TF}}}{\hbar dN} \left[-1 + \frac{32}{3\pi} \check{\epsilon}^{-3/2} + O(\check{\epsilon}^{-5/2}) \right] \quad (73)$$

avec $\check{\epsilon} = \epsilon/\mu_{\text{TF}}$ et $f(\check{\epsilon})$ la densité d'états réduite (27). L'inconnue auxiliaire $X(\epsilon, \tau)$ est solution de l'équation linéaire (66) avec la condition initiale

$$X(\epsilon, 0) = \bar{n}(\epsilon)[1 + \bar{n}(\epsilon)][B(\epsilon) - \Lambda\epsilon] \quad (74)$$

où $\hbar\Lambda$ est la dérivée du potentiel chimique microcanonique par rapport à l'énergie totale E du gaz,¹³ comme dans l'équation (19) :

$$\Lambda = \frac{\int_0^{+\infty} d\epsilon \rho(\epsilon) \epsilon B(\epsilon) \bar{n}(\epsilon) [1 + \bar{n}(\epsilon)]}{\int_0^{+\infty} d\epsilon \rho(\epsilon) \epsilon^2 \bar{n}(\epsilon) [1 + \bar{n}(\epsilon)]} \quad (75)$$

L'équation (70) est la réécriture ergodique de l'équation (62). La condition initiale (74) est la différence de deux contributions :

- la première est celle qu'on obtiendrait dans l'ensemble canonique. La moyenne ergodique de la matrice des covariances (61) serait en effet simplement $Q_{\text{can}}(\epsilon, \epsilon') = \bar{n}(\epsilon)[1 + \bar{n}(\epsilon)]\delta(\epsilon - \epsilon')/\rho(\epsilon)$;
- la seconde provient d'une projection des fluctuations δn canoniques sur le sous-espace des fluctuations δn d'énergie nulle, $\int_0^{+\infty} d\epsilon \rho(\epsilon) \epsilon \delta n(\epsilon) = 0$, seules admissibles dans l'ensemble microcanonique. Seul point subtil, cette projection doit être effectuée parallèlement à la solution stationnaire $e_0(\epsilon) = \epsilon \bar{n}(\epsilon)[1 + \bar{n}(\epsilon)]$ des équations cinétiques linéarisées (66).¹⁴ On vérifie alors que, pour la valeur de Λ donnée, $X(\epsilon, 0)$ est bien dans le sous-espace des fluctuations d'énergie nulle.

4.4. Résultats et discussion

Nous présentons quelques résultats sous forme graphique, après un adimensionnement astucieux les rendant indépendants des pulsations de piégeage (pourvu qu'elles soient assez distinctes deux à deux pour autoriser l'hypothèse ergodique) et de la force des interactions¹⁵ ; il suffit de connaître la température en unités du potentiel chimique de Thomas–Fermi μ_{TF} . Ces résultats témoignent donc de la classe d'universalité des pièges harmoniques complètement anisotropes, différente de celle des systèmes spatialement homogènes de la référence [16].

Un sous-produit intéressant de notre étude est présenté sur la Fig. 3 : il s'agit du taux d'amortissement $\Gamma(\epsilon)$ à l'approximation sécularo-ergodique des modes de Bogolioubov d'énergie ϵ . Comme on sait, dans une expérience d'atomes froids,

¹³ La raison profonde de l'apparition de cette dérivée est donnée dans la référence [16]. Elle explique pourquoi les équations cinétiques permettent de retrouver dans l'ensemble canonique le terme balistique At^2 de l'équation (15) avec la bonne expression du coefficient $A = (\partial_E \mu_{\text{mc}}/\hbar)^2 \operatorname{Var} E$.

¹⁴ Pour que cette projection soit compatible avec l'évolution cinétique linéarisée, il faut en effet que la direction de projection ainsi que l'hyperplan sur lequel on projette soient invariants par évolution temporelle, le second point étant assuré par la conservation de l'énergie. La forme de $e_0(\epsilon)$ découle du fait que (55) reste une solution stationnaire pour une variation infinitésimale de β , $\beta \rightarrow \beta + \delta\beta$, autour de sa valeur physique.

¹⁵ Dans une première étape, on montre que les résultats ne peuvent dépendre des pulsations de piégeage ω_α que par l'intermédiaire de leur moyenne géométrique $\bar{\omega}$. Ceci est une conséquence assez directe de l'hypothèse ergodique et du fait que les observables mises en jeu ici, dont le hamiltonien, dépendent seulement de la position \mathbf{r} des quasi-particules via le potentiel de piégeage $U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m \sum_\alpha \omega_\alpha^2 r_\alpha^2$. Dans l'intégrale $\int d^3r$ participant à la moyenne ergodique, on peut alors effectuer le changement de variables isotropisant de la note 3.

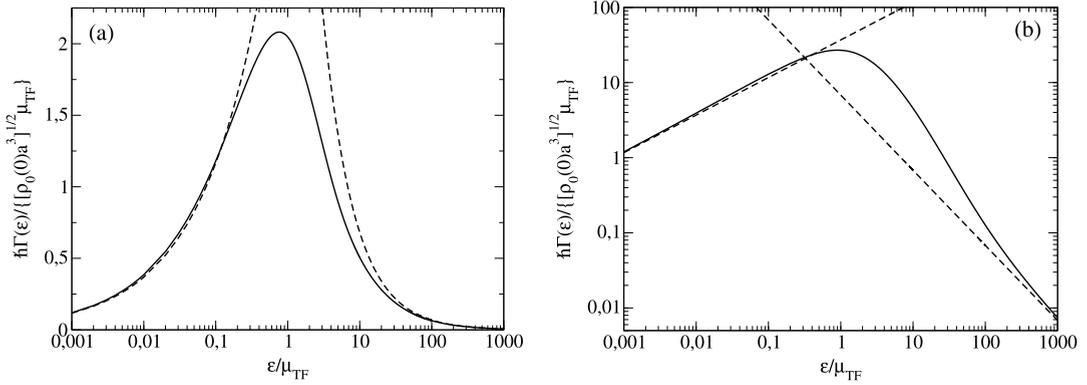


Fig. 3. À la limite thermodynamique, taux d'amortissement Beliaev–Landau $\Gamma(\epsilon)$ des modes de Bogolioubov d'un condensat dans un piège harmonique complètement anisotrope en fonction de leur énergie ϵ , dans l'approximation sécularo-ergodique (63), (64), (67), à la température (a) $k_B T = \mu_{TF}$ et (b) $k_B T = 10 \mu_{TF}$, où μ_{TF} est le potentiel chimique de Thomas–Fermi du condensat. Grâce à l'adimensionnement choisi, la courbe est universelle; en particulier, elle ne dépend pas des pulsations de piégeage ω_α . Les modes de Bogolioubov considérés doivent être dans le régime de mouvement classique $\epsilon \gg \hbar\omega_\alpha$ et le système doit être dans le régime d'un condensat presque pur, $[\rho_0(\mathbf{0})a^3]^{1/2} \ll 1$ et $T \ll T_c$, où $\rho_0(\mathbf{0}) = \mu_{TF}/g$ est la densité du condensat au centre du piège et T_c la température critique. En tireté, les équivalents (76) et (77) de $\Gamma(\epsilon)$ à basse et à haute énergie.

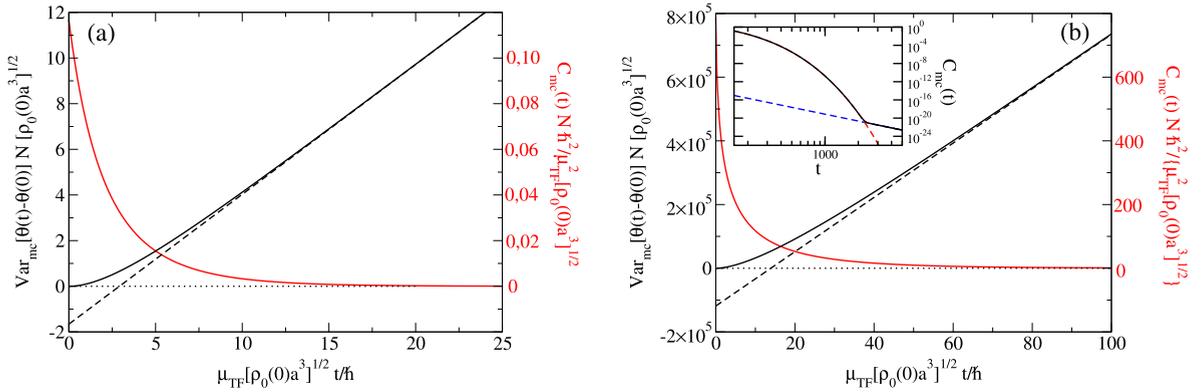


Fig. 4. Dans les conditions de la Fig. 3, pour un système préparé à l'instant 0 dans l'ensemble microcanonique à la température (a) $k_B T = \mu_{TF}$ ou (b) $k_B T = 10 \mu_{TF}$, et isolé de son environnement dans son évolution ultérieure, variance du déphasage $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$ du condensat en fonction du temps t (trait plein noir) et son comportement diffusif asymptotique (80) (tireté). On a représenté sur la même figure la fonction de corrélation $C_{mc}(t)$ de $d\hat{\theta}/dt$ dans l'approximation sécularo-ergodique (70) en fonction du temps (trait plein rouge, graduations à droite) et, pour (b), dans une vignette en échelle log-log aux temps longs (trait plein noir) pour montrer qu'à une loi de décroissance quasi-exponentielle en la racine du temps (ajustement en $t^6 \exp(-C\sqrt{t})$ en tireté rouge) succède une loi de puissance $\propto t^{-5}$ (tireté bleu). Comme dans la Fig. 3, la multiplication des quantités sur les axes par des facteurs bien choisis rend ces résultats universels.

exciter de tels modes et suivre leur décroissance en temps, ce taux est mesurable et notre prédiction peut être comparée aux expériences, au moins dans son régime de validité, en particulier de mouvement classique $\epsilon \gg \hbar\omega_\alpha$ (les écarts à l'hypothèse ergodique sont discutés dans la section 4.5). Les comportements aux limites

$$\hbar\Gamma(\epsilon) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{3\mathcal{I}}{4} \left(\frac{\epsilon}{\mu_{TF}} \right)^{1/2} k_B T [\rho_0(\mathbf{0})a^3]^{1/2} \quad \text{avec } \mathcal{I} = 4,921\,208 \dots \quad (76)$$

$$\hbar\Gamma(\epsilon) \underset{\epsilon \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{128\sqrt{2}}{15\sqrt{\pi}} \frac{\mu_{TF}^2}{\epsilon} [\rho_0(\mathbf{0})a^3]^{1/2} \quad (77)$$

représentés en tireté sur la Fig. 3,¹⁶ sont établis dans l'Annexe A. Ils sont fort différents du cas spatialement homogène, où le taux d'amortissement s'annule linéairement en ϵ à basse énergie et diverge comme $\epsilon^{1/2}$ à haute énergie. En particulier, le comportement (76) en $\epsilon^{1/2}$ résulte de l'existence du bord Thomas–Fermi du condensat.

Revenons à l'étalement de phase du condensat dans l'ensemble microcanonique. Sur la Fig. 4, nous représentons en trait plein noir la variance du déphasage $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$ du condensat en fonction du temps t dans l'approximation ergodique (70) aux températures $T = \mu_{TF}/k_B$ et $T = 10 \mu_{TF}/k_B$. La variance a un départ parabolique en temps, qui correspond au

¹⁶ Pour $k_B T = \mu_{TF}$, $\Gamma(\epsilon)/\epsilon^{1/2}$ présente un maximum trompeur au voisinage de $\epsilon/\mu_{TF} = 0,02$ d'environ 5% supérieur à sa limite en $\epsilon = 0$.

régime précollisionnel $t \ll t_{\text{coll}}$, où t_{coll} est le temps de collision typique entre les quasi-particules : on peut alors supposer que $C_{\text{mc}}(\tau) \simeq C_{\text{mc}}(0)$, si bien que la contribution intégrale à l'équation (15) est $\simeq C_{\text{mc}}(0)t^2$. Aux temps longs, $t \gg t_{\text{coll}}$, la fonction de corrélation de $d\hat{\theta}/dt$ semble tendre rapidement vers zéro (trait plein rouge); une étude numérique plus poussée (voir la vignette incluse dans la Fig. 4b) révèle cependant la présence d'une queue en loi de puissance $t^{-\alpha}$,

$$C_{\text{mc}}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{t^5} \quad (78)$$

L'exposant $\alpha = 5$ est supérieur à celui, $\alpha_h = 3$, de la loi de décroissance de $C_{\text{mc}}(t)$ dans le cas spatialement homogène [16]. Sa valeur peut être retrouvée par l'approximation heuristique grossière, dite *de taux* ou *gaussienne projetée* [15], déjà utilisée pour α_h avec succès dans cette même référence [16] : on ne garde dans les équations cinétiques linéarisées (66) que le terme de décroissance pure $-\Gamma(\epsilon)X(\epsilon, \tau)$ au second membre, ce qui rend leur intégration immédiate et conduit à l'estimation¹⁷

$$C_{\text{mc}}(t) \approx \int_0^{+\infty} d\epsilon \rho(\epsilon) [B(\epsilon) - \Lambda\epsilon]^2 \bar{n}(\epsilon) [1 + \bar{n}(\epsilon)] e^{-\Gamma(\epsilon)t} \quad (79)$$

Les comportements en loi de puissance à basse énergie de la densité d'états $\rho(\epsilon)$ [voir (34)], des coefficients $B(\epsilon)$ dans $d\hat{\theta}/dt$ [voir (73)], des nombres d'occupation $n(\epsilon) \sim k_B T/\epsilon$ et du taux d'amortissement $\Gamma(\epsilon)$ [voir (76)] reproduisent alors l'exposant $\alpha = 5$ constaté numériquement.¹⁸ Comme $C_{\text{mc}}(t)$ tend vers zéro plus vite que $1/t^{2+\eta}$, pour un certain $\eta > 0$, nous obtenons le résultat important suivant : la variance du déphasage du condensat $\text{Var}_{\text{mc}}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)]$ présente aux temps longs une croissance affine typique d'un régime diffusif avec retard :

$$\text{Var}_{\text{mc}}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] \underset{t \gg t_{\text{coll}}}{=} 2D(t - t_0) + o(1) \quad (80)$$

en tireté sur la Fig. 4, le retard t_0 étant dû à la largeur non nulle de la fonction de corrélation $C_{\text{mc}}(\tau)$:

$$D = \int_0^{+\infty} d\tau C_{\text{mc}}(\tau) \quad (81)$$

$$t_0 = \frac{\int_0^{+\infty} d\tau \tau C_{\text{mc}}(\tau)}{\int_0^{+\infty} d\tau C_{\text{mc}}(\tau)} \quad (82)$$

Nous représentons le coefficient de diffusion D de la phase du condensat en fonction de la température sur la Fig. 5a. Il présente une croissance à haute température ($k_B T > \mu_{\text{TF}}$) bien plus rapide que dans le cas spatialement homogène : elle n'était que linéaire (à des facteurs logarithmiques près), elle semble ici être en T^4 (pointillé sur la figure). Le temps de retard à la diffusion t_0 est porté en fonction de la température sur la Fig. 5b. Nous le comparons à l'estimation $t_{\text{coll}} \simeq 1/\Gamma(\epsilon = k_B T)$ du temps de collision entre quasi-particules, en tireté : celle-ci rend bien compte de la remontée brutale de t_0 à basse température, mais reproduit avec beaucoup de retard et en la sous-estimant grandement celle à haute température. La remontée de t_0 est bien représentée par une loi en $T^{-3/2}$ à basse température, et semble être linéaire en T à haute température (voir les pointillés).

Cherchons à retrouver par un raisonnement simple les lois de puissance constatées. Si loi d'échelle il y a, elle doit survivre à l'approximation de taux sur les équations cinétiques linéarisées ; nous pouvons donc prendre l'expression approchée (79) de $C_{\text{mc}}(t)$ comme point de départ et la reporter dans les expressions (81) et (82) de D et t_0 .

À haute température, les intégrales sur ϵ donnant D et t_0 dans l'approximation de taux sont dominées par les énergies d'ordre $k_B T$; nous posons donc $\epsilon = k_B T \bar{\epsilon}$ et faisons tendre T vers $+\infty$ à $\bar{\epsilon}$ fixé sous le signe intégral. Les comportements de $\rho(\epsilon)$ et $B(\epsilon)$ à haute énergie sont connus. Seul celui de $\Gamma(k_B T \bar{\epsilon})$ manque ; pour l'obtenir, nous remarquons sur (69) que $L(k_B T \bar{\epsilon}, k_B T \bar{\epsilon}')$ tend vers une constante lorsque $T \rightarrow +\infty$. L'approximation $L(\epsilon, \epsilon') \simeq L(\epsilon - \epsilon', \epsilon') \simeq \text{cte}$ déclenche cependant une divergence infrarouge logarithmique dans les intégrales sur ϵ' dans (67), qui s'interrompt à $\epsilon' \lesssim \mu_{\text{TF}}$, si bien que¹⁹

$$\frac{\hbar \Gamma(k_B T \bar{\epsilon})}{\mu_{\text{TF}} [\rho_0(\mathbf{0}) \bar{a}^3]^{1/2}} \underset{k_B T / \mu_{\text{TF}} \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{512\sqrt{2}}{15\pi^{1/2}} \frac{1}{\bar{\epsilon}^2} \frac{\mu_{\text{TF}}}{k_B T} \ln \frac{k_B T}{\mu_{\text{TF}}} \quad (83)$$

Tout ceci conduit bien aux lois d'échelle $D \approx T^4$ et $t_0 \approx T$ à haute température, à des facteurs logarithmiques près.

¹⁷ On a pris soin de tenir compte de la projection sur le sous-espace microcanonique des fluctuations d'énergie nulle non seulement dans la condition initiale (74), mais aussi dans la contraction par $B(\epsilon)$ dans (70), en y remplaçant $B(\epsilon)$ par $B(\epsilon) - \Lambda\epsilon$; cette précaution, optionnelle dans la formulation exacte, ne l'est plus ici puisque l'approximation viole la conservation de l'énergie.

¹⁸ En revanche, la valeur prédite pour le coefficient C dans (78) pour $k_B T = 10 \mu_{\text{TF}}$, soit $\simeq 10^{-5}$, diffère significativement de la valeur $\simeq 7 \times 10^{-5}$ constatée numériquement.

¹⁹ Un calcul plus précis conduit à remplacer dans (83) le symbole \sim par $=$ et le facteur $\ln \frac{k_B T}{\mu_{\text{TF}}}$ par $[\ln \frac{k_B T}{\mu_{\text{TF}}} + \frac{\bar{\epsilon}}{4} + \ln(1 - e^{-\bar{\epsilon}}) + \frac{31}{15} - 3 \ln 2 + O(\mu_{\text{TF}}/k_B T)]$.

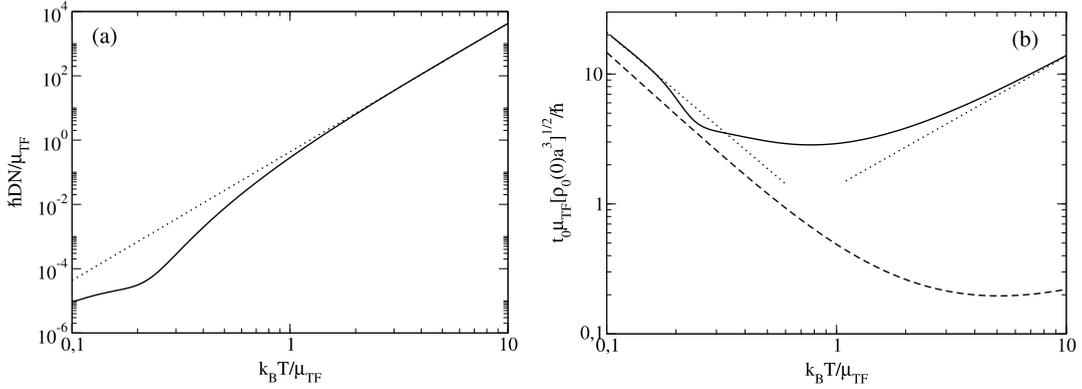


Fig. 5. Dans les conditions des Figs. 3 et 4 précédentes, (a) coefficient de diffusion D de la phase du condensat harmoniquement piégé et (b) temps de retard t_0 à la diffusion de phase en fonction de la température (en trait plein noir) déduits des équations (81), (82) et (70). Ces quantités sont indépendantes de l'ensemble statistique. Avec les adimensionnements choisis, les courbes sont universelles. On a représenté en pointillé en (a) un ajustement par une loi en T^4 à haute température et en (b) un ajustement par une loi en T à haute température et par une loi en $T^{-3/2}$ à basse température. Les lois de puissance représentées à haute température sont seulement indicatives, car elles omettent certainement des facteurs logarithmiques en $k_B T/\mu_{TF}$. En (b) le tireté donne l'estimation $1/\Gamma(\epsilon = k_B T)$ du temps de collision t_{coll} typique entre les quasi-particules.

À basse température, nous procédons de même. Le comportement de $\Gamma(k_B T\bar{\epsilon})$ est en $T^{3/2}$ lorsque $T \rightarrow 0$ à $\bar{\epsilon}$ fixé, comme l'équivalent (76) le laissait entrevoir et comme un calcul le confirme. Le seul piège à éviter est que $B(k_B T\bar{\epsilon}) - \Lambda k_B T\bar{\epsilon}$ est d'ordre $T^{3/2}$ lorsque $T \rightarrow 0$, et non pas T comme on pourrait le croire, car les termes dominants de $B(k_B T\bar{\epsilon})$ et de $\Lambda k_B T\bar{\epsilon}$, tous deux linéaires en $k_B T\bar{\epsilon}$, se compensent exactement, voir l'équation (75). Ceci conduit aux lois de puissance exactes (sans facteur correctif logarithmique) $D \propto T^4$ et $t_0 \propto T^{-3/2}$ à basse température ; seule la seconde est accessible sur l'intervalle en température de la Fig. 5, mais nous avons vérifié la première numériquement.

Afin d'encourager une étude expérimentale avec des atomes froids, terminons par une petite étude des limites fondamentales à l'observabilité de la diffusion de phase d'un condensat piégé. Il existe bien entendu plusieurs difficultés pratiques à surmonter, comme (i) la réduction significative des fluctuations de l'énergie et du nombre de particules dans le gaz pour atténuer le brouillage balistique de la phase, concurrent dangereux de la diffusion, (ii) la mise en place d'un système de détection sensible et non biaisé du déphasage du condensat ou de la fonction de cohérence $g_1(t)$ de type Ramsey, comme il est proposé dans les références [17,18], (iii) la réduction des bruits techniques du dispositif expérimental, (iv) le piégeage des atomes dans une cellule sous un vide suffisamment poussé pour rendre négligeables les pertes d'atomes froids par collision avec le gaz chaud résiduel (pertes à un corps) : des durées de vie de l'ordre de l'heure sont envisageables sous environnement cryogénique [33,34]. Ces aspects pratiques varient suivant les équipes et sortent du cadre de cet article. En revanche, les pertes de particules dues aux collisions à trois corps, avec formation d'un dimère et d'un atome rapide, sont intrinsèques aux gaz d'alcalins et constituent une limite fondamentale. Chaque perte d'un atome change, à un instant aléatoire, la vitesse de variation de la phase $\frac{d}{dt}\hat{\theta}$, puisque celle-ci est fonction de N , ce qui ajoute une composante stochastique à son évolution [16,35]. Pour calculer la variance du déphasage du condensat induit par les pertes à trois corps, nous nous plaçons à l'ordre zéro en la fraction non condensée, c'est-à-dire dans le cas d'un condensat pur à température nulle préparé à l'instant 0 avec un nombre initialement bien défini N de particules, comme dans la référence [16] dont nous pouvons récupérer (en les adaptant au cas piégé et aux pertes à trois corps) les expressions (G7) et (64) :

$$\text{Var}_{\text{pertes}}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] = \left(\frac{d\mu_{TF}}{\hbar dN}\right)^2 \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' \left[\langle \hat{N}(\tau)\hat{N}(\tau') \rangle - \langle \hat{N}(\tau) \rangle \langle \hat{N}(\tau') \rangle \right] \underset{\Gamma_3 t \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{d\mu_{TF}}{\hbar dN}\right)^2 N \Gamma_3 t^3 \quad (84)$$

Nous avons introduit le taux de décroissance Γ_3 du nombre de particules, relié comme suit à la constante K_3 des pertes à trois corps et au profil de densité Thomas-Fermi $\rho_0(\mathbf{r})$ du condensat :

$$\frac{d}{dt}N \equiv -\Gamma_3 N = -K_3 \int d^3r [\rho_0(\mathbf{r})]^3 \quad (85)$$

Nous obtenons une écriture plus parlante, directement comparable à nos résultats sans pertes, en récrivant (84) sous forme adimensionnée :

$$\overline{\text{Var}}_{\text{pertes}}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] \underset{\Gamma_3 t \rightarrow 0}{\sim} \frac{8}{525\pi} \bar{K}_3 \bar{t}^3 \quad (86)$$

où $\overline{\text{Var}}$ et \bar{t} sont la variance du déphasage et le temps écoulé dans les unités de la Fig. 4, et $\bar{K}_3 = mK_3/(\hbar a^4)$. La constante réduite \bar{K}_3 est une propriété intrinsèque de l'espèce atomique utilisée dans l'expérience (même s'il est possible de la faire

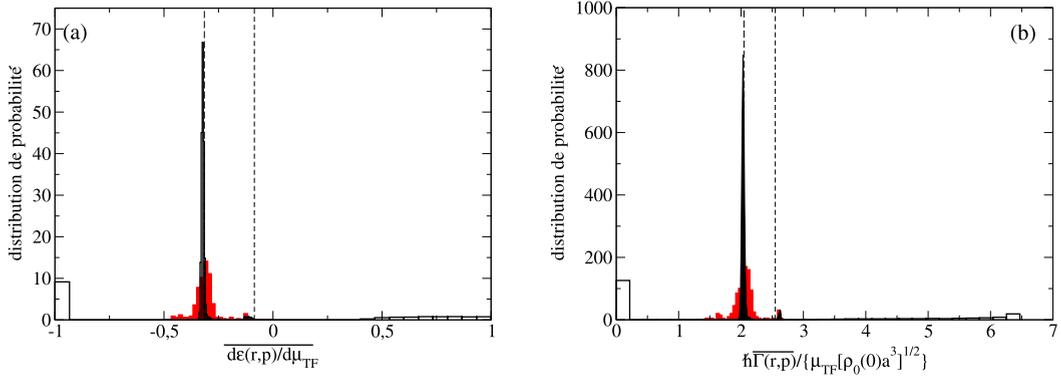


Fig. 6. Histogramme des moyennes temporelles des grandeurs physiques (a) $d\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})/d\mu_{TF}$ et (b) $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ pour 10^4 valeurs initiales indépendantes $(\mathbf{r}(0), \mathbf{p}(0))$ tirées uniformément sur la couche d'énergie $\epsilon = \mu_{TF}$ et une évolution hamiltonienne (39), (40) des quasi-particules de Bogolioubov pendant une durée t variable : $t = 0$ (barres creuses, trait noir), $t = 5 \times 10^3/\bar{\omega}$ (barres pleines rouges), $t = 2, 5 \times 10^5/\bar{\omega}$ (barres pleines noires). Le potentiel harmonique est complètement anisotrope, avec des pulsations de piégeage incommensurables (rapports $\omega_x : \omega_y : \omega_z = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{5} - 1$). La température, qui intervient dans le taux d'amortissement $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, vaut $T = \mu_{TF}/k_B$. Tiretés verticaux noirs : à gauche, la valeur ergodique (moyenne de la grandeur sur la couche d'énergie ϵ) ; à droite, la moyenne temporelle de la grandeur sur une période de la trajectoire linéaire d'énergie ϵ selon la direction Oy (axe du piège le plus confinant), obtenue analytiquement pour (a) (voir la note 21) et numériquement pour (b).

varier à l'aide d'une résonance de Feshbach magnétique [36]). Pour estimer l'ordre de grandeur de \bar{K}_3 dans un gaz d'atomes froids, prenons l'exemple du rubidium 87 dans le sous-niveau hyperfin fondamental $|F = 1, m_F = -1\rangle$ en champ magnétique quasi nul : les mesures donnent $K_3 = 6 \times 10^{-42}$ m⁶/s et $a = 5, 31$ nm [37] donc $\bar{K}_3 \simeq 10$. Sur la Fig. 4a ($k_B T = \mu_{TF}$), au temps réduit $\bar{t} = 5$ d'entrée dans le régime asymptotique de la diffusion de phase, on voit que la variance parasite induite par les pertes pour cette valeur de \bar{K}_3 est environ le triple de la variance utile ; leurs dépendances en temps très différentes devraient cependant permettre de les séparer. La situation est beaucoup plus favorable à plus haute température, $k_B T \gg \mu_{TF}$, l'effet des pertes sur la variance du déphasage étant, par exemple, encore négligeable au temps réduit $\bar{t} = 100$ sur la Fig. 4b ($k_B T = 10 \mu_{TF}$).

4.5. Discussion de l'hypothèse ergodique

Le mouvement classique des quasi-particules de Bogolioubov, comme l'ont montré les références [22,23] dans le cas d'un piège harmonique à symétrie de révolution, est fortement chaotique aux énergies $\epsilon \simeq \mu_{TF}$, mais même à cette énergie, les sections de Poincaré révèlent des îlots de stabilité dans l'espace des phases, qui ne sont pas traversés par les trajectoires de la mer chaotique : il n'y a donc pas ergodicité au sens strict.

Qu'en est-il dans le cas d'un piège complètement anisotrope ? Nous souhaitons tester l'hypothèse ergodique pour deux grandeurs physiques. La première apparaît dans nos équations cinétiques linéarisées ; il s'agit du taux d'amortissement $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. La seconde intervient dans les conditions initiales de la fonction de corrélation $C_{mc}(\tau)$ de $d\hat{\theta}/dt$; il s'agit de $d\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})/d\mu_{TF}$. Pour un échantillonnage uniforme de la surface d'énergie ϵ , c'est-à-dire avec la distribution de probabilité $\delta(\epsilon - \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}))/\rho(\epsilon)$ dans l'espace des phases, nous montrons sur la Fig. 6 les histogrammes de ces grandeurs après moyennage temporel sur chaque trajectoire pendant des temps respectivement de $t = 0$, $t = 5000/\bar{\omega}$ et $t = 250000/\bar{\omega}$, à l'énergie $\epsilon = k_B T = \mu_{TF}$ pour des pulsations de piégeage incommensurables.²⁰ Le moyennage temporel conduit bien à un rétrécissement spectaculaire de la distribution de probabilité, qui se pique autour de la moyenne ergodique (ligne tiretée à gauche), ce qui va dans le sens de l'hypothèse ergodique. Cette dynamique de rétrécissement se poursuit sur des temps très longs, mais ne vient jamais à bout d'un petit pic latéral éloigné de la moyenne ergodique.

Un examen des trajectoires contribuant au pic latéral montre qu'il s'agit de perturbations de trajectoires linéaires stables le long de l'axe propre du piège de raideur maximale. La valeur moyenne temporelle des deux grandeurs considérées sur ces trajectoires linéaires est représentée par le tireté à droite sur la Fig. 6, elle est effectivement proche du pic en question. Le diagramme de stabilité d'une trajectoire linéaire le long d'un axe propre α quelconque du piège vis-à-vis d'une perturbation le long d'un autre axe propre β est représenté sur la Fig. 7, dans le plan (énergie, rapport $\omega_\beta/\omega_\alpha$). Il montre que la trajectoire linéaire selon l'axe le plus confinant est bien stable, à toute énergie.²¹ Les sections de Poincaré des trajectoires

²⁰ Les équations du mouvement (39), (40), mises dans leur ensemble sous la forme $\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$, sont intégrées numériquement avec un schéma semi-implicite du second ordre, $\mathbf{X}(t + dt) = \mathbf{X}(t) + dt[1 - \frac{dt}{2}M]^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{X}(t))$, où M est la différentielle première de $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ en $\mathbf{X}(t)$ [38]. Si la trajectoire traverse la surface du condensat entre t et $t + dt$, il faut déterminer l'instant t_s de la traversée avec une erreur $O(dt)^3$, puis appliquer le schéma semi-implicite successivement sur $[t, t_s]$ et $[t_s, t + dt]$, pour pallier la discontinuité de $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ et de ses dérivées.

²¹ La trajectoire linéaire d'une quasi-particule d'énergie ϵ selon l'axe propre $O\alpha$ du piège s'écrit $m^{1/2}\omega_\alpha r_\alpha(t) = |\mu_{TF} + i\epsilon| \sin(\sqrt{2}\omega_\alpha t)/\sqrt{G(t)}$ et $p_\alpha(t)/(2m)^{1/2} = \epsilon/\sqrt{G(t)}$ avec $G(t) = \mu_{TF} + |\mu_{TF} + i\epsilon| \cos(\sqrt{2}\omega_\alpha t)$. Ceci correspond au choix $r_\alpha(0) = 0$, $p_\alpha(0) \geq 0$ et vaut pour $-t_s \leq t \leq t_s$, où le temps d'atteinte de la surface du condensat est donné par $\sqrt{2}\omega_\alpha t_s = \arccos \frac{\epsilon - \mu_{TF}}{|\mu_{TF} + i\epsilon|}$. À l'extérieur du condensat, la quasi-particule oscille harmoniquement comme

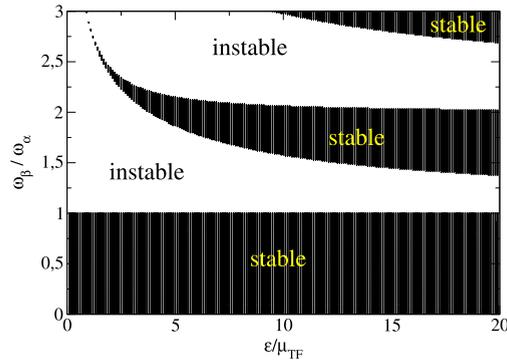


Fig. 7. Pour la dynamique hamiltonienne classique des quasi-particules de Bogolioubov dans un potentiel harmonique, stabilité du mouvement linéaire selon un axe propre $O\alpha$ du piège vis-à-vis d'une perturbation initiale infinitésimale (un déplacement) selon un autre axe propre $O\beta$, en fonction de l'énergie ϵ de la trajectoire et du rapport $\omega_\beta/\omega_\alpha$ des pulsations de piégeage (les zones hachurées sont stables).

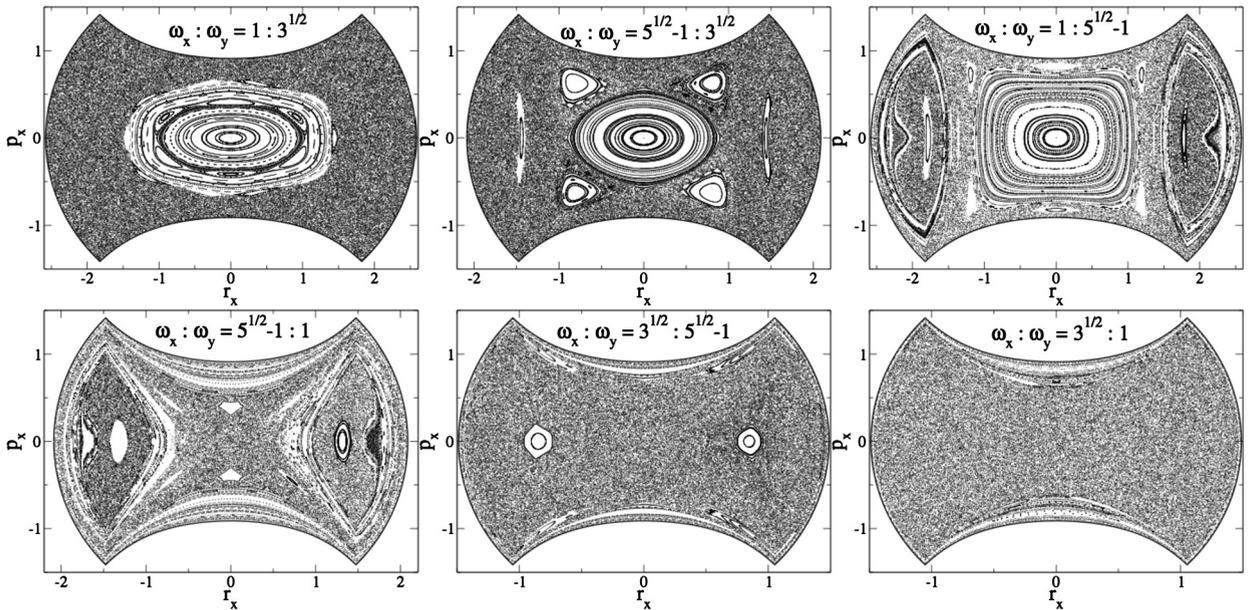


Fig. 8. Pour la dynamique hamiltonienne classique des quasi-particules de Bogolioubov dans un potentiel harmonique, sections de Poincaré dans le plan de coupe ($r_y = 0, p_y(\epsilon) > 0$) de trajectoires planes dans xOy (200 trajectoires indépendantes, temps d'évolution $5000/\bar{\omega}$), avec un rapport ω_x/ω_y prenant toutes les valeurs possibles dans le piège de la Fig. 6 : $1 : \sqrt{3}, \sqrt{3} : 1, 1 : \sqrt{5} - 1, \sqrt{5} - 1 : 1, \sqrt{3} : \sqrt{5} - 1$ et $\sqrt{5} - 1 : \sqrt{3}$. Les sections ont été ordonnées dans le sens d'un rapport ω_x/ω_y croissant de gauche à droite et de haut en bas (en effet, $1/\sqrt{3} < (\sqrt{5} - 1)/\sqrt{3} < 1/(\sqrt{5} - 1) < 1$). Ceci révèle que la section de Poincaré est d'autant plus chaotique que le rapport ω_x/ω_y est plus grand. r_x est en unités de $(\mu_{TF}/m\bar{\omega}^2)^{1/2}$ et p_x en unités de $(m\mu_{TF})^{1/2}$.

planes dans les plans $\alpha O\beta$ sur la Fig. 8 précisent la largeur de l'îlot de stabilité et révèlent l'existence d'îlots secondaires, etc. Il n'y a donc pas pleine ergodicité de notre dynamique classique, même aux énergies $\epsilon \approx \mu_{TF}$, même dans le cas complètement anisotrope.

Pour mesurer quantitativement l'erreur commise par l'hypothèse ergodique dans le calcul de $C_{mc}(0)$ et de $C_{mc}(\tau > 0)$, nous considérons les écarts entre

$$\left\langle \frac{d\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{d\mu_{TF}} \right\rangle_\epsilon \quad \text{et} \quad \left\langle \frac{d\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{d\mu_{TF}} \right\rangle_\epsilon^2 \tag{87}$$

une particule libre pendant un temps $2\omega_\alpha^{-1} \text{atan}[(\epsilon/\mu_{TF})^{1/2}]$ avant de regagner le condensat, pour le traverser en un temps $2t_s$, et ainsi de suite. La connaissance de la trajectoire rend immédiate l'analyse linéaire de stabilité numérique. Elle permet aussi de calculer analytiquement la moyenne temporelle de $d\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})/d\mu_{TF}$ sur la trajectoire linéaire ; si l'on pose $\tilde{\epsilon} = \epsilon/\mu_{TF}$, le résultat s'écrit :

$$\frac{d\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{d\mu_{TF}} = \frac{\ln \frac{1+\tilde{\epsilon}+\sqrt{2\tilde{\epsilon}}}{(1+\tilde{\epsilon}^2)^{1/2}} - \sqrt{2} \text{atan} \sqrt{\tilde{\epsilon}}}{\text{acos} \frac{\tilde{\epsilon}-1}{(1+\tilde{\epsilon}^2)^{1/2}} + \sqrt{2} \text{atan} \sqrt{\tilde{\epsilon}}}$$

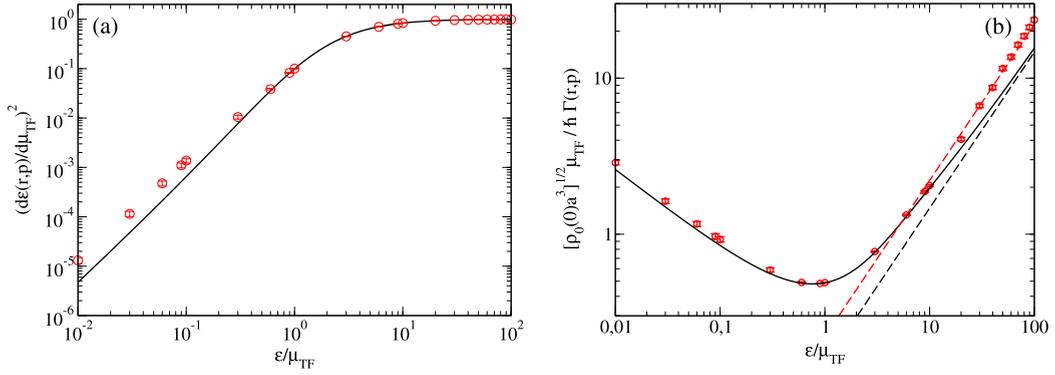


Fig. 9. Visualisation de l'erreur introduite par l'hypothèse ergodique $\bar{O} = \langle O \rangle_\epsilon$ sur deux grandeurs physiques $O(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ intervenant dans la diffusion de la phase du condensat, en fonction de l'énergie ϵ : (a) pour $O(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = d\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})/d\mu_{\text{TF}}$, on compare comme dans l'équation (87) $\langle \bar{O}^2 \rangle_\epsilon$ (cercles rouges) à son approximation ergodique $\langle O \rangle_\epsilon^2$ tirée de (72) (trait plein noir); (b) pour $O(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, on compare comme dans l'équation (88) $\langle 1/\bar{O} \rangle_\epsilon$ (cercles rouges) à son approximation ergodique $1/\langle O \rangle_\epsilon$ (trait plein noir). La moyenne temporelle \bar{O} est calculée sur une durée d'évolution $t = 5 \times 10^4 / \bar{\omega}$ des quasi-particules dans le piège de la Fig. 6; la moyenne sur la couche d'énergie ϵ est prise sur 200 trajectoires indépendantes, avec des conditions initiales (\mathbf{r}, \mathbf{p}) tirées selon la loi uniforme $\delta(\epsilon - \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p}))/\rho(\epsilon)$, ce qui conduit à une incertitude statistique représentée par les barres d'erreur sur la figure. Droites tirées dans (b) : équivalents asymptotiques (89) de $\langle 1/\bar{\Gamma} \rangle_\epsilon$ (en rouge) et (77) de $1/\langle \Gamma \rangle_\epsilon$ (en noir).

$$\left\langle \frac{1}{\bar{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{p})} \right\rangle_\epsilon \quad \text{et} \quad \frac{1}{\langle \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \rangle_\epsilon} = \frac{1}{\Gamma(\epsilon)} \quad (88)$$

où, rappelons-le, la barre horizontale $\overline{O(\mathbf{r}, \mathbf{p})}$ au-dessus d'une grandeur physique représente la moyenne temporelle sur la trajectoire passant par (\mathbf{r}, \mathbf{p}) dans l'espace des phases comme dans l'équation (63), et les crochets $\langle O(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \rangle_\epsilon$ représentent la moyenne uniforme sur la couche d'énergie ϵ comme dans l'équation (64). Dans le tableau d'équations (87), (88), la colonne de gauche contient les grandeurs apparaissant dans $C_{\text{mc}}(0)$ ou dans les équations cinétiques séculaires avant l'approximation ergodique, et la colonne de droite ce qu'elles deviennent après approximation ergodique. Point important, nous considérons dans l'équation (88) $1/\bar{\Gamma}$ plutôt que $\bar{\Gamma}$ car ce sont les inverses M^{-1} et M^{-2} qui apparaissent dans l'expression (81), (82) du coefficient de diffusion D et du temps de retard t_0 , M étant l'opérateur représentant le second membre des équations cinétiques linéarisées (66).²² Les quantités à comparer (87), (88) sont représentées en fonction de l'énergie ϵ sur la Fig. 9 à la température $T = \mu_{\text{TF}}/k_B$. Il y a un accord remarquable sur une large plage d'énergie autour de $\epsilon = \mu_{\text{TF}}$. Les écarts à l'approximation ergodique à très basse énergie et à très haute énergie étaient attendus : dans ces limites, la dynamique classique devient intégrable [22]. À haute énergie, nous obtenons pour la grandeur $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ la prédiction analytique suivante²³ :

$$\left\langle \frac{1}{\hbar \bar{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{p})} \right\rangle_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow +\infty} \frac{\pi^{5/2}}{56\sqrt{2}} \frac{\epsilon}{\mu_{\text{TF}}^2} \frac{1}{[\rho_0(\mathbf{0})a^3]^{1/2}} \quad (89)$$

Elle diffère de la prédiction ergodique (77) par un coefficient numérique, et reproduit bien les résultats des simulations numériques (voir le tiret rouge sur la Fig. 9b). Ceci nous interdit de calculer le coefficient de diffusion D et le retard à la diffusion t_0 dans l'approximation sécularo-ergodique à trop haute température. En ce qui concerne la grandeur $d\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})/d\mu_{\text{TF}}$, qui tend vers -1 à haute énergie, l'écart ne peut être significatif qu'à basse énergie; il ne le devient en fait qu'à très basse énergie, et ne poserait problème à notre calcul ergodique de D et t_0 qu'à des températures $k_B T \ll \mu_{\text{TF}}$, rarement atteintes dans les expériences sur les atomes froids.

²² Faut-il le rappeler, $\langle \bar{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \rangle_\epsilon = \Gamma(\epsilon)$, la moyenne uniforme étant invariante par évolution temporelle. Du coup, l'inégalité entre moyenne harmonique et moyenne arithmétique impose $\langle 1/\bar{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \rangle_\epsilon \geq 1/\Gamma(\epsilon)$.

²³ À l'ordre dominant en ϵ , on obtient $\bar{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ en moyennant l'équivalent (97) (dans lequel $\mu_0 = g\rho_0(\mathbf{r})$) sur une trajectoire harmonique non perturbée par le condensat, $r_\alpha(t) = A_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \phi_\alpha)$, $\forall \alpha \in \{x, y, z\}$. Considérons astucieusement la quantité $g\rho_0(\mathbf{r})$ à moyennner comme une fonction $f(\theta)$ des angles $\theta_\alpha = \omega_\alpha t + \phi_\alpha$. C'est une fonction périodique de période 2π selon chaque direction, décomposable en série de Fourier, $f(\theta) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3} c_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n} \cdot \theta}$. Dans le cas incommensurable, $\mathbf{n} \cdot \omega \neq 0$ et la moyenne temporelle de $e^{i\mathbf{n} \cdot \theta}$ est nulle $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^{3*}$, si bien que $\overline{f(\theta)} = c_0$. Dans l'habituelle expression intégrale de c_0 , on effectue le changement de variable $x_\alpha = X_\alpha \cos \theta_\alpha$, où $X_\alpha = (\epsilon_\alpha / \mu_{\text{TF}})^{1/2}$ et ϵ_α est l'énergie du mouvement selon $O\alpha$. Il reste à faire tendre les X_α vers $+\infty$ sous le signe intégral pour obtenir

$$\frac{\hbar \bar{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\mu_{\text{TF}} [\rho_0(\mathbf{0})a^3]^{1/2}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow +\infty} \frac{32\sqrt{2}}{15\pi^{3/2}} \left(\frac{\epsilon}{\mu_{\text{TF}}} \right)^{1/2} \prod_{\alpha} \left(\frac{\mu_{\text{TF}}}{\epsilon_\alpha} \right)^{1/2}$$

En moyennant l'inverse de cet équivalent sur la distribution de probabilité $2\epsilon^{-2}\delta(\epsilon - \sum_{\alpha} \epsilon_\alpha)$ des énergies par direction pour un oscillateur harmonique d'énergie totale ϵ , on tombe sur (89).

5. Conclusion

Motivés par des progrès expérimentaux récents dans la manipulation des gaz d'atomes froids piégés [1–3], nous avons étudié théoriquement le temps de cohérence et la dynamique de phase d'un condensat de Bose-Einstein dans un gaz de bosons isolé et piégé harmoniquement, un problème fondamental important pour les applications interférométriques. La variance du déphasage subi par le condensat au bout d'un temps t croît indéfiniment avec t , ce qui limite le temps de cohérence intrinsèque du gaz. Pour $t \gg t_{\text{coll}}$, où t_{coll} est le temps de collision typique entre les quasi-particules de Bogolioubov, elle devient une fonction quadratique du temps,

$$\text{Var}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] = At^2 + 2D(t - t_0) + o(1) \quad (90)$$

où $\hat{\theta}$ est l'opérateur phase du condensat. Cette loi asymptotique a la même forme que dans le cas spatialement homogène précédemment étudié [16], ce qui n'était pas garanti, mais les coefficients diffèrent, bien entendu. Pour les calculer, nous considérons la limite thermodynamique dans le piège, dans laquelle le nombre de particules tend vers l'infini, $N \rightarrow +\infty$, à température T et potentiel chimique de Gross-Pitaevskii μ_{GP} fixés. Ceci impose que les pulsations de piégeage réduites tendent vers zéro, $\hbar\omega_\alpha/\mu_{\text{GP}} \rightarrow 0$, ce que nous réinterprétons avantageusement comme une limite classique $\hbar \rightarrow 0$.

Le terme dominant At^2 est dû aux fluctuations dans l'état initial des quantités conservées par évolution temporelle, N et E , où E est l'énergie totale du gaz. Nous donnons une expression explicite (16)–(19)–(20) du coefficient A dans un ensemble généralisé, mélange statistique quelconque d'ensembles microcanoniques avec des fluctuations au plus normales de N et de E . Dans ce cas, $A = O(1/N)$. Nous obtenons une forme plus simple (30) dans le cas d'un mélange statistique d'ensembles canoniques de même température, mais de nombre de particules variable. Aux températures habituelles, plus grandes que μ_{GP}/k_B , et pour des fluctuations poissoniennes du nombre de particules, la contribution à A des fluctuations thermiques de E est rendue négligeable par un facteur d'ordre la fraction non condensée $\propto (T/T_c)^3$. Il faut réduire d'autant la variance de N pour voir l'effet des fluctuations thermiques sur l'étalement balistique de la phase du condensat.

Le terme sous-dominant $2D(t - t_0)$ ne dépend pas de l'ensemble dans lequel le système est préparé, du moins au premier ordre non nul $1/N$ à la limite thermodynamique, et il est le seul qui subsiste dans l'ensemble microcanonique. Le calcul de ses deux ingrédients, le coefficient de diffusion D de la phase et le retard à la diffusion t_0 , nécessite la connaissance à tout temps de la fonction de corrélation de $d\hat{\theta}/dt$ dans l'ensemble microcanonique, et donc la résolution d'équations cinétiques linéarisées sur les nombres d'occupation des quasi-particules de Bogolioubov. Ce sont en effet les fluctuations temporelles de ces nombres d'occupation pour une réalisation donnée du système qui stochastisent l'évolution de la phase du condensat. Nous adoptons pour ce faire une description semi-classique, dans laquelle le mouvement des quasi-particules dans le gaz piégé est traité classiquement dans l'espace des phases (\mathbf{r}, \mathbf{p}) , mais le champ bosonique des quasi-particules est traité quantiquement, au travers des opérateurs nombres d'occupation $\hat{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. Dans les observables quantiques de la forme $\hat{A} = \sum_k a_k \hat{n}_k$, comme $d\hat{\theta}/dt$, la moyenne a_k et la somme sur les modes quantiques k de Bogolioubov sont alors remplacées, selon un principe de correspondance, par une moyenne temporelle et une intégrale sur les trajectoires classiques (voir les équations (42)–(44)). Les équations cinétiques linéarisées sur les fluctuations $\delta\hat{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ comportent une partie de transport, selon le mouvement hamiltonien classique des quasi-particules, et une intégrale de collision, locale en position, qui décrit les processus d'interaction Beliaev-Landau à trois quasi-particules. Elles prennent la même forme que les équations de Boltzmann quantiques linéarisées sur la fonction de distribution semi-classique $n(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ des quasi-particules dans l'espace des phases. On les simplifie dans la limite séculaire $\omega_\alpha t_{\text{coll}} \gg 1$ et sous l'hypothèse d'un mouvement classique ergodique des quasi-particules. Cette hypothèse, selon laquelle les fluctuations $\delta\hat{n}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ moyennées sur une trajectoire ne dépendent plus que de l'énergie de cette dernière, ne tient que si le piège est complètement anisotrope; nous lui apportons dans ce cas une justification numérique soignée.

Les quantités cherchées D et t_0 , correctement adimensionnées, sont des fonctions universelles de $k_B T/\mu_{\text{TF}}$ où μ_{TF} est la limite Thomas-Fermi de μ_{GP} , et sont en particulier indépendantes des rapports $\omega_\alpha/\omega_\beta$ des pulsations de piégeage. Elles sont représentées sur la Fig. 5. Un sous-produit intéressant et plus directement mesurable de notre étude est le taux d'amortissement $\Gamma(\epsilon)$ des modes de Bogolioubov d'énergie ϵ dans le piège. À la température adimensionnée $k_B T/\mu_{\text{TF}}$ fixée, il est lui aussi décrit par une fonction universelle de ϵ/μ_{TF} indépendante des pulsations de piégeage, voir la Fig. 3. Ces résultats participent d'une nouvelle classe d'universalité, celle des pièges harmoniques complètement anisotropes, fort différente de celle théoriquement mieux défrichée des systèmes spatialement homogènes, et recevront, espérons-le, une confirmation expérimentale prochaine.

Remerciements

Nous remercions les membres de l'équipe « fermions froids » et « puces à atomes » du LKB, en particulier Christophe Salomon, pour d'utiles discussions.

Annexe A. Comportement de $\Gamma(\epsilon)$ à basse et à haute énergie

Pour obtenir les comportements aux limites (76) et (77) du taux d'amortissement $\Gamma(\epsilon)$ des modes de Bogolioubov dans un piège à l'approximation sécularo-ergodique, nous récrivons l'intégrale dans l'espace des phases (64) comme une moyenne

sur le potentiel chimique de Gross–Pitaevskii local $\mu_0 = g\rho_0(\mathbf{r})$ du taux d'amortissement $\Gamma_h(\epsilon, \mu_0, k_B T)$ des modes d'énergie ϵ dans un système homogène de densité μ_0/g et de température T :

$$\Gamma(\epsilon) = \int_0^{\mu_{\text{TF}}} d\mu_0 P_\epsilon(\mu_0) \Gamma_h(\epsilon, \mu_0, k_B T) \quad (91)$$

avec

$$P_\epsilon(\mu_0) \equiv \frac{1}{\rho(\epsilon)} \int \frac{d^3r d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \delta(\epsilon - \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})) \delta(\mu_0 - g\rho_0(\mathbf{r})) = \frac{4}{\pi\rho(\epsilon)} \frac{1}{(\hbar\bar{\omega})^3} \frac{\epsilon^2(\mu_{\text{TF}} - \mu_0)^{1/2}}{(\mu_0^2 + \epsilon^2)^{1/2}[(\mu_0^2 + \epsilon^2)^{1/2} + \mu_0]^{1/2}} \quad (92)$$

Dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$, nous remplaçons d'abord heuristiquement l'intégrande dans l'équation (91) par un équivalent à basse énergie, en utilisant :

$$P_\epsilon(\mu_0) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{3}{8\sqrt{2}} \frac{\epsilon^{1/2}(\mu_{\text{TF}} - \mu_0)^{1/2}}{\mu_{\text{TF}}^{1/2} \mu_0^{3/2}} \quad (93)$$

$$\frac{\hbar\Gamma_h(\epsilon, \mu_0, k_B T)}{2} \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} \epsilon \left(\frac{\mu_0 a^3}{g} \right)^{1/2} F(k_B T / \mu_0) \quad (94)$$

Dans l'équation (93), nous avons utilisé l'équation (34); le résultat (94) se trouve dans la référence [32], où la fonction F est calculée et étudiée. Comme $F(\theta) \underset{\theta \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3\pi^{3/2}}{4}\theta$, ceci fait apparaître dans l'équation (91) l'intégrale divergente $\epsilon^{3/2} \int_0^{\mu_{\text{TF}}} d\mu_0 / \mu_0^2$. On voit bien cependant qu'il faut couper cette intégrale à $\mu_0 > \epsilon$ pour que l'équivalent (94) reste utilisable, d'où la loi d'échelle $\Gamma(\epsilon) \approx \epsilon^{1/2}$, dominée par le bord du condensat piégé et très différente de la loi d'annulation linéaire du cas homogène. Pour trouver le préfacteur dans la loi, il suffit de faire le changement d'échelle $\mu_0 = \epsilon\nu_0$ dans l'intégrale et d'utiliser l'approximation de « haute température » de la référence [39] sur Γ_h , uniformément valable près du bord du condensat piégé,

$$\frac{\hbar\Gamma_h(\epsilon, \mu_0, k_B T)}{2} \underset{k_B T \gg \epsilon, \mu_0}{\sim} k_B T \left(\frac{\mu_0 a^3}{g} \right)^{1/2} \phi(\epsilon / \mu_0) \quad (95)$$

avant de passer à la limite $\epsilon \rightarrow 0$ sous le signe intégral, ce qui conduit à l'équation cherchée (76) avec²⁴

$$\mathcal{I} = \int_0^{+\infty} d\nu_0 \frac{\nu_0^{1/2} \phi(1/\nu_0)}{(1 + \nu_0^2)^{1/2} [\nu_0 + (1 + \nu_0^2)^{1/2}]^{1/2}} = 4,921\,208 \dots \quad (96)$$

Dans la limite $\epsilon \rightarrow +\infty$, nous utilisons le fait que, dans le cas homogène, le taux d'amortissement des quasi-particules se réduit au taux de collision $\rho_0\sigma v$ d'une particule de vitesse $v = (2\epsilon/m)^{1/2}$ avec les particules du condensat, de vitesse nulle et de densité ρ_0 , avec la section efficace $\sigma = 8\pi a^2$ des bosons indiscernables (c'est un processus de Beliaev) :

$$\frac{\hbar\Gamma_h(\epsilon, \mu_0, k_B T)}{2} \underset{\epsilon \rightarrow +\infty}{\sim} \mu_0 a \frac{(2m\epsilon)^{1/2}}{\hbar} \quad (97)$$

En utilisant de même le développement à haute énergie (35) de $\rho(\epsilon)$, nous trouvons que $P_\epsilon(\mu_0) \sim (8/\pi)(\mu_{\text{TF}} - \mu_0)^{1/2} \epsilon^{-3/2}$. Le report de ces équivalents dans l'équation (91) donne bien (77).

Références

- [1] R. Schmied, J.-D. Bancal, B. Allard, M. Fadel, V. Scarani, P. Treutlein, N. Sangouard, Bell correlations in a Bose–Einstein condensate, *Science* 352 (2016) 441.
- [2] W. Muessel, H. Strobel, D. Linnemann, D.B. Hume, M.K. Oberthaler, Scalable spin squeezing for quantum-enhanced magnetometry with Bose–Einstein condensates, *Phys. Rev. Lett.* 113 (2014) 103004.
- [3] T. Berrada, S. van Frank, R. Bücker, T. Schumm, J.-F. Schaff, J. Schmiedmayer, Integrated Mach-Zehnder interferometer for Bose–Einstein condensates, *Nat. Commun.* 4 (2013) 2077.
- [4] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, E.A. Cornell, Observation of Bose–Einstein condensation in a dilute atomic vapor, *Science* 269 (1995) 198.

²⁴ En pratique, la fonction ϕ se déduit de l'équation (57) en effectuant l'approximation de champ classique $1 + \bar{n}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \simeq \bar{n}(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \simeq k_B T / \epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{q})$. Dans le calcul numérique de \mathcal{I} , effectué en prenant $\tilde{\epsilon} = 1/\nu_0$ comme variable d'intégration, on réduit l'effet de la troncature numérique à l'aide du développement asymptotique $\phi(\tilde{\epsilon}) \underset{\tilde{\epsilon} \rightarrow +\infty}{=} 4 \left(\frac{2\pi}{\tilde{\epsilon}} \right)^{1/2} \left[2 \ln \frac{\tilde{\epsilon}}{2} + \frac{1 - \ln(\tilde{\epsilon}/2)}{\tilde{\epsilon}} + \frac{23 + 6 \ln(\tilde{\epsilon}/2)}{8\tilde{\epsilon}^2} + O\left(\frac{\ln \tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}^3}\right) \right]$, qui corrige et améliore celui de l'équation (35) de la référence [39].

- [5] K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, W. Ketterle, Bose–Einstein condensation in a gas of sodium atoms, *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995) 3969.
- [6] F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, S. Stringari, Theory of Bose–Einstein condensation in trapped gases, *Rev. Mod. Phys.* 71 (1999) 463.
- [7] H. Deng, G. Weihs, C. Santori, J. Bloch, Y. Yamamoto, Condensation of semiconductor microcavity exciton polaritons, *Science* 298 (2002) 199.
- [8] J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J.M.J. Keeling, F.M. Marchetti, M.H. Szymańska, R. André, J.L. Staehli, V. Savona, P.B. Littlewood, B. Deveaud, L.S. Dang, Bose–Einstein condensation of exciton polaritons, *Nature* 443 (2006) 409.
- [9] A. Amo, J. Lefrère, S. Pigeon, C. Adrados, C. Ciuti, I. Carusotto, R. Houdré, E. Giacobino, A. Bramati, Superfluidity of polaritons in semiconductor microcavities, *Nat. Phys.* 5 (2009) 805.
- [10] M. Alloing, M. Beian, M. Lewenstein, D. Fuster, Y. González, L. González, R. Combescot, M. Combescot, F. Dubin, Evidence for a Bose–Einstein condensate of excitons, *Europhys. Lett.* 107 (2014) 10012.
- [11] D. Jaksch, C.W. Gardiner, K.M. Gheri, P. Zoller, Quantum kinetic theory. IV. Intensity and amplitude fluctuations of a Bose–Einstein condensate at finite temperature including trap loss, *Phys. Rev. A* 58 (1998) 1450.
- [12] R. Graham, Decoherence of Bose–Einstein condensates in traps at finite temperature, *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 5262.
- [13] A.B. Kuklov, J.L. Birman, Orthogonality catastrophe and decoherence of a confined Bose–Einstein condensate at finite temperature, *Phys. Rev. A* 63 (2000) 013609.
- [14] A. Sinatra, Y. Castin, E. Witkowska, Nondiffusive phase spreading of a Bose–Einstein condensate at finite temperature, *Phys. Rev. A* 75 (2007) 033616.
- [15] A. Sinatra, Y. Castin, Genuine phase diffusion of a Bose–Einstein condensate in the microcanonical ensemble: a classical field study, *Phys. Rev. A* 78 (2008) 053615.
- [16] A. Sinatra, Y. Castin, E. Witkowska, Coherence time of a Bose–Einstein condensate, *Phys. Rev. A* 80 (2009) 033614.
- [17] A. Sinatra, Y. Castin, Spatial and temporal coherence of a Bose-condensed gas, in: M. Modugno, A. Bramati (Eds.), *Physics of Quantum Fluids: New Trends and Hot Topics in Atomic and Polariton Condensates*, in: Springer Ser. Solid-State Sci., vol. 177, Springer, Berlin, 2013.
- [18] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, Brouillage thermique d'un gaz cohérent de fermions, *C. R. Phys.* 17 (2016) 789, <https://doi.org/10.1016/j.cry.2016.02.005>.
- [19] A.L. Gaunt, T.F. Schmidutz, I. Gotlibovych, R.P. Smith, Z. Hadzibabic, Bose–Einstein condensation of atoms in a uniform potential, *Phys. Rev. Lett.* 110 (2013) 200406.
- [20] P.O. Fedichev, G.V. Shlyapnikov, J.T.M. Walraven, Damping of low-energy excitations of a trapped Bose–Einstein condensate at finite temperatures, *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998) 2269.
- [21] A. Sinatra, Y. Castin, E. Witkowska, Limit of spin squeezing in trapped Bose–Einstein condensates, *Europhys. Lett.* 102 (2013) 40001.
- [22] M. Fliesser, A. Csordás, R. Graham, P. Szépfalussy, Classical quasiparticle dynamics in trapped Bose condensates, *Phys. Rev. A* 56 (1997) 4879.
- [23] M. Fliesser, R. Graham, Classical quasiparticle dynamics and chaos in trapped Bose condensates, *Physica D* 131 (1999) 141.
- [24] Y. Castin, R. Dum, Low temperature Bose–Einstein condensates in time dependent traps: beyond the $U(1)$ -symmetry breaking approach, *Phys. Rev. A* 57 (1998) 3008.
- [25] J.M. Deutsch, Quantum statistical mechanics in a closed system, *Phys. Rev. A* 43 (1991) 2046.
- [26] M. Srednicki, Chaos and quantum thermalization, *Phys. Rev. E* 50 (1994) 888.
- [27] M. Rigol, V. Dunjko, M. Olshanii, Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems, *Nature* 452 (2008) 854.
- [28] T.D. Lee, C.N. Yang, Many-body problem in quantum mechanics and quantum statistical mechanics, *Phys. Rev.* 105 (1957) 1119.
- [29] L. Carr, Y. Castin, G. Shlyapnikov, Achieving a BCS transition in an atomic Fermi gas, *Phys. Rev. Lett.* 92 (2004) 150404.
- [30] E.M. Wright, D.F. Walls, J.C. Garrison, Collapses and revivals of Bose–Einstein condensates formed in small atomic samples, *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996) 2158.
- [31] Y. Castin, J. Dalibard, Relative phase of two Bose–Einstein condensates, *Phys. Rev. A* 55 (1997) 4330.
- [32] S. Giorgini, Damping in dilute Bose gases: a mean-field approach, *Phys. Rev. A* 57 (1998) 2949.
- [33] P.A. Willems, K.G. Libbrecht, Creating long-lived neutral atom traps in a cryogenic environment, *Phys. Rev. A* 51 (1995) 1403.
- [34] The ALPHA collaboration, Confinement of anti-hydrogen for 1000 seconds, *Nat. Phys.* 7 (2011) 558.
- [35] A. Sinatra, Y. Castin, Phase dynamics of Bose–Einstein condensates: losses versus revivals, *Eur. Phys. J. D* 4 (1998) 247.
- [36] Z. Shotan, O. Machtey, S. Kokkelmans, L. Khaykovich, Three-body recombination at vanishing scattering lengths in an ultracold Bose gas, *Phys. Rev. Lett.* 113 (2014) 053202.
- [37] M. Egorov, B. Opanchuk, P. Drummond, B.V. Hall, P. Hannaford, A.I. Sidorov, Measurement of s-wave scattering lengths in a two-component Bose–Einstein condensate, *Phys. Rev. A* 87 (2013) 053614.
- [38] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1988.
- [39] P.O. Fedichev, G.V. Shlyapnikov, Finite-temperature perturbation theory for a spatially inhomogeneous Bose-condensed gas, *Phys. Rev. A* 58 (1998) 3146.