



Spatial networks / Réseaux spatiaux

Foreword



Networks (or graphs) were for a long time the subject of many studies in mathematics, mathematical sociology, computer science, and quantitative geography. In particular, in the case of random graphs, the first and important model was proposed by Erdos and Renyi at the end of the 1950s and triggered a wealth of studies, essentially in mathematics. The interest in networks however exploded thanks to Watts and Strogatz, in 1998, who extracted stylized facts from real-world networks and proposed a simple new model of random networks. This new interest in networks was reinforced by the publication in 1999 of an article by Albert and Barabasi on the (then unexpected) existence of strong degree fluctuations in real-world networks, which were shown afterwards to have a huge impact on processes taking place on these networks. In most of these studies, an aspect was however completely neglected. Indeed, in many cases the nodes and edges of these networks are actually embedded in space: in social networks, most of individuals have their friends and relatives in their neighborhood; power grids and transportation networks depend obviously on distance; some communication networks have devices with a short radio range; in neural networks, the length of axons has a cost; the spread of contagious diseases is not uniform across territories. All these examples show that space is relevant and topology alone does not contain all the information about these graphs. Essentially, the dramatic consequence of space on networks is that there is some cost associated with the length of edges, which in turn has critical effects on the topological structure of these networks: the presence of a long link needs to be compensated by some advantage. Also spatial constraints severely limit the degree of a node, which in general prohibits the appearance of hubs.

The ubiquity of spatial networks implies that characterizing and understanding their structure and evolution is crucial for many different fields ranging from engineering, geography, urbanism to biology and epidemiology. This large spectrum of applications makes it also difficult to address all aspects, and the papers in this issue represent a small selection on some specific but, we believe, important subjects. The main goal here is to expose the current state of our understanding of how the spatial constraints affect the structure and properties of these networks. We will address topics such as the effect of congestion, interdependence, existence of boundaries, etc. We tried to include many important fields, from mathematics, statistical physics, to engineering and biology.

Mathematical models were particularly relevant for communication networks studies where probability and stochastic geometry played an important role. There is a large number of theoretical studies with practical applications to communication networks, and it is in this context that the paper by Dettmann et al. takes place. The authors discuss models for wireless networks communications, where the balance between mathematical tractability and accuracy is of fundamental importance. The original model considered here is the random geometric graph, studied for almost 60 years, and of ongoing interest. In this random geometric graph, two main ingredients are needed: a point process and a connection rule that allows us to construct links between the nodes. After reviewing briefly point processes (in a language understandable for non-experts), Dettmann et al. discuss different choices for the connection rule and their consequences on the network structure. Other important effects such as temporal fluctuations of links, mobility of nodes, interference, or the presence boundaries are also discussed.

Along mathematical studies of graphs, statistical physicists also considered models of spatial networks and their properties. In our paper, various models for spatial networks are studied under the unifying theme of transitions. The nature of these transitions differs in general from the usual percolation-type one in the archetypical Erdős–Rényi random graph. In particular, we discuss results about ‘topological’ transitions where the graph structure characterized by a given indicator (such as the average shortest path) changes from a spatial to a non-spatial behavior when a control parameter is varied. Also, when the structure of the graph is modified, we can observe dramatic changes of the spatial patterns of shortest paths, in particular with a rearrangement of bottlenecks – nodes that are fundamental for these shortest paths. Also, we will discuss the effect of congestion and fluctuations in the structure of optimal networks (which are obtained by maximizing a

functional of the graph). In particular, congestion can induce a transition towards a decentralized structure and fluctuations can induce the presence of numerous loops.

Physicists also uncovered and studied the importance of the interdependence between different networks. The motivation came essentially from the study of the coupling between a power grid and a communication network, but interdependence is also important for systems such as the human brain and in finance. Using simplified models, it was shown for these systems that the interdependence implies that when components in one system fail, they lead to failures in the same or other systems. This can then lead to additional failures, finally resulting in a long cascade that can cripple the entire system. In other words, interdependence usually increases the fragility of the system. Shekhtman et al. present a review of novel results about the effect of interdependence in spatial networks and how cascading processes are affected by spatial embedding. They show that, in general, interdependent spatial networks are more vulnerable and are more likely to undergo an abrupt failure transition than interdependent non-spatial networks in which spatial correlations are absent. Spatial properties of infrastructures therefore decrease their resilience to failures. Shekhtman et al. also discuss results about the recovery in spatial networks where failed nodes can recover after some given time and the existence of a metastable region where the system can spontaneously go from the functional to the failed state (or vice-versa).

As we discussed above, spatial networks are extremely relevant for biological systems. The first example discussed here by Katifori is about the structure of venation patterns in leaves. The leaf vascular network is a spatially embedded transport network that shares functional requirements and developmental constraints with other biological transport networks such as animal vasculature for example. Essentially, leaves are the energy factories of plants and through evolution improved their efficiency and robustness. Katifori introduces for non-experts the main components for understanding these biological structures that irrigate the leaf, distribute water and nutrients and collect the products of photosynthesis. She will also present an overview of the evolution of these structures in terms of network optimization and she will analyze aspects of the physics of flows in these patterns. In particular, Katifori discusses the appearance of traits common to many biological transport systems such as hierarchy where broad vessels achieve transport over large distances and smaller vessels for diffusion at a smaller scale. Also, the presence of loops provides robustness to damage and optimal function in the presence of noise. Katifori notes the very interesting point that these considerations also apply to engineered networks such as road networks or other natural systems. In this respect, leaves could serve as a model to inspire new engineering paradigms for man-made distribution systems.

The other biological system considered in this issue is the brain, discussed by Bassett and Stiso. The brain is a complex organ characterized by heterogeneous connectivity between various units. Space is naturally relevant for this system: regions that are spatially closer have a larger probability of being connected than remote regions as longer axons are costlier in terms of material and energy. As we know, this organ displays a large variety of dynamics and functions, and then a fascinating set of questions relies on understanding the relationship between the structure of the neural network and its various functions. Despite several important insights into healthy cognition and psychiatric disorders, it is however still unclear how the embedding in a 3-dimensional finite space affects the structure of this spatial network. After a simple presentation of how measures on the structure of the neural network are made, Bassett and Stiso give some clues about why space is fundamental for understanding this network and about the rules that control the wiring of the brain. In particular, they discuss the importance of wiring minimization, localization of modules and hierarchical topology for the organization of this system, as well as the effect of energy cost, evolution, and function on these properties.

These various fascinating studies demonstrate well the ubiquity of spatial networks and also the importance of interdisciplinary studies for understanding our society and nature. Indeed, most of the studies presented here are building bridges across various domains ranging from mathematics to statistical physics, engineering, and biology, and we hope that this thematic issue will be thought-provoking and able to trigger the interest of the reader in this largely interdisciplinary and very active field of research.

Saclay, 8 October 2018

Avant-propos

Les réseaux (ou graphes) ont longtemps fait l'objet de nombreuses études en mathématiques, en sociologie mathématique, en informatique et en géographie quantitative. En particulier, dans le cas des graphes aléatoires, le premier modèle important a été proposé par Erdos et Renyi à la fin des années 1950 et a suscité par la suite de très nombreuses études, essentiellement en mathématiques. L'intérêt pour les réseaux a toutefois explosé grâce à Watts et Strogatz en 1998, qui ont extrait des faits stylisés de réseaux réels et ont proposé un nouveau modèle simple de réseaux aléatoires. Ce nouvel intérêt pour les réseaux a été renforcé par la publication, en 1999, d'un article d'Albert et Barabasi sur l'existence (alors inattendue) de fortes fluctuations du degré dans les réseaux réels, et dont on a compris par la suite l'impact considérable sur les processus qui interviennent sur ces réseaux.

Dans la plupart de ces études, un aspect a toutefois été complètement négligé. En effet, on s'est rendu compte que dans de nombreux cas, les nœuds et les liens de ces réseaux sont intégrés dans l'espace : dans les réseaux sociaux, la plupart des gens ont leurs amis et proches dans leur voisinage ; les réseaux électriques et les réseaux de transport dépendent évidemment de la distance ; dans les réseaux de communication, les dispositifs ont une courte portée radio ; dans les réseaux de neurones, la longueur des axones a un coût ; enfin, la propagation des maladies contagieuses n'est en général

pas uniforme dans l'espace. Tous ces exemples montrent que l'espace est pertinent et que la topologie à elle seule ne contient pas toutes les informations relatives à ces graphes. La conséquence essentielle de l'espace sur les réseaux est que la longueur des liens a un coût, ce qui entraîne également des effets critiques sur la structure topologique de ces réseaux : la présence d'un lien long doit être compensée par un avantage. De plus, les contraintes spatiales limitent sévèrement le degré d'un nœud, ce qui interdit généralement l'apparition de « hubs » (c'est-à-dire des nœuds avec un degré beaucoup plus grand que la moyenne).

L'omniprésence des réseaux spatiaux montre qu'il est crucial de caractériser et de comprendre leur structure et leur évolution pour aborder de nombreux domaines allant de l'ingénierie à la géographie, en passant par l'urbanisme, la biologie et l'épidémiologie. Ce large éventail d'applications complique également la prise en compte de tous les aspects, et les articles de ce numéro représentent une petite sélection de sujets spécifiques, mais que nous pensons être importants. L'objectif principal ici est d'exposer l'état actuel de notre compréhension de la manière dont les contraintes spatiales affectent la structure et les propriétés de ces réseaux. Nous aborderons des sujets tels que l'effet de la congestion, l'interdépendance, la présence de frontières, etc. Nous avons essayé d'inclure de nombreux domaines importants, des mathématiques à la physique statistique, en passant par l'ingénierie et la biologie.

Les modèles mathématiques sont particulièrement pertinents pour les réseaux de communication, où les probabilités et la géométrie stochastique jouent un rôle important. Il existe de nombreuses études théoriques ayant des applications pratiques dans les réseaux de communication, et c'est dans ce contexte que l'article de Dettmann et al. se situe. Les auteurs y discutent des modèles pour les réseaux sans fil dans lesquels l'équilibre entre la possibilité de faire des calculs analytiques et le réalisme est d'une importance fondamentale. Le modèle original considéré ici est le graphe géométrique aléatoire, étudié depuis près de 60 ans et qui suscite toujours un grand intérêt. Dans ce dernier, deux ingrédients principaux sont nécessaires : un processus générant les nœuds et une règle de connexion qui permet de créer des liens entre ceux-ci. Après avoir passé brièvement en revue les processus ponctuels (dans un langage compréhensible aux non-experts), Dettmann et al. discutent les différents choix possibles pour la règle de connexion et leurs conséquences sur la structure du réseau. D'autres effets importants tels que les fluctuations temporelles des liens, la mobilité des nœuds, les interférences et les effets de bord sont également abordés dans cet article.

Parallèlement aux études mathématiques des graphes, les physiciens statisticiens ont également examiné des modèles de réseaux spatiaux et leurs propriétés. Dans notre article, différents modèles de réseaux spatiaux sont étudiés sous le thème unificateur des transitions. La nature de ces transitions diffère en général de la percolation, que l'on peut observer pour le graphe aléatoire d'Erdős-Rényi. Nous discuterons en particulier les résultats concernant les transitions « topologiques », pour lesquelles la structure du graphe, caractérisée par un indicateur donné (tel que le plus court chemin moyen), passe d'un comportement spatial à un comportement non spatial lorsqu'on fait varier le paramètre de contrôle. De plus, lorsque la structure du graphe est modifiée, nous pouvons observer des changements spectaculaires dans les configurations spatiales des plus courts chemins, en particulier avec un réaménagement des goulots d'étranglement – les nœuds qui sont fondamentaux pour ces plus courts chemins. Ensuite nous présenterons des résultats sur l'effet de la congestion et des fluctuations sur la structure des réseaux optimaux (obtenus en maximisant une fonctionnelle du graphe). En particulier, la congestion peut induire une transition vers une structure décentralisée et les fluctuations peuvent induire la présence de nombreuses boucles.

Les physiciens ont également compris et étudié l'importance de l'interdépendance des différents réseaux. La motivation provenait essentiellement de l'étude du couplage entre un réseau électrique et un réseau de communication, mais l'interdépendance est aussi importante pour des systèmes tels que le cerveau humain et la finance. À l'aide de modèles simplifiés, il a été démontré que l'interdépendance implique que la faille de composants d'un système peut entraîner des défaillances dans celui-ci ou dans d'autres systèmes. Cela peut alors conduire à des défaillances supplémentaires, qui aboutissent finalement à une longue cascade pouvant paralyser le système tout entier. En d'autres termes, l'interdépendance accroît généralement la fragilité du système. Shekhtman et al. présentent une revue de résultats nouveaux concernant l'effet de l'interdépendance dans les réseaux spatiaux et la manière dont les processus en cascade sont affectés par l'intégration spatiale. Ils montrent qu'en général, les réseaux spatiaux interdépendants sont plus vulnérables et risquent davantage de subir une transition de défaillance abrupte que les réseaux non spatiaux interdépendants, pour lesquels les corrélations spatiales sont absentes. Les propriétés spatiales des infrastructures diminuent donc leur résilience aux pannes. Shekhtman et al. discutent également des résultats concernant la guérison dans les réseaux spatiaux (pour lesquels les nœuds défaillants peuvent fonctionner de nouveau après un certain temps) et l'existence d'une région métastable dans laquelle le système peut passer spontanément de l'état fonctionnel à l'état défaillant (ou inversement).

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les réseaux spatiaux sont extrêmement pertinents pour les systèmes biologiques. Le premier exemple présenté ici par Katifori concerne la structure des veines dans les feuilles. Le réseau vasculaire foliaire est un réseau de transport spatialement intégré qui partage les exigences fonctionnelles et les contraintes de développement avec d'autres réseaux de transport biologiques, tels que le système vasculaire animal. Les feuilles sont essentiellement les usines à énergie des plantes et, grâce à l'évolution, ont vu leur efficacité et leur robustesse s'améliorer. Katifori présente aux non-experts les principaux éléments permettant de comprendre les structures biologiques qui irriguent les feuilles, distribuent de l'eau et des nutriments, et collectent les produits de la photosynthèse. Elle présente également un aperçu de l'évolution de ces structures en termes d'optimisation du réseau et analyse certains aspects de la physique des flots dans ces modèles. Katifori discute aussi l'apparition de traits communs à de nombreux systèmes de transport biologique, tels que la hiérarchie, où les grandes artères effectuent le transport sur de grandes distances et les vaisseaux plus

petits assurent une diffusion à plus petite échelle. De plus, elle montre que la présence de boucles offre une robustesse aux dommages et un fonctionnement optimal en présence de bruit. Katifori note un point très intéressant, à savoir que ces considérations s'appliquent également aux réseaux techniques tels que les réseaux routiers ou d'autres systèmes naturels. À cet égard, les feuilles pourraient servir de modèle pour inspirer de nouveaux paradigmes en ingénierie des systèmes de distribution artificiels.

L'autre système biologique considéré dans ce volume par Bassett et Stiso est le réseau neuronal constituant le cerveau. Le cerveau est un organe complexe caractérisé par une connectivité hétérogène entre différentes unités. L'espace est naturellement pertinent pour ce système : les régions les plus proches dans l'espace ont plus de chances d'être connectées que les régions éloignées, car les axones plus longs sont plus coûteux en matière et en énergie. Comme nous le savons, cet organe présente une grande variété de dynamiques et de fonctions, et un ensemble de questions fascinantes repose alors sur la relation entre la structure du réseau neuronal et ses différentes fonctions. Malgré plusieurs découvertes importantes au sujet du fonctionnement normal et des troubles cognitifs, il est encore difficile de comprendre comment l'intégration dans un espace fini en trois dimensions affecte la structure de ce réseau spatial. Après avoir expliqué simplement comment sont effectuées les mesures de la structure neuronale, Bassett et Stiso analysent ce pourquoi l'espace est fondamental pour comprendre ce réseau ainsi que les règles qui contrôlent le câblage du cerveau. Elles discutent en particulier l'importance de la minimisation de la longueur totale du câblage, la localisation des modules, l'organisation hiérarchique de ce système, ainsi que l'effet de l'énergie, de l'évolution et des fonctions cognitives sur ces propriétés.

Ces différentes études fascinantes démontrent bien l'omniprésence des réseaux spatiaux et l'importance des études interdisciplinaires pour comprendre notre société et la nature. En effet, la plupart des études présentées ici jettent des ponts entre différents domaines allant des mathématiques à la physique statistique, à l'ingénierie et à la biologie. Nous espérons que ce numéro thématique suscitera la réflexion et l'intérêt du lecteur pour ce domaine de recherche interdisciplinaire très actif.

Saclay, 8 octobre 2018

Marc Barthelemy^{a,b,*}

^aInstitut de physique théorique, CEA, CNRS URA 2306, 91191 Gif-sur-Yvette, France

^bCAMS (CNRS/EHESS), 54, boulevard Raspail, 75006 Paris, France

E-mail address: marc.barthelemy@ipht.fr

Available online 15 October 2018

* Correspondence to: Institut de physique théorique, CEA, CNRS URA 2306, 91191 Gif-sur-Yvette, France.