



INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus

Physique

Yvan Castin et Hadrien Kurkjian

Branche d'excitation collective du continuum dans les gaz de fermions condensés par paires : étude analytique et lois d'échelle

Volume 21, issue 3 (2020), p. 253-310.

<<https://doi.org/10.5802/crphys.1>>

© Académie des sciences, Paris and the authors, 2020.

Some rights reserved.

 This article is licensed under the
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION 4.0 INTERNATIONAL LICENSE.
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



*Les Comptes Rendus. Physique sont membres du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte*
www.centre-mersenne.org



Article de recherche / *Research Article*

Branche d'excitation collective du continuum dans les gaz de fermions condensés par paires : étude analytique et lois d'échelle

Collective excitation branch in the continuum of pair-condensed Fermi gases : analytical study et scaling laws

Yvan Castin^{*, a} et Hadrien Kurkjian^b

^a Laboratoire Kastler Brossel, ENS-Université PSL, CNRS, Université de la Sorbonne et Collège de France, 24 rue Lhomond, 75231 Paris, France

^b TQC, Universiteit Antwerpen, Universiteitsplein 1, B-2610 Anvers, Belgique

Courriels: yvan.castin@kb.ens.fr (Y. Castin), Hadrien.Kurkjian@uantwerpen.be (H. Kurkjian)

Résumé. Les gaz de fermions de spin 1/2 non polarisés condensés par paires présentent une branche d'excitation collective dans leur continuum de paire brisée (V.A. Andrianov, V.N. Popov, 1976). Nous en effectuons une étude poussée à température nulle, à partir de l'équation aux énergies propres déduite de la théorie BCS dépendant du temps linéarisée, puis prolongée analytiquement au demi-plan complexe inférieur à travers sa ligne de coupure, en calculant à la fois la relation de dispersion et les poids spectraux (résidus de quasi-particule) de la branche. Dans le cas des supraconducteurs dits BCS où l'effet du réseau cristallin est remplacé par une interaction attractive à courte portée, mais où l'interaction de Coulomb doit pouvoir être prise en compte, nous nous restreignons à la limite de couplage faible $\Delta/\mu \rightarrow 0^+$ (Δ est le paramètre d'ordre, μ le potentiel chimique) et aux nombres d'onde $q = O(1/\xi)$ où ξ est la taille d'une paire; quand l'énergie complexe z_q est exprimée en unités de Δ et q en unités de $1/\xi$, la branche suit une loi universelle que nous déterminons, insensible à l'interaction de Coulomb. Dans le cas des atomes froids dans le raccordement CBE-BCS, il ne reste qu'une interaction de contact mais le couplage Δ/μ peut prendre des valeurs arbitraires, et nous étudions la branche à tout nombre d'onde. En couplage faible, nous prédisons trois échelles, celle déjà mentionnée $q \approx 1/\xi$, celle $q \approx (\Delta/\mu)^{-1/3}/\xi$ où la partie réelle de la relation de dispersion admet un minimum et celle $q \approx (\mu/\Delta)/\xi \approx k_F$ (k_F est le nombre d'onde de Fermi) où la branche atteint le bord de son domaine d'existence. Près du point d'annulation du potentiel chimique du côté BCS, $\mu/\Delta \rightarrow 0^+$, où $\xi \approx k_F$, nous trouvons les deux échelles $q \approx (\mu/\Delta)^{1/2}/\xi$ et $q \approx 1/\xi$. Dans tous les cas, la branche est de limite 2Δ et de départ quadratique en $q = 0$. Ces résultats ont été obtenus pour $\mu > 0$, où l'équation aux énergies propres admet au moins deux points de branchement $\epsilon_a(q)$ et $\epsilon_b(q)$ sur l'axe réel positif, avec un

* Auteur correspondant.

prolongement analytique par l'intervalle $[\epsilon_a(q), \epsilon_b(q)]$. Nous trouvons de nouvelles branches du continuum en prolongeant analytiquement à travers $[\epsilon_b(q), +\infty[$ ou même, pour q assez faible, où existe un troisième point de branchement réel positif $\epsilon_c(q)$, à travers $[\epsilon_b(q), \epsilon_c(q)]$ et $[\epsilon_c(q), +\infty[$. Du côté CBE $\mu < 0$ non étudié auparavant, où existe un seul point de branchement réel positif $\epsilon_a(q)$, nous trouvons également de nouvelles branches sous la ligne de coupure $[\epsilon_a(q), +\infty[$. Pour $\mu > 0$, certaines de ces nouvelles branches présentent à faible nombre d'onde un comportement exotique hypoacoustique $z_q \approx q^{3/2}$ ou hyperacoustique $z_q \approx q^{4/5}$. Pour $\mu < 0$, nous trouvons une branche hyperacoustique et une branche non hypoacoustique, de limite 2Δ et de départ quadratique purement réel en $q = 0$ pour $\Delta/|\mu| < 0,222$.

Abstract. The pair-condensed unpolarized spin-1/2 Fermi gases have a collective excitation branch in their pair-breaking continuum (V.A. Andrianov, V.N. Popov, 1976). We study it at zero temperature, with the eigenenergy equation deduced from the linearized time-dependent BCS theory and extended analytically to the lower half complex plane through its branch cut, calculating both the dispersion relation and the spectral weights (quasiparticle residues) of the branch. In the case of BCS superconductors, so called because the effect of the ion lattice is replaced by a short-range electron-electron interaction, we also include the Coulomb interaction and we restrict ourselves to the weak coupling limit $\Delta/\mu \rightarrow 0^+$ (Δ is the order parameter, μ the chemical potential) and to wavenumbers $q = O(1/\xi)$ where ξ is the size of a pair; when the complex energy z_q is expressed in units of Δ and q in units of $1/\xi$, the branch follows a universal law insensitive to the Coulomb interaction. In the case of cold atoms in the BEC-BCS crossover, only a contact interaction remains, but the coupling strength Δ/μ can take arbitrary values, and we study the branch at any wave number. At weak coupling, we predict three scales, that already mentioned $q \approx 1/\xi$, that $q \approx (\Delta/\mu)^{-1/3}/\xi$ where the real part of the dispersion relation has a minimum and that $q \approx (\mu/\Delta)/\xi \approx k_F$ (k_F is the Fermi wave number) where the branch reaches the edge of its existence domain. Near the point where the chemical potential vanishes on the BCS side, $\mu/\Delta \rightarrow 0^+$, where $\xi \approx k_F$, we find two scales $q \approx (\mu/\Delta)^{1/2}/\xi$ and $q \approx 1/\xi$. In all cases, the branch has a limit 2Δ and a quadratic start at $q = 0$. These results were obtained for $\mu > 0$, where the eigenenergy equation admits at least two branching points $\epsilon_a(q)$ and $\epsilon_b(q)$ on the positive real axis, and for an analytic continuation through the interval $[\epsilon_a(q), \epsilon_b(q)]$. We find new continuum branches by performing the analytic continuation through $[\epsilon_b(q), +\infty[$ or even, for q low enough, where there is a third real positive branching point $\epsilon_c(q)$, through $[\epsilon_b(q), \epsilon_c(q)]$ and $[\epsilon_c(q), +\infty[$. On the BEC side $\mu < 0$ not previously studied, where there is only one real positive branching point $\epsilon_a(q)$, we also find new collective excitation branches under the branch cut $[\epsilon_a(q), +\infty[$. For $\mu > 0$, some of these new branches have a low-wavenumber exotic hypoacoustic $z_q \approx q^{3/2}$ or hyperacoustic $z_q \approx q^{4/5}$ behavior. For $\mu < 0$, we find a hyperacoustic branch and a nonhypoacoustic branch, with a limit 2Δ and a purely real quadratic start at $q = 0$ for $\Delta/|\mu| < 0.222$.

Mots-clés. Gaz de fermions, Condensat de paires, Modes collectifs, Brisure de paire, Supraconducteur, Atomes froids, Théorie BCS.

Keywords. Fermi gases, Pair condensate, Collective modes, Pair breaking, Superconductor, Ultracold atoms, BCS theory.

Manuscrit reçu le 26 juillet 2019, révisé le 25 octobre 2019, accepté le 5 novembre 2019.

1. Introduction et position du problème

Nous considérons d'abord un gaz tridimensionnel de fermions neutres de spin 1/2 en interaction attractive dans l'onde s à courte portée, spatialement homogène et pris à la limite thermodynamique, en d'autres termes de densité non nulle et de taille infinie. Le gaz est non polarisé, c'est-à-dire qu'il comporte le même nombre de particules dans chaque état de spin \uparrow et \downarrow , et est préparé à température nulle. Comme le prédit la théorie BCS, tous les fermions s'assemblent alors sous l'effet de l'attraction entre \uparrow et \downarrow en des paires liées $\uparrow\downarrow$ de moment orbital nul, ces paires constituant de plus un condensat (avec une longueur de cohérence de paire infinie) et un superfluide.

Nous nous intéressons ici à des modes d'excitation collective du système et à leur relation de dispersion en fonction de leur vecteur d'onde \mathbf{q} . Nous entendons par excitation collective une mise en oscillation globale du gaz mettant en jeu des variables collectives comme la densité ρ ou le paramètre d'ordre complexe Δ du gaz, ces fonctions acquérant dans un mode propre une dépendance spatio-temporelle $\rho(\mathbf{r}, t)$ et $\Delta(\mathbf{r}, t)$ au vecteur d'onde \mathbf{q} et à la pulsation réelle $\omega_{\mathbf{q}}$ ou complexe $z_{\mathbf{q}}/\hbar$ (si le mode est amorti). Il s'agit ici de modes linéaires, associés à un faible écart

de ρ et Δ à leur valeur dans l'état fondamental ou, en pratique, à une réponse linéaire du gaz à une faible perturbation extérieure. Nous excluons toute excitation ne conservant pas le nombre de fermions dans chaque état de spin, du genre couplage cohérent de Rabi entre \uparrow et \downarrow .

Pour mieux préciser l'objet de notre étude, rappelons que les excitations d'un gaz de fermions appariés peuvent se ranger en gros dans deux catégories. Les excitations de basse énergie ont un quantum $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ petit devant l'énergie de liaison E_0 d'une paire. Elles affectent alors seulement le mouvement du centre de masse des paires, celles-ci se mettant à osciller en gardant leur intégrité : il s'agit dans ce cas d'une excitation acoustique du gaz, les modes faisant partie d'une branche sonore de départ linéaire, $\omega_{\mathbf{q}} \sim cq$ lorsque $q \rightarrow 0$, c étant la vitesse du son. Ce type d'excitation est partagé par tous les superfluides sièges d'interaction à courte portée, indépendamment de la statistique quantique des particules constituantes. Mais seul le départ de la relation de dispersion, au mieux $q\xi \lesssim 1$ où ξ est la taille d'une paire liée, est universel dans notre système ; la partie non universelle a fait l'objet d'une étude très détaillée dans la référence [1]. Les excitations de haute énergie ont un quantum $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ supérieur à E_0 : comme rien ne l'empêche énergétiquement, les paires seront brisées en deux fermions libres \uparrow et \downarrow , l'un de vecteur d'onde $\mathbf{q}/2 + \mathbf{k}$ et l'autre de vecteur d'onde $\mathbf{q}/2 - \mathbf{k}$ puisque l'excitation dépose un quantum de quantité de mouvement bien défini $\hbar\mathbf{q}$; en revanche, le vecteur d'onde relatif (ou interne à la paire) \mathbf{k} n'est pas contraint.¹ Le coût énergétique d'une telle excitation par brisure de paire est donc, dans la théorie BCS, $E_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{q})} = \epsilon_{\mathbf{q}/2+\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{q}/2-\mathbf{k}}$ où $k \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}}$ est la relation de dispersion des quasi-particules BCS, qui présente une bande interdite de largeur $E_0/2$ par définition de E_0 . Comme \mathbf{k} peut décrire \mathbb{R}^3 , le spectre d'excitation $E_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{q})}$ décrit un continuum à \mathbf{q} fixé, dont le bord inférieur est $\geq E_0$ et qui s'étend jusqu'à $+\infty$.

On pourrait croire qu'un tel continuum ne renferme aucun mode collectif et que l'intensité des fonctions de réponse du système à la pulsation $\omega > E_0/\hbar$ ne présente que des dépendances larges en ω , à l'exclusion de structures étroites comme une résonance lorentzienne $\propto |\hbar\omega - z_{\mathbf{q}}|^{-2}$ associée à un mode d'énergie complexe $z_{\mathbf{q}}$. Depuis le travail d'Andrianov et Popov [2], dans le régime d'interaction faible et à faible nombre d'onde, et sa généralisation récente au régime d'interaction et de nombre d'onde quelconque [3], nous savons que c'est le contraire qui se produit : tant que le potentiel chimique μ du gaz est > 0 , donc que le minimum $E_0/2$ de $k \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}}$ est atteint dans la théorie BCS en un nombre d'onde non nul $k_0 > 0$, le gaz de fermions présente bien, dans son continuum de paire brisée, une branche d'excitation collective $q \mapsto z_{\mathbf{q}}$ s'étendant sur tout l'intervalle $]0, 2k_0[$. Comme le mode collectif du continuum peut s'amortir par émission de paires brisées, son énergie est complexe, $\text{Im} z_{\mathbf{q}} < 0$; à faible nombre d'onde, $q \rightarrow 0$, $z_{\mathbf{q}}$ tend vers E_0 quadratiquement en q , le mode acquiert une pulsation propre de mieux en mieux définie et induit un pic lorentzien de plus en plus étroit dans les fonctions de réponse du système, ce qui en garantit l'observabilité [3].

La branche du continuum $q \mapsto z_{\mathbf{q}}$ de notre gaz de fermions n'a pas fait l'objet d'études analytiques approfondies, en dehors du régime de faible nombre d'onde $q \rightarrow 0$. Par exemple, on ne sait, pour une force d'interaction quelconque, jusqu'à quelle valeur de q s'étend la loi de variation quadratique de $z_{\mathbf{q}}$ précédemment mentionnée. Ou encore, l'étude numérique de la référence [3] suggère que, dans le régime d'interaction faible, la pulsation propre $\text{Re} z_{\mathbf{q}}/\hbar$ présente sur $]0, 2k_0[$ un minimum en $q = q_{\min}$, mais rien n'est dit sur la variation de q_{\min} avec la force des interactions. À nombre d'onde q fixé > 0 , on ne sait pas non plus si la relation de dispersion admet une loi limite simple lorsque la force des interactions tend vers zéro. Dans le régime d'interaction forte, au voisinage du point d'annulation du potentiel chimique ($\mu \rightarrow 0^+$) donc de disparition

¹En réalité, la brisure de paire à \mathbf{q} fixé se fait à partir du seuil d'énergie $\inf_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^{(\mathbf{q})}$, qui n'est autre que le bord du continuum défini plus loin.

dans son ensemble de la branche du continuum [3], on ne connaît pas analytiquement la forme de la relation de dispersion, ni les échelles de nombre d'onde qui la structurent. Par ailleurs, la branche du continuum $q \mapsto z_{\mathbf{q}}$ dans les références [2, 3] a été obtenue en effectuant sur l'équation aux valeurs propres des modes du système un prolongement analytique passant du demi-plan complexe supérieur ($\text{Im } z \geq 0$) au demi-plan inférieur ($\text{Im } z < 0$) par l'intervalle naturel séparant les deux premiers points de branchement $z = \epsilon_1 = E_0$ et $z = \epsilon_2$ de l'équation aux valeurs propres sur le demi-axe réel positif, même si ce fait est implicite dans la référence [2]. Que se passerait-il si l'on faisait un prolongement analytique en passant plutôt par l'intervalle $[\epsilon_2, +\infty[$ ou, dans le cas où il existe un troisième point de branchement $\epsilon_3 > \epsilon_2$, par les intervalles $[\epsilon_2, \epsilon_3]$ et $[\epsilon_3, +\infty[$? Pourrait-on découvrir ainsi d'autres branches du continuum? Pourrait-il même y avoir une branche du continuum pour $\mu < 0$, où les paires tendent à devenir bosoniques? Enfin, nous nous sommes limités pour l'instant aux gaz de fermions neutres, le système physique que nous avons en tête étant celui des atomes froids, qui a le bon goût de permettre un ajustement à volonté de la force des interactions par résonance de Feshbach magnétique [4–9]. Qu'en est-il des gaz d'électrons dans des supraconducteurs BCS, c'est-à-dire des supraconducteurs idéalisés, où l'effet du réseau cristallin et de ses phonons est modélisé par une interaction attractive à courte portée entre \uparrow et \downarrow ? Il faut ajouter à cette dernière l'interaction répulsive de Coulomb entre électrons, indépendante du spin et à longue portée, dont on sait qu'elle fait disparaître la branche acoustique [10]. Qu'en est-il alors de la branche du continuum? Dans la référence [2], l'équation aux valeurs propres sur la pulsation des modes a été modifiée pour tenir compte de l'interaction de Coulomb; il a alors été montré, dans la limite d'interaction faible $E_0 \ll \epsilon_F$ où ϵ_F est l'énergie de Fermi du gaz, que la branche du continuum survit et que sa relation de dispersion complexe reste la même qu'en présence de la seule interaction à courte portée, du moins tant que $q\xi \lesssim 1$ donc que la relation de dispersion reste approximativement quadratique. Peut-on, tout en restant dans le régime d'interaction faible pertinent pour les supraconducteurs BCS (E_0/ϵ_F y est typiquement de l'ordre de 10^{-3} ou 10^{-4}), étendre l'étude de la branche au-delà du régime quadratique en imposant seulement $q\xi = O(1)$ lorsque $E_0/\epsilon_F \rightarrow 0$, et voir si l'interaction de Coulomb reste toujours sans effet dans ce cas? Toutes ces questions lancinantes appellent une étude complémentaire fouillée, qui fait l'objet du présent article.

Pour parachever notre introduction, donnons le plan de l'article. La Section 2 présente brièvement le formalisme utilisé : l'interaction entre fermions neutres est modélisée par une attraction de contact sur site, après discrétisation de l'espace en un réseau cubique de pas b ; pour décrire l'évolution des variables collectives indépendantes ρ , Δ et Δ^* du système après une perturbation faible de l'état fondamental circonscrite en temps, on peut utiliser les équations BCS dépendant du temps linéarisées autour de leur solution stationnaire; l'équation aux valeurs propres s'écrit comme le déterminant d'une matrice fonction de z et de \mathbf{q} , 3×3 puisqu'il y a trois variables indépendantes, et dont nous rappelons comment effectuer le prolongement analytique à $\text{Im } z < 0$ à l'aide des densités spectrales du continuum de paire brisée. Dans la Section 3, nous nous concentrons sur la limite de couplage faible $E_0 \ll \epsilon_F$, plus facile à atteindre dans l'état fondamental avec les supraconducteurs BCS qu'avec les atomes froids, et que nous traitons mathématiquement en faisant tendre E_0/ϵ_F vers zéro à $q\xi$ fixé. Nous trouvons que la branche du continuum se découple des autres excitations sous la forme d'un mode de module (mettant en jeu des oscillations du seul module du paramètre d'ordre, à l'exclusion de sa phase), aussi bien pour l'interaction de contact seule (Section 3.2.1) qu'en présence de l'interaction de Coulomb (Section 3.2.2), avec la même équation aux valeurs propres dans les deux cas. Les densités spectrales utiles au prolongement analytique peuvent être exprimées en termes d'intégrales elliptiques (Section 3.3). La branche est ensuite calculée numériquement, puis étudiée analytiquement à faible et à grand $q\xi$ dans la Section 3.4. Pour être complets, nous effectuons la même étude sur la branche acoustique (mode de phase) pour la seule interaction de contact dans la Section 3.5. La longue Section 4 est consacrée

au régime d'interaction quelconque, apanage des gaz d'atomes froids; l'interaction est seulement de contact, et elle est résonnante (sa longueur de diffusion a dans l'onde s excède grandement sa portée b en valeur absolue), ce qui oblige à prendre la limite continue $b \rightarrow 0$ de notre modèle sur réseau : l'équation aux valeurs propres se réduit au déterminant d'une matrice 2×2 (Section 4.1). Son prolongement analytique est effectué dans le cas $\mu > 0$ (où $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$) en passant par l'intervalle $[\epsilon_1, \epsilon_2]$, sauf dans la Section 4.8. Nous donnons dans la Section 4.2 la position sur le demi-axe réel positif des points de branchement ϵ_1, ϵ_2 , voire ϵ_3 , en fonction de q , et l'expression des densités spectrales sur chaque intervalle entre les points de branchement et l'infini. Nous enrichissons notre étude de la branche du continuum (par rapport à la Section 3) en introduisant dans la Section 4.3 d'autres observables que sa relation de dispersion complexe $q \mapsto z_q$, à savoir son poids spectral (résidu) sur les faibles écarts à l'équilibre du paramètre d'ordre en phase ou en module, et la superposition cohérente de ces deux voies permettant de maximiser le poids spectral dans le signal expérimental. Nous présentons une étude numérique complète de la branche du continuum dans la Section 4.4, puis en effectuons une étude analytique à faible q dans la Section 4.5, en précisant cette fois (au contraire de la référence [3]) le domaine de validité de l'approximation quadratique, ce qui fait apparaître la condition attendue $q\xi \ll 1$ dans le régime d'interaction faible mais la condition autre et non intuitive $q/k_0 \ll (\mu/\Delta)^{1/2}$ dans le régime $\mu/\Delta \rightarrow 0^+$ d'annulation du potentiel chimique. Dans la Section 4.6, consacrée à la limite d'interaction faible $\Delta/\mu \ll 1$, il nous faut, pour épuiser le problème, étudier la branche successivement à trois échelles de nombre d'onde, à $q \approx 1/\xi$ c'est-à-dire $q \approx k_0\Delta/\mu$ (Section 4.6.1), à $q \approx k_0$ (Section 4.6.2) et à l'échelle inattendue $q \approx k_0(\Delta/\mu)^{2/3}$ régissant la position du minimum de $q \mapsto \text{Re } z_q$ (Section 4.6.3). Dans la Section 4.7, consacrée à la limite inverse $\mu/\Delta \rightarrow 0^+$, il suffit de nous placer successivement à l'échelle $q \approx k_0$ (Section 4.7.1) et à l'échelle $q \approx k_0(\mu/\Delta)^{1/2}$ (Section 4.7.2) pour obtenir une description complète. Enfin, dans la Section 4.8, nous cherchons et parfois trouvons des modes du continuum plus exotiques en effectuant le prolongement analytique pour $\mu > 0$ par les autres fenêtres $[\epsilon_2, \epsilon_3]$ et $[\epsilon_3, +\infty[$, et en étendant même l'étude au cas $\mu < 0$ (où $k_0 = 0$). Nous concluons dans la Section 5.

2. Rappels de formalisme : modèle, équations BCS dépendant du temps linéarisées, densités spectrales, prolongement analytique

Le modèle et le formalisme du présent article sont ceux des références [11, 12], dont nous rappelons ici les grandes lignes. Les fermions à deux états internes \uparrow et \downarrow vivent avec des conditions aux limites périodiques dans le volume de quantification $[0, L]^3$ discrétisé en un réseau cubique de pas b , dans l'ensemble grand canonique de potentiel chimique $\mu = \mu_\uparrow = \mu_\downarrow$. La relation de dispersion d'un fermion seul sur le réseau est celle $\mathbf{k} \mapsto E_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2/2m$ de l'espace libre sur la première zone de Brillouin $\mathcal{D} = [-\pi/b, \pi/b]^3$ du réseau, et est étendue par périodicité au-delà. Les fermions de spins opposés subissent l'interaction binaire de contact $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g_0 \delta_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}/b^3$, où δ est un delta de Kronecker et la constante de couplage nue est ajustée en fonction du pas du réseau pour reproduire la longueur de diffusion a souhaitée entre fermions dans l'onde s : $1/g_0 = 1/g - \int_{\mathcal{D}} (d^3k/(2\pi)^3)(1/2E_{\mathbf{k}})$ où $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ est la constante de couplage effective [13].

Initialement, le gaz de fermions est préparé dans l'état fondamental, non polarisé par symétrie entre \uparrow et \downarrow . L'état est décrit de manière variationnelle approchée par l'habituel ansatz BCS, état cohérent de paires liées $\uparrow\downarrow$ de particules $|\psi_{\text{BCS}}^{(0)}\rangle$ minimisant l'énergie. Il admet un paramètre d'ordre Δ défini plus bas et un spectre d'excitation de quasi-particule par brisure de paire de la forme habituelle $\epsilon_{\mathbf{k}} = (\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2)^{1/2}$, où \mathbf{k} décrit \mathcal{D} et $\xi_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}} - \mu + g_0\rho/2$ contient le déplacement d'énergie grand canonique et celui de Hartree de champ moyen proportionnel à la densité totale ρ .

Le gaz est ensuite soumis à une perturbation extérieure quelconque, si ce n'est qu'elle conserve le nombre de particules dans \uparrow et dans \downarrow , et qu'elle est suffisamment faible pour qu'on puisse limiter son action, dans le cadre variationnel BCS, à la création d'un état cohérent de paires de quasi-particules de faible amplitude $|\beta| \ll 1$. Aux instants $t > 0$ postérieurs à la perturbation, le vecteur d'état du gaz s'écrit donc

$$|\psi_{\text{BCS}}(t)\rangle = \mathcal{N}(t) \exp \left[- \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \beta_{\mathbf{kq}}(t) \hat{\gamma}_{\mathbf{q}/2+\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{\gamma}_{\mathbf{q}/2-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right] |\psi_{\text{BCS}}^0\rangle \quad (1)$$

où les opérateurs d'annihilation $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}$ et de création $\hat{\gamma}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ d'une quasi-particule BCS de vecteur d'onde \mathbf{k} et de spin σ obéissent aux habituelles relations d'anticommuation fermioniques. Les paramètres variationnels indépendants sont les amplitudes de probabilité $\beta_{\mathbf{kq}}(t)$ d'avoir brisé une paire liée en deux quasi-particules de spins opposés et de vecteurs d'onde $\mathbf{q}/2 \pm \mathbf{k}$; \mathbf{q} représente donc le vecteur d'onde total (ou du centre de masse) de la paire brisée, et \mathbf{k} son vecteur d'onde interne (ou relatif); $\mathcal{N}(t)$ est un facteur de normalisation.

À l'ordre un en les amplitudes β , on tire de l'ansatz (1) les expressions du paramètre d'ordre $\Delta(\mathbf{r}, t)$ et de la densité totale $\rho(\mathbf{r}, t)$ du gaz excité au point \mathbf{r} et à l'instant t :

$$\Delta(\mathbf{r}, t) \equiv g_0 \langle \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \rangle = - \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} U_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{q}} \delta \Delta_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + O(\beta^2) \quad (2)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \langle \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}) \rangle = \frac{2}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} V_{\mathbf{k}}^2 + \sum_{\mathbf{q}} \delta \rho_{\mathbf{q}}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} + O(\beta^2) \quad (3)$$

Ce sont les variables au travers desquelles pourront se manifester les modes collectifs du système. Au troisième membre de ces expressions apparaît d'abord la contribution constante de l'état stationnaire initial, fonction des amplitudes $U_{\mathbf{k}} = [\frac{1}{2}(1 + \xi_{\mathbf{k}}/\epsilon_{\mathbf{k}})]^{1/2}$ et $V_{\mathbf{k}} = [\frac{1}{2}(1 - \xi_{\mathbf{k}}/\epsilon_{\mathbf{k}})]^{1/2}$ des modes de quasi-particules sur les particules et les trous. Viennent ensuite des termes linéaires en β modulés spatialement aux vecteurs d'onde \mathbf{q} des paires, et dont on peut tirer la dépendance en temps de celle des $\beta_{\mathbf{kq}}$, elle-même déduite de l'habituel calcul variationnel. Comme dans la référence [11], il est astucieux d'introduire des combinaisons linéaires plus et moins des β et β^* partiellement découplantes; nous avons besoin ici seulement de leur valeur à $t = 0^+$:

$$y_{\mathbf{kq}}^\pm = \beta_{\mathbf{kq}}(0^+) \pm \beta_{\mathbf{k}(-\mathbf{q})}^*(0^+) \quad (4)$$

qui donne accès déjà aux valeurs des amplitudes de Fourier dans les équations (2), (3) juste après l'excitation:

$$\delta \Delta_{\mathbf{q}}(0^+) \mp \delta \Delta_{-\mathbf{q}}^*(0^+) = - \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{kq}}^\pm y_{\mathbf{kq}}^\mp \quad \text{et} \quad \delta \rho_{\mathbf{q}}(0^+) = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{kq}}^0 y_{\mathbf{kq}}^+ \quad (5)$$

Les équations du mouvement linéarisées des variables $\beta \pm \beta^*$ sont données dans la référence [11]. La valeur ajoutée ici est d'en prendre la transformée de Laplace, d'en déduire celle des amplitudes de Fourier dans (2), (3) puis, par transformation de Laplace inverse, d'obtenir la dépendance en temps de ces dernières:

$$\begin{pmatrix} \delta \Delta_{\mathbf{q}}(t) - \delta \Delta_{-\mathbf{q}}^*(t) \\ \delta \Delta_{\mathbf{q}}(t) + \delta \Delta_{-\mathbf{q}}^*(t) \\ \delta \rho_{\mathbf{q}}(t) \end{pmatrix} = \int_{i\eta+\infty}^{i\eta-\infty} \frac{dz}{2i\pi} \frac{e^{-izt/\hbar}}{M(z, \mathbf{q})} \begin{pmatrix} \Sigma_{W^+y^-}^z(z, \mathbf{q}) + \Sigma_{W^+y^+}^e(z, \mathbf{q}) \\ \Sigma_{W^-y^+}^z(z, \mathbf{q}) + \Sigma_{W^-y^-}^e(z, \mathbf{q}) \\ \Sigma_{W^0y^+}^z(z, \mathbf{q}) + \Sigma_{W^0y^-}^e(z, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \quad (6)$$

les valeurs de \mathbf{q} différentes étant découplées par conservation de l'impulsion. L'intégrale sur z est prise dans le plan complexe en survolant l'axe réel ($\eta > 0$, voire $\eta \rightarrow 0^+$). L'intégrande contient, en plus de l'exponentielle oscillant à la pulsation complexe z/\hbar , un vecteur source à

trois composantes et l'inverse d'une matrice 3×3 , tous deux fonctions de z . Après passage à la limite thermodynamique $L \rightarrow +\infty$, on aboutit à une écriture compacte, en particulier

$$M(z, \mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \check{\Sigma}_{W^+W^+}^c(z, \mathbf{q}) & \Sigma_{W^+W^-}^z(z, \mathbf{q}) & -g_0 \Sigma_{W^+W^0}^z(z, \mathbf{q}) \\ \Sigma_{W^-W^+}^z(z, \mathbf{q}) & \check{\Sigma}_{W^-W^-}^c(z, \mathbf{q}) & -g_0 \Sigma_{W^-W^0}^c(z, \mathbf{q}) \\ \Sigma_{W^0W^+}^z(z, \mathbf{q}) & \Sigma_{W^0W^-}^c(z, \mathbf{q}) & 1 - g_0 \Sigma_{W^0W^0}^c(z, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} M_{++}(z, \mathbf{q}) & M_{+-}(z, \mathbf{q}) & M_{+0}(z, \mathbf{q}) \\ M_{-+}(z, \mathbf{q}) & M_{--}(z, \mathbf{q}) & M_{-0}(z, \mathbf{q}) \\ M_{0+}(z, \mathbf{q}) & M_{0-}(z, \mathbf{q}) & M_{00}(z, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \quad (7)$$

grâce à la notation abrégée d'intégrales sur le vecteur d'onde interne \mathbf{k} des paires :

$$\Sigma_{ab}^z(z, \mathbf{q}) = \int_{\mathcal{D}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{z a_{\mathbf{k}\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}\mathbf{q}}}{z^2 - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^2}, \quad \Sigma_{ab}^c(z, \mathbf{q}) = \int_{\mathcal{D}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}\mathbf{q}}}{z^2 - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^2}, \quad (8)$$

$$\check{\Sigma}_{ab}^c(z, \mathbf{q}) = \int_{\mathcal{D}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}} a_{\mathbf{k}\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}\mathbf{q}}}{z^2 - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^2} + \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right]$$

La version avec accent $\check{\Sigma}$ contient un contre-terme $1/2\epsilon_{\mathbf{k}}$, obtenu en éliminant g_0 au profit du paramètre d'ordre $(-1/g_0 = \int_{\mathcal{D}} (d^3k/(2\pi)^3)(1/2\epsilon_{\mathbf{k}}))$, qui assure la convergence ultraviolette de l'intégrale à la limite continue $b \rightarrow 0$; les versions sans accent convergent telles quelles lorsque $b \rightarrow 0$. Chaque symbole Σ présente sous le signe intégral le dénominateur d'énergie attendu, contenant l'énergie $\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ de la paire brisée, et au numérateur des amplitudes de couplage entre quasi-particules fonctions de leurs amplitudes modales :

$$W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^{\pm} = U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} \pm V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}, \quad W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^0 = U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} V_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}, \quad \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} \quad (9)$$

Dans la matrice M , elles apparaissent par paires de facteurs, qui ont les expressions plus explicites suivantes :

$$\begin{aligned} (W^+)^2 &= \frac{\epsilon_+ \epsilon_- + \xi_+ \xi_- + \Delta^2}{2\epsilon_+ \epsilon_-} & W^+ W^- &= \frac{\xi_+}{2\epsilon_+} + \frac{\xi_-}{2\epsilon_-} & W^+ W^0 &= \frac{\Delta}{2\epsilon_+} + \frac{\Delta}{2\epsilon_-} \\ (W^-)^2 &= \frac{\epsilon_+ \epsilon_- + \xi_+ \xi_- - \Delta^2}{2\epsilon_+ \epsilon_-} & W^- W^0 &= \frac{(\xi_+ + \xi_-) \Delta}{2\epsilon_+ \epsilon_-} & (W^0)^2 &= \frac{\epsilon_+ \epsilon_- - \xi_+ \xi_- + \Delta^2}{2\epsilon_+ \epsilon_-} \end{aligned} \quad (10)$$

où l'on a noté, pour abrégé, $\epsilon_{\pm} = \epsilon_{\mathbf{k}\pm\mathbf{q}/2}$ et $\xi_{\pm} = \xi_{\mathbf{k}\pm\mathbf{q}/2}$. L'ensemble (à partir de l'équation (6)) constitue une généralisation magistrale de l'équation (12) de la référence [14] à un vecteur d'onde d'excitation \mathbf{q} non nul et à une perturbation infinitésimale arbitraire non polarisante de l'état BCS stationnaire initial.

L'équation (6) évoque fortement le formalisme des fonctions de Green et de la résolvante. Il est naturel de lui appliquer la formule des résidus, c'est-à-dire le théorème de Cauchy, en refermant le chemin d'intégration par un demi-grand cercle dans le demi-plan complexe inférieur, parcouru dans le sens trigonométrique et de rayon divergent. Comme d'habitude, l'idée doit être adaptée pour contourner par des lacets les lignes de coupure issues de l'annulation des dénominateurs dans les symboles Σ de (8) lorsque z ou $-z$ tombe dans le continuum de paire brisée $\{\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3\}$, ou plutôt les *nouvelles* lignes de coupure obtenues par déformation et rotation des lignes de coupure *originelles* autour de leur point de branchement (les nouvelles lignes de coupure sont souvent disposées verticalement dans le demi-plan inférieur), voir le complément A_{III} de la référence [15] et notre Figure 1; après contournement d'une *nouvelle* ligne de coupure, l'intégrande de (6) doit bien sûr être remplacé par son prolongement analytique du demi-plan supérieur au demi-plan inférieur à travers la ligne de coupure *originelle* déplacée dont elle provient.

Dans la formule des résidus appliquée à (6) ainsi transformée, on associe par définition à chaque pôle $z_{\mathbf{q}}$ de l'intégrande² un mode collectif d'énergie propre $z_{\mathbf{q}}$, et le résidu inclut le facteur

²Par parité en z de $\det M(z, \mathbf{q})$, on convient que $\text{Re } z_{\mathbf{q}} > 0$ dans la définition de l'énergie complexe d'un mode.

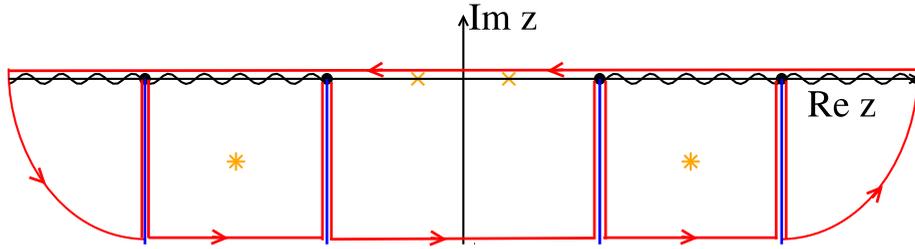


FIGURE 1. Dans le plan complexe, chemin d’intégration à suivre et prolongements analytiques à effectuer pour pouvoir appliquer le théorème de Cauchy à l’intégrale (6). On se place dans le cas où l’intégrande comporte deux points de branchement (disques noirs) sur le demi-axe réel positif, et deux autres sur le demi-axe réel négatif compte tenu de la symétrie $z \leftrightarrow (-z)$. Ses lignes de coupure originelles sont représentées en ondulé. Pour fixer les idées, les lignes de coupure déplacées par prolongement analytique sont disposées verticalement sous la forme de demi-droites (traits pleins bleus). Le chemin d’intégration, qui les contourne, est représenté par la ligne rouge fléchée. Étoiles orange : pôles apparaissant dans le prolongement analytique (ce sont des racines de $\det M_1(z, \mathbf{q})$ de degré entier). Croix orange : pôles apparaissant sur l’axe réel, sans besoin de prolongement analytique (ce sont les racines de $\det M(z, \mathbf{q})$ de degré entier).

exponentiel $\exp(-iz_{\mathbf{q}}t/\hbar)$, seul à dépendre du temps. Comme les éléments de matrice de M ne présentent pas de pôle même après prolongement analytique, ni le vecteur source d’ailleurs, et compte tenu de l’écriture de la matrice inverse $M^{-1} = {}^t\text{com } M / \det M$ en termes de la comatrice et de son déterminant, tout pôle ne peut provenir que de l’annulation de $\det M$ (ou de son prolongement analytique) avec une loi de puissance entière en $z_{\mathbf{q}}$. Il y a donc deux cas possibles : (i) le pôle se situe sur l’axe réel, aucun prolongement analytique n’est requis, $z_{\mathbf{q}}$ est en fait une énergie réelle $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ et le mode est non amorti, (ii) le pôle se situe dans le demi-plan complexe inférieur, il a fallu effectuer un prolongement analytique de $\det M$ pour le faire apparaître, $z_{\mathbf{q}}$ est complexe ($\text{Im } z_{\mathbf{q}} < 0$) et le mode est amorti exponentiellement. Pour trouver tous les modes collectifs au vecteur d’onde \mathbf{q} , il faut donc résoudre les deux équations suivantes :

$$\boxed{\det M(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = 0, \quad \det M_1(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = 0} \tag{11}$$

la flèche verticale dans la seconde équation représentant le prolongement analytique à $\text{Im } z < 0$. Notons que, si l’excitation du gaz est mal choisie, il se peut que le vecteur source dans (6) ou son prolongement analytique s’annule en $z = z_{\mathbf{q}}$, auquel cas le résidu de l’intégrande est nul en $z_{\mathbf{q}}$ et le mode ne s’exprime pas.

Reste à savoir comment effectuer en pratique le prolongement analytique des éléments de matrice de M au demi-plan inférieur. On peut utiliser [3] un résultat figurant dans l’appendice C de [16], pour toute fonction $f(z)$ s’écrivant comme une intégrale sur la variable réelle ϵ , avec un dénominateur d’énergie $z - \epsilon$ et une densité spectrale $\rho(\epsilon)$:

$$f(z) = \int_{\epsilon_a}^{\epsilon_b} d\epsilon \frac{\rho(\epsilon)}{z - \epsilon} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus [\epsilon_a, \epsilon_b] \implies f_1(z) = f(z) - 2i\pi\rho(z) \quad \text{pour } \text{Im } z \leq 0 \tag{12}$$

le prolongement analytique s’effectuant bien sûr en passant au travers de la ligne de coupure $[\epsilon_a, \epsilon_b]$ de $f(z)$, qu’il rabat sur $]-\infty, \epsilon_a[\cup]\epsilon_b, +\infty[$. Pour que (12) s’applique, il faut que la densité spectrale $\rho(\epsilon)$ admette un prolongement analytique $\rho(z)$ au demi-plan inférieur, donc qu’elle soit déjà analytique sur l’intervalle $[\epsilon_a, \epsilon_b]$. En pratique, on est amené à découper la fonction à prolonger en somme de termes de type $f(z)$, les bornes ϵ_a, ϵ_b , etc. correspondant aux positions successives des singularités de $\rho(\epsilon)$ sur l’axe réel (points de divergence, de discontinuité, points

anguleux). Dans le cas des éléments de matrice (8), ceci se fait comme dans [3] au moyen des densités spectrales³

$$\rho_{ss'}(\epsilon, \mathbf{q}) \equiv \int d^3k \frac{1}{2} W_{\mathbf{kq}}^s W_{\mathbf{kq}}^{s'} \delta(\epsilon - \epsilon_{\mathbf{kq}}) \quad \forall s, s' \in \{+, -, 0\} \quad (13)$$

que nous calculerons en temps utile dans la suite.

3. Limite de couplage faible $\Delta \ll \mu$: le cas des supraconducteurs BCS

3.1. Régime considéré

Dans cette section, l'interaction de contact entre fermions de spins opposés est très faiblement attractive : sa longueur de diffusion a est négative et très petite en valeur absolue devant la distance moyenne entre particules, ou si l'on préfère devant l'inverse $1/k_F$ du nombre d'onde de Fermi du gaz, $k_F = (3\pi^2 \rho)^{1/3}$. On peut également supposer que $|a|$ est plus faible que le pas b du modèle sur réseau, donc que la portée de l'interaction : l'interaction binaire est non résonnante et dans le régime de Born de la théorie de la diffusion. Nous disposons en définitive de la chaîne d'inégalités $0 < -a \ll b \ll 1/k_F$.

C'est sous ces conditions que la théorie BCS est la plus quantitative. Elle donne la bonne équation d'état du gaz à l'ordre un en $k_F a$ et tient compte correctement du déplacement de Hartree de la position k_0 du minimum du spectre d'excitation BCS (voir la Section 3.4.4 de [17] et la référence [18]). Dans la chaîne d'inégalités, la dernière assure que la physique est peu affectée par la discrétisation de l'espace et permet de remplacer le domaine d'intégration \mathcal{D} par \mathbb{R}^3 dans (8); l'avant-dernière permet de remplacer la constante de couplage nue g_0 par la constante effective $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ dans l'équation d'état du gaz $\mu = \epsilon_F + g\rho/2$, dans le spectre d'excitation BCS $\epsilon_{\mathbf{k}} = [(E_{\mathbf{k}} - \epsilon_F)^2 + \Delta^2]^{1/2}$ (d'où la position du minimum $k_0 = k_F$) et dans la troisième colonne de la matrice (7).

Comme le paramètre d'ordre est exponentiellement petit en la force des interactions, $\Delta/\epsilon_F \approx 8e^{-2} \exp(-\pi/2 k_F |a|)$ dans la théorie BCS, nous étudions dans cette section la branche du continuum à l'ordre dominant en Δ , c'est-à-dire que nous faisons tendre mathématiquement Δ vers zéro après avoir effectué les changements d'échelle idoines sur l'énergie complexe $z_{\mathbf{q}}$ et le nombre d'onde q assurant l'existence d'une limite finie et non nulle.

3.2. Découplage du mode de module

3.2.1. En présence d'une interaction de contact

Avant de passer à la limite mathématique $\Delta \rightarrow 0$, il faut regarder la branche du continuum aux bonnes échelles d'énergie et de nombre d'onde que sont naturellement l'énergie de liaison 2Δ et l'inverse $1/\xi$ de la taille $\xi \propto \hbar^2 k_0 / m\Delta$ [19] d'une paire liée de fermions $\uparrow\downarrow$, donc garder constantes les variables réduites

$$\bar{q} = \frac{\hbar^2 k_0 q}{m\Delta} \quad \text{et} \quad \bar{z} = z/\Delta \quad (14)$$

Alors, pour obtenir une limite non nulle dans les éléments de matrice (7) de M , c'est-à-dire dans les intégrales (8), il faut effectuer en coordonnées sphériques d'axe polaire \mathbf{q} le changement de variable

$$k = k_0 + \frac{m\Delta}{\hbar^2 k_0} \bar{K} \quad (15)$$

³Pour que $\rho_{ss'}$ soit la densité spectrale de $M_{ss'}$ au sens de (12), il faudrait inclure dans sa définition un facteur $(2\pi)^{-3}$. Nous ne l'avons pas fait ici, de manière que les fonctions $\rho_{ss'}$ coïncident avec celles de la référence [3].

sur le module du vecteur d'onde interne des paires et faire tendre Δ vers zéro à \bar{K} fixé. En d'autres termes, les intégrales (8) sont dominées ici par une fine couche de largeur en énergie $\propto \Delta$ autour de la surface de Fermi du gaz.⁴ Effectuons d'abord le passage à la limite dans le spectre d'excitation BCS :

$$\xi_{\pm}/\Delta \xrightarrow[\Delta \rightarrow 0]{\bar{K}, \bar{q} \text{ fixés}} \bar{K} \pm \frac{1}{2} \bar{q} u \equiv x_{\pm}(\bar{K}, u) \quad \text{et} \quad \epsilon_{\pm}/\Delta \xrightarrow[\Delta \rightarrow 0]{\bar{K}, \bar{q} \text{ fixés}} (1 + x_{\pm}^2)^{1/2} \equiv e_{\pm}(\bar{K}, u) \quad (16)$$

u étant le cosinus de l'angle entre les vecteurs \mathbf{k} et \mathbf{q} , puis dans les intégrales elles-mêmes afin d'obtenir leur approximation d'ordre zéro en Δ/μ , repérées par l'exposant (0) :

$$\check{\Sigma}_{W^+W^+}^{\epsilon(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{mk_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \left[\frac{(e_+ + e_-)(e_+e_- + x_+x_- + 1)}{2e_+e_-[\bar{z}^2 - (e_+ + e_-)^2]} + \frac{1}{2(\bar{K}^2 + 1)^{1/2}} \right] \neq 0 \quad (17)$$

$$\check{\Sigma}_{W^-W^-}^{\epsilon(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{mk_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \left[\frac{(e_+ + e_-)(e_+e_- + x_+x_- - 1)}{2e_+e_-[\bar{z}^2 - (e_+ + e_-)^2]} + \frac{1}{2(\bar{K}^2 + 1)^{1/2}} \right] \neq 0 \quad (18)$$

$$\Sigma_{W^+W^-}^{z(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{mk_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \frac{\bar{z}(x_+e_- + x_-e_+)}{2e_+e_-[\bar{z}^2 - (e_+ + e_-)^2]} \equiv 0 \quad (19)$$

$$\Sigma_{W^+W^0}^{z(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{mk_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \frac{\bar{z}(e_+ + e_-)}{2e_+e_-[\bar{z}^2 - (e_+ + e_-)^2]} \neq 0 \quad (20)$$

$$\Sigma_{W^-W^0}^{\epsilon(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{mk_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \frac{(e_+ + e_-)(x_+ + x_-)}{2e_+e_-[\bar{z}^2 - (e_+ + e_-)^2]} \equiv 0 \quad (21)$$

$$\Sigma_{W^0W^0}^{\epsilon(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{mk_0}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \frac{(e_+ + e_-)(e_+e_- - x_+x_- + 1)}{2e_+e_-[\bar{z}^2 - (e_+ + e_-)^2]} \neq 0 \quad (22)$$

Une simplification se produit : les intégrales (19) et (21) sont identiquement nulles par imparité de leur intégrande sous l'échange de (K, u) en $(-K, -u)$, qui transforme x_+ et x_- en leur opposé mais laisse e_+ et e_- inchangés. Du coup, la deuxième colonne de la matrice M dans (7) se réduit à son élément sur la diagonale et la première équation aux valeurs propres dans (11) se découple en deux équations indépendantes :

$$M_{--}^{(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) \equiv \check{\Sigma}_{W^-W^-}^{\epsilon(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) = 0 \quad \text{ou} \quad \left[1 - g \Sigma_{W^0W^0}^{\epsilon(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) \right] \check{\Sigma}_{W^+W^+}^{\epsilon(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) + g \left[\Sigma_{W^+W^0}^{z(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) \right]^2 = 0 \quad (23)$$

La première porte seulement sur la variable $-$, c'est-à-dire la seconde composante du vecteur (6) des variables collectives, la combinaison linéaire de $\delta\Delta_{\mathbf{q}}$ et de $\delta\Delta_{-\mathbf{q}}$ reconstruisant l'écart du module $|\Delta(\mathbf{r}, t)|$ du paramètre d'ordre à sa valeur d'équilibre. C'est elle qui va donner naissance, après prolongement analytique et calcul explicite dans la Section 3.4, au mode du continuum, qui est donc, dans la limite de couplage faible et à l'échelle d'énergie Δ , un mode de *module*. Ce résultat était connu pour une interaction entre \uparrow et \downarrow de portée nulle ($b \rightarrow 0$) [2]; nous voyons qu'il survit ici à une portée non nulle, même beaucoup plus grande que $|a|$. La seconde équation dans (23) donne naissance au mode acoustique. Elle couple la variable $+$ (faible écart de phase du paramètre d'ordre à sa valeur d'équilibre) et la variable 0 (faible écart de densité du gaz); c'est seulement si l'on fait tendre g vers zéro, comme dans la Section 3.5, que la variable $+$ se découple de la densité et que le mode acoustique devient un pur mode de *phase* comme dans [2].

3.2.2. En présence également de l'interaction de Coulomb

Dans un supraconducteur BCS, les fermions appariés ne sont pas des particules neutres, mais des électrons de charge $-e$. Il faudrait donc compléter notre hamiltonien modèle, en ajoutant à

⁴Si l'on fait $\Delta \rightarrow 0$ à \mathbf{k} fixé, avec $q = O(\Delta)$ et $z = O(\Delta)$, les intégrandes de tous les Σ et $\check{\Sigma}$ tendent vers zéro, ce qui justifie cette affirmation et notre procédure.

l'interaction à courte portée b entre \uparrow et \downarrow le potentiel d'interaction de Coulomb à longue portée et indépendant du spin,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\tilde{e}^2}{r} \quad (24)$$

donc agissant aussi bien entre particules de même spin que de spin opposé. Ce ne serait pas une mince affaire. Heureusement, le travail a déjà été effectué dans la référence [2], dans la limite où la portée b tend vers zéro à longueur de diffusion a de l'interaction à courte portée fixée. L'équation aux valeurs propres sur l'énergie z des modes de vecteur d'onde \mathbf{q} prend la forme d'un déterminant $\det \hat{K} = 0$, où \hat{K} est une matrice 3×3 que nous n'écrivons pas, mais dont les coefficients s'expriment en termes de fonctions $A(\mathbf{q}, \pm z)$, $B(\mathbf{q}, z)$, $C(\mathbf{q}, z)$ et $D(\mathbf{q}, \pm z)$.⁵ De manière remarquable, nous sommes parvenus, après une intégration à température nulle sur la fréquence de Matsubara non effectuée dans [2], à relier ces fonctions du problème coulombien aux fonctions (8) du problème non coulombien comme suit :

$$\begin{aligned} A(\mathbf{q}, iz) &= \frac{1}{2} \left[\tilde{\Sigma}_{W^+W^+}^{\epsilon}(z, \mathbf{q}) + \tilde{\Sigma}_{W^-W^-}^{\epsilon}(z, \mathbf{q}) - \Sigma_{W^+W^-}^z(z, \mathbf{q}) \right] & C(\mathbf{q}, iz) &= \frac{q^2}{4\pi} - 2\tilde{e}^2 \Sigma_{W^0W^0}^{\epsilon}(z, \mathbf{q}) \\ B(\mathbf{q}, iz) &= \frac{1}{2} \left[\tilde{\Sigma}_{W^-W^-}^{\epsilon}(z, \mathbf{q}) - \tilde{\Sigma}_{W^+W^+}^{\epsilon}(z, \mathbf{q}) \right] & D(\mathbf{q}, iz) &= i\tilde{e} \left[\Sigma_{W^+W^0}^z(z, \mathbf{q}) - \Sigma_{W^-W^0}^{\epsilon}(z, \mathbf{q}) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

De plus, dans la limite de couplage faible, l'équation aux valeurs propres se découple de la même façon que dans le cas non coulombien (23) :

$$M_{--}^{(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) = 0 \quad \text{ou} \quad \left[\frac{q^2}{8\pi\tilde{e}^2} - \Sigma_{W^0W^0}^{\epsilon(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) \right] \tilde{\Sigma}_{W^+W^+}^{\epsilon(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) + \left[\Sigma_{W^+W^0}^z(\bar{z}_q, \bar{q}) \right]^2 = 0 \quad (26)$$

La première équation reste exactement la même : aux échelles d'énergie et de nombre d'onde de (14), le mode du continuum n'est donc absolument pas affecté par l'interaction de Coulomb à l'ordre zéro en Δ . La seconde équation se déduit de celle de (23) par la substitution suivante sur la constante de couplage effective :

$$g \rightarrow 2\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{8\pi\tilde{e}^2}{q^2} \quad (27)$$

où $\tilde{V}(\mathbf{q})$ est la transformée de Fourier de $V(\mathbf{r})$. L'interprétation en est simple : g représente, en fait, la transformée de Fourier du potentiel d'interaction au vecteur d'onde \mathbf{q} , ce qui passe inaperçu pour une interaction de portée nulle (la transformée de Fourier d'un Dirac est constante), mais saute aux yeux pour l'interaction de Coulomb ; le facteur 2 tient compte du fait que $V(\mathbf{r})$ couple chaque état de spin aux deux autres (au contraire de l'interaction de contact) ; enfin, g disparaît complètement dans la substitution (27), au lieu d'être simplement complété par le terme $2\tilde{V}(\mathbf{q})$, car le formalisme de [2] est écrit dans la limite de portée nulle $b/|a| \rightarrow 0$, où la constante de couplage nue g_0 apparaît en lieu et place de g comme dans la troisième colonne de (7) et tend vers zéro.

Le résultat (26) figurait déjà dans [2], mais jusqu'à $\bar{q} \lesssim 1$ seulement. Ajoutons que, pour lui donner un sens mathématique précis, il faut que le terme $q^2/8\pi\tilde{e}^2$ reste constant lorsque $\Delta \rightarrow 0$. Il ne suffit donc pas de fixer \bar{q} et \bar{z} comme dans (14), il faut aussi fixer le rapport $\hbar\omega_0/\Delta$ entre la pulsation plasma ω_0 du gaz coulombien dans sa phase normale (voir l'équation (3.8) de la référence [2]) et son paramètre d'ordre Δ dans l'état fondamental. On a en effet

$$\frac{q^2}{8\pi\tilde{e}^2} = \frac{2\bar{q}^2}{3} \frac{\Delta^2}{(\hbar\omega_0)^2} \frac{mk_F}{(2\pi\hbar)^2} \quad \text{avec} \quad \frac{(\hbar\omega_0)^2}{\Delta^2} \equiv \frac{4\pi\hbar^2\tilde{e}^2\rho/m}{\Delta^2} \quad (28)$$

⁵La référence [2] affirme à tort, après son équation (3.9), que $D(z, \mathbf{q})$ est une fonction impaire du quadrivecteur (z, \mathbf{q}) ; ceci n'est vrai que dans la limite de couplage faible aux échelles de (14).

TABLE 1. Densités spectrales $--$ et $++$ à la limite de couplage faible. On a pris la limite $\Delta/\mu \rightarrow 0$ à énergie réduite $\bar{\epsilon} = \epsilon/\Delta$ et nombre d'onde réduit $\bar{q} = \hbar^2 k_0 q/m\Delta$ fixés, k_0 étant la position du minimum Δ de la relation de dispersion BCS. Sur chaque intervalle d'énergie considéré, ce sont des fonctions régulières, prolongeables analytiquement aux énergies complexes. $E(\phi, k)$ et $F(\phi, k)$ sont les intégrales elliptiques de seconde et de première espèce, dans la convention de la Section 8.111 de la référence [20]; $E(k) \equiv E(\pi/2, k)$ et $K(k) \equiv F(\pi/2, k)$ sont leurs formes complètes.

$\bar{\epsilon} < 2$	$\rho_{--}^{(0)\text{[I]}}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) = 0$ $\rho_{++}^{(0)\text{[I]}}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) = 0$
$2 < \bar{\epsilon} < (4 + \bar{q}^2)^{1/2}$	$\rho_{--}^{(0)\text{[II]}}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \equiv \frac{4\pi m k_0}{\hbar^2} \left[\frac{\bar{\epsilon}}{2\bar{q}} E\left(\frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}}\right) - \frac{2}{\bar{q}\bar{\epsilon}} K\left(\frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}}\right) \right]$ $\rho_{++}^{(0)\text{[II]}}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \equiv \frac{4\pi m k_0}{\hbar^2} \left[\frac{\bar{\epsilon}}{2\bar{q}} E\left(\frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}}\right) \right]$
$(4 + \bar{q}^2)^{1/2} < \bar{\epsilon}$	$\rho_{--}^{(0)\text{[III]}}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \equiv \frac{4\pi m k_0}{\hbar^2} \left[\frac{\bar{\epsilon}}{2\bar{q}} E\left(\text{asin} \frac{\bar{q}}{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}, \frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}}\right) - \frac{2}{\bar{q}\bar{\epsilon}} F\left(\text{asin} \frac{\bar{q}}{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}, \frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}}\right) \right]$ $\rho_{++}^{(0)\text{[III]}}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \equiv \frac{4\pi m k_0}{\hbar^2} \left[\frac{\bar{\epsilon}}{2\bar{q}} E\left(\text{asin} \frac{\bar{q}}{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}, \frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}}\right) \right]$

3.3. Expression analytique de densités spectrales

3.3.1. La densité spectrale $\rho_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q})$

Pour déterminer la relation de dispersion du mode de module, c'est-à-dire la branche du continuum, il nous faut calculer la fonction $M_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q})$ apparaissant dans (23), (26) et trouver ses racines après prolongement analytique au demi-plan inférieur. Nous avons besoin pour cela, voir la procédure (12), de connaître la densité spectrale associée (13), avec $s = s' = -$, dans la limite de couplage faible. Comme dans la Section 3.2.1, nous faisons tendre Δ vers zéro dans $\rho_{--}(\epsilon, \mathbf{q})$ en fixant l'énergie réduite $\bar{\epsilon} = \epsilon/\Delta$ et les nombres d'onde réduits \bar{q} et \bar{K} des équations (14), (15), et obtenons la limite finie et non nulle

$$\rho_{--}^{(0)}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \equiv \frac{\pi m k_0}{\hbar^2} \int_{\mathbb{R}} d\bar{K} \int_{-1}^1 du \frac{e_+ e_- + x_+ x_- - 1}{2e_+ e_-} \delta(e_+ + e_- - \bar{\epsilon}) \quad (29)$$

Grâce à la distribution δ de Dirac fixant l'énergie totale dans l'intégrande, il est possible de l'intégrer explicitement au moins une fois en résolvant l'équation $e_+ + e_- = \bar{\epsilon}$, par exemple sur la variable \bar{K} , comme il est fait dans l'Annexe A.1 :

$$\rho_{--}^{(0)}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) = \frac{2\pi m k_0}{\hbar^2} \int_0^1 du \Theta(\bar{\epsilon}^2 - (4 + u^2 \bar{q}^2)) \left(\frac{4 + u^2 \bar{q}^2 - \bar{\epsilon}^2}{u^2 \bar{q}^2 - \bar{\epsilon}^2} \right)^{1/2} \quad (30)$$

où Θ est la fonction de Heaviside. Pour effectuer l'intégrale angulaire restante, il faut distinguer suivant la valeur de $\bar{\epsilon}$ trois cas : (i) l'argument de Θ est négatif sur tout l'intervalle d'intégration, (ii) il change de signe sur l'intérieur de l'intervalle, et (iii) il est positif sur tout l'intervalle. Aux énergies frontières entre ces cas, la densité spectrale admet un point anguleux. Les trois expressions analytiques correspondantes sont différentes, et sont repérées par des exposants en chiffres romains, voir la Table 1.

Profitons de notre connaissance de la densité spectrale pour exprimer la fonction $M_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q})$ sous la forme commode d'une intégrale simple sur l'énergie. La présence du contre-terme dans

l'intégrale (18) assurant sa convergence ultraviolette pose une petite difficulté technique. Nous la contournerons en introduisant une coupure arbitrairement grande sur \bar{K} , ce qui permet de séparer le contre-terme et d'exprimer le reste comme une intégrale avec coupure sur l'énergie; nous soustrayons au tout la quantité $M_{--}^{(0)}(2, 0)$, transformée au préalable de la même façon, puis nous faisons tendre la coupure vers l'infini. Or $M_{--}^{(0)}(2, 0) = 0$, compte tenu de la relation exacte (53) à venir. Il reste donc

$$M_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = (2\pi)^{-3} \int_2^{+\infty} d\bar{\epsilon} \left[\rho_{--}^{(0)}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \left(\frac{1}{\bar{z} - \bar{\epsilon}} - \frac{1}{\bar{z} + \bar{\epsilon}} \right) - \rho_{--}^{(0)}(\bar{\epsilon}, 0) \left(\frac{1}{2 - \bar{\epsilon}} - \frac{1}{2 + \bar{\epsilon}} \right) \right] \tag{31}$$

où la densité spectrale au nombre d'onde nul, tirée par exemple de la Table 1 en faisant tendre \bar{q} vers zéro sur l'intervalle III, vaut simplement

$$\rho_{--}^{(0)}(\bar{\epsilon}, 0) = \frac{2\pi m k_0}{\hbar^2} \Theta(\bar{\epsilon} - 2) \frac{(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}}{\bar{\epsilon}} \tag{32}$$

3.3.2. La densité spectrale $\rho_{++}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q})$

Pour déterminer la relation de dispersion du mode de phase du gaz de particules neutres, c'est-à-dire la branche acoustique après prise de la limite $g \rightarrow 0$ dans la seconde équation de (23), il nous faut calculer la fonction $M_{++}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) \equiv \check{\Sigma}_{W+W+}^{\epsilon(0)}(\bar{z}, \bar{q})$. Aucun prolongement analytique n'est requis, mais la connaissance de la densité spectrale associée $\rho_{++}^{(0)}(\bar{\epsilon}, \bar{q})$ nous ramène à une intégrale simple sur l'énergie, plutôt qu'à l'intégrale double (17). Nous procédons donc comme dans la Section 3.3.1 pour obtenir

$$M_{++}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = (2\pi)^{-3} \int_2^{+\infty} d\bar{\epsilon} \left[\rho_{++}^{(0)}(\bar{\epsilon}, \bar{q}) \left(\frac{1}{\bar{z} - \bar{\epsilon}} - \frac{1}{\bar{z} + \bar{\epsilon}} \right) - \rho_{--}^{(0)}(\bar{\epsilon}, 0) \left(\frac{1}{2 - \bar{\epsilon}} - \frac{1}{2 + \bar{\epsilon}} \right) \right] \tag{33}$$

L'expression analytique de la densité spectrale ++ à \bar{q} quelconque figure dans la Table 1, celle -- à $\bar{q} = 0$ figure dans (32), et nous avons comme dans (31) utilisé le point relais $(\bar{z}, \bar{q}) = (2, 0)$ où $M_{--}^{(0)}$ s'annule, pour faire disparaître le contre-terme de l'intégrale (17) dans la différence $M_{++}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) - M_{--}^{(0)}(2, 0)$.

3.4. Étude de la branche d'excitation du module

La première équation de (23) et de (26) n'admet pas de solution sur l'axe réel. Nous en effectuons donc le prolongement analytique au demi-plan complexe inférieur, en passant ici entre ses points de branchement $\bar{z} = 2$ et $\bar{z} = (4 + \bar{q}^2)^{1/2}$, c'est-à-dire en utilisant, au sens de la Table 1, l'expression de type II de la densité spectrale -- dans le terme de Nozières de (12). Il nous faut donc chercher les solutions $\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$ de partie imaginaire < 0 de l'équation

$$M_{--\downarrow\text{III}}^{(0)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) = 0 \tag{34}$$

avec

$$M_{--\downarrow\text{III}}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) = M_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) - (2\pi)^{-3} 2i\pi \rho_{--}^{(0)\text{III}}(\bar{z}, \bar{q}) \tag{35}$$

3.4.1. Résultats numériques

La résolution numérique de l'équation (34) est une simple formalité, si l'on utilise un certain logiciel de calcul formel, dans lequel l'intégration numérique, l'évaluation des intégrales elliptiques et la recherche de racines d'une fonction de la variable complexe ont été préprogrammées. Le résultat est présenté en trait plein sur la Figure 2a pour la partie réelle et sur la Figure 2b pour la partie imaginaire de la branche du continuum. En fonction du nombre d'onde réduit \bar{q} , la partie imaginaire est monotone décroissante et semble tendre asymptotiquement vers $-\infty$. La partie réelle a une structure plus intéressante : partant de 2^+ (ce qui correspond à l'énergie

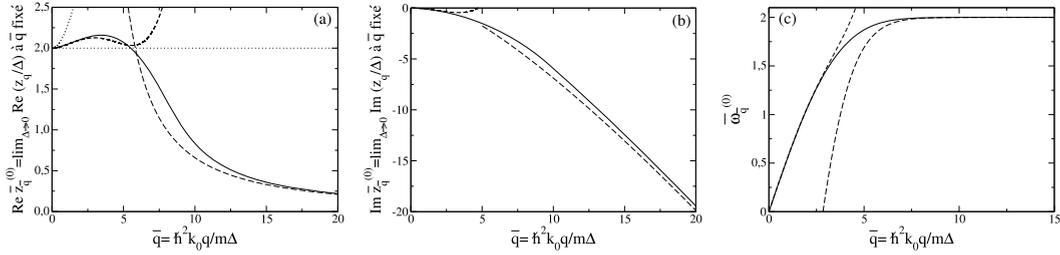


FIGURE 2. Dans la limite de couplage faible $\Delta/\mu \rightarrow 0$, partie réelle (a) et partie imaginaire (b) de l'énergie propre complexe z_q de la branche du continuum, c'est-à-dire du mode de module, d'un gaz de fermions de spin 1/2 non polarisé, en fonction du nombre d'onde q . L'adimensionnement de q et de z_q en \bar{q} et \bar{z}_q selon l'équation (14) assure que \bar{z}_q admet une limite finie et non nulle $\bar{z}_q^{(0)}$ lorsque $\Delta/\mu \rightarrow 0$ à \bar{q} fixé. Trait plein : calcul numérique de la racine de la fonction (35) dans le demi-plan complexe inférieur. Tireté court : développement limité (38) d'ordre 4 à faible \bar{q} . Tireté long : développement asymptotique (43) à grand \bar{q} , limité à l'ordre dominant \bar{q} pour la partie imaginaire et $1/\bar{q}$ pour la partie réelle. Pointillés dans (a) : bornes inférieure $\bar{\varepsilon}_1^{(0)}(\bar{q}) = 2$ et supérieure $\bar{\varepsilon}_2^{(0)}(\bar{q}) = (4 + \bar{q}^2)^{1/2}$ de l'intervalle d'énergie par lequel on est passé pour prolonger analytiquement au demi-plan inférieur l'équation sur $\bar{z}_q^{(0)}$ dans (35); c'est aussi la fenêtre d'observabilité directe du mode dans les fonctions de réponse du gaz [3]. Ces résultats valent à température nulle pour une interaction de contact dans l'onde s , comme dans les superfluides de particules neutres, à laquelle peut s'ajouter l'interaction de Coulomb, comme dans les supraconducteurs purement électroniques BCS. On donne en (c) la branche acoustique, c'est-à-dire la relation de dispersion du mode de phase, dans un superfluide de fermions nécessairement neutres, obtenue en résolvant numériquement la seconde équation dans (23) à l'ordre 0 en la constante de couplage g , c'est-à-dire l'équation $M_{++}^{(0)}(\bar{\omega}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) = 0$ d'inconnue $\bar{\omega}_{\bar{q}}^{(0)} \in [0, 2[$; aucun prolongement analytique n'est requis. Les tiretés court et long correspondent aux approximations à faible et à grand \bar{q} dans (47). Ici, la position du minimum de la relation de dispersion BCS $\epsilon_{\mathbf{k}}$ vaut $k_0 = k_F$, le nombre d'onde de Fermi du gaz.

propre non réduite attendue $2\Delta^+$),⁶ elle passe par un maximum $\text{Re } \bar{z} \approx 2,158$ en $\bar{q} \approx 3,403$ avant de décroître et, semble-t-il, tendre vers zéro à l'infini.

Nous sommes partis aussi à la recherche d'une branche du continuum de type III, en prolongeant l'équation aux énergies propres du demi-plan complexe supérieur au demi-plan inférieur en passant par l'intervalle en énergie $[(4 + \bar{q}^2)^{1/2}, +\infty[$. Il faut pour cela remplacer $\rho_{--}^{(0)[\text{III}]}$ par $\rho_{--}^{(0)[\text{III}]}$ dans (34), (35), où les notations sont celles de la Table 1. Nous n'avons trouvé cependant aucune solution. Il semble en effet que $\text{Im } M_{--}^{(0)[\text{III}]}(\bar{z}, \bar{q}) < 0$ sur tout l'intérieur du quatrième quadrant du plan complexe ($\text{Re } \bar{z} > 0$ et $\text{Im } \bar{z} < 0$), pour tout \bar{q} .⁷

3.4.2. Résultats analytiques à faible \bar{q}

Pour déterminer analytiquement le comportement de la branche du continuum à faible nombre d'onde réduit, nous paramétrons son énergie propre comme dans la référence [3], c'est-

⁶Nous écrivons 2^+ car le mode collectif du continuum disparaît en $q = 0$, voir [3] et les références citées.

⁷Nous l'avons vérifié analytiquement aux bords du domaine, à l'infini ($|\bar{z}| \rightarrow +\infty$ à phase fixée) et pour $\bar{q} \rightarrow +\infty$ à \bar{z} ou à \bar{z}/\bar{q} fixé.

à-dire que nous posons

$$\bar{z} = 2 + \frac{\zeta}{4} \bar{q}^2 \tag{36}$$

dans la fonction (35) puis nous faisons tendre \bar{q} vers zéro à coefficient ζ fixé dans le demi-plan complexe inférieur. De la forme intégrale (31) et de l'expression de la densité spectrale -- dans la Table 1, nous tirons ⁸

$$M_{--|\text{III}}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) \stackrel{\zeta \text{ fixé, } \text{Im} \zeta < 0}{\bar{q} \rightarrow 0} \frac{4\pi m k_0}{(2\pi)^3 \hbar^2} \left\{ i \frac{\pi}{8} \bar{q} \left(\sqrt{\zeta - 1} + \zeta \operatorname{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} - \pi \zeta \right) + \bar{q}^2 \left(\frac{\zeta}{4} - \frac{1}{12} \right) + \frac{i\pi \bar{q}^3}{256} \left[\left(\pi - \operatorname{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \zeta^2 - (5\zeta - 2) \sqrt{\zeta - 1} \right] \right\} + O(\bar{q}^4) \tag{37}$$

où la flèche rappelle que le prolongement analytique a été fait. Il reste à remplacer ζ par un développement limité en puissances de \bar{q} , dont on détermine les coefficients successifs en annulant le second membre de (37) ordre par ordre. Le résultat,

$$\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)} \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{=} 2 + \frac{1}{4} \bar{q}^2 [\zeta_0 + \zeta_1 \bar{q} + \zeta_2 \bar{q}^2 + O(\bar{q}^3)] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \zeta_0 = \sqrt{\zeta_0 - 1} / \left(\pi - \operatorname{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta_0}} \right) \simeq 0,236883 - 0,295632i \\ \zeta_1 = 2i\zeta_0(1 - 3\zeta_0) / (3\pi\sqrt{\zeta_0 - 1}) \simeq -0,081630 - 0,014462i \\ \zeta_2 = \frac{\zeta_0^2(1 - 3\zeta_0)(\zeta_0 - 11/9)}{\pi^2(\zeta_0 - 1)^2} + \frac{\zeta_0(1 - 2\zeta_0)}{16} \simeq 0,007158 + 0,016367i \end{cases} \tag{38}$$

représenté en tireté court sur les Figures 2a et 2b, rend compte qualitativement de l'existence d'un maximum sur la partie réelle de la branche. La valeur de ζ_0 figurait déjà dans les références [2] et [3]. Il est intéressant de noter que le développement (38) admet un terme cubique non nul, au contraire de la branche acoustique, voir la référence [21] et notre équation (47) à venir dont elle est tirée.

3.4.3. Résultats analytiques à grand \bar{q}

Pour déterminer analytiquement le comportement de la branche du continuum à grand nombre d'onde réduit, nous postulons une divergence quasi-linéaire de $\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$ (en fait seulement de sa partie imaginaire, voir plus bas). Nous posons donc

$$\bar{z} = \mathcal{Z} \bar{q} \tag{39}$$

dans la fonction (35) et faisons tendre \bar{q} vers l'infini à coefficient \mathcal{Z} fixé dans le demi-plan complexe inférieur. De la forme intégrale (31) et de l'expression de la densité spectrale -- dans

⁸Dans (31), on effectue d'abord le changement de variable $\bar{e} = 2\text{ch}\Omega$. On distingue ensuite les intervalles $\Omega \in [0, A\bar{q}/2]$ et $\Omega \in [A\bar{q}/2, +\infty[$, où $A \gg 1$ est arbitraire. Sur le premier intervalle, on fait le changement de variable $\Omega = x\bar{q}/2$ puis on développe l'intégrande en puissances de \bar{q} à x fixé, en séparant les cas $x < 1$ et $x > 1$. Sur le second intervalle, on développe l'intégrande en puissances de \bar{q} à Ω fixé. Dans le résultat final, on regroupe les termes ordre par ordre en \bar{q} et l'on fait tendre A vers $+\infty$ dans les coefficients. Il reste à calculer quelques intégrales de la forme $\int dx \sqrt{x^2 - 1} x / (x^2 - \zeta)^n$ ou $\int dx \operatorname{asin}(1/x) x / (x^2 - \zeta)^n$, $n \in \{0, 1, 2\}$. Par exemple, $\int_1^{+\infty} dx \operatorname{asin}(1/x) x / (x^2 - \zeta) = -(\pi/4) \ln(1 - 1/\zeta) - (i\pi/2) \operatorname{asin}(1/\sqrt{\zeta})$ ($\text{Im} \zeta < 0$) sachant que $\operatorname{asin} z = -i \ln(\sqrt{1 - z^2} + iz)$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[)$.

la Table 1, nous tirons le développement asymptotique⁹

$$M_{-1}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) \stackrel{\mathcal{Z} \text{ fixé, } \text{Im } \mathcal{Z} < 0}{\bar{q} \rightarrow +\infty} \frac{4\pi m k_0}{(2\pi)^3 \hbar^2} \left[\mathcal{M}_0(\mathcal{Z}, \bar{q}) + \frac{1}{\bar{q}^2} \mathcal{M}_2(\mathcal{Z}, \bar{q}) + o\left(\frac{1}{\bar{q}^2}\right) \right] \quad (40)$$

avec, chose remarquable, des coefficients dépendant lentement (logarithmiquement) de \bar{q} :

$$\mathcal{M}_0(\mathcal{Z}, \bar{q}) = \ln\left(\frac{2\bar{q}}{e}\right) - \frac{i\pi\mathcal{Z}}{2} + \frac{1-\mathcal{Z}}{2} \ln \frac{1-\mathcal{Z}}{2} + \frac{1+\mathcal{Z}}{2} \ln \frac{1+\mathcal{Z}}{2} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2(\mathcal{Z}, \bar{q}) = & \frac{1}{2\mathcal{Z}} \left[g_2\left(\frac{\mathcal{Z}-1}{\mathcal{Z}+1}\right) - g_2\left(\frac{\mathcal{Z}+1}{\mathcal{Z}-1}\right) - \ln(4e\bar{q}^2) \left(\ln \frac{1+\mathcal{Z}}{2} - \ln \frac{1-\mathcal{Z}}{2} - i\pi \right) \right. \\ & \left. + 2g_2\left(\frac{1}{\mathcal{Z}}\right) - 2g_2\left(-\frac{1}{\mathcal{Z}}\right) + 4i\pi \ln \mathcal{Z} \right] \quad (42) \end{aligned}$$

où $g_a(z)$ est une fonction de Bose ou polylogarithme. De l'annulation du second membre de (40) ordre par ordre en \bar{q} , nous déduisons donc un développement asymptotique

$$\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)} \stackrel{\bar{q} \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{Z}_0 \bar{q} + \frac{\mathcal{Z}_2}{\bar{q}} + o\left(\frac{1}{\bar{q}}\right) \quad (43)$$

dont les coefficients dépendent eux aussi logarithmiquement de \bar{q} . Comme on pouvait s'y attendre au vu des Figures 2a et 2b, le coefficient du terme dominant est imaginaire pur :

$$\mathcal{Z}_0 = -iY_0 \quad \text{avec} \quad \ln\left(\bar{q}\sqrt{1+Y_0^2/e}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + \text{atan } Y_0\right) Y_0 \quad (44)$$

Nous ne savons pas résoudre l'équation transcendante sur la partie imaginaire $Y_0 > 0$ autrement que numériquement.¹⁰ La prédiction correspondante est représentée en tireté long sur la Figure 2b. Du terme sous-dominant, c'est la partie réelle qui est la plus intéressante physiquement, car elle fournit un équivalent de la partie réelle de la branche du continuum. Coup de chance, c'est aussi la moins compliquée des deux à écrire, puisque seule la partie imaginaire de $\mathcal{Z} \mapsto \mathcal{M}_2(\mathcal{Z}, \bar{q})$ prend une forme simple sur l'axe imaginaire pur :

$$\text{Im} \mathcal{M}_2(-iY, \bar{q}) = \frac{\pi^2}{Y} \quad \forall Y > 0 \quad \text{donc} \quad \text{Re } \mathcal{Z}_2 = \frac{\pi^2}{\left(\frac{\pi}{2} + \text{atan } Y_0\right) Y_0} \quad (45)$$

Le résultat, tendant vers zéro comme $1/\bar{q}$ à un facteur logarithmique près, est représenté en tireté long sur la Figure 2a.

3.5. Branche acoustique pour une interaction de contact à la limite $g \rightarrow 0$

On le sait, notre gaz de fermions neutres admet une branche d'excitation acoustique $q \mapsto \hbar\omega_{\mathbf{q}}$, purement réelle dans le formalisme BCS linéarisé dépendant du temps utilisé ici, et amplement

⁹ On commence par supposer que $\text{Im } \mathcal{Z} > 0$. Dans l'expression intégrale (31), on effectue le changement de variable $\bar{e} = \bar{q}x$ puis on développe l'intégrande en puissances de $1/\bar{q}$ à x fixé, en distinguant les cas $x < 1$ et $x > 1$. Dans le premier cas, $\rho_{-}^{(0)}(\bar{q}x, \bar{q}) = (2\pi m k_0/\hbar^2)[x - (1/\bar{q}^2)x \ln(4e\bar{q}^2 x^2) + o(1/\bar{q}^2)]$; dans le second, $\rho_{-}^{(0)}(\bar{q}x, \bar{q}) = (2\pi m k_0/\hbar^2)[1 + (1/\bar{q}^2)x \ln((x-1)/(x+1)) + o(1/\bar{q}^2)]$; ces développements sont tirés de la forme (30), en distinguant lorsque $x < 1$ les intervalles $u \in [0, x - A/\bar{q}^2]$ et $u \in [x - A/\bar{q}^2, (x^2 - 4/\bar{q}^2)^{1/2}]$ où $A \rightarrow +\infty$ après développement en $1/\bar{q}$. On tombe sur les intégrales $I = \int_0^1 dx (\ln x)/(x-z) = g_2(1/z)$ et $J = \int_1^{+\infty} dx \ln[(x-1)/(x+1)]/(x-z) = g_2((z+1)/(z-1)) - g_2(1)$ (on a effectué dans J le changement de variable $X = (x-1)/(x+1) \in [0, 1]$ puis on a décomposé en éléments simples). Le résultat final est prolongé analytiquement de $\text{Im } \mathcal{Z} > 0$ à $\text{Im } \mathcal{Z} < 0$ à travers $[0, 1]$ par la substitution $g_2(1/\mathcal{Z}) \rightarrow g_2(1/\mathcal{Z}) + 2i\pi \ln \mathcal{Z}$, alors que $g_2(-1/\mathcal{Z})$, $g_2((\mathcal{Z}-1)/(\mathcal{Z}+1))$ et $g_2((\mathcal{Z}+1)/(\mathcal{Z}-1))$ restent inchangés puisque $g_2(z)$ admet $[1, +\infty[$ comme ligne de coupure; de même, les fonctions $\ln(1 \pm \mathcal{Z})$, qu'on a pris soin de faire apparaître, restent inchangées.

¹⁰ En commettant une erreur relative $O(1/Y_0^3)$ sur Y_0 , on peut remplacer l'équation par $\pi Y_0 = \ln(\bar{q}Y_0)$ dont la solution est $Y_0 = (-1/\pi)W_{-1}(-\pi/\bar{q})$ où W_{-1} est la branche secondaire de la fonction de Lambert W .

étudiée dans la référence [1]. Nous jugeons utile cependant de donner quelques résultats complémentaires dans la limite de couplage faible, où elle s'adimensionne comme la branche du continuum :

$$\frac{\hbar\omega_{\mathbf{q}}}{\Delta} \xrightarrow[\tilde{\Delta} \rightarrow 0]{\tilde{q} \text{ fixé}} \tilde{\omega}_{\tilde{q}}^{(0)} \quad (46)$$

et où elle résout la seconde équation de (23). Pour simplifier, négligeons dans cette dernière les petites corrections proportionnelles à la constante de couplage effective g . Alors $\tilde{\omega}_{\tilde{q}}^{(0)}$ est racine de $\tilde{z} \mapsto M_{++}^{(0)}(\tilde{z}, \tilde{q})$, sans nul besoin de prolongement analytique (contrairement au cas à température non nulle, où la ligne de coupure sur l'équation aux énergies propres atteint l'énergie nulle, et où l'on trouve jusqu'à quatre branches acoustiques complexes [22, 23]). Par résolution numérique, nous traçons la branche acoustique sur la Figure 2c : après un départ linéaire en le nombre d'onde réduit, elle sature rapidement (plus rapidement qu'une loi de puissance) à la valeur réduite 2, c'est-à-dire à l'énergie 2Δ du bord inférieur du continuum de paire brisée. Sur la même figure sont représentées en tireté les prédictions analytiques

$$\tilde{\omega}_{\tilde{q}}^{(0)} \underset{\tilde{q} \rightarrow 0}{=} \frac{\tilde{q}}{\sqrt{3}} \left[1 - \frac{\tilde{q}^2}{45} + \frac{17\tilde{q}^4}{28350} + O(\tilde{q}^6) \right] \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}_{\tilde{q}}^{(0)} - 2 \underset{\tilde{q} \rightarrow +\infty}{\sim} -16e^{-2} \exp[-(2\tilde{q}/\pi) \ln(\tilde{q}/e)] \quad (47)$$

Celle à faible \tilde{q} est tirée de la référence [21]. Celle à grand \tilde{q} est originale : nous la déduisons de la forme intégrale (33) de $M_{++}^{(0)}$.¹¹

4. Régime d'interaction quelconque : le cas des atomes froids dans le raccordement CBE-BCS

Dans un gaz d'atomes froids, les fermions de spins opposés sont sujets à des interactions de van der Waals à courte portée, de longueur de diffusion a virtuellement ajustable entre $-\infty$ et $+\infty$ par résonance de Feshbach. Dans le cas $a < 0$, cependant, les gaz sont toujours préparés dans le régime d'interaction forte $1 \lesssim k_{\text{F}}|a|$, qui seul assure une température critique de superfluidité réduite T_c/T_{F} pas trop faible donc accessible (on ne sait guère refroidir ces gaz de manière contrôlée en dessous de $T = 0,05T_{\text{F}}$, où T_{F} est la température de Fermi [9, 24]). Ceci contraste avec la limite d'interaction faible $k_{\text{F}}|a| \ll 1$ de la Section 3. L'état fondamental du gaz reste qualitativement le même, c'est-à-dire un condensat de paires $\uparrow\downarrow$ liées par le mécanisme de Cooper en présence de mers de Fermi, mais la théorie BCS devient moins quantitative. De plus, sous peine d'avoir de fortes pertes à trois corps, les expériences ne sortent pas du régime dilué $k_{\text{F}}b \ll 1$, où b est la portée des interactions¹²; cette condition, jointe à $1 \lesssim k_{\text{F}}|a|$, impose désormais que $|a| \gg b$: l'interaction devient résonnante dans l'onde s . Dans le cas $a > 0$, il existe pour $b \lesssim a$ un dimère $\uparrow\downarrow$ de diamètre caractéristique a dans l'espace libre et les paires liées peuvent se former indépendamment de l'existence de mers de Fermi; à suffisamment faible densité, la distance moyenne entre fermions est $\gg a$ et l'état fondamental du gaz tend vers un condensat de Bose-Einstein (CBE) de dimères. Même dans ce cas, les expériences se limitent au régime résonnant $a \gg b$, sinon le gaz de dimères aurait une courte durée de vie sous l'effet des pertes à trois corps.¹³ En pratique, les études expérimentales se concentrent sur le

¹¹ Il a fallu pour cela venir à bout d'une intégrale non triviale, $\int_0^1 dx(E(x) - E(0) - x^2[E(1) - E(0)])/x(1 - x^2)^{3/2} = \int_0^1 du(E(u') - E(1))/u^2 + \int_0^1 du(E(u') - E(0))/(1 - u^2) = 1 + (\pi/2)(\ln 2 - 1)$ où l'on a effectué le changement de variable $x = u'$, avec la notation $u' = (1 - u^2)^{1/2}$ comme dans la Section 8.111 de la référence [20].

¹² Nous nous limitons ici, comme dans la plupart des expériences, à une résonance de Feshbach magnétique large, où la portée vraie b et la portée effective r_e sont de l'ordre de la longueur de van der Waals $\ell = (mC_6/\hbar^2)^{1/4}$, au contraire des résonances étroites pour lesquelles $-r_e \gg b \approx \ell$.

¹³ Le taux de collision élastique deviendrait plus faible que le taux inélastique, ce qui compromettrait le refroidissement par évaporation [25].

raccordement entre les deux cas limites BCS $k_F a \rightarrow 0^-$ et CBE $k_F a \rightarrow 0^+$, dans l'intervalle de croisement $-1 \lesssim 1/k_F a \lesssim 1$ rendu non trivial par la force des interactions et rendu universel par la condition partout satisfaite $|a| \gg b$ [26–28].

Dans notre modèle, la portée de l'interaction est représentée par le pas b du réseau cubique. La condition de diffusion résonnante $|a| \gg b$ (sachant qu'on a toujours toujours $k_F b \ll 1$) nous autorise donc à prendre la limite continue $b \rightarrow 0$, ce qui amène quelques simplifications bienvenues (Section 4.1). Les densités spectrales qui en résultent peuvent être calculées analytiquement (Section 4.2). Après avoir présenté des observables du mode du continuum complémentaires de sa relation de dispersion (Section 4.3), nous effectuons une étude numérique (Section 4.4), puis une étude analytique fouillée en distinguant la limite des faibles nombres d'onde (Section 4.5), celle d'un faible paramètre d'ordre $\Delta/\mu \ll 1$ (Section 4.6) et celle d'un potentiel chimique faible et positif $\Delta/\mu \gg 1$ (Section 4.7). Tous ces résultats sur la branche du continuum sont obtenus pour $\mu > 0$, où le spectre d'excitation BCS $\epsilon_{\mathbf{k}} = [(E_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \Delta^2]^{1/2}$ atteint son minimum en le nombre d'onde non nul $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$, et par prolongement analytique de l'équation aux énergies propres par la fenêtre naturelle que délimitent ses deux premiers points de branchement $\epsilon_1(q)$ et $\epsilon_2(q)$, ce qui impose $0 < q < 2k_0$ [3]. Nous généralisons cependant l'étude dans la Section 4.8 en effectuant un prolongement analytique par les autres fenêtres (d'énergie supérieure à $\epsilon_2(q)$) et en considérant le cas $\mu < 0$ où le spectre BCS est minimal en $k = 0$.

4.1. La limite continue ou de portée nulle $b \rightarrow 0$

Faisons tendre vers zéro le pas b du modèle sur réseau à longueur de diffusion a fixée. On peut d'abord remplacer la première zone de Brillouin \mathcal{D} par \mathbb{R}^3 dans les intégrales Σ de (8); elles ont été construites pour avoir dans cette limite une valeur finie et non nulle. On remarque ensuite, sur son expression donnée au début de la Section 2, que la constante de couplage sur site g_0 tend vers zéro. On peut donc remplacer g_0 par zéro dans la troisième colonne de la matrice M de l'équation (7), ce qui simplifie grandement l'écriture du déterminant de M dans l'équation aux énergies propres (11) :

$$\det M(z, \mathbf{q}) = M_{++}(z, \mathbf{q})M_{--}(z, \mathbf{q}) - [M_{+-}(z, \mathbf{q})]^2 \quad (48)$$

où M_{ss} sont les éléments diagonaux et $M_{+-} = M_{-+}$ les éléments non diagonaux du bloc 2×2 supérieur gauche de M .¹⁴ Pour la même raison, l'inverse M^{-1} apparaissant dans la dépendance en temps (6) des variables collectives se simplifie : les petits écarts à l'équilibre en phase et en module du paramètre d'ordre ne dépendent plus que des deux premières composantes du vecteur source de (6), ce qui permet, sans prendre trop de place, d'en donner l'écriture parlante faisant apparaître le déterminant de M au dénominateur :

$$\begin{pmatrix} \delta\Delta_{\mathbf{q}}(t) - \delta\Delta_{-\mathbf{q}}^*(t) \\ \delta\Delta_{\mathbf{q}}(t) + \delta\Delta_{-\mathbf{q}}^*(t) \end{pmatrix} = \int_{i\eta-\infty}^{i\eta+\infty} \frac{dz}{2i\pi} \frac{e^{-izt/\hbar}}{\det M(z, \mathbf{q})} \begin{pmatrix} M_{--}(z, \mathbf{q}) & -M_{+-}(z, \mathbf{q}) \\ -M_{+-}(z, \mathbf{q}) & M_{++}(z, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{W^+y^-}^z(z, \mathbf{q}) + \Sigma_{W^+y^+}^e(z, \mathbf{q}) \\ \Sigma_{W^-y^+}^z(z, \mathbf{q}) + \Sigma_{W^-y^-}^e(z, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \quad (49)$$

En revanche, le petit écart en densité $\delta\rho_{\mathbf{q}}(t)$ dépend des trois composantes du vecteur source et fait intervenir d'autres éléments de matrice de M que ceux de (48); pour alléger, nous ne l'étudierons donc pas ici, bien qu'il soit plus directement mesurable que les écarts sur le paramètre d'ordre.

¹⁴L'équation (48) figure déjà dans [1]. Elle est aussi équivalente, compte tenu des identités (25), à la limite de température nulle de l'équation (2.6) de [2], si ce n'est que cette référence approxime le potentiel chimique μ par l'énergie de Fermi ϵ_F dans la relation de dispersion BCS.

Pour les études numériques et analytiques à venir, il convient d'exprimer les éléments de matrice utiles de M en termes des densités spectrales (13) correspondantes, ces dernières étant de toute façon requises par le prolongement analytique à la Nozières (12). C'est tout de suite fait dans le cas de M_{+-} : il suffit d'insérer dans l'intégrande (8) de $\Sigma_{W^+W^-}^z$ l'intégrale de $\delta(\epsilon - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})$ sur toutes les énergies $\epsilon \geq 2\Delta$, qui vaut visiblement un, puis d'échanger l'intégration sur le vecteur d'onde \mathbf{k} et sur ϵ pour faire apparaître la densité spectrale ρ_{+-} comme dans (13). On obtient

$$M_{+-}(z, \mathbf{q}) = (2\pi)^{-3} \int_{2\Delta}^{+\infty} d\epsilon \rho_{+-}(\epsilon, \mathbf{q}) \left(\frac{1}{z-\epsilon} + \frac{1}{z+\epsilon} \right) \quad (50)$$

Le cas des éléments diagonaux M_{ss} , $s = \pm$, est rendu plus délicat par la nécessaire présence du contre-terme $1/2\epsilon_{\mathbf{k}}$; avant d'appliquer la même procédure que pour M_{+-} , on introduit donc une coupure A arbitrairement grande sur l'énergie $\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ d'une paire brisée, au moyen d'un facteur $\Theta(A - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})$ (Θ est la fonction de Heaviside), puis on sépare le contre-terme du reste. Dans le reste, on utilise une astuce moins-plus, tirant parti du fait que les densités spectrales $\rho_{ss}(\epsilon, \mathbf{q})$ sont équivalentes à haute énergie à $\rho_{\infty}(\epsilon) = \pi(m/\hbar^2)^{3/2}\epsilon^{1/2}$, proportionnelle à la densité d'états d'une particule libre de masse $m/2$.¹⁵ Il vient finalement :

$$M_{ss}(z, \mathbf{q}) = \frac{C(\Delta)}{(2\pi)^3} + (2\pi)^{-3} \int_{2\Delta}^{+\infty} d\epsilon \left[\rho_{ss}(\epsilon, \mathbf{q}) \left(\frac{1}{z-\epsilon} - \frac{1}{z+\epsilon} \right) + \frac{2}{\epsilon} \rho_{\infty}(\epsilon) \right], \quad \forall s \in \{+, -\} \quad (51)$$

Dans la scorie de régularisation

$$C(\Delta) = 4\rho_{\infty}(2\Delta) + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}}} - \frac{2m}{\hbar^2 k^2} \right) = 2\pi \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \Delta^{1/2} [1 + I_1(\mu/\Delta)] \quad (52)$$

apparaît une intégrale sur \mathbf{k} déjà calculée analytiquement dans [19], voir la fonction $I_1(\mu/\Delta)$ de cette référence, mais dont nous donnons ici, par paramétrage hyperbolique, l'expression plus compacte $I_1(\text{sh } \tau) = \text{ch } \tau (2e^\tau)^{1/2} K(\text{ie}^\tau) - (2e^{-\tau})^{1/2} E(\text{ie}^\tau)$, où E et K sont les intégrales elliptiques complètes de seconde et première espèce comme dans la Section 8.112 de la référence [20]. Pour être complets, signalons qu'une forme plus belle, sans scorie de régularisation mais avec un contre-terme plus élaboré, se déduit aisément des identités¹⁶

$$M_{++}(0, \mathbf{0}) = M_{--}(2\Delta, \mathbf{0}) = 0 \quad (53)$$

Il suffit de soustraire à (51) avec $s = +$ sa valeur pour $(z = 0, \mathbf{q} = \mathbf{0})$, qui est nulle, et à (51) avec $s = -$ sa valeur pour $(z = 2\Delta, \mathbf{q} = \mathbf{0})$, nulle aussi, pour obtenir

$$M_{++}(z, \mathbf{q}) = (2\pi)^{-3} \int_{2\Delta}^{+\infty} d\epsilon \left[\rho_{++}(\epsilon, \mathbf{q}) \left(\frac{1}{z-\epsilon} - \frac{1}{z+\epsilon} \right) + \frac{2}{\epsilon} \rho_{++}(\epsilon, \mathbf{0}) \right] \quad (54)$$

$$M_{--}(z, \mathbf{q}) = (2\pi)^{-3} \int_{2\Delta}^{+\infty} d\epsilon \left[\rho_{--}(\epsilon, \mathbf{q}) \left(\frac{1}{z-\epsilon} - \frac{1}{z+\epsilon} \right) - \rho_{--}(\epsilon, \mathbf{0}) \left(\frac{1}{2\Delta-\epsilon} - \frac{1}{2\Delta+\epsilon} \right) \right] \quad (55)$$

¹⁵Asymptotiquement, l'introduction du facteur $\Theta(A - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})$ revient à mettre une coupure sur le nombre d'onde k ou sur l'énergie cinétique $E_{\mathbf{k}}$ puisque $\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = 2E_{\mathbf{k}} + O(1)$ lorsque $k \rightarrow +\infty$. Comme les poids $W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^{\pm}$ tendent vers 1 dans cette limite, avec un écart $O(1/k^4)$, on en déduit que $\rho_{ss}(\epsilon, \mathbf{q}) \sim \rho_{\infty}(\epsilon)$ comme annoncé. Dans l'intégrale sur ϵ encore coupée à A par le facteur $\Theta(A - \epsilon)$, on soustrait à l'intégrande son équivalent $(-2/\epsilon)\rho_{\infty}(\epsilon)$, ce qui permet de passer à la limite $A \rightarrow +\infty$; l'intégrale du bout restant $\int_{2\Delta}^A d\epsilon (-2/\epsilon)\rho_{\infty}(\epsilon)$ est facile à calculer. Dans l'intégrale sur \mathbf{k} du contre-terme, encore coupée par $\Theta(A - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}})$, on soustrait de même à $1/2\epsilon_{\mathbf{k}}$ son équivalent $1/2E_{\mathbf{k}}$, ce qui permet de passer à la limite $A \rightarrow +\infty$; l'intégrale du bout restant $\int d^3\mathbf{k} \Theta(A - \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}) / 2E_{\mathbf{k}}$ se calcule aisément à la limite des grands A puisqu'on peut y remplacer $\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ par $2E_{\mathbf{k}}$.

¹⁶On les établit par substitution directe dans les formes intégrales (8) : compte tenu de (10) et de $\epsilon_{\mathbf{k}}^2 = \xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2$, l'intégrande est identiquement nul.

Les densités spectrales ont une expression analytique simple à vecteur d'onde nul,¹⁷ mais nettement moins simple à \mathbf{q} non nul comme il apparaîtra dans la section suivante 4.2.

4.2. Calcul analytique des densités spectrales

4.2.1. Les points de non-analyticité $\epsilon_1(q)$, $\epsilon_2(q)$ et $\epsilon_3(q)$

Pour effectuer le prolongement analytique des éléments de matrice $M_{ss'}(z, \mathbf{q})$ comme dans (12), il faut d'abord trouver les points de non-analyticité en ϵ des densités spectrales correspondantes $\rho_{ss'}(\epsilon, \mathbf{q})$ sur l'axe réel. Ce travail a été effectué qualitativement dans la référence [3] et l'origine physique de ces points a été expliquée. Nous en donnons donc ici une discussion purement quantitative.

Commençons par le cas le plus riche, $\mu > 0$ et $0 < q < 2k_0$, avec $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$ ici, qui présente deux ou trois points de non-analyticité. Les points extrêmes sont donnés par

$$\epsilon_1(q) = 2\Delta \quad \text{et} \quad \epsilon_3(q) = 2\epsilon_{q/2} = 2 \left[\left(\frac{\hbar^2 q^2}{8m} - \mu \right)^2 + \Delta^2 \right]^{1/2} \quad (56)$$

où $\epsilon_1(q)$ est simplement le bord inférieur du continuum de paire brisée [1, 29] ; leur expression figurerait dans [3]. Notons que $\epsilon_3(q)$ fusionne avec $\epsilon_1(q)$ en $q = 2k_0$, bord supérieur de l'intervalle en q considéré. Introduisons maintenant le nombre d'onde q_0 , fonction de la force de l'interaction mais toujours situé dans l'intervalle $[0, 2k_0]$:

$$\frac{1}{4}\check{q}_0^2 = 1 + \check{\Delta}^{2/3} \left[(1 + \check{\Delta}^2)^{1/2} - 1 \right]^{1/3} - \check{\Delta}^{2/3} \left[(1 + \check{\Delta}^2)^{1/2} + 1 \right]^{1/3} \quad (57)$$

où nous avons cru bon, pour alléger l'écriture, d'exprimer q_0 en unités de k_0 et le paramètre d'ordre Δ (ici largeur de la bande interdite BCS) en unités de μ . Cet adimensionnement, repéré par un accent tchèque, revient à poser $\hbar = 2m = k_0 = 1$ et pourra être appliqué à tout nombre d'onde q et toute énergie ϵ , comme suit :

$$\check{q} = \frac{q}{k_0} \quad \text{et} \quad \check{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\mu} \quad \text{avec} \quad k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar \quad \text{ici} \quad (58)$$

Alors, pour tout $q \in]0, q_0[$, il existe un point de non-analyticité médian $\epsilon_2(q)$, compris donc strictement entre $\epsilon_1(q)$ et $\epsilon_3(q)$, donné après adimensionnement par la plus grande racine réelle du polynôme de degré huit :

$$P_8(X) \equiv [X^2 - \check{q}^2(2 + \check{q})^2]^2 [X^2 - \check{q}^2(2 - \check{q})^2]^2 - 4\check{\Delta}^2 [X^2 - \check{q}^2(4 - \check{q}^2)] \{ [X^2 - \check{q}^2(4 - \check{q}^2)]^2 - 36\check{q}^4 X^2 \} - 432\check{\Delta}^4 \check{q}^4 X^2 \quad (59)$$

L'expression (57) de \check{q}_0 et celle (59) du polynôme $P_8(X)$ seront justifiées dans la Section 4.2.2. En $q = q_0$, ce point médian disparaît par fusion avec $\epsilon_3(q)$. Pour $q \in]q_0, 2k_0[$, il ne reste plus que les deux points (56), mais nous poserons cependant $\epsilon_2(q) = \epsilon_3(q)$ dans la suite pour alléger l'écriture.¹⁸ Cette discussion des points de non-analyticité est illustrée et résumée sur les Figures 3a et 3b. Nous la complétons par quelques résultats analytiques. D'abord, comme on le

¹⁷ Limitons-nous pour abrégier au cas $\mu > 0$ et introduisons les intermédiaires $\rho_{\pm}(\epsilon) = (\pi/2)(2m/\hbar^2)^{3/2} [\mu \pm (\epsilon^2 - 4\Delta^2)^{1/2}/2]^{1/2}$, avec $\rho_+(\epsilon)$ de support $[2\Delta, +\infty[$ et $\rho_-(\epsilon)$ de support $[2\Delta, 2(\Delta^2 + \mu^2)^{1/2}]$ (toute fonction est par définition nulle en dehors de son support). Alors $\rho_{--}(\epsilon, \mathbf{0}) = [\rho_+(\epsilon) + \rho_-(\epsilon)](\epsilon^2 - 4\Delta^2)^{1/2}/\epsilon$, $\rho_{++}(\epsilon, \mathbf{0}) = [\rho_+(\epsilon) + \rho_-(\epsilon)]\epsilon/(\epsilon^2 - 4\Delta^2)^{1/2}$ et $\rho_{+-}(\epsilon, \mathbf{0}) = \rho_+(\epsilon) - \rho_-(\epsilon)$.

¹⁸ La fonction « plus grande racine réelle de $P_8(X)$ » continue bien entendu à exister pour $q > q_0$; elle vient tangenter la fonction $\epsilon_3(q)$ en $q = q_0$ (même dérivée première mais pas seconde) et lui redevient strictement inférieure au-delà. Notons que $\epsilon_3(q)$ admet un point d'inflexion en $q = q_0$, $d^2\epsilon_3(q = q_0)/dq^2 = 0$, ce que prédit la méthode de la référence [3] : la première fonction $k \mapsto \epsilon_{k+q/2} + \epsilon_{|k-q/2|}$ introduite dans la note 19 à venir admet un maximum en $k = 0$ pour $q < q_0$ et un minimum pour $q > q_0$.

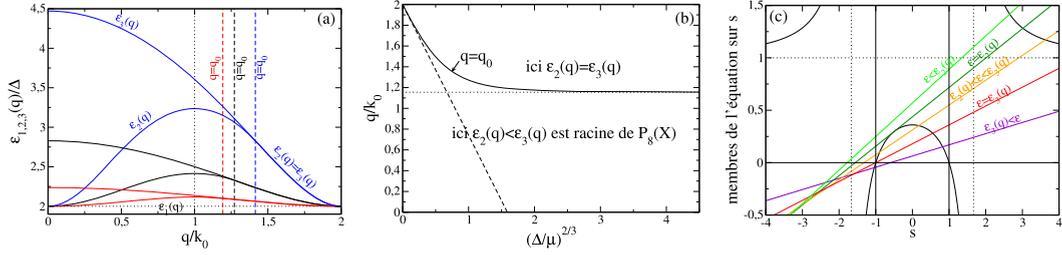


FIGURE 3. Pour un gaz de fermions en interaction de portée nulle (cas des atomes froids) et de potentiel chimique $\mu > 0$, on représente en (a) les énergies $\varepsilon_n(q)$, $n \in \{1, 2, 3\}$, des points de non-analyticité dans les densités spectrales $\varepsilon \mapsto \rho_{ss'}(\varepsilon, \mathbf{q})$ sur l'axe réel en fonction du nombre d'onde q en unités de $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$, pour différentes valeurs du paramètre d'ordre $\Delta/\mu = 1$ (en noir), $\Delta/\mu = 2$ (en rouge), $\Delta/\mu = 1/2$ (en bleu). Le pointillé horizontal noir représentant $\varepsilon_1(q) = 2\Delta$ est commun aux trois valeurs du couplage puisque les énergies sont exprimées en unités de Δ . Pour une valeur de Δ/μ donnée, le trait plein inférieur représente $\varepsilon_2(q)$ et le trait plein supérieur représente $\varepsilon_3(q)$, les deux courbes se rejoignant en un certain nombre d'onde critique $q = q_0(\Delta)$ (tireté vertical), donné par (57), au-delà duquel elles coïncident par convention ($\varepsilon_2(q) = \varepsilon_3(q)$). Les deux énergies $\varepsilon_{1,2}(q)$ se séparent en $q = 0$ et les trois énergies $\varepsilon_n(q)$ se rejoignent en $q = 2k_0$, quel que soit Δ . De même, la courbe $\varepsilon_2(q)$ atteint son maximum invariablement en $q = k_0$ (pointillé vertical noir), à gauche de $q = q_0$. On représente en (b) le nombre d'onde critique q_0 en fonction de Δ par un trait plein noir. Celui-ci sépare donc la bande $\mathbb{R}^+ \times [0, 2k_0]$ dans le plan (Δ, q) en un domaine supérieur où $\varepsilon_2(q) \equiv \varepsilon_3(q)$ est donnée par l'équation (56), et un domaine inférieur où $\varepsilon_2(q)/\mu < \varepsilon_3(q)/\mu$ est la plus grande racine réelle du polynôme $P_8(X)$ de l'équation (59). À la frontière, $\varepsilon_2(q)$ subit une transition du second ordre (continuité de $\varepsilon_2(q)$ et de sa dérivée première mais discontinuité de sa dérivée seconde $d^2\varepsilon_2(q)/dq^2$, voir la note 18). Tireté et pointillé : comportements aux limites (60) de q_0 . On effectue dans (c) une discussion graphique de l'équation (71) sur s en en représentant le membre de droite (trait plein noir, asymptotes verticales et horizontale en pointillé) et de gauche (droites obliques en couleur) en fonction de l'inconnue, pour $q = 2k_0/3$, $\varepsilon = 5\Delta/2$ et différentes valeurs de Δ/μ [2/3 (vert clair), 0,7607084 (vert foncé), 9/10 (orange), 32/27 (rouge), 2 (violet), de haut en bas en $s = 0$] : dans l'intervalle $[-1, 1]$, délimité par les fines lignes verticales continues, il y a alors successivement 0 racine (cas $\varepsilon < \varepsilon_2(q)$), 1 racine double (cas $\varepsilon = \varepsilon_2(q) < \varepsilon_3(q)$), 2 racines de valeur absolue < 1 (cas $\varepsilon_2(q) < \varepsilon < \varepsilon_3(q)$), 2 racines dont une égale à -1 (cas $\varepsilon = \varepsilon_3(q)$), et enfin 1 racine (cas $\varepsilon > \varepsilon_3(q)$). Dans les densités spectrales, il faut intégrer sur $s \in [-1, 1]$ là où la courbe noire est en dessous de la droite oblique tracée à l'énergie considérée (voir discussion autour de (71)).

voit sur la Figure 3b, \check{q}_0 admet les comportements limites suivants à faible couplage $\Delta/\mu \rightarrow 0^+$ et près du point d'annulation $\mu/\Delta \rightarrow 0^+$ du potentiel chimique :

$$\check{q}_0 \underset{\check{\Delta} \rightarrow 0}{=} 2 - 2^{1/3} \check{\Delta}^{2/3} + O(\check{\Delta}^{4/3}) \quad \text{et} \quad \check{q}_0 \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} + O(\check{\Delta}^{-2}) \quad (60)$$

et reste toujours supérieur à $2/\sqrt{3}$ donc à 1. Ensuite, comme on le voit sur la Figure 3a, $\varepsilon_2(q)$ présente, en fonction de q , un maximum absolu en $q = k_0$, autour duquel on dispose du développement limité :

$$\check{\varepsilon}_2(\check{q}) \underset{\check{q} \rightarrow 1}{=} \check{\Delta} + (1 + \check{\Delta}^2)^{1/2} - \frac{(\check{q} - 1)^2}{(1 + \check{\Delta}^2)^{1/2} - \check{\Delta}/2} + O(\check{q} - 1)^3 \quad (61)$$

En $q = 0$, $\epsilon_2(q)$ rejoint quadratiquement le point de non-analyticité $\epsilon_1(q)$, comme l'écrivait déjà la référence [3] :

$$\check{\epsilon}_2(\check{q}) \underset{\check{q} \rightarrow 0}{=} 2\check{\Delta} + \check{q}^2/\check{\Delta} + O(\check{q}^4) \tag{62}$$

Enfin, dans les limites de grand et de faible Δ/μ prises à q/k_0 fixé, on dispose des expressions simples

$$\begin{aligned} \check{\epsilon}_2(\check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\check{q} < \check{q}_0(\infty) = 2/\sqrt{3}} &= 2\check{\Delta} + \frac{\check{q}^2(2 - \check{q}^2)}{2\check{\Delta}} + O(1/\check{\Delta}^3) \text{ et} \\ \check{\epsilon}_2(\check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow 0^+}{\check{q} \text{ fixé} \in]0, 2[} &= \check{q}(2 - \check{q}) + \check{\Delta}\check{q}^{1/2}(2 - \check{q})^{1/2} + \check{\Delta}^2 \frac{1 + \check{q}^2}{4\check{q}} + O(\check{\Delta}^3) \end{aligned} \tag{63}$$

Précisons la nature des singularités des densités spectrales en les énergies ϵ_i . $\epsilon_2(q)$ et $\epsilon_3(q)$ sont des points anguleux pour les trois densités spectrales ρ_{++} , ρ_{--} et ρ_{+-} . $\epsilon_1(q)$ est un point de discontinuité pour ρ_{++} et un point anguleux pour ρ_{--} , voir (74), mais n'est rien pour la densité spectrale ρ_{+-} qui reste nulle aux énergies positives jusqu'à $\epsilon = \epsilon_2(q)$.

Terminons par les cas les plus pauvres : lorsque $\mu > 0$ mais $q > 2k_0$, ou lorsque $\mu < 0$ (la relation de dispersion BCS $\epsilon_{\mathbf{k}}$ est alors minimale en $k = 0$) mais q quelconque, il ne reste plus qu'un seul point de non-analyticité des densités spectrales sur l'axe réel, à savoir $\epsilon = \epsilon_3(q)$ [3], qui n'est autre que le bord inférieur du continuum de paire brisée au nombre d'onde q [1, 29].¹⁹

4.2.2. Expressions des densités spectrales

Dans la limite continue du modèle sur réseau, les densités spectrales (13) peuvent être exprimées analytiquement en termes d'intégrales elliptiques. Cette percée calculatoire va beaucoup simplifier les études numériques et analytiques qui suivent ; en particulier, elle permet d'effectuer immédiatement le prolongement analytique des densités spectrales aux énergies z complexes comme le requiert la procédure (12), puisque les propriétés des intégrales elliptiques dans le plan complexe sont connues.²⁰ Nous donnons ici les expressions des densités spectrales dans le cas le plus intéressant $\mu > 0$ et $0 < q < 2k_0$, voir la Table 2. Pour rendre l'écriture compacte, nous avons adimensionné l'énergie ϵ et le nombre d'onde q comme dans (58), les densités spectrales comme suit :

$$\rho_{ss'}(\epsilon, \mathbf{q}) = \frac{2mk_0}{\hbar^2} \check{\rho}_{ss'}(\check{\epsilon}, \check{q}) \tag{64}$$

puis nous avons introduit aux énergies $\epsilon \geq 2\Delta$ les changements de variable hyperboliques ($\Omega \geq 0$),

$$\text{ch}\Omega = \frac{\check{\epsilon}}{2\check{\Delta}}, \quad \text{sh}\Omega = \frac{(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}}{2\check{\Delta}} \quad \text{et} \quad \text{th}\Omega = \frac{(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}}{\check{\epsilon}} \tag{65}$$

¹⁹ Ces résultats sont obtenus avec la méthode de la référence [3], qui relie les points de non-analyticité en énergie des densités spectrales aux extrema absolus ou relatifs des fonctions $k \mapsto \max_u \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} = \epsilon_{k+q/2} + \epsilon_{|k-q/2|}$ et $k \mapsto \min_u \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} = 2\epsilon_{(k^2+q^2/4)^{1/2}}$ où $u = \cos(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{q}})$. Dans les deux cas pauvres considérés, ces fonctions sont strictement croissantes sur \mathbb{R}^+ car $-\mu + \hbar^2 q^2/8m > 0$.

²⁰ Les intégrales elliptiques $E(\phi, k)$ et $F(\phi, k)$ admettent en fonction de k^2 , dans leur détermination habituelle, la ligne de coupure $k^2 \sin^2 \phi \in [1, +\infty[$, soit celle de $(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}$.

et défini les fonctions suivantes d'un angle $\psi \in [0, \pi]$,

$$f_{--}(\psi) \equiv \int_0^\psi \frac{d\alpha \cos^2 \alpha \operatorname{sh}^2 \Omega}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \alpha)^{3/2}} = E(\psi, i \operatorname{sh} \Omega) + \frac{\operatorname{sh}^2 \Omega \sin \psi \cos \psi}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \psi)^{1/2}} - F(\psi, i \operatorname{sh} \Omega) \\ = \operatorname{ch} \Omega E(u, \operatorname{th} \Omega) - \frac{F(u, \operatorname{th} \Omega)}{\operatorname{ch} \Omega} \tag{66}$$

$$f_{++}(\psi) \equiv \int_0^\psi \frac{d\alpha \operatorname{ch}^2 \Omega}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \alpha)^{3/2}} = E(\psi, i \operatorname{sh} \Omega) + \frac{\operatorname{sh}^2 \Omega \sin \psi \cos \psi}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \psi)^{1/2}} = \operatorname{ch} \Omega E(u, \operatorname{th} \Omega) \tag{67}$$

$$f_{+-}(\psi) \equiv \int_0^\psi \frac{d\alpha \cos \alpha \operatorname{sh} \Omega \operatorname{ch} \Omega}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \alpha)^{3/2}} = \frac{\operatorname{sh} \Omega \operatorname{ch} \Omega \sin \psi}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \psi)^{1/2}} \tag{68}$$

où $E(\phi, k)$ et $F(\phi, k)$ sont les intégrales elliptiques de seconde et première espèce dans la convention de la Section 8.111 de [20], on a utilisé la Section 8.127 de [20] et on a posé

$$u = \operatorname{acos} \frac{\cos \psi}{(1 + \operatorname{sh}^2 \Omega \sin^2 \psi)^{1/2}} \tag{69}$$

Les calculs conduisant à ces résultats sont exposés dans l'Annexe A.2, mais donnons-en ici les grandes lignes. Dans la forme intégrale (13) des densités spectrales, écrite en coordonnées sphériques d'axe \mathbf{q} , on effectue immédiatement l'intégration sur l'angle azimutal grâce à l'invariance par rotation d'axe \mathbf{q} puis, avec plus d'effort, sur l'angle polaire grâce à la distribution de Dirac fixant l'énergie de la paire brisée dans l'intégrande. Il reste à intégrer sur le nombre d'onde k . Cependant, les angles polaires annulant l'argument du Dirac doivent prendre des valeurs physiques, ce qui impose des contraintes sur k . D'abord, ils doivent être réels, ce qui restreint k à un certain segment que l'on paramètre de manière astucieuse comme suit :

$$\check{k}^2 + \frac{\check{q}^2}{4} - 1 \equiv \frac{1}{2} (\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2} s \quad \text{où } s \in [-1, 1] \tag{70}$$

L'intégrale sur k se ramène donc à une intégrale sur s . Ensuite, ils doivent être dans l'intervalle $[0, \pi]$. Pour implémenter cette contrainte, il faut résoudre l'équation du troisième degré suivante sur s , qui exprime le fait que les angles polaires en question atteignent les bords 0 et π de l'intervalle permis :

$$\boxed{\frac{4\check{q}^2}{\check{\epsilon}^2} \left[\frac{1}{2} (\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2} s + 1 - \frac{\check{q}^2}{4} \right] = \frac{1 - s^2}{\frac{\check{\epsilon}^2}{\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2} - s^2}} \tag{71}$$

Les angles polaires sont entre 0 et π lorsque le second membre de (71) est inférieur au premier. La discussion graphique sur la Figure 3c montre que, pour q assez petit, trois cas se présentent : (i) à énergie assez faible, l'équation (71) n'admet aucune racine dans l'intervalle $[-1, 1]$, et l'on peut donc intégrer sur s dans tout $[-1, 1]$; (ii) aux énergies intermédiaires, l'équation (71) admet deux racines s_1 et s_2 ($s_1 < s_2$) dans $[-1, 1]$, et l'on doit intégrer sur s dans $[-1, s_1] \cup [s_2, 1]$; (iii) à énergie assez élevée, la racine s_1 passe sous -1 et l'équation (71) admet s_2 comme seule racine dans $[-1, 1]$, si bien qu'on doit intégrer sur s dans $[s_2, 1]$. Ces changements de topologie du domaine d'intégration sur s sont à l'origine des points de non-analyticité des densités spectrales. Le point $\epsilon = \epsilon_2(q)$ de la Section 4.2.1 correspond à la transition entre les cas (i) et (ii) : $s_1 = s_2$ est racine double et le discriminant de l'équation (71) s'annule, ce qui conduit à $P_8(\check{\epsilon}_2(q)) = 0$, où $P_8(X)$ est le polynôme (59).²¹ Le point $\epsilon = \epsilon_3(q)$ de la Section 4.2.1 correspond à la transition entre les cas

²¹Il reste à montrer que $\check{\epsilon}_2(\check{q})$ est la plus grande racine réelle de $P_8(X)$. À cette fin, travaillons sur le polynôme $P_4(X)$ de degré 4 à coefficients réels tel que $P_8(X) = P_4(X^2)$. Dans la méthode de Lagrange, les racines de $P_4(X)$ s'expriment en fonction de celles du polynôme de degré 3 associé $R(X)$ appelé cubique résolvante. Nous disposons du résultat suivant : si $R(X)$ (à coefficients réels) admet une seule racine réelle, celle-ci est positive et $P_4(X)$ possède deux racines réelles x_1 et x_2 et deux racines complexes conjuguées z_0 et z_0^* . Or, $R(X)$ n'a effectivement qu'une seule racine réelle puisque son

(ii) et (iii) : on a alors $s_1 = -1$, comme on peut le vérifier par substitution directe de s par -1 dans (71). Quand q est trop grand, le scénario se simplifie : lorsqu'on fait croître l'énergie en partant du cas (i), une racine double $s_1 = s_2$ apparaît certes dans (71), mais cette racine est < -1 , elle n'est pas dans l'intervalle $[-1, 1]$ et l'on peut continuer à intégrer sur $s \in [-1, 1]$; l'énergie continuant à croître, s_2 atteint -1 puis le dépasse alors que s_1 reste < -1 : on a sauté directement du cas (i) au cas (iii). La valeur q_0 de q séparant les deux scénarios (i) \rightarrow (ii) \rightarrow (iii) et (i) \rightarrow (iii) est donc telle que la racine double $s_1 = s_2$ de (71) apparaisse exactement en -1 ; en écrivant que $s = -1$ est racine de (71) et de sa dérivée par rapport à s , nous tombons sur une équation cubique sur q^2 , équivalente à la condition $d^2\epsilon_3(q)/dq^2 = 0$ de la note 18, et dont (57) est effectivement la solution réelle.

Pour être complets, donnons, lorsque $\epsilon > \epsilon_2(q)$, l'expression des deux plus petites racines réelles s_1 et s_2 de l'équation (71) en termes de l'angle de Cardan γ décrivant $[0, \pi]$:

$$s_{1,2} = \frac{Y_q}{6\check{q}^2(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}} - \frac{(Y_q^2 + 12\check{q}^4\check{\epsilon}^2)^{1/2}}{3\check{q}^2(\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}} \cos \frac{\pi \mp \gamma}{3} \quad \text{où} \tag{72}$$

$$Y_q = \check{\epsilon}^2 - \check{q}^2(4 - \check{q}^2) \quad \text{et} \quad \gamma = \arccos \frac{Y_q(Y_q^2 - 36\check{\epsilon}^2\check{q}^4) + 216\check{\epsilon}^2\check{q}^4\check{\Delta}^2}{(Y_q^2 + 12\check{q}^4\check{\epsilon}^2)^{3/2}}$$

Notons aussi que le changement de variable $s = \cos \alpha$, où $\alpha \in [0, \pi]$, a été effectué, comme on le voit sur la variable d'intégration dans la définition des fonctions $f_{ss'}(\psi)$ et sur la valeur de leur argument dans la Table 2. Enfin, on peut vérifier que, dans la limite de couplage faible $\Delta/\mu \rightarrow 0^+$ à $\bar{q} = 2\check{q}/\check{\Delta}$ et $\bar{\epsilon} = \check{\epsilon}/\check{\Delta}$ fixés comme le prescrit (14), les Tables 1 et 2 sont en accord; remarque amusante, il y a en fait accord parfait sur les densités spectrales $\rho_{ss}^{[III]}$ même avant prise de la limite (seule la borne supérieure de l'intervalle II est différente à Δ/μ non infinitésimal). Les calculs conduisant à la Table 2 s'étendent aisément à q quelconque et à un signe de μ quelconque; ainsi, pour $\mu > 0$ mais $q > 2k_0$, les densités spectrales sont identiquement nulles pour $\epsilon < \epsilon_3(q)$ et de la forme III sinon, comme il ressort de la fin de la Section 4.2.1.

4.2.3. Comportement des densités spectrales à haute énergie et au bord du continuum

Donnons deux applications très simples des expressions des densités spectrales de la Table 2. La première est un développement asymptotique à haute énergie,

$$\begin{pmatrix} \check{\rho}_{++}(\check{\epsilon}, \check{q}) \\ \check{\rho}_{--}(\check{\epsilon}, \check{q}) \\ \check{\rho}_{+-}(\check{\epsilon}, \check{q}) \end{pmatrix}_{\check{\epsilon} \rightarrow +\infty} = \frac{\pi}{8^{1/2}} \left[(\check{\epsilon}^2 + 4\check{\Delta}^2)^{1/2} + 2 - \frac{\check{q}^2}{2} \right]^{1/2} \begin{pmatrix} [1 + (4\check{\Delta}^2/\check{\epsilon}^3)(1 - 5\check{q}^2/12) + O(\check{\epsilon}^{-4})] \\ (\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)\check{\epsilon}^{-2} [1 + (4\check{\Delta}^2/\check{\epsilon}^3)(1 - 13\check{q}^2/12) + O(\check{\epsilon}^{-4})] \\ (\check{\epsilon}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}\check{\epsilon}^{-1} [1 + (4\check{\Delta}^2/\check{\epsilon}^3)(1 - 3\check{q}^2/4) + O(\check{\epsilon}^{-4})] \end{pmatrix} \tag{73}$$

utile surtout pour contrôler et réduire les erreurs de troncature en énergie dans les calculs numériques de la Section 4.4. À l'ordre de ce développement, pourtant assez élevé, on a l'impression que ρ_{+-} est la moyenne géométrique de ρ_{++} et ρ_{--} , ce qui n'est vrai sur aucun voisinage de l'infini [voir les intégrales dans (66), (67) et (68)] sauf si $q = 0$ (voir la note 17). La deuxième

discriminant de Cardan $\delta = (512^2/27)\check{\Delta}^4(1 + \check{\Delta}^2)\check{q}^{12}[27\check{\Delta}^4 + 72\check{\Delta}^2\check{q}^4 + 16\check{q}^6(4 - \check{q}^2)]^3$ est > 0 pour $0 < \check{q} < 2$. Pour montrer que x_1 et x_2 sont de même signe, nous utilisons la relation de Viète $x_1 x_2 |z_0|^2 = P_4(0) = \check{q}^6(4 - \check{q}^2)^3[4\check{\Delta}^2 + \check{q}^2(4 - \check{q}^2)] > 0$. Enfin, les racines x_1 et x_2 sont > 0 puisque l'une d'elles n'est autre que $\check{\epsilon}_2^2(q)$; pour montrer que celle-ci est la plus grande des deux, on vérifie que c'est vrai pour $\check{\Delta} \rightarrow +\infty$ ($\check{\epsilon}_2^2(q)$ est la seule racine de $P_4(X)$ qui diverge) puis on utilise un argument de continuité jusqu'à $\check{\Delta} = 0^+$ (le résultant de $P_4(X)$ et du polynôme dérivé $P_4'(X)$, proportionnel à δ , ne s'annule jamais donc $P_4(X)$ n'a aucune racine double, et x_1 et x_2 ne peuvent se croiser). Cette démonstration ne vaut pas pour $\check{\Delta} = 0$, où z_0 a une limite réelle, x_1 et x_2 se confondent et $\check{\epsilon}_2^2(q)$ est cette fois la plus petite racine de $P_4(X)$.

TABLE 2. Densités spectrales --, ++ et +- de (13) dans la limite continue $b \rightarrow 0$ de notre modèle sur réseau, en fonction de l'énergie $\epsilon > 0$. La force des interactions est quelconque mais nous nous sommes limités au cas le plus riche $\mu > 0$ et $0 < q < 2k_0$, où $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$ est le nombre d'onde minimisant la relation de dispersion BCS $\epsilon_{\mathbf{k}}$. Sur chaque intervalle entre l'énergie nulle, les points de non-analyticité ϵ_i donnés dans la Section 4.2.1 et l'énergie infinie, ce sont des fonctions lisses de ϵ dont les prolongements analytiques aux énergies complexes diffèrent, d'où leur numérotation en chiffres romains. $E(k)$ et $K(k)$ sont les intégrales elliptiques complètes de seconde et de première espèce (voir la Section 8.112 de [20]); $\Omega \in]0, +\infty[$ est un paramétrage hyperbolique commode (65) de l'énergie lorsqu'elle est supérieure à 2Δ ; dans la quatrième et la cinquième ligne de la table, les deux formes données sont équivalentes puisque $E(\text{th}\Omega) = E(\text{ish}\Omega)/\text{ch}\Omega$ et $K(\text{th}\Omega) = \text{ch}\Omega K(\text{ish}\Omega)$, y compris pour Ω complexe tant que $\text{Re ch}\Omega > 0$; les fonctions f_{--} , f_{++} et f_{+-} sont celles des équations (66), (67) et (68); s_1 et s_2 sont les racines réelles de (71) inférieures à 1 rangées dans l'ordre croissant, lorsqu'elles existent, et sont données par (72). Lorsque $q > q_0$, où q_0 est donné par (57), on a en fait $\epsilon_2(q) = \epsilon_3(q)$ (voir la Section 4.2.1). Les énergies et nombres d'onde sont adimensionnés comme dans (58) et les densités spectrales comme dans (64).

$\check{\epsilon} < 2\check{\Delta}$	$\check{\rho}_{--}^{[I]}(\check{\epsilon}, \check{q}) = 0$ $\check{\rho}_{++}^{[I]}(\check{\epsilon}, \check{q}) = 0$ $\check{\rho}_{+-}^{[I]}(\check{\epsilon}, \check{q}) = 0$
$2\check{\Delta} < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_2(\check{q})$	$\check{\rho}_{--}^{[II]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \pi \left[\frac{\check{\epsilon}}{2\check{q}} E(\text{th}\Omega) - \frac{2\check{\Delta}^2}{\check{q}\check{\epsilon}} K(\text{th}\Omega) \right] = \frac{\pi\check{\Delta}}{\check{q}} [E(\text{ish}\Omega) - K(\text{ish}\Omega)]$ $\check{\rho}_{++}^{[II]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \pi \left[\frac{\check{\epsilon}}{2\check{q}} E(\text{th}\Omega) \right] = \frac{\pi\check{\Delta}}{\check{q}} E(\text{ish}\Omega)$ $\check{\rho}_{+-}^{[II]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv 0$
$\check{\epsilon}_2(\check{q}) < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_3(\check{q})$	$\check{\rho}_{--}^{[III]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \left[f_{--} \left(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2 \right) + f_{--} \left(\frac{\pi}{2} + \text{asin } s_1 \right) \right]$ $\check{\rho}_{++}^{[III]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \left[f_{++} \left(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2 \right) + f_{++} \left(\frac{\pi}{2} + \text{asin } s_1 \right) \right]$ $\check{\rho}_{+-}^{[III]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \left[f_{+-} \left(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2 \right) - f_{+-} \left(\frac{\pi}{2} + \text{asin } s_1 \right) \right]$
$\check{\epsilon}_3(\check{q}) < \check{\epsilon}$	$\check{\rho}_{--}^{[IV]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \left[f_{--} \left(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2 \right) \right]$ $\check{\rho}_{++}^{[IV]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \left[f_{++} \left(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2 \right) \right]$ $\check{\rho}_{+-}^{[IV]}(\check{\epsilon}, \check{q}) \equiv \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \left[f_{+-} \left(\frac{\pi}{2} - \text{asin } s_2 \right) \right]$

application est un développement limité au bord inférieur 2Δ du continuum de paire brisée (ici $0 < \check{q} < 2$) :

$$\begin{aligned}
 \check{\rho}_{++}(\check{\epsilon}, \check{q}) &= \frac{\pi^2}{\check{\epsilon} \rightarrow 2\check{\Delta}^+ 2\check{q}} \left[\check{\Delta} + \frac{1}{4}(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta}) + O(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta})^2 \right] \quad \text{et} \\
 \check{\rho}_{--}(\check{\epsilon}, \check{q}) &= \frac{\pi^2}{\check{\epsilon} \rightarrow 2\check{\Delta}^+ 4\check{q}} \left[(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta}) - \frac{1}{8\check{\Delta}}(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta})^2 + O(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta})^3 \right]
 \end{aligned}
 \tag{74}$$

On voit alors, au moyen de (51), que $\check{M}_{++}(\check{\epsilon} + i0^+, \check{q})$ présente sur l'axe réel en $\check{\epsilon} = 2\check{\Delta}$ une singularité logarithmique dans sa partie réelle et une discontinuité dans sa partie imaginaire :

$$\check{M}_{++}(\check{\epsilon} + i0^+, \check{q}) \underset{\check{\epsilon} \rightarrow 2\check{\Delta}}{=} (2\pi)^{-3} \frac{\pi^2 \check{\Delta}}{2\check{q}} [\ln |\check{\epsilon} - 2\check{\Delta}| - i\pi \Theta(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta})] [1 + O(\check{\epsilon} - 2\check{\Delta})] + \text{fonction lisse de } \check{\epsilon} \quad (75)$$

ce qui explique le pic pointu (à tangente verticale) dans l'intensité de la fonction de réponse module-module à la pulsation $2\Delta/\hbar$, observé mais pas interprété dans la référence [3], et qui n'a rien à voir avec le pic lorentzien du mode du continuum (voir la Section 4.3). Dans $\check{M}_{--}(\check{\epsilon} + i0^+, \check{q})$, cette singularité au bord est réduite par un facteur $\check{\epsilon} - 2\check{\Delta}$. Quant à $\check{M}_{+-}(\check{\epsilon}, \check{q})$, c'est bien sûr une fonction lisse de $\check{\epsilon}$ autour du bord puisque la densité spectrale ρ_{+-} est identiquement nulle sur un voisinage du bord. Les éléments de matrice sont ici adimensionnés comme dans (84).

4.3. Caractériser la branche du continuum : relation de dispersion, poids spectraux, voies optimales d'excitation et d'observation

D'un point de vue expérimental, la présence d'un mode d'énergie complexe $z_{\mathbf{q}}$ dans le continuum de paire brisée se traduit par un pic lorentzien visible dans l'intensité de la fonction de réponse en fréquence du gaz introduite dans [3], ou si l'on préfère dans le module au carré de la transformée de Fourier de la réponse en temps (6), de la forme $\omega \mapsto |Z/(\hbar\omega - z_{\mathbf{q}})|^2$ où ω est la pulsation, du moins si (i) l'énergie centrale $\text{Re } z_{\mathbf{q}}$ de la lorentzienne se trouve dans l'intervalle $[\epsilon_a, \epsilon_b]$ entre les points de non-analyticité à travers lequel est effectué le prolongement analytique (ϵ_a/\hbar et ϵ_b/\hbar délimitent donc un intervalle d'observabilité en pulsation) et (ii) la mi-largeur en énergie $|\text{Im } z_{\mathbf{q}}|$ de la lorentzienne est suffisamment faible pour qu'on puisse la séparer aisément de la contribution large du continuum [3]. On voit ainsi que le mode est caractérisé par trois grandeurs réelles, sa pulsation $\text{Re } z_{\mathbf{q}}/\hbar$, son taux d'amortissement $|\text{Im } z_{\mathbf{q}}|/\hbar$ et son poids spectral, proportionnel à $|Z|^2$, où Z est le résidu du pôle $z_{\mathbf{q}}$ dans le prolongement analytique de la fonction de réponse expérimentale.

Pour caractériser le mode du continuum, il faut donc d'abord calculer son énergie complexe $z_{\mathbf{q}}$, en résolvant l'équation (48) après prolongement analytique comme suit :

$$0 = \det M_{\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \equiv M_{++\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) M_{--\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) - [M_{+-\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})]^2 \\ \text{avec } M_{ss'\downarrow}(z, \mathbf{q}) = M_{ss'}(z, \mathbf{q}) - (2\pi)^{-3} 2i\pi \rho_{ss'}^{(III)}(z, \mathbf{q}) \quad (76)$$

Nous effectuons en effet surtout l'étude pour $\mu > 0$ et $0 < q < 2k_0$, et pour un prolongement analytique par l'intervalle de type II, soit $2\Delta < \epsilon < \epsilon_2(q)$, voir la Table 2 ; les autres cas sont traités dans la Section 4.8. Il faut ensuite calculer le résidu Z . Pour cela, nous partons de l'expression temporelle (49) des petits écarts sur le paramètre d'ordre et, dans l'intégrande, nous développons au voisinage de $z = z_{\mathbf{q}}$ l'inverse de la matrice M analytiquement prolongée et ici restreinte à son bloc 2×2 supérieur gauche, ce qui fait apparaître un résidu matriciel \mathcal{M} :

$$M_{\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})^{-1} \underset{z \rightarrow z_{\mathbf{q}}}{=} \frac{\mathcal{M}}{z - z_{\mathbf{q}}} + O(1) \quad \text{avec } \mathcal{M} = \frac{1}{\left(\frac{d}{dz} \det M_{\downarrow}\right)(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})} \begin{pmatrix} M_{--\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) & -M_{+-\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \\ -M_{+-\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) & M_{++\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \end{pmatrix} \quad (77)$$

Si l'excitation perturbe seulement la phase du paramètre d'ordre (voie +, première coordonnée) et que l'on mesure la réponse sur la phase du paramètre d'ordre, le résidu pertinent est $Z_+ = \langle + | \mathcal{M} | + \rangle = M_{--\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) / ((d/dz) \det M_{\downarrow})(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$. Inversement, si l'on excite initialement et l'on mesure finalement seulement le module du paramètre d'ordre (voie -, seconde coordonnée), le bon résidu est $Z_- = \langle - | \mathcal{M} | - \rangle = M_{++\downarrow}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) / ((d/dz) \det M_{\downarrow})(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$. Dans le cas général, le résidu Z dans la réponse du gaz est une combinaison linéaire des éléments de matrice de \mathcal{M} , avec des coefficients dépendant de l'excitation appliquée au gaz et de l'observable mesurée. En

appliquant le théorème des résidus à (49) comme dans la Figure 1, nous trouvons la contribution du mode du continuum au signal en temps :

$$\text{signal}(t)|_{\text{pôle } z_{\mathbf{q}}} = Z e^{-iz_{\mathbf{q}}t/\hbar} \quad \text{avec} \quad Z = \langle \chi_{\text{obs}} | \mathcal{M} | \chi_{\text{exc}} \rangle \quad (78)$$

où les amplitudes $\langle \chi_{\text{obs}} | + \rangle$ et $\langle \chi_{\text{obs}} | - \rangle$ sont celles de l'observable mesurée dans les voies phase et module, et les amplitudes $\langle + | \chi_{\text{exc}} \rangle$ et $\langle - | \chi_{\text{exc}} \rangle$ sont celles de l'excitation appliquée dans ces mêmes voies. Notons que $|\chi_{\text{exc}}\rangle$ n'a pas d'expression simple, mais fait intervenir le vecteur source dans (49) prolongé analytiquement en $z = z_{\mathbf{q}}$, lui-même fonction de l'excitation appliquée au travers des $y_{\mathbf{kq}}^{\pm}$ donc de la perturbation initiale du vecteur d'état BCS (1). Cependant, comme la matrice \mathcal{M} est par construction de déterminant nul, elle est en général de rang un; après réflexion, on arrive à la mettre sous une forme dyadique particulièrement simple, en termes de vecteurs $\hat{\chi}$ normalisés à l'unité, après avoir sorti un résidu réel global réduit Z_{opt} :

$$\mathcal{M} = Z_{\text{opt}} | \hat{\chi}_{\text{obs}}^{\text{opt}} \rangle \langle \hat{\chi}_{\text{exc}}^{\text{opt}} | \quad \text{avec} \quad \begin{cases} | \hat{\chi}_{\text{exc}}^{\text{opt}} \rangle \equiv Z_{\text{opt}}^{-1/2} \begin{pmatrix} (Z_+^{1/2})^* \\ -\varepsilon (Z_-^{1/2})^* \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} |Z_+|^{1/2} \\ e^{-i\theta} |Z_-|^{1/2} \end{pmatrix} \\ | \hat{\chi}_{\text{obs}}^{\text{opt}} \rangle \equiv Z_{\text{opt}}^{-1/2} \begin{pmatrix} Z_+^{1/2} \\ -\varepsilon Z_-^{1/2} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} |Z_+|^{1/2} \\ e^{i\theta} |Z_-|^{1/2} \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{et} \quad \varepsilon \in \{+, -\} \quad (79)$$

Le résidu global réduit est simplement la somme des modules des résidus particuliers Z_+ et Z_- . Comme on le voit, les vecteurs de la dyade s'expriment en termes de ces modules et d'un angle θ , phase relative de l'amplitude de couplage module-phase et d'une amplitude de couplage diagonale dans la matrice M analytiquement prolongée en $z_{\mathbf{q}}$:

$$Z_{\text{opt}} = |Z_+| + |Z_-| \quad \text{et} \quad \theta = \arg[-M_{+-}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) / M_{--}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})] \quad (80)$$

On aura compris que $\arg(Z_- / Z_+) = 2\theta$ puisque $Z_+ / Z_- = M_{--}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) / M_{+-}(z_{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$. En rapprochant (79) et (78), on voit que $\langle \hat{\chi}_{\text{obs}}^{\text{opt}} |$ donne l'observable optimale, c'est-à-dire la combinaison linéaire relative des voies phase et module à observer pour maximiser le résidu $|Z|$ donc le poids du mode du continuum dans le signal expérimental; de même, $|\hat{\chi}_{\text{exc}}^{\text{opt}}\rangle$ donne les amplitudes relatives de l'excitation qu'il faut produire sur la phase et le module du paramètre d'ordre pour maximiser le poids du mode du continuum dans le signal, à observable fixée. Si ces optimisations sont faites conjointement sur l'excitation et l'observation, on réalise le poids modal maximal accessible à normes de $\langle \chi_{\text{obs}} |$ et $|\chi_{\text{exc}}\rangle$ fixées, de résidu $Z_{\text{opt}} \| \chi_{\text{obs}} \| \| \chi_{\text{exc}} \|$. Pour calculer le dénominateur de \mathcal{M} dans (77), on a besoin des dérivées des densités spectrales par rapport à z , qui s'écrivent simplement (voir la Section 8.123 de [20]) :

$$\frac{d}{d\tilde{z}} \rho_{++}^{[\text{III}]}(\tilde{z}, \tilde{q}) = \frac{\tilde{z}}{\tilde{z}^2 - 4\Delta^2} \tilde{\rho}_{--}^{[\text{III}]}(\tilde{z}, \tilde{q}) \quad \text{et} \quad \frac{d}{d\tilde{z}} \rho_{--}^{[\text{III}]}(\tilde{z}, \tilde{q}) = \frac{1}{\tilde{z}} \tilde{\rho}_{++}^{[\text{III}]}(\tilde{z}, \tilde{q}) \quad (81)$$

où $\tilde{z} = z/\mu$ comme dans (58). La dérivée des éléments de matrice de M s'obtient par différentiation des formes (50), (51) sous le signe intégral.

4.4. Résultats numériques sur la branche du continuum

Nous résolvons numériquement l'équation aux énergies propres (76) sur le mode du continuum, en évaluant les formes intégrales (50), (51) et les fonctions elliptiques dans les densités spectrales de la Table 2 comme dans la Section 3.4.1. Ici, $\mu > 0$ et le prolongement analytique est fait à travers l'intervalle II, $2\Delta < \varepsilon < \varepsilon_2(q)$, si bien que le nombre d'onde q varie entre les points d'ouverture $q = 0$ et de fermeture $q = 2k_0$ de l'intervalle. La relation de dispersion, les résidus dans les voies de phase et de module, le résidu optimal réduit Z_{opt} et l'angle θ définissant la voie d'observation optimale ainsi obtenus (voir la Section 4.3) sont représentés sur la Figure 4, pour un couplage faible $\Delta/\mu = 1/5$, un couplage fort $\Delta/\mu = 1$ et un couplage $\Delta/\mu = 10$ proche de l'annulation du potentiel chimique.

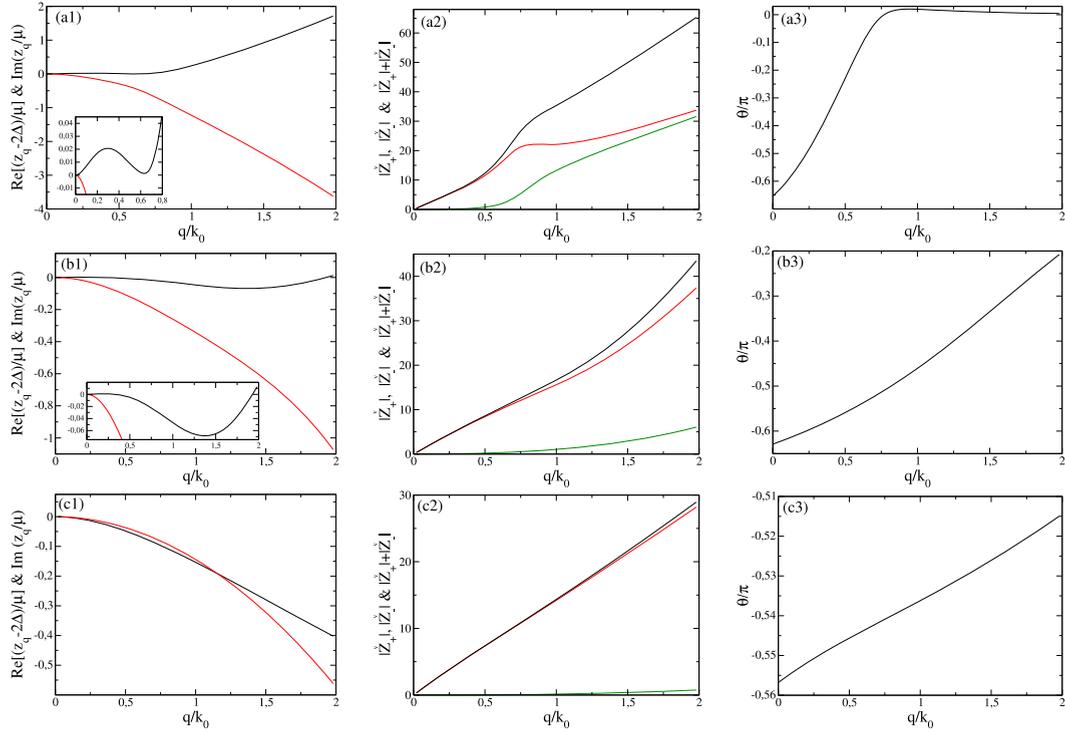


FIGURE 4. Dans un gaz de fermions en interaction de portée nulle (cas des atomes froids) et de potentiel chimique $\mu > 0$, en colonne 1 : relation de dispersion complexe $q \rightarrow z_q$ du mode du continuum, obtenue par résolution numérique de l'équation (76) ; le prolongement analytique est de type II, donc q décrit $]0, 2k_0[$ où $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$. Trait plein noir : partie réelle décalée de sa limite à l'origine 2Δ ; trait plein rouge : partie imaginaire. Le paramètre d'ordre vaut en ligne (a) $\Delta/\mu = 1/5$, en ligne (b) $\Delta/\mu = 1$ et en ligne (c) $\Delta/\mu = 10$. En colonne 2 : résidus $|Z_+|$ (en vert) et $|Z_-|$ (en rouge) du mode dans les voies de phase (indice +) et de module (indice -) des écarts du paramètre d'ordre à l'équilibre, et résidu maximal réduit accessible $|Z_+| + |Z_-|$ (en noir), en fonction du nombre d'onde q en unités de k_0 , après adimensionnement comme dans l'équation (84). En colonne 3 : angle θ apparaissant dans les voies d'excitation et d'observation optimales (79) permettant d'atteindre le résidu maximal réduit $|Z_+| + |Z_-|$. Les vignettes dans (a1) et (b1) sont des agrandissements.

Dans tous les cas, la partie imaginaire de z_q est une fonction négative décroissante du nombre d'onde q . La partie réelle a un comportement plus riche en couplage faible : elle passe par un maximum relatif $> 2\Delta$ puis par un minimum absolu $< 2\Delta$ à faible q , avant de se mettre à croître de manière approximativement linéaire à grand q . En couplage fort, la structure riche se maintient mais est étirée en nombre d'onde (le minimum absolu se situe à $q \approx k_0$) et le maximum relatif est à peine perceptible. Près du point d'annulation de μ , la partie réelle devient à son tour une fonction décroissante de q , et est partout inférieure à 2Δ , ce qui ne fait pas véritablement rentrer le mode dans la bande interdite $[0, 2\Delta]$ puisque son énergie complexe z_q en reste séparée par la partie de la ligne de coupure rabattue sur $]-\infty, 2\Delta]$ dans la prescription (12) ; en particulier, on n'attend pas de pic lorentzien dans les fonctions de réponse du système à la pulsation $\omega = \text{Re } z_q/\hbar$ car celle-ci est en dehors de la fenêtre d'observabilité (voir la Section 4.3 et la référence [3]). La situation est la même pour la partie de la branche de $\text{Re } z_q > \epsilon_2(q)$, qui est séparée de l'axe réel

physique par deux lignes de coupure superposées, celle préexistante et celle provenant du rabat sur $[\epsilon_2(q), +\infty[$ d'une partie de la ligne de coupure $[2\Delta, \epsilon_2(q)]$. Paradoxalement, on remarque que les parties réelle et imaginaire de $\check{z}_q - 2\check{\Delta}$ les plus grandes en valeur absolue sur $]0, 2k_0[$ sont atteintes dans le régime de couplage faible plutôt que dans le régime $\Delta/\mu \geq 1$.

Le résidu Z_- dans la voie – des écarts en module du paramètre d'ordre domine fortement celui Z_+ des écarts en phase, comme on le constate sur la seconde colonne de la Figure 4, sauf en couplage faible pour $q \approx k_0$ où $|Z_+| \approx |Z_-|$; la domination de $|Z_-|$ est particulièrement nette à faible q , où $|Z_+|$ tend vers zéro beaucoup plus rapidement que la loi linéaire suivie par $|Z_-|$. Du point de vue de son poids spectral, le mode du continuum reste donc ici essentiellement un mode de module, comme il l'était dans la limite de couplage faible à $q/k_0 = O(\Delta/\mu)$, même si le couplage phase-module M_{+-} dans la matrice M ne peut absolument pas être négligé dans le calcul de son énergie propre z_q , au contraire de l'équation (34). Quant au déphasage θ entre les deux voies maximisant le poids spectral, dans la troisième colonne de la Figure 4, il croît de manière vaguement linéaire en q sur tout l'intervalle $]0, 2k_0[$, sauf en couplage faible où il atteint un plateau proche de zéro.

Les études analytiques des Sections 4.5, 4.6 et 4.7 fournissent une explication à la fois physique et quantitative de ces observations.

4.5. La branche du continuum à faible q

Comme dans la référence pionnière [2], il faut avant toute chose étudier analytiquement le mode du continuum à faible nombre d'onde. Nous reprenons ici en grande partie les résultats à q infinitésimal de [3] (Section 4.5.1) en les affinant (la Section 4.5.2 en précise le domaine d'applicabilité en nombre d'onde) et en les étendant à d'autres grandeurs que z_q et Z_- (Section 4.5.3).

4.5.1. Le départ quadratique et son coefficient

Comme l'a montré la référence [2] dans la limite de couplage faible $\Delta/\mu \rightarrow 0$ et la référence [3] pour un couplage quelconque $\Delta/\mu > 0$, la branche du continuum (pour un prolongement analytique de type II) a un départ quadratique à faible nombre d'onde q :

$$\check{z}_q \underset{\check{q} \rightarrow 0}{=} 2\check{\Delta} + \zeta \frac{\check{q}^2}{\check{\Delta}} + O(\check{q}^3) \tag{82}$$

avec un coefficient complexe ζ solution dans le demi-plan complexe inférieur de l'équation transcendante²²

$$\left[\pi - \operatorname{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right] \left[\left(\pi - \operatorname{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \zeta - \sqrt{\zeta - 1} \right] + 128\pi^2 [\check{M}_{+-}(2\check{\Delta}, 0)]^2 = 0 \tag{83}$$

L'élément non diagonal de M , c'est-à-dire le couplage phase-module, est écrit ici à l'ordre zéro en q donc à l'énergie 2Δ et au nombre d'onde nul, sous une forme adimensionnée que nous appliquerons dans la suite à tous les éléments de matrice et par ricochet aux résidus :

$$M_{ss'}(z, \mathbf{q}) = \frac{2mk_0}{\hbar^2} \check{M}_{ss'}(\check{z}, \check{q}) \quad \text{et} \quad Z_{\pm} = \frac{\hbar^4 k_0}{4m^2} \check{Z}_{\pm} \tag{84}$$

En posant $1/\check{\Delta} = \operatorname{sh} \tau$, nous tirons de [3] la forme explicite

$$\check{M}_{+-}(2\check{\Delta}, 0) = -\frac{(e^{2\tau} - 1)^{1/2}}{(2\pi)^2} \left[\operatorname{Re} \Pi(e^\tau, ie^\tau) - \Pi(-e^\tau, ie^\tau) + \frac{K(ie^\tau)}{\operatorname{sh} \tau} \right] < 0 \quad \forall \Delta/\mu > 0 \tag{85}$$

²²En posant $S = 2(\pi - \operatorname{asin}(1/\sqrt{\zeta}))$, on a aussi $\zeta = 2/(1 - \cos S)$ avec S solution de $S(S + \sin S) + 256\pi^2 [\check{M}_{+-}(2\check{\Delta}, 0)]^2 (1 - \cos S) = 0$ (sachant que $[(1 + \cos S)/(1 - \cos S)]^{1/2} = -\sin S/(1 - \cos S)$), qui ressemble dans la limite de couplage faible à l'équation (2.16) de [2].

Reproduisons également les développements à faible et à grand Δ/μ de [3], en poussant le calcul un ordre plus loin à grand Δ/μ :²³

$$\zeta_{\check{\Delta} \rightarrow 0^+} = \zeta_0 - \frac{2\zeta_0^2}{\zeta_0 - 1} \left(\frac{\check{\Delta}}{\pi}\right)^2 \ln^2 \frac{\check{\Delta}}{8e} + O(\check{\Delta}^3 \ln^\alpha \check{\Delta}) \quad \text{et} \tag{86}$$

$$\zeta_{\check{\Delta} \rightarrow +\infty} = -\frac{128}{\pi^5} [\Gamma(5/4)]^4 \check{\Delta} - \frac{24i\sqrt{2}}{\pi^{7/2}} [\Gamma(5/4)]^2 \check{\Delta}^{1/2} + \frac{5}{2\pi^2} + \frac{4}{\pi^3} + O(\check{\Delta}^{-1/2})$$

La valeur ζ_0 est celle (38) de la limite de couplage faible, et il faut remarquer à grand Δ/μ que ζ est réel à l'ordre dominant. La référence [3] donne aussi un équivalent de Z_- , voir notre équation (92). Il n'est pas utile ici de préciser la valeur de l'exposant $\alpha > 0$ dans (86).

4.5.2. Régime de validité de l'approximation quadratique

La référence [3] ne précise pas jusqu'à quelle valeur de q on peut se contenter de l'approximation quadratique (82) sur $z_{\mathbf{q}}$. Faisons donc une revue critique des différentes approximations y conduisant. Essentiellement, [3] a posé $\check{k} = 1 + \check{q}K$ dans la définition intégrale (8) des éléments de matrice de M et, en coordonnées sphériques d'axe \mathbf{q} , a fait tendre \check{q} vers zéro sous le signe intégral à K fixé. Au dénominateur de l'intégrande, ceci suppose une quadratisation de la relation de dispersion BCS $\epsilon_{\mathbf{k}}$ autour de son minimum (atteint en $\check{k} = 1$), ce qui enchaîne en réalité les deux approximations quadratiques suivantes,

$$\check{\epsilon}_{\mathbf{k}} = [(\check{k}^2 - 1)^2 + \check{\Delta}^2]^{1/2} \simeq [4(\check{k} - 1)^2 + \check{\Delta}^2]^{1/2} \simeq \check{\Delta} + \frac{2(\check{k} - 1)^2}{\check{\Delta}} \tag{87}$$

dont la condition de validité globale est

$$|\check{k} - 1| \ll \min(1, \check{\Delta}) \tag{88}$$

On aboutit *in fine* aux équivalents (u est le cosinus de l'angle polaire) :²⁴

$$\check{M}_{++}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi\check{\Delta}}{4\check{q}(2\pi)^3} \int_{-1}^1 du \int_{\mathbb{R}} \frac{dK}{K^2 + (u^2 - \zeta)/4} \quad \text{et} \tag{89}$$

$$\check{M}_{--}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi\check{q}}{4\check{\Delta}(2\pi)^3} \int_{-1}^1 du \int_{\mathbb{R}} \frac{dK(\zeta - u^2)}{K^2 + (u^2 - \zeta)/4}$$

dont l'intégration explicite puis le prolongement analytique de $\text{Im}\zeta > 0$ à $\text{Im}\zeta < 0$ à travers $[0, 1]$ (c'est l'intervalle à choisir compte tenu du comportement de $\check{\epsilon}_2(\check{q})$ à faible \check{q} dans la Section 4.2.1) donne [3]

$$\check{M}_{++\downarrow}(\check{z}_q, \check{q}) \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} -\frac{i\pi^2\check{\Delta}}{(2\pi)^3\check{q}} \left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\check{\zeta}}} \right) \quad \text{et} \tag{90}$$

$$\check{M}_{--\downarrow}(\check{z}_q, \check{q}) \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} -\frac{i\pi^2\check{q}}{(2\pi)^3 2\check{\Delta}} \left[\left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\check{\zeta}}} \right) \check{\zeta} - \sqrt{\check{\zeta} - 1} \right]$$

et reproduit (83). En réalité, intégrer par rapport à K sur tout \mathbb{R} n'a de sens que si les intégrales convergent à l'intérieur du domaine de validité de l'approximation quadratique (87), donc si

²³Dans (86), nous avons utilisé entre autres le fait non trivial que $\text{Re}\Pi(e^\tau, ie^\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0^+} K(i) - E(i)/2$; par rapport à [3], nous avons préféré faire apparaître une fonction Γ plutôt que des intégrales elliptiques, à l'aide des identités $K(i) = (8/\pi)^{1/2} [\Gamma(5/4)]^2$ et $E(i) - K(i) = [\Gamma(3/4)]^2 / (2\pi)^{1/2}$.

²⁴La seconde intégrale de (89) figure dans l'équation (2.13) de la référence [2] au changement de variable trivial près $K = K'/2$.

$\check{\kappa} - 1 = \check{q}K$ satisfait à la condition (88). Comme la largeur en K dans (89) est de l'ordre de $|\zeta|^{1/2}$ si $1 \lesssim |\zeta|$ et de l'ordre de l'unité sinon, nous aboutissons à la contrainte

$$\check{q} \ll \frac{\min(1, \check{\Delta})}{(1 + |\zeta|)^{1/2}} \approx \begin{cases} \check{\Delta} & \text{si } \check{\Delta} \rightarrow 0 \\ \check{\Delta}^{-1/2} & \text{si } \check{\Delta} \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (91)$$

Dans la limite de couplage faible, elle reproduit l'inégalité attendue $\check{q} \ll \check{\Delta}$ [2] c'est-à-dire $q\xi \ll 1$ où ξ est la taille d'une paire liée. Au voisinage du point d'annulation du potentiel chimique, elle fait apparaître l'échelle de nombre d'onde inattendue $\check{q} \approx \check{\Delta}^{-1/2}$, dont nous n'avons pas d'interprétation physique mais qui ressortira dans la Section 4.7.

4.5.3. Autres observables à faible q

Des équivalents (90) sur les éléments de matrice de M prolongés analytiquement, nous tirons les équivalents des résidus dans la voie de phase + et la voie de module -, et du déphasage entre les deux voies maximisant le résidu global :

$$\check{Z}_- \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} \frac{2i\check{q}}{\pi^2} \frac{(2\pi)^3 \left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right)}{\left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right)^2 + \frac{\left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \zeta - \sqrt{\zeta - 1}}{2\zeta\sqrt{\zeta - 1}}} \quad \text{et} \quad \check{Z}_+ \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} \frac{i\check{q}^3}{\pi^2 \check{\Delta}^2} \frac{(2\pi)^3 \left[\left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \zeta - \sqrt{\zeta - 1} \right]}{\left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right)^2 + \frac{\left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \zeta - \sqrt{\zeta - 1}}{2\zeta\sqrt{\zeta - 1}}} \quad (92)$$

$$\theta \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\sim} \arg \left[(-i) \left(\pi - \text{asin} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \right) \right] \quad (93)$$

Il a suffi pour cela de revenir aux définitions de ces grandeurs dans la Section 4.3 et de prendre la dérivée de (90) par rapport à ζ . L'équivalent de Z_- était déjà dans [3]. Celui de Z_+ , qui s'annule cubiquement plutôt que linéairement, explique la domination écrasante de la voie - à faible q dans la deuxième colonne de la Figure 4. Enfin, la relation (93) donne le point de départ des courbes dans la troisième colonne de la Figure 4.

4.6. La branche du continuum pour $\Delta/\mu \ll 1$

Dans la limite de couplage faible, nous étudions la branche du continuum (par prolongement analytique de type II) aux échelles de nombre d'onde $q/k_0 \approx \Delta/\mu$ (Section 4.6.1), $q \approx k_0$ (Section 4.6.2) et $q/k_0 \approx (\Delta/\mu)^{2/3}$ (Section 4.6.3). La première échelle est naturelle, elle correspond à $1/\xi$ où ξ est la taille d'une paire liée $\uparrow\downarrow$; l'étude spectrale ayant déjà été faite dans la Section 3, nous nous contenterons d'ajouter quelques résultats sur les résidus et sur l'angle θ de la Section 4.3. La deuxième échelle a été ignorée dans la Section 3 mais elle reste naturelle : elle correspond à la largeur $2k_0$ de l'intervalle d'existence en q de la branche. La troisième échelle résulte d'une étude approfondie : c'est le chaînon manquant permettant de raccorder la limite à grand nombre d'onde de la première échelle et la limite à faible nombre d'onde de la deuxième ; elle contient aussi le minimum de la partie réelle de la relation de dispersion.

4.6.1. À l'échelle de nombre d'onde $\check{q} \approx \check{\Delta}$

Comme dans la Section 3.2.1, nous faisons tendre Δ/μ vers zéro à $\bar{q} = 2\check{q}/\check{\Delta}$ fixé, après adimensionnement des énergies par Δ , $\bar{z} = z/\Delta$. À l'ordre zéro en Δ/μ , nous retrouvons la même relation de dispersion limite $\bar{q} \mapsto \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$, solution de (34) et dont l'étude a déjà été faite dans la Section 3.4. Donnons cependant quelques résultats complémentaires. Numériquement, nous représentons sur la Figure 5a la partie réelle de la relation de dispersion, dans l'adimensionnement des variables \bar{q} et \bar{z} , pour des valeurs faibles et décroissantes de Δ/μ , afin d'illustrer la convergence vers la loi limite et de révéler la présence à des \bar{q} croissants d'un minimum décroissant, totalement

absent de cette loi limite et dont l'élucidation est reportée à la Section 4.6.3. Analytiquement, nous complétons la Section 3.4 en donnant un équivalent du résidu du mode du continuum, au sens de la Section 4.3, dans la voie de module :

$$\check{Z}_{-} \underset{\check{\Delta} \rightarrow 0}{\sim} \check{\Delta} \check{Z}_{-}^{(0)} \quad \text{avec} \quad \check{Z}_{-}^{(0)} \equiv \frac{1}{\frac{d}{d\check{z}} \check{M}_{--}^{(0)}(\check{z}_{\check{q}}^{(0)}, \check{q})} \tag{94}$$

Des Sections 3.4.2 et 3.4.3, nous tirons son comportement à faible nombre d'onde réduit

$$\check{Z}_{-}^{(0)} \underset{\check{q} \rightarrow 0}{=} (2\pi)^2 [Z_1 \check{q} + Z_2 \check{q}^2 + Z_3 \check{q}^3 + O(\check{q}^4)] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Z_1 = 2i\zeta_0 / (\pi\sqrt{\zeta_0 - 1}) & \simeq -0,125\,634 + 0,235\,132i \\ Z_2 = 2\zeta_0^2(3\zeta_0 - 5) / [3\pi^2(\zeta_0 - 1)^2] & \simeq 0,043\,448 + 0,046\,167i \\ Z_3 = \frac{-2i\zeta_0^2}{\pi^3\sqrt{\zeta_0 - 1}} \left[1 + \frac{3\pi^2}{32} + \frac{8/9}{(\zeta_0 - 1)^3} \right] & \simeq 0,008\,812 - 0,017\,157i \end{cases} \tag{95}$$

et à grand nombre d'onde réduit (il n'est pas utile de préciser la valeur de l'exposant α) :

$$\text{Im } \check{Z}_{-}^{(0)} \underset{\check{q} \rightarrow +\infty}{=} \frac{(2\pi)^2 \check{q}}{\pi/2 + \text{atan } Y_0} + O(\ln^\alpha \check{q}/\check{q}) \quad \text{et} \quad \text{Re } \check{Z}_{-}^{(0)} \underset{\check{q} \rightarrow +\infty}{=} \frac{(2\pi^2)^2 [\pi/2 + \text{atan } Y_0 + Y_0/(1 + Y_0^2)]}{\check{q} Y_0^2 (\pi/2 + \text{atan } Y_0)^3} + o(1/\check{q}) \tag{96}$$

où le nombre réel Y_0 est la solution de (44). Enfin, nous donnons à l'ordre dominant le résidu dans la voie de phase et le déphasage θ entre les deux voies maximisant le résidu total :

$$\check{Z}_{+}^{(3)} = \check{\Delta} \check{Z}_{-}^{(0)} \left[\frac{\check{M}_{+-}^{(1)}(\check{z}_{\check{q}}^{(0)}, \check{q})}{\check{M}_{++\downarrow}^{(0)}(\check{z}_{\check{q}}^{(0)}, \check{q})} \right]^2 \quad \text{et} \quad \theta^{(0)} = \arg \left[-\frac{\check{M}_{++\uparrow}^{(0)}(\check{z}_{\check{q}}^{(0)}, \check{q})}{\check{M}_{+-}^{(1)}(\check{z}_{\check{q}}^{(0)}, \check{q})} \right] \tag{97}$$

Les expressions des éléments de matrice sont données à l'ordre zéro en Δ/μ par (31), (33) (avant prolongement analytique et sans l'adimensionnement (84)), et à l'ordre un pour le couplage phase-module par l'équation (109) à venir. On voit donc que le résidu dans la voie de phase est, relativement à la voie de module, réduit par un facteur $\check{\Delta}^2 \ll 1$. La Figure 7 reprend l'ensemble de ces quantités pour une valeur fixée, très faible, de Δ/μ .

4.6.2. À l'échelle de nombre d'onde $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$

Que l'on soit en couplage faible ou pas, l'essentiel de la branche du continuum (pour un prolongement analytique de type II) vit avec un nombre d'onde q d'ordre k_0 . Nous l'étudions donc ici en passant à la limite $\check{\Delta} \rightarrow 0$ à $\check{q} \in]0, 2[$ fixé; au vu des résultats numériques de la Figure 4, nous nous attendons à une énergie propre réduite \check{z}_q d'ordre 0 en $\check{\Delta}$. En repartant de la Section 4.2.1, on constate dans cette limite que $\check{q}_0 \rightarrow 2 > \check{q}$, si bien que les densités spectrales comportent *a priori* trois points distincts de non-analyticité sur le demi-axe réel positif, dont les expressions sont très simples à l'ordre zéro en $\check{\Delta}$:

$$\check{\epsilon}_1(\check{q}) \rightarrow 0, \quad \check{\epsilon}_2(\check{q}) \rightarrow \check{\epsilon}_2^{(0)}(\check{q}) = \check{q}(2 - \check{q}) \quad \text{et} \quad \check{\epsilon}_3(\check{q}) \rightarrow \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q}) = 2(1 - \check{q}^2/4) \tag{98}$$

Cependant, le calcul des densités spectrales de la Table 2 lorsque $\check{\Delta} \rightarrow 0$ à énergie $\check{\epsilon}$ fixée fait apparaître un *nouveau* point anguleux $\check{\epsilon}_0(\check{q}) = \check{q}(2 + \check{q})$, situé, selon la position de \check{q} par rapport à 2/3, entre $\check{\epsilon}_2(\check{q})$ et $\check{\epsilon}_3(\check{q})$ ou au-delà de $\check{\epsilon}_3(\check{q})$:

$0 < \check{q} < 2/3$	$0 < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_2^{(0)}(\check{q})$	$\check{\epsilon}_2^{(0)}(\check{q}) < \check{\epsilon} < \check{q}(2 + \check{q})$	$\check{q}(2 + \check{q}) < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q})$	$\check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q}) < \check{\epsilon}$
$\check{\rho}_{ss}^{(0)}(\check{\epsilon}, \check{q}) =$	$\frac{\pi\check{\epsilon}}{2\check{q}}$	$\frac{\pi\check{\epsilon}}{4\check{q}} + \frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon}_3^{(0)} - \check{\epsilon})^{1/2}$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}} [(\check{\epsilon} + \check{\epsilon}_3^{(0)})^{1/2} + (\check{\epsilon}_3^{(0)} - \check{\epsilon})^{1/2}]$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}} (\check{\epsilon} + \check{\epsilon}_3^{(0)})^{1/2}$
$\check{\rho}_{+-}^{(0)}(\check{\epsilon}, \check{q}) =$	0	$\frac{\pi\check{\epsilon}}{4\check{q}} - \frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon}_3^{(0)} - \check{\epsilon})^{1/2}$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}} [(\check{\epsilon} + \check{\epsilon}_3^{(0)})^{1/2} - (\check{\epsilon}_3^{(0)} - \check{\epsilon})^{1/2}]$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}} (\check{\epsilon} + \check{\epsilon}_3^{(0)})^{1/2}$
$2/3 < \check{q} < 2$	$0 < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_2^{(0)}(\check{q})$	$\check{\epsilon}_2^{(0)}(\check{q}) < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q})$	$\check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q}) < \check{\epsilon} < \check{q}(2 + \check{q})$	$\check{q}(2 + \check{q}) < \check{\epsilon}$
$\check{\rho}_{ss}^{(0)}(\check{\epsilon}, \check{q}) =$	$\frac{\pi\check{\epsilon}}{2\check{q}}$	$\frac{\pi\check{\epsilon}}{4\check{q}} + \frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon}_3^{(0)} - \check{\epsilon})^{1/2}$	$\frac{\pi\check{\epsilon}}{4\check{q}}$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}} (\check{\epsilon} + \check{\epsilon}_3^{(0)})^{1/2}$
$\check{\rho}_{+-}^{(0)}(\check{\epsilon}, \check{q}) =$	0	$\frac{\pi\check{\epsilon}}{4\check{q}} - \frac{\pi}{\sqrt{8}}(\check{\epsilon}_3^{(0)} - \check{\epsilon})^{1/2}$	$\frac{\pi\check{\epsilon}}{4\check{q}}$	$\frac{\pi}{\sqrt{8}} (\check{\epsilon} + \check{\epsilon}_3^{(0)})^{1/2}$

(99)

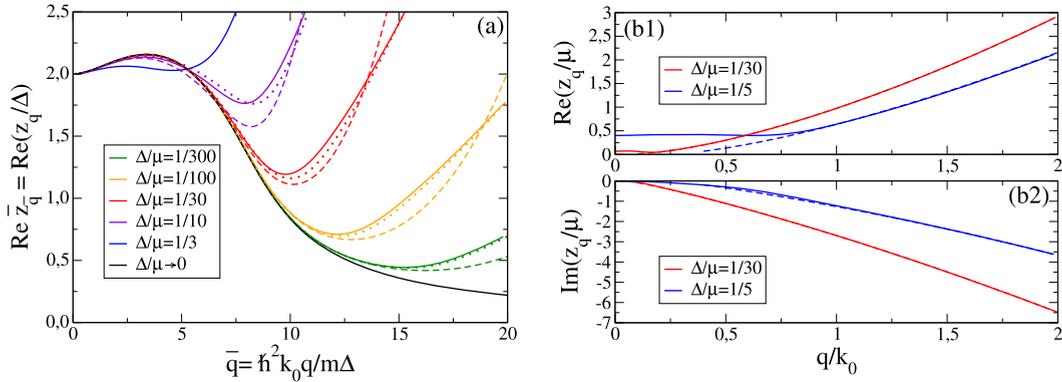


FIGURE 5. Dans la limite $\Delta/\mu \ll 1$, convergence de la branche du continuum $q \mapsto z_q$ (a) à $\bar{q} = \hbar^2 k_0 q / m\Delta$ fixé vers la loi limite $\bar{q} \mapsto \bar{z}_q^{(0)}$, où $\bar{z}_q^{(0)}$ est solution de l'équation (34), et (b) à $\check{q} = q/k_0$ fixé vers la loi à l'ordre dominant $\check{q} \mapsto \check{z}_q^{(0)}$ définie par l'équation (102). Dans (a), restreinte pour alléger à la partie réelle de z_q , en trait plein : relation de dispersion exacte, obtenue par résolution numérique de l'équation (76) (en couleur), ou de l'équation (34) pour $\Delta/\mu \rightarrow 0$ (en noir); en tireté : relation de dispersion au second ordre en Δ (111); en gros pointillé : prédiction $\check{z}_q^{\text{trin}}$ (118) de l'équation du second degré (117) sur z_q . Dans (b1) pour la partie réelle et (b2) pour la partie imaginaire : en trait plein, relation de dispersion exacte; en tireté : loi à l'ordre dominant (102) (pour $\Delta/\mu = 1/30$, le tireté est bien présent mais il est masqué par le trait plein). Les valeurs de Δ/μ utilisées sont précisées sur la figure.

Ce point anguleux supplémentaire reste simple à interpréter : comme on peut le voir sur (59), le polynôme $P_8(X)$ admet pour $\check{\Delta} = 0$ deux racines réelles positives, l'une étant $\check{\epsilon}_2^{(0)}(\check{q})$ comme il se doit, et l'autre étant justement $\check{\epsilon}_0(\check{q})$; le fait que la première soit toujours inférieure à la seconde, alors que $\check{\epsilon}_2(\check{q})$ est la plus grande racine réelle de $P_8(X)$ à $\check{\Delta}$ non nul, n'est qu'un paradoxe que la dernière phrase de la note 21 explique parfaitement. Passons ensuite à la limite $\check{\Delta} \rightarrow 0$ à \check{z} fixé dans l'expression (50), (51) des éléments de matrice de M , en utilisant (99) et le comportement limite $C(\Delta) = 2\pi[\ln(8/\check{\Delta}) - 2] + o(1)$ de la scorie de régularisation. Nous tombons sur des intégrales en énergie assez simples mais un peu longues à calculer ; après prolongement analytique de type II comme dans (76), nous trouvons finalement pour $\text{Im } \check{z} < 0$ à l'ordre zéro en $\check{\Delta}$:

$$\check{M}_1(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow 0}{\overset{\check{z} \text{ et } \check{q} \text{ fixés}}{=}} \check{M}_1^{(0)}(\check{z}, \check{q}) + o(1) \quad \text{avec} \quad \check{M}_1^{(0)}(\check{z}, \check{q}) = \begin{pmatrix} \alpha(\check{z}) & \beta(\check{z}) \\ \beta(\check{z}) & \alpha(\check{z}) \end{pmatrix} \quad (100)$$

L'équation aux énergies propres se sépare donc en $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha - \beta = 0$; comme on peut le vérifier, c'est la première des deux qui contient le mode du continuum, et c'est donc la seule que nous écrivons explicitement ici :

$$(2\pi)^2 [\alpha(\check{z}) + \beta(\check{z})] = \ln \left(\frac{8}{\check{\Delta} e} \right) + \frac{\check{z}}{4\check{q}} [\ln(\check{z} + 2\check{q} - \check{q}^2) - \ln(\check{z} - 2\check{q} - \check{q}^2) - 2i\pi] - \left(\frac{\check{z} + \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q})}{2} \right)^{1/2} \left\{ \text{argth} \frac{[2(\check{z} + \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q}))]^{1/2}}{\check{q} + 2} + \text{argth} \frac{2 - \check{q}}{[2(\check{z} + \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q}))]^{1/2}} \right\} \quad (101)$$

Comme on le voit, il reste dans l'équation une dépendance logarithmique en le paramètre d'ordre adimensionné $\check{\Delta}$. L'énergie propre admet ainsi un ordre zéro en $\check{\Delta}$ bien défini, mais pas une limite

finie. Nous écrivons pour résumer :

$$\boxed{\check{z}_q \stackrel{\check{q} \text{ fixé}}{\underset{\check{\Delta} \rightarrow 0}{\approx}} \check{z}_{\check{q}}^{(0)} + o(1) \quad \text{avec} \quad \alpha(\check{z}_{\check{q}}^{(0)}) + \beta(\check{z}_{\check{q}}^{(0)}) = 0} \tag{102}$$

Par résolution numérique, nous obtenons les courbes tirées sur les Figures 5b1 et 5b2, en accord remarquable avec le résultat exact sauf au voisinage de $\check{q} = 0$, bien que les valeurs de $\check{\Delta}$ choisies ne soient pas extrêmement faibles. Nous obtenons aussi analytiquement le comportement de l'énergie propre d'ordre zéro du mode à faible nombre d'onde :

$$\check{z}_{\check{q}}^{(0)} \underset{\check{q} \rightarrow 0}{\approx} \check{\zeta}_0 \check{q} + \check{\zeta}_1 \check{q}^2 + o(\check{q}^2) \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \check{\zeta}_0 = -2iY_0|_{\check{q}=2\check{q}/\check{\Delta}} = 2\mathcal{Z}_0|_{\check{q}=2\check{q}/\check{\Delta}} \\ \check{\zeta}_1 = -\frac{Y_0 \left[\ln \frac{\check{\Delta}}{8} + \left(\frac{\pi}{2} + \text{atan } Y_0 \right) Y_0 \right]}{\frac{\pi}{2} + \text{atan } Y_0} \Big|_{\check{q}=2\check{q}/\check{\Delta}} \end{array} \right. \tag{103}$$

où Y_0 est solution de l'équation transcendante (44). Il est entendu que les limites $\check{\Delta} \rightarrow 0$ et $\check{q} \rightarrow 0$ ne commutent pas. On peut se demander cependant, dans la limite $\check{\Delta} \rightarrow 0$, si les régimes $\check{q} = 2\check{q}/\check{\Delta} \gg 1$ et $\check{q} \ll 1$ se raccordent. En comparant les coefficients du développement asymptotique (43) de la Section 3 et du développement limité (103), nous trouvons que les parties imaginaires se raccordent parfaitement à l'ordre dominant q (nous retrouvons dans (103) le coefficient \mathcal{Z}_0 de (43)), mais que les parties réelles ne se raccordent pas du tout, même au niveau de leur loi de puissance ($1/\check{q}$ et \check{q}^2 sont d'exposants différents -1 et $+2$ en q); ce fait très intéressant sera exploité et expliqué dans la Section 4.6.3. Nous obtenons par ailleurs le développement asymptotique de l'énergie propre en le logarithme du paramètre d'ordre :

$$\check{z}_{\check{q}}^{(0)} \underset{\ln \frac{1}{\check{\Delta}} \rightarrow +\infty}{\check{q} \in]0,2[\text{ fixé}} - \frac{2i\check{q}}{\pi} \ln \frac{8}{\check{\Delta}e^2} + \frac{\check{q}^{3/2}e^{-i\pi/4}}{\pi^{1/2}} \left(\ln \frac{8}{\check{\Delta}e^2} \right)^{1/2} + \frac{\check{q}^2}{4} + \frac{e^{i\pi/4}}{2} (\pi\check{q})^{1/2} \left(1 - \frac{3\check{q}^2}{16} \right) \left(\ln \frac{8}{\check{\Delta}e^2} \right)^{-1/2} - \frac{4}{3} \left(\ln \frac{8}{\check{\Delta}e^2} \right)^{-1} + O \left(\ln \frac{1}{\check{\Delta}} \right)^{-3/2} \tag{104}$$

Le logarithme n'étant jamais très grand dans un gaz d'atomes froids, l'intérêt pratique de (104) est assez réduit, bien que nous soyons allés à un ordre déraisonnablement élevé. Nous en tirons cependant, en quittant tous les adimensionnements, un équivalent très suggestif dans la limite mathématique d'interaction faible²⁵

$$\boxed{z_q \underset{k_F a \rightarrow 0^-}{q \in]0,2k_F[\text{ fixé}}} - \frac{i\hbar^2 q}{2m|a|} \tag{105}$$

où, rappelons-le, a est la longueur de diffusion et k_F le nombre d'onde de Fermi. Enfin, pour être complets, donnons l'expression des autres observables de la Section 4.3 à l'ordre zéro en $\check{\Delta}$ à \check{q} fixé, à savoir les résidus dans les voies de phase + et de module -, ainsi que le déphasage dans la superposition de ces deux voies maximisant le résidu total :

$$\check{Z}_{\pm}^{(0)} = \frac{1/2}{\alpha'(\check{z}_{\check{q}}^{(0)}) + \beta'(\check{z}_{\check{q}}^{(0)})} = \frac{(4\pi)^2 \check{q} [\check{z}_{\check{q}}^{(0)} + \check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q})]}{[\check{z}_{\check{q}}^{(0)} + 2\check{\epsilon}_3^{(0)}(\check{q})][\ln(\check{z}_{\check{q}}^{(0)} + 2\check{q} - \check{q}^2) - \ln(\check{z}_{\check{q}}^{(0)} - 2\check{q} - \check{q}^2) - 2i\pi] - 4\check{q} \ln \frac{8}{\check{\Delta}e}} \tag{106}$$

et $\theta^{(0)} = \arg 1 = 0$

²⁵Nous avons utilisé le résultat BCS $\check{\Delta} \sim 8e^{-2}e^{-\pi/2k_F|a|}$ lorsque $k_F a \rightarrow 0^-$ et remplacé k_0 par sa limite k_F .

Ces expressions découlent directement du fait que le résidu matriciel dans (77) s'écrit après adimensionnement

$$\check{M} = \frac{1/2}{\alpha'(\check{z}_{\check{q}}^{(0)}) + \beta'(\check{z}_{\check{q}}^{(0)})} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (107)$$

ce qui montre bien que le mode du continuum est, dans cette limite, une superposition à amplitudes égales des petits écarts du paramètre d'ordre en phase et en module. Les résultats (102) et (106) sont représentés en trait plein vert sur la Figure 7 pour une valeur très faible de Δ/μ , ce qui les rend fort proches du résultat exact à nombre d'onde réduit \check{q} pas trop petit.

4.6.3. *Au voisinage du minimum de pulsation propre : l'échelle de nombre d'onde inattendue*
 $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$

Notre motivation pour aller au-delà des Sections 4.6.1 et 4.6.2 a été de comprendre l'origine du minimum absolu que l'on voit fort bien dans la partie réelle de la branche du continuum sur la Figure 5a, en régime de couplage faible $\check{\Delta} \ll 1$. En particulier, ce minimum n'apparaît pas du tout dans la relation de dispersion limite $\bar{q} \mapsto \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$ obtenue pour $\check{\Delta} \rightarrow 0$ à $\bar{q} = 2\check{q}/\check{\Delta}$ fixé dans la Section 3.4 (voir la courbe noire sur la Figure 5a), à notre insatisfaction. Ceci nous a conduits à la découverte de l'échelle de nombre d'onde non triviale $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$, comme nous l'exposons ici.

La première idée pour rendre compte du minimum en $\check{q} = \check{q}_{\min}$ non nul sur la Figure 5a est d'aller à l'ordre suivant en le petit paramètre $\check{\Delta}$. À \bar{q} et à $\bar{z} = z/\Delta$ fixés, nous poursuivons donc le développement des éléments de matrice de \check{M} , à l'ordre un sur le couplage phase-module et à l'ordre deux sur le couplage module-module :

$$\check{M}_{--}(\bar{z}, \bar{q}) \stackrel{\bar{z} \text{ et } \bar{q} \text{ fixés}}{\underset{\check{\Delta} \rightarrow 0}{\approx}} \check{M}_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) + \check{M}_{--}^{(2)}(\bar{z}, \bar{q}) + o(\check{\Delta}^2) \quad \text{et} \quad \check{M}_{+-}(\bar{z}, \bar{q}) \stackrel{\bar{z} \text{ et } \bar{q} \text{ fixés}}{\underset{\check{\Delta} \rightarrow 0}{\approx}} \check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}, \bar{q}) + o(\check{\Delta}) \quad (108)$$

L'ordre zéro figure, sous forme intégrale non adimensionnée, dans l'équation (31). Le reste du calcul, un peu long, repose sur les représentations intégrales (50), (55). Donnons-en le résultat, explicite :²⁶

$$\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}, \bar{q}) = \frac{\pi \check{\Delta} \bar{z}}{2(2\pi)^3} \left[\ln \frac{\check{\Delta}}{8e} + \phi(\bar{z}, \bar{q}) \right] \quad \text{avec} \quad \phi(\bar{z}, \bar{q}) \equiv \frac{(4 + \bar{q}^2 - \bar{z}^2)^{1/2}}{(\bar{z}^2 - \bar{q}^2)^{1/2}} \operatorname{acos} \frac{(4 + \bar{q}^2 - \bar{z}^2)^{1/2}}{2} \quad (109)$$

$$\check{M}_{--}^{(2)}(\bar{z}, \bar{q}) = -\frac{\pi \check{\Delta}^2}{16(2\pi)^3} \left[(\bar{q}^2 + \bar{z}^2 - 4) \ln \frac{\check{\Delta} e^{1/2}}{8} - \frac{\bar{q}^2(\bar{q}^4 + (4 - \bar{z}^2)\bar{q}^2 + 8\bar{z}^2)}{(\bar{z}^2 - \bar{q}^2)^2} + \frac{\bar{z}^6 - (4 + \bar{q}^2)\bar{z}^4 + \bar{q}^2(16 - \bar{q}^2)\bar{z}^2 + \bar{q}^6}{(\bar{z}^2 - \bar{q}^2)^2} \phi(\bar{z}, \bar{q}) \right] \quad (110)$$

On notera l'apparition de termes logarithmiques en $\check{\Delta}$, et le fait que la fonction $\phi(\bar{z}, \bar{q})$, introduite pour alléger l'écriture, n'a, en fonction de la variable \bar{z} , pas de ligne de coupure sur l'intervalle $[\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2^{(0)}] = [2, (4 + \bar{q}^2)^{1/2}]$, si bien que la correction du premier ordre à M_{+-} et du second ordre à M_{--} y sont analytiques et leur prolongement de type II au demi-plan complexe inférieur est

²⁶Pour calculer $\check{M}_{+-}^{(1)}$, on coupe dans (50) adimensionnée le domaine d'intégration en deux sous-intervalles $I_{<} = [\bar{\epsilon}_2(\bar{q}), \eta]$ et $I_{>} = [\eta, +\infty]$ où $\eta \ll 1$ est fixé. Sur le premier, on développe l'intégrande en puissances de $\check{\Delta}$ à $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}/\check{\Delta}$ fixé. Sur le deuxième, on développe à $\bar{\epsilon}$ fixé. Pour cela, il faut développer les racines s_1 et s_2 de (71). Sur $I_{<}$, $s_{1,2} \approx \mp s_0 - A\check{\Delta}$ avec $s_0^2 = \bar{\epsilon}^2(\bar{\epsilon}^2 - 4 - \bar{q}^2)/[(\bar{\epsilon}^2 - 4)(\bar{\epsilon}^2 - \bar{q}^2)]$ et $A = \bar{\epsilon}^2 \bar{q}^2 / [(\bar{\epsilon}^2 - 4)^{1/2}(\bar{\epsilon}^2 - \bar{q}^2)^2]$ si bien que $\check{\rho}_{+-} \sim (\pi/4)\check{\Delta}\bar{\epsilon}(\bar{\epsilon}^2 - 4 - \bar{q}^2)^{1/2}/(\bar{\epsilon}^2 - \bar{q}^2)^{1/2}$. Sur $I_{>}$, $s_{1,2} \approx \mp 1 - \bar{q}^2\check{\Delta}^4(\bar{\epsilon} \mp 2)/\bar{\epsilon}^4$ d'où $\check{\rho}_{+-} \sim (\pi/2)[(1 + \bar{\epsilon}/2)^{1/2} - \Theta(2 - \bar{\epsilon})(1 - \bar{\epsilon}/2)^{1/2}]$. L'intégration sur l'énergie fait apparaître des termes formellement divergents de la forme $\check{\Delta} \ln \eta$, qui se compensent exactement entre les parties haute et basse, et l'on obtient (109). Le calcul de $\check{M}_{--}^{(2)}$ procède de même, à partir de la forme astucieuse (55), mais il est plus lourd : (i) il faut ajouter le sous-intervalle $[\bar{\epsilon}_1, \bar{\epsilon}_2(\bar{q})]$, sur lequel il n'y a cependant aucun écart à la densité spectrale $\rho_{--}^{(0)[II]}$ de la Table 1, (ii) sur $I_{<}$, il faut développer $s_{1,2}$ jusqu'à l'ordre $\check{\Delta}^2$, pour obtenir $\check{\rho}_{--} \sim \check{\rho}_{--}^{(0)[III]} \sim -(\pi/32)\check{\Delta}^2(\bar{\epsilon}^2 - 4 - \bar{q}^2)^{1/2}[\bar{\epsilon}^6 - (4 + \bar{q}^2)\bar{\epsilon}^4 - \bar{q}^2(\bar{q}^2 - 16)\bar{\epsilon}^2 + \bar{q}^6]/(\bar{\epsilon}^2 - \bar{q}^2)^{5/2}$, (iii) sur $I_{>}$, il faut développer $s_{1,2}$ jusqu'à l'ordre $\check{\Delta}^6$ pour obtenir $\check{\rho}_{--} = (\pi/2)[(1 + \bar{\epsilon}/2)^{1/2} + \Theta(2 - \bar{\epsilon})(1 - \bar{\epsilon}/2)^{1/2}] - (\pi\check{\Delta}^2/32\sqrt{2}\bar{\epsilon}^2)[(\bar{q}^2\bar{\epsilon}^2 + 48\bar{\epsilon} + 64)/(2 + \bar{\epsilon})^{1/2} + \Theta(2 - \bar{\epsilon})((\bar{q}^2\bar{\epsilon}^2 - 48\bar{\epsilon} + 64)/(2 - \bar{\epsilon})^{1/2})] + O(\check{\Delta}^4)$.

tout fait, $\check{M}_{+-\downarrow}^{(1)}(\bar{z}, \bar{q}) = \check{M}_{+\downarrow}^{(1)}(\bar{z}, \bar{q})$ et $\check{M}_{--\downarrow}^{(2)}(\bar{z}, \bar{q}) = \check{M}_{--}^{(2)}(\bar{z}, \bar{q})$. Pour le couplage phase-phase, il ne sera pas utile d'aller au-delà de l'ordre zéro, déjà donné sous la forme intégrale (33). Bien que le couplage phase-module soit du premier ordre en $\check{\Delta}$, il apparaît au carré dans l'équation aux énergies propres (76) ; la première correction à l'énergie propre est donc du second ordre :

$$\bar{z}_q \stackrel{\bar{q} \text{ fixé}}{\underset{\check{\Delta} \rightarrow 0}{\equiv}} \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)} + \bar{z}_{\bar{q}}^{(2)} + o(\check{\Delta}^2) \quad \text{avec} \quad \left[\frac{\bar{z}_{\bar{q}}^{(2)}}{\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}} + \check{M}_{--}^{(2)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}) \right] \check{M}_{++\downarrow}^{(0)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) = [\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q})]^2 \quad (111)$$

Pour obtenir cette expression, il a suffi de remplacer dans (76) M_{+-} et M_{++} par leur comportement dominant pris en l'énergie non perturbée (après prolongement analytique de type II pour M_{++}) ; dans le terme du second ordre de M_{--} , voir (108), on a pu procéder de même, mais dans la contribution d'ordre zéro (après prolongement analytique de type II), il a fallu faire un développement de Taylor du premier ordre :

$$\check{M}_{--\downarrow}^{(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) = \check{M}_{--\downarrow}^{(0)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) + (\bar{z}_q - \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}) \frac{d}{d\bar{z}} \check{M}_{--\downarrow}^{(0)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) + \dots \quad (112)$$

puis utiliser les relations (34), (94). En d'autres termes, la première correction à la relation de dispersion universelle $\bar{q} \mapsto \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$ de la limite de couplage faible résulte de deux effets physiques, *a priori* de même importance : (i) l'effet du couplage phase-module, totalement ignoré dans la Section 3.4, et (ii) une correction à l'équation dans la voie de module, c'est-à-dire au couplage module-module, également omise.

Analysons le résultat (111) dans des cas limites simples. À faible \bar{q} , la contribution dominante à la correction en énergie est quadratique en nombre d'onde et provient du couplage phase-module, celle provenant de $M_{--}^{(2)}$ étant seulement cubique. On trouve ainsi

$$\bar{z}_{\bar{q}}^{(2)} \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{\sim} \bar{z}_{\bar{q}}^{(2)}|_{M_{+-}^{(1)}} \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{\sim} - \frac{\check{\Delta}^2 \bar{q}^2}{2\pi^2} \frac{\zeta_0^2}{\zeta_0 - 1} \left(\ln \frac{\check{\Delta}}{8e} \right)^2 \quad (113)$$

ce qui reproduit le terme d'ordre $\check{\Delta}^2$ du coefficient de départ quadratique de la branche du continuum, voir (86). À grand \bar{q} , le calcul est simple quand on dispose d'expressions explicites, et l'on obtient à l'ordre dominant en \bar{q} :

$$\begin{aligned} \check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) &\underset{\bar{q} \gg 1}{\simeq} - \frac{i\pi\check{\Delta}Y_0\bar{q}}{2(2\pi)^3} \ln \frac{\check{\Delta}\bar{q}(1+Y_0^2)^{1/2}}{8e} \quad \text{et} \\ \check{M}_{--}^{(2)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) &\underset{\bar{q} \gg 1}{\simeq} - \frac{\pi\check{\Delta}^2\bar{q}^2(1-Y_0^2)}{16(2\pi)^3} \left\{ \pi \ln \check{\Delta} + \ln \left[\frac{\bar{q}(1+Y_0^2)^{1/2}e^{1/2}}{8} \right] - (1-Y_0^4)^{-1} \right\} \end{aligned} \quad (114)$$

où Y_0 est donné par (44). Le calcul est plus laborieux sur les formes intégrales : en $\bar{z} \approx \bar{q} \approx \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$, les éléments de matrice d'ordre zéro $\check{M}_{++}^{(0)}$ et $\check{M}_{--}^{(0)}$ se comportent de la même façon à l'ordre dominant en \bar{q} ,²⁷ donc à cet ordre s'annulent tous les deux lorsque $\bar{z} = \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$: on travaille beaucoup pour un résultat nul... Il est donc astucieux de travailler directement sur la différence entre (33) et (31), en posant $\check{D}(\bar{z}, \bar{q}) \equiv \check{M}_{++}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q}) - \check{M}_{--}^{(0)}(\bar{z}, \bar{q})$. Alors, après prolongement analytique et toujours à l'ordre dominant en \bar{q} ,²⁸ on obtient en termes de la fonction de Bose $g_2(z)$:

$$\begin{aligned} \check{D}_{\downarrow}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) &\underset{\bar{q} \gg 1}{\simeq} \frac{8\pi}{(2\pi)^3 Y_0 \bar{q}^2} \left\{ \pi \ln(-2i\bar{q}Y_0) - \ln[\bar{q}(1+Y_0^2)^{1/2}] \operatorname{atan} \left(\frac{1}{Y_0} \right) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{Im} g_2 \left(\frac{1}{iY_0} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Im} g_2 \left(\frac{2}{iY_0 + 1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (115)$$

²⁷Après prolongement analytique, ils sont tous deux équivalents à un facteur constant près à $\mathcal{M}_0(\mathcal{Z}, \bar{q})$, comme dans (40).

²⁸On tombe sur des intégrales comme celles I et J de la note 9, que l'on traite de la même façon.

Le comportement du résidu $\bar{Z}_-^{(0)}$ à grand nombre d'onde figure dans (96). On déduit de tout cela qu'à nouveau, le couplage phase-module apporte la correction dominante d'ordre $\check{\Delta}^2$ à la branche du continuum et l'on peut garder

$$\bar{z}_{\bar{q}}^{(2)} \underset{\bar{q} \gg 1}{\simeq} \bar{Z}_-^{(0)} \frac{[\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}, \bar{q})]^2}{\check{D}_\downarrow(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q})} \approx \check{\Delta}^2 \bar{q}^5 \tag{116}$$

Aux nombres d'onde intermédiaires, $\bar{q} \approx 1$, il se trouve que la contribution du couplage phase-module à $\text{Re } \bar{z}_{\bar{q}}^{(2)}$ dans (111) s'annule, le point d'annulation dépendant peu de $\check{\Delta}$ et restant proche de $\bar{q} = 5$ pour les paramètres de la Figure 5a. La contribution de $M_{+-}^{(2)}$ à cette observable n'est alors certes plus négligeable devant celle de $M_{+-}^{(1)}$ mais elle reste petite en valeur absolue, et on peut l'ignorer en pratique ; ceci explique pourquoi les différentes courbes en trait plein (y compris la courbe limite noire) semblent se croiser en $\bar{q} \approx 5$ sur la figure.

Comme on peut en juger sur la Figure 5a, en comparant les courbes tiretées à celles en trait plein, le calcul (111) de \bar{z}_q au second ordre en $\check{\Delta}$ rend compte de l'existence d'un minimum sur $\text{Re } z_q$, mais de manière plus qualitative que quantitative. Il échoue en particulier à bien décrire la remontée de la courbe au-delà du minimum, l'accord avec les résultats numériques dans cette zone ne s'améliorant pas à couplage très faible. Le problème vient de l'approximation $\check{M}_{++\downarrow}^{(0)}(\bar{z}_q, \bar{q}) \approx \check{M}_{++\downarrow}^{(0)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q})$ faite dans l'équation (111). En effet, comme nous l'avons dit, $\check{M}_{++\downarrow}^{(0)}$ et $\check{M}_{--\downarrow}^{(0)}$ évalués en $\bar{z} \approx \bar{q}$ sont équivalents et d'ordre $\approx \bar{q}^0$ à grand \bar{q} ; comme $\check{M}_{--\downarrow}^{(0)}$ s'annule par construction en $\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$, $\check{M}_{++\downarrow}^{(0)}$ est en ce point anormalement faible, c'est-à-dire d'ordre \bar{q}^{-2} comme on le lit sur (115), plutôt que d'ordre \bar{q}^0 comme on aurait pu s'y attendre. Il faut dans ce cas écrire $\check{M}_{++\downarrow} = \check{D}_\downarrow + \check{M}_{--\downarrow}$, approximer la petite contribution \check{D}_\downarrow par sa valeur en $\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}$ mais effectuer sur le bout restant $M_{--\downarrow}$ le même développement de Taylor que dans l'équation (112). Nous pouvons aussi omettre la correction $M_{--\downarrow}^{(2)}$, que nous avons montré dans le paragraphe précédent être très petite à \bar{q} quelconque et même sous-dominante à grand \bar{q} . Nous remplaçons en définitive l'équation du premier degré (111) par une équation du second degré (trinômiale) sur \bar{z}_q , d'où la notation « trin » en exposant :²⁹

$$\frac{(\bar{z}_q^{\text{trin}} - \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)})}{\bar{Z}_-^{(0)}} \left[\frac{\bar{z}_q^{\text{trin}} - \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}}{\bar{Z}_-^{(0)}} + \check{D}_\downarrow(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) \right] = [\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q})]^2 \tag{117}$$

La bonne solution de l'équation s'écrit

$$\boxed{\frac{\bar{z}_q^{\text{trin}} - \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}}{\bar{Z}_-^{(0)}} = -\frac{1}{2} \check{D}_\downarrow(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q}) + \eta \left[\frac{1}{4} \check{D}_\downarrow(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q})^2 + \check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q})^2 \right]^{1/2}} \tag{118}$$

où le signe η est celui de $\text{Re } \check{D}_\downarrow(\bar{z}_{\bar{q}}^{(0)}, \bar{q})$, positif pour \bar{q} assez grand, négatif pour \bar{q} assez petit. La prédiction correspondante, représentée en pointillé sur la Figure 5a, est en bon accord avec les résultats exacts, un accord d'autant meilleur que $\check{\Delta}$ est plus faible, même dans la remontée au-delà du minimum. Lorsqu'on s'éloigne du minimum dans le sens des \bar{q} croissants,

²⁹En anticipant la loi $\bar{q}_{\text{min}} \approx \check{\Delta}^{-1/3}$, on vérifie au voisinage du minimum que les parties imaginaires des deux termes entre crochets dans (117) sont effectivement du même ordre de grandeur $\approx 1/\bar{q}_{\text{min}}^2$; il faut bien considérer ici leur partie imaginaire car nous voulons accéder à la partie réelle de $(\bar{z}_q^{\text{trin}} - \bar{z}_{\bar{q}}^{(0)})$ en préfacteur des crochets ; or le résidu au dénominateur de ce préfacteur est imaginaire pur à l'ordre dominant en \bar{q} et le second membre de (117) est réel.

la contribution de \check{D}_\downarrow dans (118) devient de plus en plus négligeable et la remontée prend la forme simple³⁰

$$\frac{\bar{z}_q^{\text{trin}} - \bar{z}_q^{(0)}}{\bar{Z}_-^{(0)}} \underset{\bar{q} \gg \bar{q}_{\min}}{=} -\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q}) - \frac{1}{2} \check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q}) + \dots \tag{119}$$

Lorsqu'on s'éloigne du minimum dans le sens des \bar{q} décroissants, la contribution de \check{D}_\downarrow devient dominante et (117) se réduit au développement (111) (à l'omission près de $\check{M}_{-}^{(2)}$), qui n'est donc rétrospectivement applicable qu'à $\bar{q} \ll \bar{q}_{\min}$. Pour être complets, donnons l'expression tirée de (117) des résidus dans les voies de phase et de module,³¹ ainsi que du déphasage dans la superposition de ces deux voies maximisant le résidu global :

$$\theta^{\text{trin}} = \arg \left(\frac{-\bar{Z}_-^{(0)} \check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})}{\bar{z}_q^{\text{trin}} - \bar{z}_q^{(0)}} \right) \quad \text{et} \quad \bar{Z}_\pm^{\text{trin}} = \frac{1}{2} \bar{Z}_-^{(0)} \mp \eta \frac{\bar{Z}_-^{(0)} \check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q}) / 4}{\left[\frac{1}{4} \check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})^2 + \check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})^2 \right]^{1/2}} \tag{120}$$

Passons maintenant à l'étude approfondie de la partie réelle de la branche du continuum au voisinage de son minimum en $q = q_{\min} > 0$ dans la limite $\check{\Delta} \rightarrow 0$. Pour cela, il faut d'abord déterminer la loi d'échelle de q_{\min} . Une première façon de faire est de dire que $\bar{z}_q^{(0)} \approx \bar{z}_q^{(2)}$ en $q = q_{\min}$, ce qui, compte tenu de (43) et de (116), conduit à $\bar{q}_{\min} \approx \check{\Delta}^{-1/3}$ donc à $\check{q}_{\min} \approx \check{\Delta}^{2/3}$, ce qui est l'échelle de nombre d'onde inattendue annoncée dans le titre de la présente Section 4.6.3. Une seconde façon est d'exiger que $\check{D}_\downarrow \approx \check{M}_{+-}^{(1)}$ dans l'expression entre crochets de (118), ce qui, compte tenu de (114) et (115), conduit au même résultat. Nous en déduisons que $\text{Re } \bar{z}_{q_{\min}} \approx \check{\Delta}^{1/3}$ ou encore $\text{Re } \check{z}_{q_{\min}} \approx \check{\Delta}^{4/3}$. L'adimensionnement de la relation de dispersion adapté à la nouvelle échelle sera indiqué par un chapeau. Posons donc d'abord $\hat{q} = \check{\Delta}^{2/3} \bar{q}$, c'est-à-dire $\bar{q} = 2\check{\Delta}^{-1/3} \hat{q}$. Obtenons ensuite l'expression de la partie réelle de la branche ainsi adimensionnée à l'ordre dominant dans la limite $\check{\Delta} \rightarrow 0$ à \hat{q} fixé, en travaillant un peu sur (117) :³²

$$\text{Re } \check{z}_q \underset{\check{\Delta} \rightarrow 0}{\overset{\hat{q} \text{ fixé}}{=} \check{\Delta}^{4/3} \left[\text{Re } \hat{z}_q^{(0)} + o(1) \right]} \quad \text{avec} \tag{121}$$

$$\text{Re } \hat{z}_q^{(0)} = -\frac{(2\pi)^2 \hat{q} \check{\Delta}^{-1/3}}{\frac{\pi}{2} + \text{atan } Y_0} \text{Im} \left[\frac{1}{4} \check{D}_\downarrow^{\text{asympt}}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})^2 + \check{M}_{+-}^{(1, \text{asympt}}(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})^2 \right]^{1/2}$$

où $\check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})$ et $\check{M}_{+-}^{(1)}(\bar{z}_q^{(0)})$ ont été remplacés par leur ordre dominant (115) et (114) à grand \bar{q} , comme il a fallu le faire aussi pour $\bar{Z}_-^{(0)}$ au moyen de (96), et comme l'indique l'exposant « asympt ». La dépendance en nombre d'onde du résultat (121) reste malheureusement assez obscure, puisque Y_0 dans (44) n'a pas de dépendance simple en \bar{q} .³³ Pour progresser, faisons le changement de variable astucieux

$$\hat{q} \equiv \frac{\pi \kappa}{|\ln \varepsilon|^{2/3}} \quad \text{avec} \quad \varepsilon \equiv \check{\Delta}^{2/3} \tag{122}$$

³⁰ Il y a un signe $-$ devant le terme $\check{M}_{+-}^{(1)}$ dans (119) car, pour $1 \ll \bar{q} \ll 1/\check{\Delta}$, sa partie imaginaire est positive, son carré est négatif et $\text{Im}(\check{D}_\downarrow^2) < 0$.

³¹ On obtient la dérivée du déterminant de M prolongé analytiquement en dérivant le premier membre de (117) par rapport à \bar{z}_q^{trin} ; le second membre, constant, donne une contribution nulle.

³² Une simplification importante vient du fait qu'à l'ordre dominant en \bar{q} , $\text{Re } \bar{z}_q^{(0)} = \frac{1}{2} \text{Re}[\bar{Z}_-^{(0)} \check{D}_\downarrow(\bar{z}_q^{(0)}, \bar{q})]$.

³³ En revanche, on sait exprimer \bar{q} en fonction de Y_0 , et (121) admet une forme explicite compliquée en Y_0 .

puis faisons tendre ε vers zéro à κ fixé dans (121). L'ordre dominant en $|\ln \varepsilon|$ est simple à calculer,³⁴

$$\operatorname{Re} \hat{z}_{\hat{q}}^{(0)} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\overset{\kappa \text{ fixé}}{\sim}} \begin{cases} \frac{2\pi}{|\ln \varepsilon|^{1/3}} \frac{1}{(4\kappa^2 - \kappa^8)^{1/2}} & \text{si } \kappa < 2^{1/3} \\ \frac{|\ln \varepsilon|^{2/3} (\kappa^6 - 4)^{1/2}}{2\kappa} & \text{si } \kappa > 2^{1/3} \end{cases} \quad (123)$$

et atteint son minimum en $\kappa = 1$. Après retour aux variables adimensionnées originelles (58), il conduit aux très beaux équivalents

$$\check{q}_{\min} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi\varepsilon}{|\ln \varepsilon|^{2/3}} \quad \text{et} \quad \operatorname{Re} \check{z}_{q_{\min}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{2\pi\varepsilon^2}{3^{1/2} |\ln \varepsilon|^{1/3}} \quad (124)$$

représentés en trait plein sur la Figure 6, et qui sont déjà assez proches des valeurs exactes (symboles). Nous avons poussé le calcul jusqu'à l'ordre sous-sous-dominant dans (121), le petit paramètre du développement étant $1/|\ln \varepsilon|$.³⁵

$$\check{q}_{\min} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{\pi\varepsilon}{|\ln \varepsilon|^{2/3}} \left[\frac{c_1 + (c_1^2 - c_2)|\ln \varepsilon|^{-1}}{c_1 - c_2|\ln \varepsilon|^{-1}} + O(w^\alpha |\ln \varepsilon|^{-3}) \right] \quad (125)$$

$$\operatorname{Re} \check{z}_{q_{\min}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{2\pi\varepsilon^2}{3^{1/2} |\ln \varepsilon|^{1/3}} \left[\frac{1}{1 - d_1|\ln \varepsilon|^{-1} + (d_1^2 - d_2)|\ln \varepsilon|^{-2}} + O(w^\alpha |\ln \varepsilon|^{-3}) \right] \quad (126)$$

où l'on a introduit $w = \ln(2|\ln \varepsilon|^{1/3})$, des coefficients c_n et d_n fonctions de w ,

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{19}{24} - \frac{1}{3}w & c_2 &= \frac{959}{1152} + \frac{5\pi^2}{18} + 2\ln 2 + 4\ln^2 2 + \left(\frac{5}{12} - 4\ln 2\right)w + \frac{8}{9}w^2 \\ d_1 &= 3 + 2\ln 2 - \frac{5}{3}w & d_2 &= \frac{1223}{144} - \frac{2\pi^2}{9} + 12\ln 2 - \left(\frac{115}{9} + \frac{10}{3}\ln 2\right)w + \frac{23}{9}w^2 \end{aligned} \quad (127)$$

et on laisse l'exposant α dans les termes d'erreur indéterminé. Bien entendu, ces coefficients sont ceux du développement en puissances de $|\ln \varepsilon|^{-1}$ des expressions entre crochets dans (125), (126), mais nous avons préféré écrire le résultat sous une forme de Padé (1,1) ou (0,2) car ceci améliore grandement la vitesse de convergence en $|\ln \varepsilon|^{-1}$: les lignes tiretées dans la Figure 6 collent déjà très bien aux résultats numériques pour des valeurs modestes de μ/Δ .

Pour terminer, il faut vérifier que, dans la limite $\check{\Delta} \rightarrow 0$, aucune échelle de nombre d'onde de la branche du continuum n'a été oubliée entre la nouvelle $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$ et l'ancienne $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$.³⁶ Analytiquement, nous tirons de (119), limitée au premier terme dans son second membre, que $\operatorname{Re} \hat{z}_{\hat{q}}^{(0)} \sim \check{\zeta}_1 \hat{q}^2$ aux nombres d'onde grands devant la nouvelle échelle, $\hat{q} \gg \check{\Delta}^{2/3}$ autrement dit $\hat{q} \gg 1$, où $\check{\zeta}_1$ est exactement le même coefficient que dans le développement (103) de $\operatorname{Re} \check{z}_{\check{q}}^{(0)}$ aux nombres d'onde faibles devant l'ancienne échelle, $\check{q} \ll \check{\Delta}^0$: le raccordement est parfait. Numériquement, nous avons produit la Figure 7 de synthèse, assez mathématique compte tenu de la valeur très faible de $\check{\Delta}$ choisie, mais qui montre comment la prédiction (117) sur \check{z}_q et

³⁴ Donnons aussi $\operatorname{Im} \check{z}_q \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\overset{\kappa \text{ fixé}}{\sim}} -\varepsilon |\ln \varepsilon|^{1/3} \kappa$, tiré de (117) et en accord avec (43), (44) puisqu'à cet ordre $\operatorname{Im} \check{z}_q^{\text{trin}}$ est dominé par $\operatorname{Im} \check{z}_{\check{q}}^{(0)}$. Ceci signifie qu'à l'ordre dominant, $\hat{z}_{\hat{q}}$ est imaginaire pur d'ordre ε^{-1} . L'erreur relative dans ces expressions, y compris (123), est un $O((\ln |\ln \varepsilon|)^\alpha / |\ln \varepsilon|)$, où la valeur de l'exposant α importe peu.

³⁵ Posons $x = |\ln \varepsilon|^{-1/3} \rightarrow 0$ et $\eta = \ln(\kappa/x)$. Du développement $\pi Y_0 = 1/2x^3 + \eta + 2\eta x^3 + O(\eta^2 x^6)$ nous tirons pour $\kappa < 2^{1/3}$: $\operatorname{Re} \hat{z}_{\hat{q}}^{(0)} = (2\pi x/\kappa(4 - \kappa^6)^{1/2}) [1 + (x^3/(4 - \kappa^6))(b_0 + b_6 \kappa^6) + (x^6/(4 - \kappa^6)^2)(c_0 + c_6 \kappa^6 + c_{12} \kappa^{12}) + O(x^9 \eta^3)]$ avec $b_0 = 8(1 - \eta)$, $b_6 = 1 + \ln 2 + 3\eta$, $c_0 = 64(1 - 3\eta + \eta^2)$, $c_6 = 34 - 2\pi^2 + 4\ln 2 - 6\ln^2 2 + 4(25 + 7\ln 2)\eta - 46\eta^2$ et $c_{12} = 1 + 8\ln 2 + 3\ln^2 2 - 4(1 + \ln 2)\eta + 9\eta^2$.

³⁶ Nous avons déjà vu comment (117) se raccorde à l'échelle $\check{q} \approx \check{\Delta}$. En effet, si $\check{q} \approx \check{\Delta}$, on a $\check{q} \ll \check{q}_{\min} \approx \check{\Delta}^{2/3}$. Or, comme il est dit après (119), l'équation (117) pour $\check{q} \ll \check{q}_{\min}$ se réduit essentiellement à (111), donc donne le bon comportement de \check{z}_q à $\check{q} \approx \check{\Delta}$.

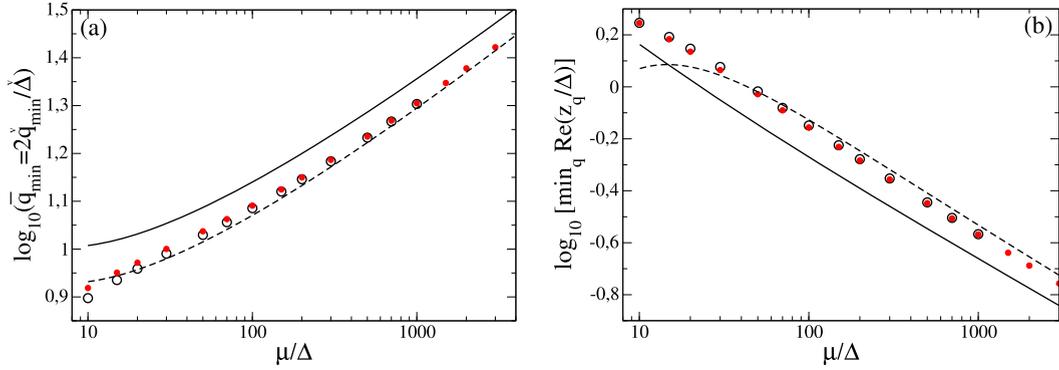


FIGURE 6. Pour des interactions de portée nulle (cas des atomes froids) en régime de couplage faible, position q_{\min} (a) et valeur $\text{Re } z_{q_{\min}}$ (b) du minimum de la partie réelle de la branche du continuum $q \mapsto \text{Re } z_q$ pour un prolongement analytique de type II, en fonction de l'inverse du paramètre d'ordre. Cercles noirs : valeurs exactes issues d'une résolution numérique de l'équation (76). Disques rouges : prédictions de l'équation du second degré (118) sur z_q . Trait plein noir : équivalents asymptotiques (124). Tireté noir : approximations de Padé (125) et (126). Ces deux derniers éléments relèvent de l'échelle de nombre d'onde inattendue $\check{\eta} \approx \check{\Delta}^{2/3}$.

ses prédictions dérivées (120) sur les résidus et le déphasage phase-module optimal interpolent magnifiquement entre les prédictions à l'échelle $\check{\eta} \approx \check{\Delta}$ de la Section 4.6.1 et celles à l'échelle $\check{\eta} \approx \check{\Delta}^0$ de la Section 4.6.2, toutes collant de très près aux résultats numériques dans leur régime de validité.

4.7. La branche du continuum pour $\Delta/\mu \gg 1$

Au voisinage du point d'annulation du potentiel chimique, du côté positif, nous trouvons que la branche du continuum (pour un prolongement analytique de type II) présente deux échelles de variation en nombre d'onde, celle $\check{\eta} \approx \check{\Delta}^0$ fixée par la largeur de l'intervalle d'existence de la branche (Section 4.7.1) et celle $\check{\eta} \approx \check{\Delta}^{-1/2}$ requise par l'approximation quadratique (82) de la branche (Section 4.7.2). Ces deux régimes se raccordant parfaitement comme nous le verrons, il n'y a pas d'autre échelle de nombre d'onde à considérer.

4.7.1. À l'échelle de nombre d'onde $\check{\eta} \approx \check{\Delta}^0$

Nous faisons tendre ici $\check{\Delta}$ vers $+\infty$ à nombre d'onde réduit $\check{\eta}$ fixé, en postulant un écart de limite finie et non nulle de la branche au bord du continuum de paire brisée :

$$\check{z}_q - 2\check{\Delta} \equiv \check{Z}_{\check{\eta}} \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{\eta} \text{ fixé}}{\approx}} \check{\Delta}^0 \quad (128)$$

comme le suggèrent les résultats numériques de la Figure 4 et l'approximation quadratique (82,86) écrite à la limite (91) de son domaine de validité. Pour obtenir un équivalent des éléments de matrice de \check{M} , nous revenons à leur formulation intégrale (7), (8) dans l'espace des vecteurs d'onde relatifs \mathbf{k} de la paire brisée, avec le domaine d'intégration \mathcal{D} remplacé par \mathbb{R}^3 bien entendu. Nous pouvons identifier *a priori* trois échelles naturelles d'énergie $\epsilon_{\mathbf{k} \pm \mathbf{q}/2} \approx \epsilon_{\mathbf{k}}$ dans ces intégrales, donc trois échelles de nombre d'onde \check{k} :

$$(a) : \check{\epsilon}_k - \check{\Delta} \approx \check{\Delta}^{-1} \iff \check{k} \approx \check{\Delta}^0 \quad ; \quad (b) : \check{\epsilon}_k - \check{\Delta} \approx \check{\Delta}^0 \iff \check{k} \approx \check{\Delta}^{1/4} \quad ; \quad (c) : \check{\epsilon}_k - \check{\Delta} \approx \check{\Delta} \iff \check{k} \approx \check{\Delta}^{1/2} \quad (129)$$

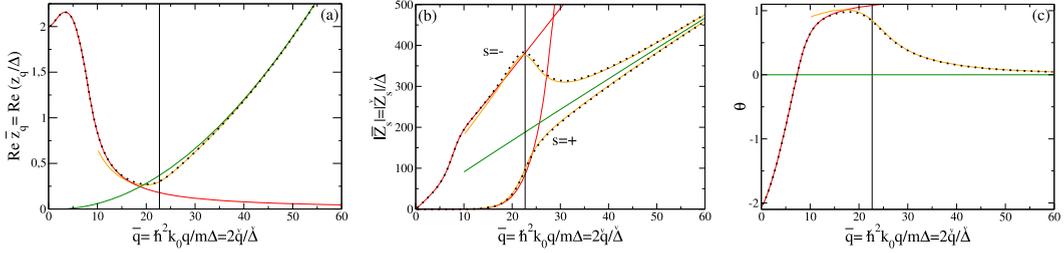


FIGURE 7. Pour un gaz de fermions en interaction de portée nulle dans la limite $\check{\Delta} = \Delta/\mu \rightarrow 0$, illustration de l'échelle de nombre d'onde inattendue $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$ et de son raccordement avec les échelles $\check{q} \approx \check{\Delta}$ et $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$ sur (a) la partie réelle de la relation de dispersion du mode du continuum de type II, (b) les poids spectraux du mode dans les voies de phase + et de module – des écarts à l'équilibre du paramètre d'ordre et (c) le déphasage θ entre les deux voies maximisant le poids spectral du mode selon l'équation (79). Gros pointillé noir : solution numérique de l'équation (76) et son report dans la définition de Z_{\pm} après (77) et dans (80). Trait plein rouge : ordre dominant en $\check{\Delta}$ à l'échelle $\check{q} \approx \check{\Delta}$ ($\check{\Delta} \rightarrow 0$ à $\bar{q} = 2\check{q}/\check{\Delta}$ fixé), à savoir la solution numérique de l'équation (34) et son insertion dans les expressions (94) et (97). Trait plein vert : ordre dominant en $\check{\Delta}$ à l'échelle $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$ ($\check{\Delta} \rightarrow 0$ à $\check{q} = q/k_0$ fixé), à savoir les expressions (102) et (106). Trait plein orange : ordre dominant en $\check{\Delta}$ à l'échelle $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$ ($\check{\Delta} \rightarrow 0$ à κ fixé dans le changement de variable (122)), à savoir les expressions (121) et (120) dans lesquelles on a écrit les coefficients à l'ordre dominant en $\check{\Delta}$ comme dans les équations (96), (114) et (115). Trait vertical fin : nombre d'onde au centre de l'échelle $\check{q} \approx \check{\Delta}^{2/3}$, c'est-à-dire valeur de \bar{q} pour laquelle $\kappa = 1$. On a pris $\check{\Delta} = 1/1000$.

et trois changements de variable correspondants

$$\check{k} = \check{\Delta}^0 \check{K}_a = \check{\Delta}^{1/4} \check{K}_b = \check{\Delta}^{1/2} \check{K}_c \quad (130)$$

Pour obtenir la contribution dominante aux intégrales de la première (a), de la deuxième (b) ou de la troisième échelle (c), il faut faire tendre $\check{\Delta}$ vers $+\infty$ dans l'intégrande à valeur fixée de \check{K}_a , \check{K}_b ou \check{K}_c . Dans \check{M}_{ss} , l'échelle (b) domine et l'on fixe \check{K}_b ; dans le couplage phase-module, c'est la troisième (c) qui l'emporte et l'on fixe \check{K}_c . On obtient ainsi les équivalents

$$\check{M}_{++}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\check{Z} = \check{z} - 2\check{\Delta} \text{ fixé}} \check{\Delta}^{3/4} \int_0^{+\infty} d\check{K}_b \frac{(2\pi)^{-2} \check{K}_b^2}{\check{Z} - \check{K}_b^4} = -\frac{(-\check{Z})^{-1/4} \check{\Delta}^{3/4}}{8\pi\sqrt{2}} \quad (131)$$

$$\check{M}_{--}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\check{Z} = \check{z} - 2\check{\Delta} \text{ fixé}} \check{\Delta}^{-1/4} \int_0^{+\infty} d\check{K}_b \frac{(2\pi)^{-2} \check{Z} \check{K}_b^2}{\check{Z} - \check{K}_b^4} = \frac{(-\check{Z})^{3/4} \check{\Delta}^{-1/4}}{8\pi\sqrt{2}} \quad (132)$$

$$\check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\check{Z} = \check{z} - 2\check{\Delta} \text{ fixé}} \check{\Delta}^{1/2} \int_0^{+\infty} d\check{K}_c \frac{-(2\pi)^{-2}}{(1 + \check{K}_c^4)^{1/2}} = -\frac{[\Gamma(5/4)]^2 \check{\Delta}^{1/2}}{\pi^{5/2}} \quad (133)$$

où la valeur explicite des intégrales est donnée pour $\text{Im } \check{Z} < 0$, sous une forme adaptée au cas à venir, $\text{Im } \check{Z} \rightarrow 0^-$ à $\text{Re } \check{Z} < 0$ fixée. Afin d'utiliser la procédure de Nozières (12), on développe directement les densités spectrales non nulles de type II dans la Table 2,

$$\check{\rho}_{++}^{[\text{III}]}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\check{Z} = \check{z} - 2\check{\Delta} \text{ fixé}} \frac{\pi^2 \check{\Delta}}{2\check{q}} \left[1 + \frac{\check{Z}}{4\check{\Delta}} + O\left(\frac{1}{\check{\Delta}^2}\right) \right] \quad \text{et} \quad \check{\rho}_{--}^{[\text{III}]}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\check{Z} = \check{z} - 2\check{\Delta} \text{ fixé}} \frac{\pi^2 \check{Z}}{4\check{q}} \left[1 - \frac{\check{Z}}{8\check{\Delta}} + O\left(\frac{1}{\check{\Delta}^2}\right) \right] \quad (134)$$

On constate alors que les éléments de matrice \check{M}_{ss} sont dominés par le terme de Nozières effectuant le prolongement analytique, plus grand par un facteur $\check{\Delta}^{1/4}$. Ceci est troublant et laisse

ressentir un mode du continuum fort éloigné de l'axe des énergies expérimentalement accessible $\text{Im } z = 0^+$ donc sans grand sens physique. La résolution à l'ordre dominant de l'équation aux énergies propres donne

$$\check{Z}_{\check{q}} \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{128}{\pi^5} [\Gamma(5/4)]^4 \check{q}^2 \quad (135)$$

La partie réelle de l'énergie du mode se trouve donc effectivement en dehors de l'intervalle $[2\Delta, \epsilon_2(q)]$ par lequel s'effectue le prolongement analytique, qui est aussi l'intervalle d'observabilité dans les fonctions de réponse du système, au sens de la Section 4.3 (l'énergie $\epsilon_2(q)$ est donnée ici par (63)). Faut-il le rappeler, le mode n'est pas réellement dans la bande interdite physique $[0, 2\Delta]$ même si sa partie réelle s'y trouve mathématiquement; il en est séparé par le bout de la ligne de coupure originelle rabattue sur $]-\infty, 2\Delta]$ par la procédure (12) [3].

De manière remarquable, le résultat réel négatif (135) coïncide à l'ordre dominant avec l'approximation quadratique en \check{q} de la branche, voir les équations (82) et (86) : l'approximation quadratique est valable partout, et l'échelle de nombre d'onde infinitésimale pour \check{q} prédite par sa condition de validité (91) n'intervient pas. La situation change aux ordres suivants, les deux échelles de nombre d'onde attendues apparaissent et la condition (91) prend tout son sens. Les calculs, assez techniques, sont rejetés dans l'Annexe B.1. Ils sont désormais multi-échelles : il faut inclure dans un même élément de matrice $\check{M}_{ss'}$ les échelles (b) et (c), ainsi que l'échelle intermédiaire, notée (bc), s'en déduisant par moyenne géométrique et requérant le changement de variable $\check{k} = \check{\Delta}^{3/8} \check{K}_{bc}$. En revanche, il n'est pas nécessaire de traiter à part l'échelle (a) à l'ordre où nous irons (erreur relative $O(1/\check{\Delta})$ sur $\check{M}_{ss'}$ et *in fine* sur $\check{Z}_{\check{q}}$). Voici le résultat :

$$\check{z}_q - 2\check{\Delta} \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{q}^{\text{fixé}}}{=}} a_0 + a_1 \check{\Delta}^{-1/4} + a_2 \check{\Delta}^{-2/4} + a_3 \check{\Delta}^{-3/4} + O(\check{\Delta}^{-1}) \quad (136)$$

avec

$$a_0 = -\frac{128}{\pi^5} [\Gamma(5/4)]^4 \check{q}^2 \quad (137)$$

$$a_1 = 16 \cdot 2^{1/4} (4 - 3i\sqrt{2}) \check{q}^{5/2} [\Gamma(5/4)]^3 / \pi^{19/4} \quad (138)$$

$$a_2 = [9\sqrt{2}\pi + 16i(18 + 9\pi - \pi^3)] \check{q}^3 [\Gamma(5/4)]^2 / (3\pi^{11/2}) \quad (139)$$

$$a_3 = \left\{ -96(2\sqrt{2} + 3i)\pi^3 + [2\sqrt{2}(112\pi^3 - 2256 - 303\pi) + i(312\pi^3 - 5760 - 585\pi)] \check{q}^2 \right\} \frac{\check{q}^{3/2} \Gamma(5/4)}{48 \cdot 2^{3/4} \pi^{21/4}} \quad (140)$$

Si on cherchait à utiliser (136) pour $\check{q} \rightarrow 0$, on retrouverait le terme dominant réel comme on l'a dit, mais pas le terme sous-dominant imaginaire pur du coefficient du départ quadratique dans (86), puisque a_2 ci-dessus tend vers zéro cubiquement en nombre d'onde. Sur la partie imaginaire de la relation de dispersion, qui varie à l'ordre dominant comme $\check{q}^{5/2}$, la plage de départ quadratique se réduit à zéro à grand $\check{\Delta}$, comme le prédisait (91), et on ne peut pas échanger les limites $\check{q} \rightarrow 0$ et $\check{\Delta} \rightarrow +\infty$. Pour être complets, donnons un développement des résidus dans les voies de phase et de module, et du déphasage entre ces deux voies correspondant au résidu global maximal :

$$|\check{Z}_-| \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{q}^{\text{fixé}}}{=}} 16\check{q} \left[1 - \frac{(2\pi)^{1/4} \check{q}^{1/2}}{2\Gamma(1/4)\check{\Delta}^{1/4}} + O(\check{\Delta}^{-1/2}) \right], \quad |\check{Z}_+| \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{q}^{\text{fixé}}}{=}} \frac{4[\Gamma(1/4)]^4 \check{q}^3}{\pi^5 \check{\Delta}} \quad \text{et} \quad \theta + \frac{\pi}{2} \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{q}^{\text{fixé}}}{=}} -\frac{(\pi/2)^{1/4} \check{q}^{1/2}}{\Gamma(1/4)\check{\Delta}^{1/4}} \quad (141)$$

4.7.2. À l'échelle de nombre d'onde $\check{q} \approx \check{\Delta}^{-1/2}$

Pour étudier la branche du continuum de type II aux nombres d'onde réduits $\check{q} \approx \check{\Delta}^{-1/2}$ au voisinage du point d'annulation du potentiel chimique, nous posons $\check{q} = \check{Q}\check{\Delta}^{-1/2}$ et faisons tendre

$\check{\Delta}$ vers plus l'infini à \check{Q} fixé. D'après (91), l'échelle de nombre d'onde considérée est celle de la limite de validité de l'approximation quadratique (82), que l'on peut donc utiliser pour trouver la loi d'échelle en énergie. D'après (86), le coefficient de \check{q}^2 dans (82) est d'ordre $\check{\Delta}^0$, si bien que $\check{z}_q - 2\check{\Delta} \approx \check{\Delta}^{-1}$ et il faut poser

$$\check{z} - 2\check{\Delta} \equiv \frac{\check{\zeta}}{\check{\Delta}} \tag{142}$$

Il reste à prendre la limite $\check{\Delta} \rightarrow +\infty$ dans les éléments de matrice de $\check{M}(\check{z}, \check{q})$ à $\check{\zeta}$ et \check{Q} fixés. Nous procédons de la même façon que dans la Section 4.7.1, en distinguant les trois échelles (129) de nombre d'onde dans l'intégrale sur le vecteur d'onde relatif \mathbf{k} de paire brisée. On trouve que les éléments diagonaux \check{M}_{ss} sont dominés par l'échelle de nombre d'onde (a), alors que le couplage phase-module \check{M}_{+-} est dominé par l'échelle (c) :

$$\check{M}_{++}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{\zeta} \text{ et } \check{Q} \text{ fixés}}{\sim}} \check{\Delta}^{+1} \int_0^{+\infty} d\check{K}_a \frac{(2\pi)^{-2} \check{K}_a^2}{\check{\zeta} - (\check{K}_a^2 - 1)^2} = \frac{-\check{\Delta}}{16\pi(-\check{\zeta})^{1/2}} \left[(1 + i(-\check{\zeta})^{1/2})^{1/2} + (1 - i(-\check{\zeta})^{1/2})^{1/2} \right] \tag{143}$$

$$\check{M}_{--}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{\zeta} \text{ et } \check{Q} \text{ fixés}}{\sim}} \check{\Delta}^{-1} \int_0^{+\infty} d\check{K}_a \frac{(2\pi)^{-2} \check{\zeta} \check{K}_a^2}{\check{\zeta} - (\check{K}_a^2 - 1)^2} = \frac{(-\check{\zeta})^{1/2}}{16\pi\check{\Delta}} \left[(1 + i(-\check{\zeta})^{1/2})^{1/2} + (1 - i(-\check{\zeta})^{1/2})^{1/2} \right] \tag{144}$$

$$\check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{\zeta} \text{ et } \check{Q} \text{ fixés}}{\sim}} \check{\Delta}^{1/2} \int_0^{+\infty} d\check{K}_c \frac{-(2\pi)^{-2}}{(1 + \check{K}_c^4)^{1/2}} = -\frac{[\Gamma(5/4)]^2}{\pi^{5/2}} \check{\Delta}^{1/2} \tag{145}$$

où la forme explicite des intégrales est adaptée à $\check{\zeta}$ proche d'un réel strictement négatif. Le développement des densités spectrales utiles au prolongement analytique par l'intervalle II s'effectue directement à partir de la Table 2 :

$$\check{\rho}_{++}^{\text{II}}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{\zeta} \text{ et } \check{Q} \text{ fixés}}{\sim}} \frac{\pi^2 \check{\Delta}^{3/2}}{2\check{Q}} + O(\check{\Delta}^{-1/2}) \quad \text{et} \quad \check{\rho}_{--}^{\text{II}}(\check{z}, \check{q}) \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{\zeta} \text{ et } \check{Q} \text{ fixés}}{\sim}} \frac{\pi^2 \check{\zeta} \check{\Delta}^{-1/2}}{4\check{Q}} + O(\check{\Delta}^{-5/2}) \tag{146}$$

Comme dans la Section 4.7.1, les éléments de matrice diagonaux \check{M}_{ss} sont beaucoup plus petits que les densités spectrales, cette fois par un facteur $\approx \check{\Delta}^{1/2}$, et ne contribuent pas à l'ordre dominant aux valeurs analytiquement prolongées $\check{M}_{ss|}$. En résolvant l'équation aux énergies propres (76), nous trouvons l'équivalent

$$\check{z}_Q \sim -\frac{128}{\pi^5} [\Gamma(5/4)]^4 \check{Q}^2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \check{z}_q - 2\check{\Delta} \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{Q} \text{ fixé}}{\sim}} -\frac{128}{\pi^5} [\Gamma(5/4)]^4 \check{q}^2 \tag{147}$$

En première approximation, la relation de dispersion est réelle et coïncide avec son approximation quadratique, même pour $\check{Q} \gg 1$. Pour mettre fin à ce paradoxe, il faut calculer la première correction, d'ordre relatif $\check{\Delta}^{-1/2}$. Pour les éléments diagonaux $\check{M}_{ss|}$, les équations (143), (144) suffisent. Pour les éléments non diagonaux, dans lesquels la densité spectrale $\check{\rho}_{+-}^{\text{III}}$ est identiquement nulle, il reste à déterminer l'ordre sous-dominant $\check{\Delta}^0$ de \check{M}_{+-} . Cette fois-ci, il faut ajouter la contribution de l'échelle (a) à celle de l'échelle (c). L'échelle (b) contribue indirectement, c'est-à-dire seulement sous la forme d'une coupure $\Lambda \check{\Delta}^{1/4}$ sur le nombre d'onde \check{k} , où Λ est une constante arbitraire strictement positive. C'est une coupure haute (ultraviolette) pour l'échelle (a), sans laquelle l'intégrale sur \check{K}_a divergerait à l'infini. C'est aussi une coupure basse (infrarouge) pour l'échelle (c), sans laquelle l'intégrale sur \check{K}_c du terme sous-dominant divergerait en zéro. À la limite $\check{\Delta} \rightarrow +\infty$, l'échelle (b) recolle ainsi les deux morceaux sous-dominants d'une manière indépendante de Λ et l'on trouve la correction cherchée à (145), comme le détaille l'Annexe B.2 :

$$\begin{aligned} \check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) + \frac{[\Gamma(5/4)]^2}{\pi^{5/2}} \check{\Delta}^{1/2} \underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\overset{\check{\zeta} \text{ et } \check{Q} \text{ fixés}}{\sim}} (2\pi)^{-2} \int_0^{+\infty} d\check{K} \left[\frac{\check{K}^2(\check{K}^2 - 1)}{\check{\zeta} - (\check{K}^2 - 1)^2} + 1 \right] \\ = \frac{1}{16i\pi} \left[(1 + i(-\check{\zeta})^{1/2})^{1/2} - (1 - i(-\check{\zeta})^{1/2})^{1/2} \right] \end{aligned} \tag{148}$$

Nous aboutissons à la relation de dispersion non quadratique

$$\check{\zeta}_Q \equiv (\check{z}_q - 2\check{\Delta})\check{\Delta} \stackrel{\check{Q} \text{ fixé}}{\underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\approx}} -C\check{Q}^2 \left\{ 1 + \check{\Delta}^{-1/2} \left[\frac{i\sqrt{2}}{\pi\sqrt{C}}(r - r^*) + \frac{3i/2}{\pi\sqrt{C}}(r + r^*) \right] + O(\check{\Delta}^{-1}) \right\} \quad (149)$$

avec les notations $C = \frac{128}{\pi^5} [\Gamma(5/4)]^4$ et $r = (1 + iC^{1/2}\check{Q})^{1/2}$. À faible \check{Q} , on peut faire l'approximation $r \simeq 1$; on retrouve les deux premiers termes du développement (86) du coefficient du départ quadratique de la branche, soit l'ordre dominant pour la partie réelle et pour la partie imaginaire. À grand \check{Q} , on peut faire l'approximation $r \simeq \exp(i\pi/4)C^{1/4}\check{Q}^{1/2} + \exp(-i\pi/4)C^{-1/4}\check{Q}^{-1/2}/2$, ce qui donne naissance à des contributions en \check{Q}^2 , $\check{Q}^{5/2}$ et $\check{Q}^{3/2}$; on retrouve alors la limite à faible \check{q} du développement (136).³⁷ Le raccordement est parfait, et il n'existe pas, dans la branche du continuum de type II près du point d'annulation du potentiel chimique, d'autre échelle de nombre d'onde que $\check{q} \approx \check{\Delta}^{-1/2}$ et $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$. Pour être complets, développons les résidus dans les voies de phase et de module, et le déphasage entre ces deux voies conduisant au résidu global maximal :

$$|\check{Z}_-| \stackrel{\check{Q} \text{ fixé}}{\underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\approx}} \frac{16\check{Q}}{\check{\Delta}^{1/2}} \left[1 - \frac{\sqrt{2}\check{Q}\text{Re } r}{2\pi\check{\Delta}^{1/2}\sqrt{1 + C\check{Q}^2}} + O(\check{\Delta}^{-1}) \right], \quad |\check{Z}_+| \stackrel{\check{Q} \text{ fixé}}{\underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\approx}} \frac{8C\check{Q}^3}{\check{\Delta}^{5/2}} \quad \text{et} \quad \theta + \frac{\pi}{2} \stackrel{\check{Q} \text{ fixé}}{\underset{\check{\Delta} \rightarrow +\infty}{\approx}} -\check{\Delta}^{-1/2} \frac{\text{Re } r}{\pi\sqrt{C}} \quad (150)$$

4.8. Prolongement analytique pour $\mu > 0$ par les fenêtres $\epsilon > \epsilon_2(q)$ et cas $\mu < 0$

Nous examinons brièvement dans cette section la ou les branches d'excitation collective du continuum obtenues par prolongement analytique de l'équation aux énergies propres à travers des intervalles en énergie autres que $[\epsilon_1(q), \epsilon_2(q)]$. Rappelons que les points de branchement $\epsilon_i(q)$ de l'équation et leur domaine d'existence en le nombre d'onde q ont fait l'objet de la Section 4.2.1.

4.8.1. Du côté BCS : $\mu > 0$

Commençons par le cas d'un potentiel chimique strictement positif. Pour des nombres d'onde $q < q_0$, où q_0 est donné par (57), les autres intervalles de prolongement possibles sont $[\epsilon_2(q), \epsilon_3(q)]$ et $[\epsilon_3(q), +\infty[$. Dans la procédure (12), il faut alors utiliser respectivement la forme III et la forme IV des densités spectrales $\rho_{ss'}(\epsilon, \mathbf{q})$, au sens de la Table 2.

La différence essentielle avec la forme de type II est que les $\rho_{ss'}(\epsilon, \mathbf{q})$ dépendent de l'énergie réelle ϵ au travers des deux premières racines s_1 et s_2 , ou de la deuxième racine s_2 de l'équation cubique (71) sur s , cette équation dépendant paramétriquement de ϵ . Il faut maintenant prolonger analytiquement les densités spectrales donc les racines s_i à des valeurs complexes z de l'énergie dans le quatrième quadrant $\text{Re } z > 0$ et $\text{Im } z < 0$ auquel notre étude est limitée. En utilisant les formules de Cardan, on trouve que les racines s_i présentent, en fonction de z , des lignes de coupure là où le discriminant de Cardan est réel négatif, et un point de branchement là où il s'annule.³⁸ On se débarrasse des lignes de coupure en effectuant numériquement un relèvement continu des trois racines $s_i(z)$ de l'équation cubique le long d'un chemin \mathcal{C} reliant z à un

³⁷Remplaçons en effet \check{q} par $\check{\Delta}^{-1/2}\check{Q}$ dans (136) et développons jusqu'à l'ordre relatif $\check{\Delta}^{-1/2}$. Le terme a_0 redonne la contribution en \check{Q}^2 , le terme a_1 redonne la contribution en $\check{Q}^{5/2}$, et le bout en $\check{q}^{3/2}$ du terme a_3 redonne la contribution en $\check{Q}^{3/2}$. Le terme a_2 et le bout en $\check{q}^{7/2}$ de a_3 contribuent aux ordres relatifs $\check{\Delta}^{-1}$ et $\check{\Delta}^{-3/2}$, hors de portée de (149).

³⁸Ce phénomène est général pour un polynôme $P(X, z)$ dont les coefficients dépendent analytiquement de z . Considérons un relèvement analytique d'une racine $s(z)$ le long d'un chemin dans le plan complexe. En dérivant l'équation définitoire $P(s(z), z) = 0$ par rapport à z , on trouve que $ds/dz = -\partial_z P(s, z)/\partial_X P(s, z)$, ce qui reste bien défini tant que $\partial_X P(s, z) \neq 0$ donc tant que $s(z)$ n'est pas racine multiple de $P(X, z)$.

point origine ϵ_0 fixé dans l'intervalle de prolongement analytique $[\epsilon_2(q), \epsilon_3(q)]$ (par exemple, son milieu) ou $[\epsilon_3(q), +\infty[$ (par exemple $2\epsilon_3(q)$). En revanche, on ne peut pas éliminer les points de branchement des $s_i(z)$. Leurs positions dans le plan complexe (autres que les valeurs attendues $\pm 2\Delta$) sont données par les racines du polynôme $P_8(X)$ de degré huit, voir (59), dont on a déjà signalé dans la Section 4.2.2 qu'il est relié au discriminant de l'équation cubique. Heureusement, il résulte de la note 21 que $P_8(X)$ n'admet à l'intérieur du quatrième quadrant qu'une seule racine complexe α . Il reste à préciser de quel côté de α s'effectue le relèvement continu des $s_i(z)$: à point de départ ϵ_0 et d'arrivée z fixé, passer d'un côté de α ou de l'autre a pour effet d'échanger les racines $s_2(z)$ et $s_3(z)$, comme nous l'avons vérifié numériquement, ce qui change les densités spectrales. Dans la présente étude, nous avons choisi de ne jamais passer sous le point α , c'est-à-dire de faire le tour par au-dessus et par la gauche si $\text{Re } z < \text{Re } \alpha$ et $\text{Im } z < \text{Im } \alpha$; la ligne de coupure correspondante sur les $s_i(z)$, et donc sur les densités spectrales prolongées $\rho_{ss'}(z, \mathbf{q})$,³⁹ est la demi-droite verticale partant de α vers le bas.

Les résultats de notre étude numérique sont présentés sur la Figure 8, pour trois valeurs de la force des interactions, $\Delta/\mu = 1/10$ dans le régime de couplage faible, $\Delta/\mu = 1$ dans le régime de couplage fort et $\Delta/\mu = 5$ près du point d'annulation du potentiel chimique. Nous trouvons une branche $q \mapsto z_q$ de type III, du moins tant que Δ/μ n'est pas trop grand (elle est absente du quatrième quadrant pour $\Delta/\mu = 5$), voir les Figures 8a et 8b. Son domaine d'existence en nombre d'onde est un intervalle $[q_1, q_0]$; la borne supérieure a la valeur maximale accessible q_0 , mais la borne inférieure est strictement positive, parce que la partie réelle de z_q s'annule (et z_q passe virtuellement dans le troisième quadrant) avant que q n'atteigne zéro. Dans le régime de couplage faible, on peut comme dans la Section 4.6.2 faire tendre $\check{\Delta}$ vers zéro à \check{z} fixé et réduire l'équation aux énergies propres à $\check{M}_{++\downarrow}^{(0)}(\check{z}, \check{q}) + \check{M}_{+-\downarrow}^{(0)}(\check{z}, \check{q}) = 0$ comme dans (102). Pour $\check{q} > 2/3$, il résulte directement de l'équation (99) que

$$\check{\rho}_{++}^{(0)[\text{III}]}(\check{z}, \check{q}) + \check{\rho}_{+-}^{(0)[\text{III}]}(\check{z}, \check{q}) = \frac{\pi\check{z}}{2\check{q}} \check{\rho}_{++}^{(0)[\text{II}]}(\check{z}, \check{q}) + \check{\rho}_{+-}^{(0)[\text{II}]}(\check{z}, \check{q}) \quad (151)$$

si bien que le terme de Nozières prend exactement la même forme pour les intervalles de prolongement $[\epsilon_1, \epsilon_2]$ et $[\epsilon_2, \epsilon_3]$. Pour $\check{q} < 2/3$, l'intervalle de prolongement $[\epsilon_2, \epsilon_3]$ est coupé en deux par $\check{q}(2 + \check{q})$ mais, comme on passe au-dessus du point α dans le relèvement continu des racines, c'est la troisième colonne de (99) qui compte et la relation (151) reste vraie. En effet, la borne $\check{q}(2 + \check{q})$ n'est autre que la limite de α à faible $\check{\Delta}$ (voir la phrase après (99) et la note 21). On en déduit que les branches de type II et de type III coïncident dans la limite $\check{\Delta} \rightarrow 0$ à \check{q} fixé, ce que le calcul numérique confirme magistralement, voir la Figure 8a. En revanche, nous trouvons suivant les cas une ou deux branches de type IV, voir les Figures 8d, 8e, 8f. Leur domaine d'existence en nombre d'onde est une réunion de deux intervalles, au gré des annulations de la partie réelle ou de la partie imaginaire de z_q . L'intervalle haut est compact pour Δ/μ assez grand, mais s'étend jusqu'à l'infini sinon. Chose remarquable, l'intervalle bas commence en $q = 0$, où z_q tend vers

³⁹Les racines $s_i(z)$ sont ensuite insérées dans les arguments des fonctions elliptiques incomplètes E et F , voir (66) et (67) par exemple. Ces fonctions elliptiques présentent des lignes de coupure décrites dans la note 20, que l'on peut toujours déplacer par déformation continue, et des points de branchement inamovibles. Montrons par l'absurde que les arguments de E et F n'atteignent jamais ces points de branchement, au cours du voyage des $s_i(z)$ dans le plan complexe : si c'était le cas, on aurait $1 + (1 - s^2)\text{sh}^2\Omega = 0$, avec $\text{sh}^2\Omega = (z^2 - 4\Delta^2)/(4\Delta^2)$ et s solution de l'équation déduite de (71) par remplacement de ϵ par z ; des manipulations élémentaires dans (71) ainsi modifiée font tomber sur la condition impossible à satisfaire $1/\text{sh}^2\Omega = 0$. Pour calculer numériquement les fonctions E et F , on revient à leur définition intégrale, voir la Section 8.111 de [20], et on déplace si nécessaire la ligne de coupure de la racine carrée dans l'intégrande par relèvement continu. On peut aussi travailler directement sur les fonctions (66), (67), en écrivant par exemple $f_{--}(\pi/2 - \text{asin } s_2) = \int_{s_2}^1 (dX/\sqrt{1-X^2})(X^2\text{sh}^2\Omega/[1+(1-X^2)\text{sh}^2\Omega]^{3/2})$ grâce au changement de variable $X = \cos\alpha$.

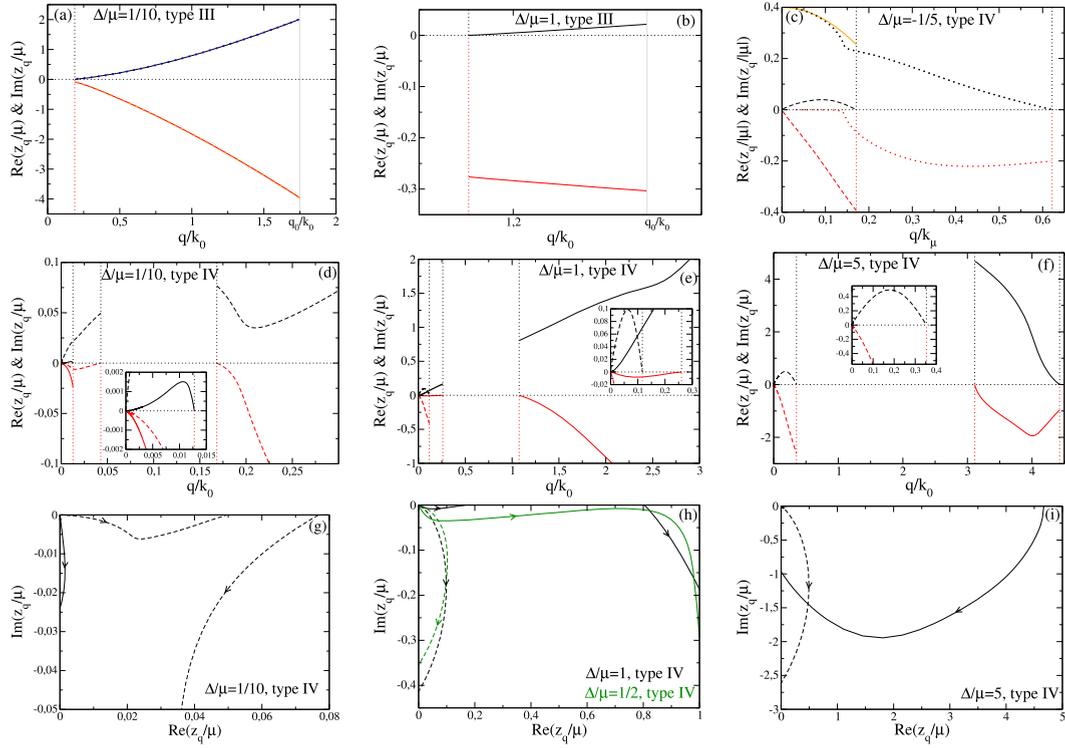


FIGURE 8. Dans un gaz de fermions en interaction de portée nulle (cas des atomes froids), branches du continuum $q \rightarrow z_q$ obtenues en effectuant le prolongement analytique des équations aux énergies propres à travers d'autres intervalles que celui $[\epsilon_1(q), \epsilon_2(q)]$ de type II utilisé jusqu'à présent. Trait plein noir ou tireté noir : partie réelle; trait plein rouge ou tireté rouge : partie imaginaire. Les interruptions des branches, dues à des sorties du quatrième quadrant seul exploré ici (annulations de la partie réelle ou imaginaire de z_q) sont repérées par des pointillés verticaux. Pour $\mu > 0$, résultats numériques pour les branches de type III (prolongement par l'intervalle $[\epsilon_2(q), \epsilon_3(q)]$) en (a) et (b), et de type IV (intervalle $[\epsilon_3(q), +\infty[$) en (d), (e) et (f). Pour $\mu < 0$, résultats numériques pour les branches de type IV en (c) (l'intervalle $[\epsilon_3(q), +\infty[$ est le seul possible). Ici $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$, $k_\mu = (2m|\mu|)^{1/2}/\hbar$, $\Delta/\mu = 1/10$ en (a) et (d), $\Delta/\mu = 1$ en (b) et (e), $\Delta/\mu = 5$ en (f) (pas de branche de type III pour cette valeur) et $\Delta/\mu = -1/5$ en (c). L'intervalle $[\epsilon_2(q), \epsilon_3(q)]$ se ferme et la branche de type III cesse d'exister en $q = q_0(\Delta)$ donné par (57) et repéré par un trait plein vertical gris. En couplage faible, en (a), la branche de type III se confond presque avec celle précédemment étudiée de type II et est très bien reproduite par la solution de (102) (gros points bleu foncé ou orange). Vignettes : agrandissements; les valeurs à $\check{q} < 0,001$ sont tirées de (154) après résolution numérique de (153) réécrite comme une équation sur $s_2(z)$. Trajectoires des branches de type IV dans le plan complexe pour $\Delta/\mu = 1/10$ en (g), $\Delta/\mu = 1$ (noir) et $\Delta/\mu = 1/2$ (vert) en (h), $\Delta/\mu = 5$ en (i); les flèches indiquent le sens des q croissants. Partout pour les branches de type IV : en trait plein (en tireté), branche hypoacoustique (155) [hyperacoustique (157)] et son émanation éventuelle à grand q après excursion hors du quatrième quadrant. En (c) : la branche en pointillé est d'une autre nature, voir son comportement analytique (158) à faible \check{q} (trait plein orange).

zéro ; ce comportement diffère de celui de la branche du continuum de type II étudiée dans les autres sections et évoque plutôt la branche acoustique.

Montrons maintenant analytiquement que les branches collectives de type IV n'ont pas un départ acoustique $z_q \approx q$ mais un départ hyperacoustique $z_q \approx q^{4/5}$ (la vitesse de groupe ou de phase diverge en $q = 0$) ou hypoacoustique $z_q \approx q^{3/2}$ (la vitesse tend vers zéro). Pour cela, construisons une forme approchée de l'équation sur z_q à basse énergie et à bas nombre d'onde, d'abord en remplaçant les éléments de matrice de M non prolongés par leur ordre dominant en q à $\zeta \equiv \check{z}/\check{q}$ fixé,⁴⁰

$$\check{M}_{--}(\check{z}, \check{q}) \approx \check{M}_{--}(0, 0) \equiv \frac{A}{(2\pi)^3}, \quad \check{M}_{++}(\check{z}, \check{q}) \approx \frac{(B + C\zeta^2)}{(2\pi)^3} \check{q}^2, \quad \check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) \approx \frac{D\zeta\check{q}}{(2\pi)^3} \quad (152)$$

puis en remplaçant $\text{sh}\Omega$ par $-i$ dans les équations (66)–(68) utiles au prolongement analytique (12). Nous avons admis dans la seconde étape, en le vérifiant numériquement, que $s_2(z)$ est dans le quatrième quadrant, tout comme ζ . Nous aboutissons ainsi à une équation aux énergies propres beaucoup plus simple,

$$\left[i\pi^2 \check{\Delta} \phi_{--}(s_2) + A\check{q} \right] \left[-i \frac{\pi^2 \zeta^2}{4\check{\Delta}} \phi_{++}(s_2) + (B + C\zeta^2)\check{q} \right] - \left[-\frac{\pi^2}{2} \zeta \phi_{+-}(s_2) + D\zeta\check{q} \right]^2 \approx 0 \quad \text{où} \quad (153)$$

$$\begin{cases} \phi_{--}(s) = \frac{\ln(1+\sqrt{1-s^2}) - \ln(1-\sqrt{1-s^2})}{2} \\ \phi_{++}(s) = \frac{1}{2} \phi_{--}(s) + \frac{(1-s^2)^{1/2}}{2s^2} \\ \phi_{+-}(s) = \frac{(1-s^2)^{1/2}}{s} \end{cases}$$

Pour être cohérent, il faut aussi approximer l'équation (71) sur $s_2(z)$ comme suit,

$$\frac{4}{\zeta^2} (1 - i s_2 \check{\Delta}) \approx \frac{1 - s_2^2}{-s_2^2} \quad (154)$$

ce qui permet d'éliminer facilement ζ et de considérer (153) comme une équation sur $s_2(z)$.

Un premier type de solution de (153) correspond à $\zeta \rightarrow 0$ donc $s_2 \rightarrow -i/\check{\Delta} + 0^+$. Dans la limite $\check{q} \rightarrow 0$, on trouve par tâtonnements que ζ^2/\check{q} a une limite finie et non nulle γ ,⁴¹ et que (153) se réduit à une équation affine sur γ . D'où le comportement hypoacoustique exact de la branche :

$$\check{z}_q \underset{\check{q} \rightarrow 0}{=} \gamma^{1/2} \check{q}^{3/2} [1 + O(\check{q})] \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{-4i\pi^{-2} B \check{\Delta} \phi_{--}(s)}{(\phi_{++}\phi_{--} - \phi_{+-}^2)(s)} \Big|_{s=-i/\check{\Delta}+0^+} \quad (155)$$

Pour que z_q soit dans le quatrième quadrant, il faut que γ ait une partie imaginaire négative, ce qui impose $\check{\Delta} \in]0, \check{\Delta}_0[$ avec $\check{\Delta}_0 \approx 2,138$.⁴² Ceci explique pourquoi la branche hypoacoustique n'apparaît pas à faible \check{q} sur la Figure 8f. De plus, on montre que, parmi les résidus Z_{\pm} de la Section 4.3, celui Z_+ dans la voie des petits écarts de phase est dominant, et diverge comme $\check{q}^{-1/2}$; à faible \check{q} , les modes hypoacoustiques sont donc surtout des modes de phase du paramètre d'ordre.

⁴⁰On donne $A = \int d^3 \check{k} (\check{\Delta}^2 / 2\check{\epsilon}_k^3)$, $B = \int (d^3 \check{k} / 2\check{\epsilon}_k) ((\check{\xi}_k / 4\check{\epsilon}_k^2) + (\check{\Delta}^2 \check{k}^2 / 2\check{\epsilon}_k^4))$, $C = \int d^3 \check{k} ((-1) / 8\check{\epsilon}_k^3)$ et $D = \int d^3 \check{k} (\check{\xi}_k / -4\check{\epsilon}_k^3)$. Il n'y a pas de terme linéaire en ζ dans $\check{M}_{++}(\check{z}, \check{q})$ car c'est une fonction paire de \check{z} . D'après la relation (A6) de [21], on a aussi $B = \int d^3 \check{k} (\check{k}^2 / 6\check{\epsilon}_k^3)$ comme dans l'équation (23) de la référence [23].

⁴¹ ζ^2/\check{q} ne peut pas tendre vers l'infini car $\phi_{++}\phi_{--} - \phi_{+-}^2$ ne s'annule pas en $s = -i/\check{\Delta} + 0^+$. Supposer que $\zeta^2/\check{q} = o(1)$ conduit au résultat contradictoire $\zeta^2 \approx \check{q}$.

⁴²Si $\check{\Delta} = \text{sh } \tau$, $\phi_{--} = \tau + i\pi/2$, $\phi_{++} = (\tau - \text{sh } \tau \text{ch } \tau + i\pi/2)/2$ et $\phi_{+-} = \text{ich } \tau$ dans (155). De plus, $\gamma^{1/2} \sim -2i/[3\check{\Delta}(\pi^2/8 - 1)]^{1/2}$ lorsque $\check{\Delta} \rightarrow 0$.

Un second type de solution de (153) correspond à $|\zeta| \rightarrow +\infty$ donc $s_2 \rightarrow 1 - i0^+$. Alors, dans (153), on néglige B devant $C\zeta^2$, on divise l'équation restante par $(\pi^2\zeta/2)^2$, on développe et on regroupe par puissances de \check{q} , puis on néglige les termes en \check{q}^2 pour obtenir :

$$(\phi_{--}\phi_{++} - \phi_{+-}^2)(s_2) + \frac{4\check{q}}{\pi^2} \left[D\phi_{+-}(s_2) + iC\check{\Delta}\phi_{--}(s_2) - \frac{iA}{4\check{\Delta}}\phi_{++}(s_2) \right] \simeq 0 \quad (156)$$

Il reste à remplacer chaque contribution par son ordre dominant en le petit paramètre $u = (1 - s_2^2)^{1/2}$: dans le second terme de (156), il suffit de savoir que $\phi_{--} \sim \phi_{++} \sim \phi_{+-} \sim u$, mais dans le premier, il faut développer chaque fonction ϕ jusqu'à l'ordre relatif u^4 (c'est l'ordre sous-sous-dominant) pour obtenir l'équivalent $u^6/45$. D'où la loi $u \sim \check{q}^{1/5}u_0$ et le comportement hyperacoustique exact de la branche :

$$\check{z}_q \underset{\check{q} \rightarrow 0}{=} \beta^{1/2} \check{q}^{4/5} [1 + O(\check{q}^{2/5})] \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{4(i\check{\Delta} - 1)}{u_0^2} \quad \text{et} \quad u_0 = \left(\frac{180}{\pi^2} \right)^{1/5} \left(\frac{iA}{4\check{\Delta}} - iC\check{\Delta} - D \right)^{1/5} \quad (157)$$

Dans (157), il faut choisir la détermination de la racine cinquième de manière que u_0 soit dans le premier quadrant et que β ait une partie imaginaire négative, ce qui peut être fait pour toute valeur de $\check{\Delta} > \check{\Delta}_1 \simeq 0,05283$, d'où la présence systématique d'une branche hyperacoustique de type IV à faible \check{q} sur la Figure 8.⁴³ On vérifie que, parmi les résidus Z_{\pm} de la Section 4.3, celui Z_+ dans la voie des petits écarts de phase est dominant, et diverge comme $\check{q}^{-4/5}$; à faible \check{q} , les modes hyperacoustiques sont donc eux aussi surtout des modes de phase du paramètre d'ordre.

Il reste à comprendre physiquement la branche de type IV sur l'intervalle haut en nombre d'onde. Nous affirmons que cette composante connexe n'est que le prolongement à grand q , c'est-à-dire le résultat de l'irruption dans le quatrième quadrant, de la branche hypoacoustique ou de la branche hyperacoustique. On le voit bien en prolongeant mentalement les courbes sur la Figure 8d, la composante à grand q serait le retour de la branche hyperacoustique après un passage dans le premier quadrant. De même, sur la Figure 8e, la composante à grand q semble être le retour de la branche hypoacoustique après un détour dans le premier quadrant. En revanche, sur la Figure 8f, nous interprétons la composante à grand q comme la première entrée de la branche hypoacoustique dans le quatrième quadrant, cette dernière pointant dès son départ à faible q vers le premier quadrant, voir la discussion après l'équation (155). Pour rendre ces interprétations plus faciles à suivre, nous avons représenté sur les Figures 8g, 8h et 8i la trajectoire des branches de type IV à $\mu > 0$ dans le plan complexe. Pour les justifier numériquement, nous représentons également la trajectoire des branches pour $\Delta/\mu = 1/2$ sur la Figure 8h : la branche hypoacoustique y est connexe dans le quatrième quadrant. Ces figures conduisent à la remarque empirique suivante : les branches qui s'aventurent dans le troisième quadrant ($\text{Re } z < 0$ et $\text{Im } z < 0$) ne reviennent jamais (aux q ultérieurs) dans le quatrième quadrant, à l'inverse de celles qui s'aventurent dans le premier quadrant.

4.8.2. Du côté CBE : $\mu < 0$

Pour terminer, cherchons une branche du continuum dans le cas d'un potentiel chimique strictement négatif. Comme nous l'avons dit dans la Section 4.2.1, les densités spectrales admettent alors, sur l'axe des énergies réelles, $\epsilon_3(q)$ de l'équation (56) comme seul point de non-analyticité. Le prolongement analytique de l'équation aux énergies propres ne peut se faire qu'à travers l'intervalle $[\epsilon_3(q), +\infty[$, donc ne peut être que de type IV. L'adimensionnement des variables doit être revu et le calcul des densités spectrales doit être refait. Nous exprimons désormais les nombres d'onde en unités de $k_{\mu} = (2m|\mu|)^{1/2}/\hbar$, par exemple $\check{q} = q/k_{\mu}$, les énergies en

⁴³Le prolongement de β à $\check{\Delta} \in]0, \check{\Delta}_1[$ a une partie imaginaire positive et vérifie $\beta^{1/2} \sim (8\pi\check{\Delta}/45)^{1/5}$ lorsque $\check{\Delta} \rightarrow 0$.

unités de $|\mu|$, par exemple $\check{\epsilon} = \epsilon/|\mu|$ et $\check{\xi}_{\check{k}} = \check{k}^2 + 1$, les densités spectrales et les éléments de matrice de M en unités de $2mk_{\mu}/\hbar^2$. Nous trouvons que les densités spectrales réduites sont toujours données par la forme IV de la Table 2, à condition que l'on remplace le terme $1 - \check{q}^2/4$ par $-(1 + \check{q}^2/4)$ dans l'équation cubique (71). Pour $\check{\epsilon} > \check{\epsilon}_3(\check{q})$, l'équation modifiée admet en effet, pour tout $\check{q} > 0$, trois racines réelles, $s_1(\epsilon) < -1$, $s_2(\epsilon) \in [0, 1]$ qui intervient dans les densités spectrales, et $s_3(\epsilon) > 1$, comme le montre une discussion graphique. Le prolongement analytique de s_2 aux énergies complexes z se fait par relèvement continu comme dans la Section 4.8.1, en ne passant jamais en dessous de son ou de ses points de branchement, c'est-à-dire des racines complexes du polynôme $P_8(X)$ dans le quatrième quadrant.⁴⁴

Nous avons étudié numériquement le cas $\check{\Delta} = \Delta/|\mu| = 1/5$, voir la Figure 8c. À faible \check{q} , nous trouvons une branche hyperacoustique dont le départ est bien décrit par (157) si l'on pense à changer le facteur $i\check{\Delta} - 1$ en $i\check{\Delta} + 1$ dans β mais qui finit par quitter le quatrième quadrant; l'équation (157) ainsi modifiée permet d'ailleurs de montrer que cette branche hyperacoustique existe au voisinage de $q = 0$ pour toute valeur de $\check{\Delta}$. Nous trouvons aussi une deuxième branche, qui n'atteint pas les grands \check{q} mais tend vers la valeur 2Δ en l'origine des nombres d'onde en serrant de près l'axe réel (sa partie imaginaire tend vers zéro comme q^3). Nous lui prédisons analytiquement un départ quadratique⁴⁵

$$z_q \underset{q \rightarrow 0}{=} 2\Delta - \frac{1}{\check{\Delta} \sin^2 \psi} \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + O(q^3) \quad \text{avec} \quad \frac{\psi(\psi + \sin \psi \cos \psi)}{2 \sin^2 \psi} = [1 - 8\pi \check{M}_{+-}(2\check{\Delta}, 0)]^2 \quad (158)$$

représenté par un trait plein orange sur la Figure 8c et en bon accord avec les résultats numériques; l'équation transcendante sur $\psi = \pi/2 - \text{asin } s_2$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0, \pi]$. Le résultat (158) ne vaut en fait que pour $\psi < \pi/2$ c'est-à-dire $\check{\Delta} < 0,222$; pour $\check{\Delta} > 0,222$, la branche en question sort du quatrième quadrant vers le premier quadrant (sa partie imaginaire s'annule) avant d'atteindre $\check{q} = 0$.⁴⁶ Le départ quadratique (158) n'est pas sans rappeler celui (82) de la branche du continuum habituelle; le raisonnement ayant conduit à (92) donne ici aussi des résidus de limite nulle en $q = 0$, $\check{Z}_- \approx \check{q}$ et $\check{Z}_+ \approx \check{q}^3$. On n'observe en revanche pas de branche hypoacoustique. D'ailleurs, le raisonnement conduisant à (155) ne se transpose pas au cas $\mu < 0$:

⁴⁴ Pour $\mu < 0$, il faut remplacer \check{q} par $i\check{q}$ dans la définition (59) de $P_8(X)$. Alors $P_8(X)$ admet pour $\check{q} < \check{q}_*(\check{\Delta})$ une seule racine α strictement à l'intérieur du quatrième quadrant, et en admet deux, α et α' , sinon. Ici, $\check{q}_*(\check{\Delta})$ est la racine réelle positive du discriminant de Cardan δ de la note 21 considéré comme un polynôme en \check{q} et lui aussi soumis à la substitution $\check{q} \rightarrow i\check{q}$.

⁴⁵ Si on admet que $z_q - 2\Delta \approx q^2$, on voit que $\text{sh } \Omega \approx q \rightarrow 0$ et $\text{ch } \Omega \rightarrow 1$ dans (66), (67), (68) si bien que $f_{--}(\psi) \sim (1/2)\text{sh}^2 \Omega (\psi + \sin \psi \cos \psi)$, $f_{++}(\psi) \sim \psi$, $f_{+-}(\psi) \sim \text{sh } \Omega \sin \psi$. De plus, le bord inférieur du continuum de paire brisée vaut $2(\Delta^2 + \mu^2)^{1/2} > 2\Delta$ pour $\mu < 0$ et $q = 0$; du coup, $M_{++}(z_q, q)$ et $M_{+-}(z_q, q)$ ont une limite finie et non nulle $M_{++}(2\Delta, 0)$ et $M_{+-}(2\Delta, 0)$ lorsque $q \rightarrow 0$, alors que $M_{--}(z_q, q) = O(q^2)$ puisque $M_{--}(2\Delta, 0) = 0$ comme dans (53) et $M_{--}(z, q)$ varie quadratiquement en q et linéairement en $z - 2\Delta$ autour de $(z, q) = (2\Delta, 0)$. Compte tenu de la procédure de prolongement (12) et du facteur $1/q$ dans la densité spectrale, voir la Table 2, la contribution de M_{++} et M_{+-} est négligeable dans l'élément de matrice prolongé alors que celle de M_{--} ne l'est pas. Enfin, en faisant $q \rightarrow 0$ dans l'équation (71) modifiée pour $\mu < 0$, sachant que z_q est dans le quatrième quadrant et que $\sin \psi = [1 - s_2^2(z_q)]^{1/2}$, on trouve que $\text{sh } \Omega \sim -i\check{q}/(\check{\Delta} \sin \psi)$ et on aboutit à (158). L'expression (85) de $\check{M}_{+-}(2\check{\Delta}, 0)$ et son signe valent toujours si l'on pose $\tau = \text{argsh}(\mu/\Delta) < 0$ et si l'on remplace le facteur désormais imaginaire pur $-(e^{2\tau} - 1)^{1/2}$ par $(1 - e^{2\tau})^{1/2}$.

⁴⁶ Dans la limite $\check{q} \rightarrow 0$, la racine $s_2(z)$ obtenue par relèvement continu est positive pour $\check{z} = 2\check{\Delta} + (C - i0^+) \check{q}^2 / \check{\Delta}$ dès que le coefficient réel C est < -1 , comme c'est le cas dans (158). À l'aide de (71) modifiée pour $\mu < 0$, on trouve en effet que $s_2^2(z) \rightarrow (1 + C - i0^+) / (C - i0^+)$ donc $s_2(z) \rightarrow [(1 + C - i0^+) / (C - i0^+)]^{1/2}$ puisque s_2 doit être proche de 1 lorsque $C \gg 1$. Or on a $s_2 = \cos \psi$. La condition $s_2 > 0$ impose donc $\psi < \pi/2$. De plus, nous avons calculé analytiquement le coefficient du terme en q^3 dans le développement (158). On trouve qu'il est imaginaire pur, qu'il est < 0 pour $\psi < \pi/2$, et qu'il s'annule en changeant de signe en $\psi = \pi/2$. C'est aussi à cette valeur seuil $\psi = \pi/2$ ($\check{\Delta} \approx 0,222$) que \check{z}_q se confond au second ordre en \check{q} avec la racine réelle $\check{\epsilon}_2(\check{q})$ du polynôme $P_8(X)$ de (59) transposé au cas $\mu < 0$, donc avec un point de non-analyticité de deux des racines $s_i(\check{z})$: pour $\mu < 0$, il faut en effet remplacer \check{q} par $i\check{q}$ dans (59), et donc dans (62), comme le dit la note 44.

pour $z = o(\check{q})$, on trouve numériquement que $s_2(z) = o(1)$, et que c'est la racine $s_3(z)$ qui admet la limite attendue $i/\check{\Delta}$, dans le relèvement continu passant au-dessus du point de branchement α .

5. Conclusion

Dans un gaz tridimensionnel spatialement homogène non polarisé de fermions de spin 1/2 en interaction attractive, préparé à la limite thermodynamique à température nulle donc apparié entièrement et condensé par paires liées $\uparrow\downarrow$, nous avons étudié analytiquement la branche du continuum correspondant aux modes d'excitation collective du gaz par brisure de paires. Comme l'a montré la référence [3], sous certaines conditions, de tels modes peuvent se manifester expérimentalement par un pic lorentzien en pulsation $\omega \mapsto |Z_{\mathbf{q}}/(\hbar\omega - z_{\mathbf{q}})|^2$ dans l'intensité d'une fonction de réponse en fréquence sur la variable collective du gaz perturbé que constitue le paramètre d'ordre complexe $\Delta(\mathbf{r}, t)$. Nous avons donc analysé l'énergie complexe $z_{\mathbf{q}}$ du mode ainsi que son résidu $Z_{\mathbf{q}}$ pour une excitation non polarisante très faible et bornée en temps mais de nature arbitraire, en fonction du vecteur d'onde \mathbf{q} , afin d'aboutir à une description complète de la branche. Mathématiquement, nous utilisons la théorie BCS dépendant du temps linéarisée autour de la solution stationnaire d'énergie minimale, pour obtenir une équation sur les énergies propres des modes, qu'il faut toujours prolonger analytiquement au demi-plan complexe inférieur à travers la ligne de coupure due au continuum de paire brisée à \mathbf{q} fixé, si l'on veut trouver $z_{\mathbf{q}}$. Physiquement, le fait que $\text{Im} z_{\mathbf{q}}$ soit strictement négative reflète l'amortissement du mode par brisure de paires et émission de fermions libres de vecteurs d'onde $\mathbf{q}/2 \pm \mathbf{k}$ dans le continuum, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$. Notre travail étudie analytiquement la branche à nombre d'onde q quelconque, et pour une force des interactions quelconque; il va donc significativement au-delà des travaux précédents, qui n'obtiennent des résultats analytiques que dans la limite des faibles nombres d'onde $q \rightarrow 0$, c'est-à-dire seulement sur le départ quadratique de la branche $z_{\mathbf{q}} - 2|\Delta| \propto q^2$, dans la limite de couplage faible $|\Delta|/\mu \rightarrow 0^+$ [2] ou pour un couplage $|\Delta|/\mu$ quelconque mais un potentiel chimique $\mu > 0$ [3].

Dans la limite de couplage faible $|\Delta|/\mu \rightarrow 0^+$, la partie réelle de la relation de dispersion présente trois échelles de variation en nombre d'onde. (i) La première $q_1 = k_0|\Delta|/\mu$, où k_0 est le nombre d'onde minimisant l'énergie $\epsilon_{\mathbf{k}}$ d'une quasi-particule BCS ($\epsilon_{k_0} = |\Delta|$), correspond sans surprise à $q \approx 1/\xi$ où ξ est la taille d'une paire liée $\uparrow\downarrow$. La branche admet une loi limite universelle lorsque $z_{\mathbf{q}}$ est exprimé en unités de $|\Delta|$ et que $|\Delta|/\mu$ tend vers zéro à q/q_1 fixé : cette loi vaut aussi bien pour des fermions en interaction de contact attractive dans l'onde s (cas des atomes froids) que pour des fermions chargés présentant de plus une interaction de Coulomb répulsive à longue portée (cas d'un supraconducteur BCS au sens de la référence [2] c'est-à-dire sans réelle inclusion des phonons du réseau cristallin). Si l'on part de $q = 0^+$, la partie réelle croît, présente un maximum $\approx 2,16|\Delta|$ en $q/q_1 \approx 1,70$, puis décroît et tend vers zéro comme $|\Delta|q_1/q$, à un facteur logarithmique en q/q_1 près; la partie imaginaire est décroissante et diverge linéairement en $-\mu q/k_0$ à des corrections logarithmiques en q/q_1 près. À l'ordre dominant, le résidu est porté par la voie des petits écarts en module du paramètre d'ordre à sa valeur d'équilibre. Le mode du continuum est un mode de module et l'on peut négliger le couplage phase-module dans les équations BCS linéarisées. (ii) La deuxième échelle de nombre d'onde est $q_2 = k_0(|\Delta|/\mu)^{2/3}$: sur la partie réelle de la branche, la décroissance en $1/q$ de l'échelle précédente s'interrompt graduellement, $\text{Re} z_{\mathbf{q}}$ passe par un minimum de l'ordre de $\mu(|\Delta|/\mu)^{4/3}$ et situé en $q_{\min} \approx q_2$, à des facteurs logarithmiques en $|\Delta|/\mu$ près, puis remonte; ceci est dû à l'entrée en jeu du couplage phase-module. La partie imaginaire continue à décroître de la même manière approximativement linéaire en q . Même si le résidu dans la voie de module l'emporte encore, celui dans la voie de phase n'est plus négligeable. Le mode du continuum est en cours d'hybridation phase-module. (iii) La troisième échelle est $q_3 = k_0$; la partie imaginaire de $z_{\mathbf{q}}$ est

approximativement proportionnelle à $-\mu q/k_0$, avec un coefficient logarithmique en $|\Delta|/\mu$, alors que la partie réelle est croissante, approximativement proportionnelle à $\mu(q/k_0)^{3/2}$, là aussi avec un coefficient logarithmique en $|\Delta|/\mu$; les résidus en phase et en module sont presque égaux : le mode vit avec des amplitudes presque égales dans les deux voies. En $q = 2k_0$, l'intervalle entre points de branchement de l'équation aux énergies propres, par lequel le prolongement analytique a été effectué, se referme et la branche cesse d'exister. Les résultats aux échelles q_2 et q_3 valent pour une interaction à courte portée, comme dans les gaz d'atomes froids, à laquelle nous nous limitons dans la suite; on ne sait pas s'ils survivent au moins qualitativement à l'interaction de Coulomb.

Au voisinage droit du point d'annulation du potentiel chimique, $\mu/|\Delta| \rightarrow 0^+$, qui se situe dans le régime d'interaction forte, du côté à longueur de diffusion positive du raccordement CBE-BCS, la branche du continuum z_q est, à l'ordre dominant en $\mu/|\Delta|$, purement réelle et quadratique en q , $z_q - 2|\Delta| \simeq -128[\Gamma(5/4)]^4 \pi^{-5} \hbar^2 q^2 / 2m$, sur tout son domaine d'existence $]0, 2k_0[$, domaine qui devient de plus en plus étroit puisqu'ici $k_0 = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$, où m est la masse d'un fermion, tend vers zéro. À l'ordre suivant apparaît dans z_q une partie imaginaire non nulle, qui révèle l'existence de deux échelles de nombre d'onde. La première échelle, $Q_1 = k_0(\mu/|\Delta|)^{1/2}$, correspond à la limite de validité de l'approximation quadratique sur z_q (celle-ci exige $q \ll Q_1$, ce que la référence [3] ne disait pas) mais n'a pas reçu à ce jour d'autre interprétation physique. À cette échelle, la partie imaginaire est d'ordre de grandeur $\mu(\mu/|\Delta|)^{3/2}$, et passe de manière monotone d'un départ quadratique à un plongeon asymptotique semiquintique en q . La seconde échelle est $Q_2 = k_0$: à l'ordre dominant, la partie imaginaire de z_q est de l'ordre de $\mu(\mu/|\Delta|)^{1/4}$, est décroissante, et varie avec la même loi de puissance $q^{5/2}$ que dans la partie asymptotique $q \gg Q_1$ de l'échelle précédente. Aux deux échelles, le résidu dominant est porté par les petits écarts en module du paramètre d'ordre à sa valeur d'équilibre : le mode du continuum reste de ce point de vue un mode de module, même s'il faut absolument inclure le couplage phase-module dans le calcul de son énergie pour avoir le bon résultat, au contraire de ce qui se passe dans la limite de couplage faible à $q = O(q_1)$.

Les résultats précédents, obtenus pour $\mu > 0$ et $q < 2k_0$, découlent d'un prolongement analytique de l'équation aux énergies propres à travers la ligne de coupure joignant ses deux premiers points de branchement $\epsilon_a(q)$ et $\epsilon_b(q)$ sur le demi-axe réel positif des énergies. Ils correspondent toujours à une branche du continuum de limite $2|\Delta|$ et de départ quadratique en $q = 0$. Pour un nombre d'onde pas trop grand ($q < q_0(\Delta, \mu) \in]2k_0/\sqrt{3}, 2k_0[$), il existe un troisième point de branchement $\epsilon_c(q)$. Le prolongement analytique par l'intervalle $[\epsilon_b(q), \epsilon_c(q)]$ donne naissance à une nouvelle branche d'excitation dans le quadrant inférieur droit du plan complexe, du moins pour $|\Delta|/\mu$ pas trop grand et q pas trop petit; à faible couplage, elle coïncide presque avec la branche du continuum étudiée précédemment.

Enfin, il reste à effectuer le prolongement analytique par l'intervalle non compact $[\epsilon_{\max}(q), +\infty[$ où $\epsilon_{\max}(q)$ est le plus grand des points de branchement sur l'axe réel. Pour $\mu > 0$ et $q < 2k_0$, on a $\epsilon_{\max}(q) = \epsilon_c(q)$ ou $\epsilon_b(q)$ selon que q est inférieur ou supérieur à $q_0(\Delta, \mu)$, comme le montre le paragraphe précédent. Pour $\mu > 0$ mais $q > 2k_0$, ou pour $\mu < 0$ à $q > 0$ quelconque, l'équation aux énergies propres n'admet qu'un seul point de branchement d'énergie réelle positive, c'est le bord inférieur $2\epsilon_{\mathbf{k}=q/2}$ du continuum de paire brisée, avec lequel $\epsilon_{\max}(q)$ se confond donc. En prolongeant par $[\epsilon_{\max}(q), +\infty[$, nous trouvons cette fois deux nouvelles branches. Leur domaine d'existence en nombre d'onde présente en général plusieurs composantes connexes, dont les bords marquent leurs points d'entrée ou de sortie du quadrant inférieur droit du plan complexe. Pour $\mu > 0$, lorsque ces branches atteignent $q = 0$, elles adoptent aux faibles nombres d'onde un comportement hypoacoustique (l'énergie complexe $z_q \approx q^{3/2}$ tend vers zéro plus vite que linéairement et la vitesse de phase tend vers zéro) ou au contraire hyperacoustique (l'énergie $z_q \approx q^{4/5}$ tend vers zéro plus lentement que linéairement et la vitesse

de phase diverge), le résidu dominant étant toujours porté par les petits écarts en phase du paramètre d'ordre à sa valeur d'équilibre. Pour $\mu < 0$, on observe une branche hyperacoustique; en revanche, la branche hypoacoustique est remplacée par une autre branche, de limite $2|\Delta|$ (soit, comme l'espérait la référence [30], le double du paramètre d'ordre plutôt que l'énergie de liaison d'une paire $2(|\Delta|^2 + \mu^2)^{1/2}$) et de départ quadratique purement réel en $q = 0$ pour $\Delta/|\mu| < 0,222$, et qui ressemble alors à la branche du continuum habituelle, si ce n'est qu'elle est du côté bosonique du raccordement CBE-BCS.

Indiquons pour terminer quelques prolongements possibles de ce travail. La théorie BCS que nous avons utilisée n'est plus quantitative dans le régime d'interaction forte, en particulier à la limite unitaire souvent mise en oeuvre dans les expériences d'atomes froids; il serait bon dans ce cas de faire appel à une approche plus élaborée, comme celle de la référence [31]. Notre calcul de la relation de dispersion du mode du continuum ne tient pas compte de son couplage à la branche acoustique de Bogolioubov-Anderson (dans les gaz de particules neutres), qui n'a *a priori* pas de raison d'être négligeable à nombre d'onde et à force des interactions quelconques. Enfin, on pourrait se demander quelle est la contribution de la branche du continuum aux grandeurs thermodynamiques du gaz de fermions à basse température, c'est-à-dire pour $k_B T$ petit devant l'énergie de liaison d'une paire.

Remerciements

Nous sommes redevables à Serghei Klimin, Jacques Tempere, Alice Sinatra, Felix Werner, Ludovic Pricoupenko et Pascal Naidon d'utiles discussions et suggestions sur la branche du continuum. Nous remercions Serghei Klimin pour ses remarques sur le texte de l'article.

Annexe A. Sur le calcul analytique des densités spectrales

A.1. Dans la limite de couplage faible

Montrons comment passer de l'expression (29) de la densité spectrale $\rho_{--}^{(0)}$ à l'expression (30), en intégrant sur le nombre d'onde réduit \tilde{K} à valeur fixée u du cosinus de l'angle polaire. Il suffit pour cela de trouver les points d'annulation de l'argument de la distribution δ de Dirac dans l'intégrande. Pour simplifier, nous pouvons tout de suite imposer $\bar{\epsilon} \equiv \epsilon/\Delta \geq 2$ (la densité spectrale est nulle sinon) et nous ramener au domaine d'intégration $u \geq 0$ et $\tilde{K} \geq 0$ par parité de l'intégrande. Posons $a = \tilde{q}u \geq 0$ si bien que $x_{\pm} = \tilde{K} \pm a/2$ et $e_{\pm} = [1 + (\tilde{K} \pm a/2)^2]^{1/2}$ dans (16). Il faut résoudre l'équation $\bar{\epsilon} = e_+ + e_-$ sur la variable \tilde{K} . En enchaînant des élévations au carré et des regroupements de termes pour faire disparaître la racine carrée, il vient :

$$\bar{\epsilon} = e_+ + e_- \Leftrightarrow \bar{\epsilon}^2 = e_+^2 + e_-^2 + 2e_+e_- \Leftrightarrow 2e_+e_- = \bar{\epsilon}^2 - (e_+^2 + e_-^2) \Leftrightarrow (2e_+e_-)^2 - (e_+^2 + e_-^2 - \bar{\epsilon}^2)^2 = 0 \text{ et } \bar{\epsilon}^2 \geq e_+^2 + e_-^2 \quad (\text{A.1})$$

Introduisons $\bar{R} = [\bar{\epsilon}^2 - (4 + a^2)]/(\bar{\epsilon}^2 - a^2)$ et explicitons chaque terme de (A.1), pour obtenir la racine \tilde{K}_0 et sa condition d'existence :

$$\bar{\epsilon} = e_+ + e_- \Leftrightarrow \bar{K}^2 = \frac{\bar{\epsilon}^2}{4}\bar{R} \text{ et } \frac{(\bar{\epsilon}^2 - a^2)^2 + 4a^2}{2(\bar{\epsilon}^2 - a^2)} \geq 0 \Leftrightarrow \bar{K} = \tilde{K}_0 \equiv \frac{\bar{\epsilon}}{2}\bar{R}^{1/2} \text{ et } \bar{\epsilon} \geq (4 + a^2)^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

En effet, la première inégalité impose $\bar{\epsilon}^2 - a^2 \geq 0$ (la fraction en jeu a un numérateur ≥ 0), et il faut avoir $\bar{R} \geq 0$. Pour le même prix, on obtient la valeur de $e_+ - e_-$ en $\tilde{K} = \tilde{K}_0$ par une astuce d'écriture, et donc les valeurs de e_{\pm} et de x_{\pm} :

$$e_+ - e_- = \frac{e_+^2 - e_-^2}{e_+ + e_-} = \frac{2a\tilde{K}_0}{\bar{\epsilon}} = a\bar{R}^{1/2} \implies e_+ = \frac{\bar{\epsilon} + a\bar{R}^{1/2}}{2}, \quad e_- = \frac{\bar{\epsilon} - a\bar{R}^{1/2}}{2}, \quad x_+ = \frac{\bar{\epsilon}\bar{R}^{1/2} + a}{2}, \quad x_- = \frac{\bar{\epsilon}\bar{R}^{1/2} - a}{2} \quad (\text{A.3})$$

L'identité ci-dessous qui en résulte permet d'intégrer (29) sur le nombre d'onde pour obtenir (30) :

$$\delta(e_+ + e_- - \bar{e}) = J^{-1} \Theta(\bar{e} - (4 + a^2)^{1/2}) \delta(\bar{K} - \bar{K}_0) \quad \text{avec} \quad J = \frac{d}{d\bar{K}}(e_+ + e_-) = \frac{x_+}{e_+} + \frac{x_-}{e_-} \geq 0 \quad (\text{A.4})$$

A.2. Dans le cas général

Dans la limite continue du modèle sur réseau, montrons comment exprimer les densités spectrales $\rho_{ss'}(\epsilon, \mathbf{q})$, $s, s' \in \{-, +\}$, en termes d'intégrales elliptiques comme dans la Table 2, en partant de leur définition (13) et en nous limitant au cas $\mu > 0$ et $\epsilon > 2\Delta$. D'abord, on adimensionne comme dans (58), (64) puis on intègre (13) en coordonnées sphériques d'axe polaire la direction de \mathbf{q} . L'intégration sur l'angle azimutal est immédiate, puisque l'intégrande n'en dépend pas. On intègre ensuite sur u , cosinus de l'angle polaire, après s'être ramené à $u \geq 0$ par parité de l'intégrande. Il faut pour cela trouver les points d'annulation de l'argument du δ de Dirac dans (13), donc résoudre l'équation $\check{e} = \check{e}_+ + \check{e}_-$ sur u , avec $\check{e}_\pm = \check{e}_{\mathbf{k}\pm\mathbf{q}/2}$ (on notera de même $\check{\xi}_\pm = \check{\xi}_{\mathbf{k}\pm\mathbf{q}/2}$). Posons $a \equiv \check{k}^2 + \frac{1}{4}\check{q}^2 - 1$ et $b \equiv \check{k}\check{q}$, si bien que

$$\check{\xi}_\pm = a \pm bu \quad \text{et} \quad \check{e}_\pm = [(a \pm bu)^2 + \check{\Delta}^2]^{1/2} \quad (\text{A.5})$$

C'est un reparamétrage astucieux, au sens où $a = 0$ à l'endroit du minimum de $k \rightarrow \min_u \epsilon_+ + \epsilon_-$, fonction introduite dans [3] pour déterminer les valeurs extrêmes de k accessibles à $\epsilon_+ + \epsilon_-$ fixé. Récupérons une partie du travail effectué dans la limite d'interaction faible (Section A.1) en utilisant directement les deux extrémités de la chaîne (A.1) :

$$\check{e} = \check{e}_+ + \check{e}_- \Leftrightarrow u^2 = \frac{\check{e}^2}{4b^2} \check{R} \quad \text{et} \quad \frac{(\check{e}^2 - 4a^2)^2 + 16a^2\check{\Delta}^2}{\check{e}^2 - 4a^2} \geq 0 \Leftrightarrow u = u_0 \equiv \frac{\check{e}}{2b} \check{R}^{1/2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2}(\check{e}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2} \leq a \leq \frac{1}{2}(\check{e}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2} \quad (\text{A.6})$$

avec cette fois $\check{R} = [\check{e}^2 - 4(a^2 + \check{\Delta}^2)]/(\check{e}^2 - 4a^2)$, puis en procédant comme dans (A.3) pour calculer $\check{e}_+ - \check{e}_-$ en $u = u_0$:

$$\check{e}_+ - \check{e}_- = \frac{\check{e}_+^2 - \check{e}_-^2}{\check{e}_+ + \check{e}_-} = \frac{4abu_0}{\check{e}} = 2a\check{R}^{1/2} \Rightarrow \check{e}_+ = \frac{\check{e}}{2} + a\check{R}^{1/2}, \quad \check{e}_- = \frac{\check{e}}{2} - a\check{R}^{1/2}, \quad \check{\xi}_+ = a + \frac{\check{e}}{2}\check{R}^{1/2}, \quad \check{\xi}_- = a - \frac{\check{e}}{2}\check{R}^{1/2} \quad (\text{A.7})$$

Nous obtenons ainsi l'expression du δ de Dirac adaptée à l'intégration polaire :

$$\delta(\check{e} - \check{e}_+ - \check{e}_-) = \frac{\Theta(1 - u_0)}{J} \delta(u - u_0) \quad \text{avec} \quad J = \frac{d}{du}(\check{e}_+ + \check{e}_-) = b \left(\frac{\check{\xi}_+}{\check{e}_+} - \frac{\check{\xi}_-}{\check{e}_-} \right) \geq 0 \quad (\text{A.8})$$

Comme nous avons tenu compte dans (A.8) de la contrainte géométrique $u_0 \leq 1$ au moyen d'une fonction de Heaviside Θ , on peut intégrer sur $u \in [0, +\infty[$. Il reste à intégrer sur la variable radiale \check{k} , ce qui, à cause de la fonction Θ , n'est pas si simple que ça, le domaine d'intégration se fractionnant en divers sous-intervalles suivant le nombre de racines de l'équation $u_0(\check{k}) = 1$. Expliquons comment procéder sur l'exemple de $\check{\rho}_{+-}$. D'abord, on utilise a plutôt que \check{k} comme variable d'intégration. Ensuite, compte tenu du domaine de variation de a dans (A.6) et du paramétrage hyperbolique (65) de l'énergie \check{e} par Ω , on pose $a = \frac{1}{2}(\check{e}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2} \sin \theta = \check{\Delta} \text{sh} \Omega \sin \theta$ où $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Alors, en utilisant (10),

$$\begin{aligned} \check{\rho}_{+-}(\check{e}, \check{q}) &= \int_{-\frac{1}{2}(\check{e}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}}^{\frac{1}{2}(\check{e}^2 - 4\check{\Delta}^2)^{1/2}} da \frac{4\pi\check{e}\check{\Delta}^2 a \Theta(1 - u_0) / \check{q}}{(\check{e}^2 - 4a^2)^{3/2} (\check{e}^2 - 4(a^2 + \check{\Delta}^2))^{1/2}} \\ &= \frac{\pi\check{\Delta}}{2\check{q}} \text{sh} \Omega \text{ch} \Omega \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{\Theta(1 - u_0) \sin \theta}{(1 + \text{sh}^2 \Omega \cos^2 \theta)^{3/2}} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Pour connaître le signe de l'argument de Θ suivant la valeur de $s \equiv \sin \theta$, il faut par continuité trouver ses points d'annulation donc résoudre l'équation cubique $u_0^2 = 1$ sur s , c'est-à-dire (71) à

un réarrangement trivial près. La discussion graphique de (71) est faite sur le Figure 3c et dans la Section 4.2.2, rappelons-en ici les conclusions : (i) si $\check{\epsilon} < \check{\epsilon}_2(\check{q})$, l'équation admet une seule racine réelle s_3 , qui est > 1 , si bien que $u_0(s) < 1$ pour tout $s \in [-1, 1]$; (ii) si $\check{\epsilon}_2(\check{q}) < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_3(\check{q})$ (ce qui peut se produire seulement si $\check{q} < \check{q}_0$), l'équation admet trois racines réelles, les deux premières s_1 et s_2 dans $] -1, 1 [$, la troisième $s_3 > 1$, si bien que $u_0(s) < 1$ sur $[-1, s_1 \cup] s_2, 1 [$; (iii) si $\check{\epsilon}_3(\check{q}) < \check{\epsilon}$, l'équation admet trois racines réelles, $s_1 < -1$, $s_2 \in] -1, 1 [$ et $s_3 > 1$, si bien que $u_0(s) < 1$ sur $] s_2, 1 [$. Les énergies critiques $\check{\epsilon}_{2,3}(\check{q})$ et le nombre d'onde critique \check{q}_0 sont définis dans la Section 4.2.1. L'intégrale dans le troisième membre de (A.9) s'écrit donc

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \frac{\Theta(1-u_0) \sin \theta}{(1+\text{sh}^2 \Omega \cos^2 \theta)^{3/2}} = \begin{cases} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta \sin \theta}{(1+\text{sh}^2 \Omega \cos^2 \theta)^{3/2}} & \text{si } 2\check{\Delta} < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_2(\check{q}) \\ \left(\int_{-\pi/2}^{\text{asin } s_1} + \int_{\text{asin } s_2}^{\pi/2} \right) \frac{d\theta \sin \theta}{(1+\text{sh}^2 \Omega \cos^2 \theta)^{3/2}} & \text{si } \check{\epsilon}_2(\check{q}) < \check{\epsilon} < \check{\epsilon}_3(\check{q}) \\ \int_{\text{asin } s_2}^{\pi/2} \frac{d\theta \sin \theta}{(1+\text{sh}^2 \Omega \cos^2 \theta)^{3/2}} & \text{si } \check{\epsilon}_3(\check{q}) < \check{\epsilon} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

L'intégrale du cas (i) dans (A.10) est nulle par imparité de l'intégrande. Dans les autres cas, il reste à effectuer le changement de variable $\theta = \alpha - \pi/2$ dans l'intégrale de borne inférieure $-\pi/2$ et $\theta = \pi/2 - \alpha$ dans l'intégrale de borne supérieure $\pi/2$; on fait ainsi apparaître la fonction $f_{+-}(\psi)$ de (68), exprimable analytiquement de manière simple. Pour les densités spectrales $\check{\rho}_{++}$ et $\check{\rho}_{--}$, on procède de même, si ce n'est qu'il faut reconnaître des intégrales elliptiques, complètes dans le cas (i), incomplètes comme dans (66), (67) sinon. On retrouve bien la Table 2.

Annexe B. Sur la limite $\Delta/\mu \rightarrow +\infty$

B.1. À l'échelle de nombre d'onde $\check{q} \approx \check{\Delta}^0$

Il s'agit d'expliquer comment ont été calculés les développements suivants, utiles à l'obtention du résultat (136) sur la branche du continuum de type II (ici, \check{q} et $\check{Z} = \check{z} - 2\check{\Delta}$ sont fixés, avec $\text{Im } \check{Z} < 0$) :

$$\begin{aligned} \check{M}_{++}(\check{z}, \check{q}) & \stackrel{\check{q}, \check{Z} \text{ fixés}}{\Delta \rightarrow +\infty} \check{\Delta}^{3/4} \int_0^{+\infty} d\check{K} \frac{(2\pi)^{-2} \check{K}^2}{\check{Z} - \check{K}^4} + \check{\Delta}^{1/2} \int_0^{+\infty} d\check{K} \frac{(2\pi)^{-2}}{\check{K}^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \check{K}^4}} \right) \\ & + \check{\Delta}^{1/4} \int_0^{+\infty} d\check{K} \frac{(2\pi)^{-2} (5\check{q}^2 - 12) \check{K}^4}{6(\check{Z} - \check{K}^4)^2} + O(\check{\Delta}^{-1/4}) \\ & = -\frac{(-\check{Z})^{-1/4}}{8\pi\sqrt{2}} \check{\Delta}^{3/4} + \frac{[\Gamma(3/4)]^2}{4\pi^{5/2}} \check{\Delta}^{1/2} + \frac{(5\check{q}^2 - 12)}{192\pi\sqrt{2}(-\check{Z})^{3/4}} \check{\Delta}^{1/4} + O(\check{\Delta}^{-1/4}) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \check{M}_{--}(\check{z}, \check{q}) & \stackrel{\check{q}, \check{Z} \text{ fixés}}{\Delta \rightarrow +\infty} \frac{(-\check{Z})^{3/4}}{8\pi\sqrt{2}} \check{\Delta}^{-1/4} + \frac{3[\Gamma(3/4)]^2 \check{Z} + 4[\Gamma(5/4)]^2 \check{q}^2}{12\pi^{5/2}} \check{\Delta}^{-1/2} \\ & + \frac{(12 - 13\check{q}^2)(-\check{Z})^{1/4}}{192\pi\sqrt{2}} \check{\Delta}^{-3/4} + O(\check{\Delta}^{-5/4}) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) \stackrel{\check{q}, \check{Z} \text{ fixés}}{\Delta \rightarrow +\infty} -\frac{[\Gamma(5/4)]^2}{\pi^{5/2}} \check{\Delta}^{1/2} + \frac{(-\check{Z})^{1/4}}{8\pi\sqrt{2}} \check{\Delta}^{1/4} + \frac{(3\check{q}^2 - 4)(-\check{Z})^{-1/4}}{64\pi\sqrt{2}} \check{\Delta}^{-1/4} + O(\check{\Delta}^{-1/2}) \quad (\text{B.3})$$

Pour cela, partons des expressions intégrales (8) des éléments de matrice, adimensionnons-les et intégrons formellement sur les angles polaire et azimutal d'axe la direction de \mathbf{q} . Restent des intégrales sur le nombre d'onde relatif \check{k} de certaines fonctions $f(\check{k}, \Delta)$. Appliquons-leur l'analyse

multi-échelle expliquée dans le texte au-dessus de (136), ce qui revient à séparer le domaine d'intégration en trois sous-intervalles :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} d\check{k} f(\check{k}, \check{\Delta}) &= \int_0^{\eta\check{\Delta}^{3/8}} d\check{k} f(\check{k}, \check{\Delta}) + \int_{\eta\check{\Delta}^{3/8}}^{A\check{\Delta}^{3/8}} d\check{k} f(\check{k}, \check{\Delta}) + \int_{A\check{\Delta}^{3/8}}^{+\infty} d\check{k} f(\check{k}, \check{\Delta}) \\
 &= \int_0^{\eta/\varepsilon} d\check{K}_b \underbrace{\check{\Delta}^{1/4} f(\check{\Delta}^{1/4} \check{K}_b, \check{\Delta})}_{\equiv f_b(\check{K}_b, \varepsilon)} + \int_{\eta}^A d\check{K}_{bc} \underbrace{\check{\Delta}^{3/8} f(\check{\Delta}^{3/8} \check{K}_{bc}, \check{\Delta})}_{\equiv f_{bc}(\check{K}_{bc}, \varepsilon)} \\
 &\quad + \int_{A\varepsilon}^{+\infty} d\check{K}_c \underbrace{\check{\Delta}^{1/2} f(\check{\Delta}^{1/2} \check{K}_c, \check{\Delta})}_{\equiv f_c(\check{K}_c, \varepsilon)} \tag{B.4}
 \end{aligned}$$

où le petit paramètre est $\varepsilon = \check{\Delta}^{-1/8}$. Les paramètres de coupure η et A sont arbitraires ; à la fin du développement de Taylor en ε , il faudra prendre les limites $A \rightarrow +\infty$ et $\eta \rightarrow 0$ dans le coefficient de chaque puissance ε^n .⁴⁷ Il reste à développer les fonctions f_b , f_c et f_{bc} en puissances de ε à \check{K}_b , \check{K}_c et \check{K}_{bc} fixés, avec des coefficients $f_b^{(n)}$, $f_c^{(n)}$ et $f_{bc}^{(n)}$, puis à intégrer. Si l'intégrale d'un $f_b^{(n)}$ diverge UV ou l'intégrale d'un $f_c^{(n)}$ diverge IR lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, il faut sortir un équivalent simple de l'intégrande (typiquement, une somme de lois de puissance en la variable d'intégration) qui laissera derrière lui une intégrale convergente. On redéveloppe alors le tout en puissances de ε .

Donnons l'exemple de l'élément de matrice \check{M}_{++} , à déterminer avec une erreur relative $O(\varepsilon^8)$ donc une erreur absolue $O(\varepsilon^2)$. Commençons par l'échelle (c). Le développement de Taylor de l'intégrande s'écrit

$$f_c(\check{K}, \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} -\frac{(2\pi)^{-2} \varepsilon^{-4}}{\check{K}^2 \sqrt{1 + \check{K}^4}} + f_c^{(4)}(\check{K}) \varepsilon^4 + f_c^{(12)}(\check{K}) \varepsilon^{12} + O(\varepsilon^{20}) \tag{B.5}$$

L'intégrale du premier terme diverge IR lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$; nous passons par une succession de manipulations élémentaires pour la réduire à une somme de lois de puissance :

$$\begin{aligned}
 \int_{A\varepsilon}^{+\infty} \frac{d\check{K}}{\check{K}^2 \sqrt{1 + \check{K}^4}} &= \int_{A\varepsilon}^{+\infty} \frac{d\check{K}}{\check{K}^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \check{K}^4}} - 1 \right) + \int_{A\varepsilon}^{+\infty} \frac{d\check{K}}{\check{K}^2} \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{d\check{K}}{\check{K}^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \check{K}^4}} - 1 \right) - \int_0^{A\varepsilon} d\check{K} \left[-\frac{1}{2} \check{K}^2 + O(\check{K}^6) \right] + \frac{\varepsilon^{-1}}{A} \\
 &= -\frac{[\Gamma(3/4)]^2}{\pi^{1/2}} + \frac{A^3}{6} \varepsilon^3 + \frac{\varepsilon^{-1}}{A} + O(\varepsilon^7) \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

L'intégrale du deuxième et du troisième terme de (B.5) converge UV mais diverge IR; les mêmes manipulations s'imposent. Il suffit cependant de savoir que

$$f_c^{(4)}(\check{K}) \underset{\check{K} \rightarrow 0}{=} -\frac{(2\pi)^{-2} \check{Z}}{\check{K}^6} + \frac{(2\pi)^{-2} (5\check{q}^2 - 12)}{6\check{K}^4} - \frac{(2\pi)^{-2} \check{Z}}{2\check{K}^2} + O(1) \quad \text{et} \quad f_c^{(12)}(\check{K}) \underset{\check{K} \rightarrow 0}{=} O(1/\check{K}^{10}) \tag{B.7}$$

⁴⁷Ce passage à la limite est en fait nécessaire seulement pour \check{M}_{--} . En ce qui concerne \check{M}_{++} et \check{M}_{+-} , la dépendance en A et η disparaît toute seule dans les coefficients des ε^n utiles ici; on pourrait donc prendre $\eta = A = 1$ ce qui reviendrait à garder pleinement les échelles (b) et (c) mais à introduire l'échelle (bc) seulement comme une coupure.

À l'ordre du calcul, les deux termes les plus divergents de $f_c^{(4)}(\check{K})$ contribuent, et $f_c^{(12)}(\check{K})$ est négligeable. La même procédure est à répéter pour les échelles (bc) et (b). Il suffit ici de savoir que

$$f_{bc}(\check{K}, \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} -\frac{(2\pi)^{-2}}{\check{K}^2} \varepsilon^{-5} + (2\pi)^{-2} \left(-\frac{\check{Z}}{\check{K}^6} + \frac{1}{2} \check{K}^2 \right) \varepsilon^{-1} + \frac{(2\pi)^{-2} (5\check{q}^2 - 12)}{6\check{K}^4} \varepsilon + O(\varepsilon^3) \quad (\text{B.8})$$

$$f_b(\check{K}, \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{(2\pi)^{-2} \check{K}^2}{\check{Z} - \check{K}^4} \varepsilon^{-6} + \frac{(2\pi)^{-2} (5\check{q}^2 - 12) \check{K}^4}{6(\check{Z} - \check{K}^4)^2} \varepsilon^{-2} + f_b^{(2)}(\check{K}) \varepsilon^2 + O(\varepsilon^6)$$

$$\text{où } f_b^{(2)}(\check{K}) \underset{\check{K} \rightarrow +\infty}{=} (2\pi)^{-2} \frac{\check{K}^2}{2} + O(\check{K}^{-2}) \quad (\text{B.9})$$

On aboutit ainsi au second membre de (B.1), dont le lecteur reconnaîtra ci-dessus tous les éléments.

B.2. À l'échelle de nombre d'onde $\check{q} \approx \check{\Delta}^{-1/2}$

Pour établir l'équation (148) sur le couplage phase-module M_{+-} , nous procédons comme il est expliqué dans le texte qui la précède. Après moyenne angulaire formelle de (8) en coordonnées sphériques d'axe polaire la direction de \mathbf{q} , M_{+-} s'écrit comme une intégrale sur le nombre d'onde \check{k} d'une certaine fonction $F(\check{k}, \check{\Delta})$. Prenons comme petit paramètre $\varepsilon = \check{\Delta}^{-1/8}$, séparons le domaine d'intégration en deux autour de la coupure $\Lambda \check{\Delta}^{1/4}$ (Λ est une constante) et effectuons les changements de variable (130) de type (a) et (c) :

$$\check{M}_{+-}(\check{z}, \check{q}) = \int_0^{\Lambda \check{\Delta}^{1/4}} d\check{k} F(\check{k}, \check{\Delta}) + \int_{\Lambda \check{\Delta}^{1/4}}^{+\infty} d\check{k} F(\check{k}, \check{\Delta}) = \int_0^{\Lambda \varepsilon^{-2}} d\check{K}_a \underbrace{F(\check{K}_a, \check{\Delta})}_{\equiv F_a(\check{K}_a, \varepsilon)} + \int_{\Lambda \varepsilon^2}^{+\infty} d\check{K}_c \underbrace{\check{\Delta}^{1/2} F(\check{\Delta}^{1/2} \check{K}_c, \check{\Delta})}_{\equiv F_c(\check{K}_c, \varepsilon)} \quad (\text{B.10})$$

Il reste à développer en puissances de ε sous le signe intégral à \check{K}_a ou \check{K}_c fixé, avec $\check{Q} = \check{\Delta}^{1/2} \check{q}$ et $\check{\zeta}$ défini par (142) fixés,

$$F_a(\check{K}_a, \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{(2\pi)^{-2} \check{K}_a^2 (\check{K}_a^2 - 1)}{\check{\zeta} - (\check{K}_a^2 - 1)^2} + O\left(\frac{\varepsilon^8}{1 + \check{K}_a^2}\right) \quad \text{et} \quad F_c(\check{K}_c, \varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{-(2\pi)^{-2} \varepsilon^{-4}}{(1 + \check{K}_c^4)^{1/2}} + O\left(\frac{\varepsilon^4}{\check{K}_c^2}\right) \quad (\text{B.11})$$

puis à intégrer :

$$\int_0^{\Lambda \varepsilon^{-2}} d\check{K}_a F_a^{(0)}(\check{K}_a) = F_a^{(0)}(+\infty) \Lambda \varepsilon^{-2} + \int_0^{+\infty} d\check{K}_a [F_a^{(0)}(\check{K}_a) - F_a^{(0)}(+\infty)] + O(\varepsilon^2) \quad (\text{B.12})$$

$$\int_{\Lambda \varepsilon^2}^{+\infty} d\check{K}_c F_c^{(-4)}(\check{K}_c) = \int_0^{+\infty} d\check{K}_c F_c^{(-4)}(\check{K}_c) - \int_0^{\Lambda \varepsilon^2} d\check{K}_c F_c^{(-4)}(\check{K}_c) = -\frac{[\Gamma(5/4)]^2}{\pi^{5/2}} - \Lambda \varepsilon^2 F_c^{(-4)}(0) + O(\varepsilon^{10}) \quad (\text{B.13})$$

Ici, les fonctions $F^{(n)}$ sont les coefficients des termes d'ordre ε^n dans (B.11). Dans (B.12), on a utilisé une astuce moins-plus en soustrayant à l'intégrande sa limite à l'infini. Dans l'intégrale restante, l'intégrande est désormais un $O(1/\check{K}_a^2)$; on peut donc remplacer la borne supérieure par $+\infty$, en commettant une erreur $O(\varepsilon^2)$ négligeable. Dans (B.13), pour passer du deuxième au troisième membre, on a d'abord effectué la première intégrale puis, dans la seconde intégrale, on a approximé l'intégrande par sa valeur en l'origine; comme ce dernier varie quartiquement près de $\check{K}_c = 0$, l'erreur commise est bien un $O(\varepsilon^{10})$. En regroupant les contributions (B.12) et (B.13) dans \check{M}_{+-} avec des poids 1 et ε^{-4} , on constate que les termes linéaires en Λ dans les derniers membres de ces équations se compensent. Il reste (148).

Références

- [1] R. Combescot, M. Y. Kagan, S. Stringari, « Collective mode of homogeneous superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover », *Phys. Rev. A* **74** (2006), article no. 042717.
- [2] V. A. Andrianov, V. N. Popov, « Hidrodinamičeskoe dejstvie i Boze-spektr sverhtekučih Fermi-sistem », *Teor. Mat. Fiz.* **28** (1976), p. 341, [*Theor. Math. Phys.* **28**, 829 (1976)].
- [3] H. Kurkjian, S. N. Klimin, J. Tempere, Y. Castin, « Pair-breaking collective branch in BCS superconductors and superfluid Fermi gases », *Phys. Rev. Lett.* **122** (2019), article no. 093403.
- [4] K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, S. R. Granade, J. E. Thomas, « Observation of a strongly interacting degenerate Fermi gas of atoms », *Science* **298** (2002), p. 2179.
- [5] T. Bourdel, J. Cubizolles, L. Khaykovich, K. M. Magalhães, S. J. J. M. F. Kokkelmans, G. V. Shlyapnikov, C. Salomon, « Measurement of the interaction energy near a Feshbach resonance in a ^6Li Fermi gas », *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003), article no. 020402.
- [6] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. H. Denschlag, R. Grimm, « Collective excitations of a degenerate gas at the BEC-BCS crossover », *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004), article no. 203201.
- [7] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, W. Ketterle, « Condensation of pairs of fermionic atoms near a Feshbach resonance », *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004), article no. 120403.
- [8] S. Nascimbène, N. Navon, K. J. Jiang, F. Chevy, C. Salomon, « Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas », *Nature* **463** (2010), p. 1057.
- [9] M. J. H. Ku, A. T. Sommer, L. W. Cheuk, M. W. Zwierlein, « Revealing the superfluid lambda transition in the universal thermodynamics of a unitary Fermi gas », *Science* **335** (2012), p. 563.
- [10] P. W. Anderson, « Random-phase approximation in the theory of superconductivity », *Phys. Rev.* **112** (1958), p. 1900.
- [11] H. Kurkjian, « Cohérence, brouillage et dynamique de phase dans un condensat de paires de fermions », thèse de doctorat, École Normale Supérieure, Paris, 2016.
- [12] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, « Three-phonon and four-phonon interaction processes in a pair-condensed Fermi gas », *Annalen der Physik* **529** (2017), article no. 1600352.
- [13] Y. Castin, « Simple theoretical tools for low dimension Bose gases, Cours de l'école de printemps des Houches 2003 *Quantum Gases in Low Dimensions*, édité par M. Olshanii, H. Perrin, L. Pricoupenko », *J. Phys. IV France* **116** (2004), p. 89.
- [14] V. Gurarie, « Nonequilibrium dynamics of weakly and strongly paired superconductors », *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009), article no. 075301.
- [15] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, InterEditions et Éditions du CNRS, Paris, 1988.
- [16] P. Nozières, *Le problème à N corps : Propriétés générales des gaz de fermions*, Dunod, Paris, 1963.
- [17] Y. Castin, « Basic tools for degenerate Fermi gases », in *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"* (M. Inguscio, W. Ketterle, C. Salomon, eds.), Lecture notes of the 2006 Varenna Enrico Fermi School on Fermi gases, SIF, 2007.
- [18] A. Schirotzek, Y. Shin, C. H. Schunck, W. Ketterle, « Determination of the superfluid gap in atomic Fermi gases by quasiparticle spectroscopy », *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008), article no. 140403.
- [19] M. Marini, F. Pistolesi, G. C. Strinati, « Evolution from BCS superconductivity to Bose condensation : Analytic results for the crossover in three dimensions », *Eur. Phys. J. B* **1** (1998), p. 151.
- [20] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, series, and products*, 5ème éd., Academic Press, San Diego, 1994, 1171 pages.
- [21] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, « Concavity of the collective excitation branch of a Fermi gas in the BEC-BCS crossover », *Phys. Rev. A* **93** (2016), article no. 013623.
- [22] S. N. Klimin, H. Kurkjian, J. Tempere, « Anderson-Bogoliubov collective excitations in superfluid Fermi gases at nonzero temperatures », *J. Low Temperature Phys.* **196** (2019), p. 102.
- [23] S. N. Klimin, J. Tempere, H. Kurkjian, « Phononic collective excitations in superfluid Fermi gases at nonzero temperatures », *Phys. Rev. A* **100** (2019), article no. 063634.
- [24] Z. Hadzibabic, S. Gupta, C. A. Stan, C. H. Schunck, M. W. Zwierlein, K. Dieckmann, W. Ketterle, « Fiftyfold improvement in the number of quantum degenerate fermionic atoms », *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003), article no. 160401.
- [25] D. S. Petrov, C. Salomon, G. V. Shlyapnikov, « Weakly bound dimers of fermionic atoms », *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004), article no. 090404.
- [26] A. J. Leggett, « Cooper pairing in spin-polarized Fermi systems », *J. physique Colloq.* **41** (1980), p. C7-19.
- [27] J. R. Engelbrecht, M. Randeria, C. A. R. Sá de Melo, « BCS to Bose crossover : Broken-symmetry state », *Phys. Rev. B* **55** (1997), p. 15153.
- [28] W. Zwerger (éd.), *The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas*, Lecture Notes in Physics 836, Springer, Berlin, 2012.

- [29] Y. Castin, I. Ferrier-Barbut, C. Salomon, « La vitesse critique de Landau d'une particule dans un superfluide de fermions », *C. R. Phys.* **16** (2015), p. 241.
- [30] T. Cea, C. Castellani, G. Seibold, L. Benfatto, « Nonrelativistic dynamics of the amplitude (Higgs) mode in superconductors », *Phys. Rev. Lett.* **115** (2015), article no. 157002.
- [31] R. Haussmann, M. Punk, W. Zwerger, « Spectral functions and rf response of ultracold fermionic atoms », *Phys. Rev. A* **80** (2009), article no. 063612.