



INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus

Physique

Luc Dettwiller

**Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique :
une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie**

Volume 23, Special Issue S1 (2022), p. 13-62


Published online: 25 May 2023

Issue date: 27 October 2023

<https://doi.org/10.5802/crphys.110>

Part of Special Issue: Astronomie, atmosphères et réfraction

Guest editors: Pierre Léna (Professeur émérite, Observatoire de Paris et Université Paris Cité, membre de l'Académie des sciences) and Luc Dettwiller (Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France)

 This article is licensed under the
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION 4.0 INTERNATIONAL LICENSE.
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



*Les Comptes Rendus. Physique sont membres du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte*

www.centre-mersenne.org

e-ISSN : 1878-1535



Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie

*Historical overview for the treatment of astronomical
refraction: a little-known history involving Optics,
Mathematics and Geodesy*

Luc Dettwiller^{® a}

^a Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School,
Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France

Courriel: dettwiller.luc@gmail.com

Résumé. De l'antiquité grecque à l'ère de l'informatique, la réfraction astronomique pose question, quant à la position angulaire réelle des astres, à la structure de l'atmosphère, et la navigation astronomique. Après les idées embryonnaires et les premières mesures présentées en introduction, on commence par la série des fondateurs d'une étude mathématiquement structurée : les Cassini, Newton, Taylor — ces deux derniers inventant des notions mathématiques appropriées. Puis on voit les géodésiens du XVIII^e (Bouguer, Lacaille, etc.) enrichir le corpus des observations entretenant la réflexion. Ensuite viennent les formules des Classiques : Simpson, Bradley, Kramp, Laplace. Mais avec les progrès de la métrologie démarrent des études précises de l'indice de l'air et reviennent les géodésiens et théoriciens, comme Biot qui est présent sur tous ces tableaux. L'augmentation de précision qui s'ensuit nécessite des calculs théoriques pour des modèles d'atmosphère plus sophistiqués, effectués par des continuateurs emblématiques comme, entre autres, Radau et Ivory. Ce dernier pointant une divergence dans les séries numériques utilisées, un sursaut mathématique est dû à quelques ouvriers comme Kummer et Hausdorff. Toute cette virtuosité analytique sera finalement supplantée par l'étude numérique informatique, mais dont l'implémentation efficace repose grandement sur les avancées théoriques de Biot.

Abstract. From Greek antiquity to the era of computer science, astronomical refraction has raised questions about the real angular position of celestial bodies as seen from Earth surface, the structure of its atmosphere, and the celestial navigation. After introducing the embryonic ideas and the first measurements, the article first presents the early founders of a mathematically structured study: Cassini, Newton, Taylor—the last two inventing appropriate mathematical tools. Then the 18th century geodesists (Bouguer, Lacaille, etc.) enrich the corpus of observations to be understood, followed by the “classics”—Simpson, Bradley, Kramp, Laplace. The progress in metrology allows precise studies of the air refractive index and new theoretical efforts with Biot's omnipresence. This gain in accuracy requires new calculations involving more sophisticated

atmospheric models, as Radau and Ivory, among others, will do. Ivory pointing out a divergence in the numerical series being used, Kummer and Hausdorff find a new mathematical way. Numerical work on computers is eventually making useless all this mathematical virtuosity, although present work keeps relying on Biot's theoretical advances.

Mots-clés. Réfraction astronomique, Coefficient de réfraction, Formule de Simpson, Formule de Bradley, Théorème d'Oriani, Hauteur réduite, Théorème de Biot.

Keywords. Astronomical refraction, Refraction coefficient, Simpson's formula, Bradley's formula, Oriani's theorem, Reduced height, Biot's theorem.

Published online: 25 May 2023, Issue date: 27 October 2023

« To make a new table of refractions has taken up almost all my time ever since the holidays: and I have hitherto lost my pains in fruitless calculations, by reason of the difficulty of the work. For considering that such a table is the foundation of astronomy [...] »

Isaac Newton, *Lettre à l'Astronome Royal John Flamsteed* (26/01/1695)

1. Introduction

De manière générale, les phénomènes de réfraction sont des effets d'optique géométrique dans lesquels la direction des rayons lumineux change le long de leur trajet à cause d'une variation spatiale d'indice de réfraction. Dans le cas d'un milieu continu, les rayons sont *a priori* courbes, dépourvus de points anguleux, leur concavité étant tournée dans le sens des indices localement croissants. Cela se produit dans l'atmosphère terrestre, à cause de l'inhomogénéité de l'air qui la constitue, liée surtout à la non-uniformité de la pression et de la température ; mais on verra que dans certains cas il vaut mieux parler de quasi-réflexion plutôt que de réfraction (voir [1, sous-paragraphe 2.1], dans notre article sur les « Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre » dans ce numéro spécial). Pour un observateur situé sur Terre en S (d'altitude quelconque), lorsque ces effets affectent la vision d'un objet terrestre, on dit qu'il s'agit de réfraction atmosphérique. Sous sa forme standard, les géodésiens en tiennent compte minutieusement et l'appellent la « réfraction terrestre » ; hors du cas standard, les effets de réfraction peuvent prendre des formes variées, incluant les traditionnels mirages, que nous détaillerons dans [1]. Par contre, dans le cas de la vision d'un objet extra-atmosphérique comme un astre A , on dit qu'il s'agit de réfraction astronomique. Ce numéro spécial se limitera à ce dernier cas, sauf dans les articles [1, 2].

Assimilons A à un point situé à l'infini, et considérons le rayon lumineux (R) allant de A à S . L'angle Z entre le zénith (i.e. la verticale ascendante en S) et la direction de A est appelé la distance zénithale de A ; mais la courbure de (R) fait que depuis S l'« image » de A est vue dans une direction différente, dont l'angle Z' avec le zénith est la distance zénithale apparente de A (voir la Figure 1) — nous avons mis ici le mot image entre guillemets, car il n'y pas stigmatisme (voir [1, paragraphe 1]) même pour A à l'infini (pour plus de détails, voir aussi [3, introduction du paragraphe 7] dans ce numéro spécial). Si dans les définitions ci-dessus on remplace le zénith par l'horizon astronomique (i.e. l'ensemble des directions horizontales pour S — voir la Figure 1), on obtient alors les angles $\psi = 90^\circ - Z$ et $\psi' = 90^\circ - Z'$ qui sont respectivement les hauteurs vraie et apparente de A . En supposant que (R) est dans le plan contenant A et la verticale de S , on appelle réfraction χ_S de A pour S l'angle, compté positivement vers le haut, de la direction de A vers celle de son « image » pour S , soit

$$\chi_S = Z - Z' = \psi' - \psi ; \quad (1)$$

dans le vocabulaire actuel il serait plus cohérent de l'appeler « déviation astronomique ».

Usuellement l'indice de réfraction n croît vers le bas sur tout le trajet de (R) ; la concavité de celui-ci est alors partout tournée vers le bas, et χ_S est positif.

La réfraction est petite, comme la variation η_S de n qui, de A à S , passe de 1 à n_S : usuellement $\eta_S \cong 3 \times 10^{-4}$ (des valeurs plus précises seront données au paragraphe 4), et on verra que $\chi_S \cong$

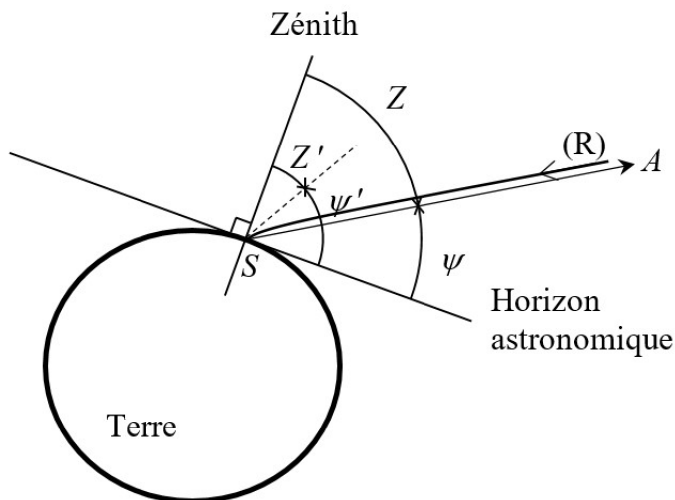


FIGURE 1. Définition des distances zénithales vraie et apparente Z et Z' de l'astre A , et de ses hauteurs vraie et apparente ψ et ψ' , le tout pour l'observateur S .

$3 \times 10^{-4} \text{ rad} \cong 1'$ pour $Z' = 45^\circ$, mais $\chi_S \cong 0,5^\circ$ pour $Z' = 90^\circ$. On peut déjà entrevoir que, dans la recherche d'expressions approchées de la réfraction, la petitesse de η_S est un atout fondamental.

On pourrait être surpris d'apprendre que ce point très précis d'optique atmosphérique a suscité au cours de l'histoire, et suscite encore, un tel intérêt et une littérature si abondante. Ce ne serait probablement pas le cas s'il ne concernait que les astronomes, car ils doivent fonder leur discipline sur la connaissance précise des directions vraies dans lesquelles se trouvent les astres. Mais la recherche de ce savoir est mêlée aussi à des enjeux géopolitiques. Ainsi, au siècle des Lumières, était-il devenu clair que cette connaissance est indispensable pour répondre aussi à un problème majeur dans le développement des empires : le point nautique, avec la navigation astronomique. À ce sujet, le rapport concernant la création du Bureau des longitudes, présenté le 25 juin 1795 par l'Abbé Grégoire à la Convention, est éloquent :

« [...] Thémistocle disait : "Quiconque est maître de la mer, l'est de la Terre." Un de nos poètes exprimait la même idée à sa manière en disant : "Le trident de Neptune est le sceptre du monde." Les succès des Anglais à diverses époques, et spécialement dans la guerre de 1761, n'ont que trop prouvé que la supériorité de la marine décide souvent des résultats de la guerre. Une des mesures les plus efficaces pour étouffer la tyrannie britannique, c'est de rivaliser dans l'emploi des moyens par lesquels cet État, qui ne devait jouer qu'un rôle secondaire dans l'ordre politique, est devenu une puissance colossale. Or les Anglais, bien convaincus que sans Astronomie on n'avait ni commerce, ni marine, ont fait des dépenses incroyables pour pousser cette science vers le point de perfection. [...]

En ce domaine, ils avaient initialement 50 ans d'avance sur la marine française ; en deux ans et demi, Grégoire gommait, pour la France, son demi-siècle de retard. Gardons-nous de croire que la technologie actuelle a relégué ces préoccupations au musée d'un passé définitivement révolu : depuis 2015, la navigation astronomique est de nouveau enseignée à l'Académie navale d'Annapolis (USA) — par crainte de défaillances du système GPS dues à d'éventuelles cyberattaques, mais aussi à son usure, à des pannes électriques créées par des événements solaires, à des dysfonctionnements voire des collisions de satellites, etc. Il faut savoir qu'une erreur de $1'$ (i.e. une

minute d'angle) en latitude correspond à un écart de position Nord-Sud d'un mille nautique, soit 1 852 m — ce qui peut être dramatique pour un navire au voisinage de récifs ou de hauts-fonds ! Pour obtenir cette précision de 1' en navigation astronomique [4–7], il est indispensable d'appliquer aux mesures brutes (prises autrefois avec un bon sextant par exemple) diverses corrections, dont certaines sont liées à la réfraction et sont bien connues dans le cas standard, mais dont la valeur réelle du moment peut s'écarter beaucoup et d'une quantité mal connue ! Il en est de même, quoiqu'avec des variations souvent moindres, pour la géodésie — et aussi la cartographie, qui était la tâche prioritaire voulue par Jean-Baptiste Colbert, ministre de Louis XIV, pour les astronomes de l'Académie des sciences et l'Observatoire de Paris, fondés successivement en 1666 et 1667. Nous détaillerons ces diverses corrections dues à la réfraction, dans ce numéro spécial [8, sous-paragraphe 4.2 et 4.3].

Du phénomène de réfraction astronomique spécifiquement, la première preuve expérimentale actuellement conservée semble se trouver dans l'ouvrage édité par Schöner en 1544 [9]. Le patricien Bernhard Walther (qui avait financé le premier observatoire d'Europe, à Nuremberg), y relate son observation des 6 et 7 mars 1489 (plus d'un siècle avant la découverte de l'effet *Novaya Zemlya* en 1597 — voir [10] dans ce numéro spécial) : avec une sphère armillaire il constate que la distance angulaire entre Vénus et le Soleil change au coucher de celui-ci ; il attribue ce fait à la réfraction, dont il effectuera la première mesure un an plus tard.

Mais dès l'antiquité, puis le Moyen-Âge, des précurseurs ont conjecturé l'existence de cas de réfraction atmosphérique, puis astronomique. Hipparque de Nicée (II^e siècle av. J.-C.) — dont les traités sont presque tous perdus — aurait, d'après Pline l'Ancien et Ptolémée, été le premier à déduire à l'œil nu l'existence de la réfraction astronomique : car il a observé une éclipse de Lune rare, où l'on voyait le Soleil sur l'horizon en même temps que la Lune éclipsée !

Entre le I^{er} et le II^e siècle av. J.-C., Cléomède [11] semble être le premier à suggérer que la réfraction permettrait de voir le soleil couchant alors qu'il est déjà sous l'horizon, et il tente d'expliquer par elle l'illusion de la Lune [12], en attribuant le tout à la réfraction entre l'air sec au niveau de l'observateur et l'air au loin, supposé humide donc plus dense et plus proche du sol, mais aussi plus réfringent (comme l'eau — ce qui s'avère faux !) : car Cléomède connaissait la réfraction (grâce au premier écrit qui la mentionne, dû à Euclide au III^e av. J.-C.) notamment à la surface de l'eau d'un récipient rempli à ras bord, ce qui permet de voir latéralement le fond du récipient qui serait invisible sans réfraction.

Ptolémée dans l'*Almageste* traite de même l'« illusion de la Lune » [13], i.e. le fait que celle-ci sur l'horizon semble [14, 15] beaucoup plus grosse qu'en plein ciel. Dans le Livre V de son *Optique* (vers l'an 170) il constate le déplacement vers l'horizon nord (peut-être observé au moyen d'une sphère armillaire) des astres au levant ou au couchant, puis l'explique par un modèle simple où il considère que la Terre est entourée d'une coquille d'air homogène, et où il calcule la réfraction à l'interface de l'air et de l'éther.

Alors que l'Europe n'en était encore qu'au Moyen-Âge, Ibn al-Haytham (connu en Occident sous le nom d'Alhazen, c. 965–c. 1040) explique correctement l'illusion de la Lune [16, livre VII, article 55], qui s'avère n'être qu'un effet psychologique, donc une illusion perceptive sans lien avec l'optique [14, 15] ; et il attribue fort justement à la réfraction l'aplatissement apparent du Soleil sur l'horizon, de 6' environ : un phénomène nommé « accourcissement » et pris en compte par les marins pour le calcul du point nautique, à 1' près si possible.

Des siècles plus tard, plusieurs savants européens se penchent sur cette problématique.

Les premières mesures précises tabulées remontent aux tables empiriques et posthumes de Tycho Brahe (1546–1601) [17] : il avait, dans son observatoire danois d'Uraniborg, les meilleurs instruments de mesure de positions de l'époque (précision de 1–2', améliorée pour la première fois depuis Ptolémée — d'un facteur 10), avec lesquels il assurait des observations d'une grande continuité. Il a mesuré la hauteur apparente d'étoiles circumpolaires lors des culminations

supérieure et inférieure de chacune ; alors il a constaté une incohérence de 4', concernant la latitude de son observatoire, et il l'attribue à la réfraction. Tycho est le premier à vouloir corriger de cet effet ses déterminations de positions, mais pour le Soleil et la Lune la méthode précédente ne s'applique pas. Alors, surtout au voisinage des solstices où la déclinaison solaire est stationnaire (ce qui réduit les incertitudes des calculs à partir de son éphéméride), Tycho a mesuré pour le Soleil la différence entre sa hauteur observée et celle calculée en fonction de son azimut, ce qui lui permit d'estimer la réfraction. Il trouva 33,5' pour la réfraction horizontale χ_{Sh} (i.e. la valeur de χ_S pour $\psi' = 0^\circ$) — précision remarquable ! Pensant que la réfraction dépend de la distance de la source et de son intensité, il dressa trois tables : une pour la Lune ; une pour le Soleil (avec 4–5' en trop, cette erreur étant due en partie à la croyance en la fausse parallaxe solaire de 3' à laquelle on adhérerait jusqu'à ce que Gian Domenico Cassini montre, en exploitant son travail de 1656 sur les observations à la grande méridienne de San Petronio de Bologne [18], qu'elle est inférieure à 12'') ; et une pour les étoiles (la plus juste) ! *L'Encyclopédie* de Diderot citera les mesures de réfraction de Tycho : il

« fait les *réfractions* [...] lunaires quelquefois plus grandes & quelquefois plus petites que celles des étoiles. Mais on n'étoit point encore au fait dans son siècle de la théorie des *réfractions*, dont nous sommes redevables à Snellius [...]. Tycho Brahé veut que les *réfractions* du soleil s'évanouissent à la hauteur de 46^d [il ne leur donnait que 5'' à 45° !] ; celles de la lune à celle de 45^d, & celles des étoiles fixes à 20^d : mais Cassini a trouvé qu'elles s'étendent jusqu'assez près du zénith. » [19]

Les écarts oscillants dénoncés ci-dessus, concernant les différences de réfraction entre la Lune et les étoiles selon Tycho, venaient probablement de la difficulté à séparer les effets de parallaxe lunaire de ceux de réfraction, ainsi que des erreurs dans les éphémérides de l'époque. Et c'est à cause de sa forte surestimation de la parallaxe du Soleil que Tycho prétend sa réfraction nulle à $\psi' = 46^\circ$ tout en consentant à lui donner une valeur non exactement nulle à 45°, mais Cassini montrera aussi dans son travail de 1656 qu'elle vaut environ 1' — beaucoup plus que ce que pensait Tycho.

L'influence de l'humidité de l'air sur la réfraction intéressait déjà Tycho en 1599. Tombé en disgrâce au Danemark à cause de ses propres excès, il l'avait quitté de lui-même en 1597, emmenant avec lui ses instruments, ses livres, ses meubles et sa cour. Après plusieurs étapes, dont le château de Wandsbeck près de Hambourg, il fit son entrée à Prague en juin 1599, car il était nommé *mathematicus* impérial par Rodolphe II de Habsbourg ; il choisit d'installer un observatoire et de résider au château de Benátky nad Jizerou, petite ville arrosée par la Jizera et située à 37 km au nord-est de Prague. Cette rivière, que dominant le bourg et son château baroque, inondait souvent les vergers environnants, d'où le surnom de « Venise bohémienne » repris par Tycho lui-même dans la lettre d'invitation qu'il adressa à Kepler le 9 décembre 1599 [20] ; d'ailleurs l'appellation tchèque Benátky, dérivée du nom de Venise en slovène (Benetke), est utilisée pour désigner des lieux proches de l'eau. Tycho était alors bien placé pour écrire (au dos d'un brouillon de lettre) :

« *Potissima igitur et varior refractionum causa, est in vaporis Terrae superfici perpetuo imminentibus, qui aerem nobis proximum paululum crassiolem minusque diaphanum quam est superior emis portio, reddunt.* » [21],

i.e. « La cause la plus puissante — relativement variable — de la réfraction réside dans les vapeurs perpétuellement en suspens à la surface de la Terre, qui nous rendent l'air le plus proche un peu plus dense et moins transparent que ne l'est la portion supérieure de [emis ?] ». Cet effet était étudié aussi par Christoph Rothman (astronome du Landgrave Wilhelm IV) ; l'idée sera reprise par Pierre Perrault dans son livre paru en 1674 [22] — Pierre avait quatre frères, dont Charles

qui contribua à la fondation de l'Académie des Sciences (1666), et Claude qui fut nommé unique architecte de l'Observatoire de Paris créé en 1667 ! Mais il faudra attendre 1806 pour savoir que, contre toute attente, l'influence de la vapeur d'eau est négligeable, alors que l'opinion contraire était très prégnante (et s'avèrera tenace) : elle se trouvait déjà chez Cléomède et Ptolémée, nous la reverrons chez Huygens [23, p. 42–43], puis chez Jacques Cassini [24, 25], Newton et Flamsteed [26], Bouguer [27, 28], etc. En fait, la variation de l'hygrométrie n'est prise en compte que dans le cadre des travaux actuels d'astrométrie fine ; elle ne sera incluse dans les tables qu'à partir de 1906, avec celles de de Ball (publiées à Leipzig).

Mais l'idée d'une forte influence de l'humidité avait déjà été démentie [29] par Johannes Kepler (1571–1630) dans son premier traité d'optique *Ad Vitellionem paralipomena* [30]. Et les tables de Tycho seront insérées par Kepler dans les *Tabulae Rudolphinae* [31]. Tous deux avaient conscience de l'importance des lois de l'optique pour interpréter correctement les observations astronomiques — alors que Nicolas Copernic (1473–1543) l'ignorait. Grâce à elles, on doit à Kepler la première étude quantitative de l'accourcissement [30]. D'abord il se réfère à Vitello (c. 1230–1280) :

« Ce qui est dit dans la proposition 53 [de Vitello], à savoir que la distance entre les étoiles, ainsi que les diamètres des corps célestes, apparaissent plus grands vers le zénith, mais par contre, raccourcies quand elles sont proches de l'horizon, est correct. Non seulement c'est vrai, mais c'est aussi bien visible, et pour un astronome il est très nécessaire de le reconnaître. »

Puis il complète Vitello (comme l'indique le titre de son traité) en le critiquant pour avoir dit que les corps célestes semblent toujours ronds auprès de l'horizon : les diamètres horizontal et vertical de chacun d'eux changent différemment, d'où une ovalisation, « comme on voit une pièce de monnaie dans l'eau quand on la regarde obliquement ». Sur ce terrain, Kepler sera suivi en 1615 par Christoph Scheiner (1575–1650) [32] — qui voulait revendiquer l'antériorité ? Mais Kepler cherchait aussi à expliquer la rougeur de la Lune lors de ses éclipses ; il avait compris qu'elle est partiellement liée à la réfraction — qui est en effet un point majeur de l'étude des éclipses de Lune (voir [33] dans ce numéro spécial). Comme dans l'antiquité et comme Tycho, Kepler considérait que l'atmosphère est un « océan d'air », avec une « surface d'atmosphère », qu'il ne mettait pas (d'après le modèle de Ptolémée) à plus d'un demi-mile allemand d'altitude [29], soit environ 3,7 km — car le mile allemand correspond par définition à un angle au centre de $1^\circ/15$ sur l'équateur terrestre, i.e. 7,421 km.

René Descartes (1596–1650), dans ses *Principes de la Philosophie* [34, article 15 et Pr III, art. 131] publiés en 1647, considère que la réfraction de la lumière à la superficie des cieux fait « que nous ne voyons quasi jamais les étoiles dans le lieu où elles sont [...] et nous pourrions aussi en voir plus qu'il n'y en a. » Une année après, le Père Minime toulousain E. Maignan consacre les pages 94–104 de sa *Perspectiva horaria* à la réfraction astronomique, surtout pour dire qu'on ne peut pas la déterminer [35, Propositio XXXX], ce qui semble être une régression ; il considère qu'elle dépend de la « surface de l'atmosphère », qui serait un dioptré air-éther.

Après ces premiers balbutiements très majoritairement empiriques, l'étude de la réfraction astronomique a pris son envol dans la seconde moitié du XVII^e siècle, tant sur le plan expérimental, avec la diffusion des télescopes et des lunettes, que sur le plan théorique grâce au développement conjoint des mathématiques (avec le calcul intégral, l'utilisation des séries, etc.) et de la physique (sur les propriétés optiques et thermodynamiques des gaz, la distribution de pression dans l'atmosphère, etc.). Suivons donc maintenant l'essor de cette étude aux motivations multiples, qui débordent le cadre de l'astronomie et même celui de la science. Comme ce sujet ne constitue pas à lui seul une discipline à part entière, nous croiserons un grand nombre de scientifiques célèbres, astronomes ou non, qui ont touché à son étude et réalisé, souvent indépen-

damment les uns des autres, des avancées en ordre dispersé et décalées dans le temps, avant de retourner à d'autres recherches. Il est donc vain de vouloir suivre un ordre chronologique strict ; nous adopterons un plan plus thématique, correspondant à quatre grandes périodes : le temps des fondateurs (de la seconde moitié du xvii^e siècle au début du xviii^e), puis celui des géodésiens explorateurs (1^e moitié du xviii^e), celui des Classiques (suite du xviii^e), celui des géodésiens métrologistes (début xix^e), et — pour finir — celui des continuateurs et des ouvreurs (suite du xix^e-début xx^e). Au terme de ce parcours, nous verrons qu'il subsiste actuellement, pour étudier la réfraction astronomique, des motivations comparables à celles qui étaient liées à la quête de domination sur les mers au xviii^e : « ceux qui sauront contrôler l'espace, sauront également prendre le contrôle de la surface de la Terre. . . », déclarait en guise d'avertissement un général américain (cité par Jacques Arnould [36]) un mois et demi après le succès (en 1957) du premier satellite soviétique, le célèbre Spoutnik 1 ; et si le GPS des militaires américains offre une précision sub-métrique, et pas seulement hectométrique comme celle qui était accordée aux usages civils avant la décision d'ouverture prise par le président Bill Clinton en mai 2000, c'est moyennant d'indispensables corrections, dont celles qui dépendent indirectement de la réfraction astronomique (cf. paragraphe 4) en vertu d'un théorème dû à Laplace [37, chap. 3].

2. Les fondateurs

2.1. *Gian Domenico et Jacques Cassini*

La première théorie quantitative de la réfraction remonte à la correspondance [38] de 1662 entre le marquis Cornelio Malvasia (1603–1664) et Gian Domenico Cassini (1625–1712) qui en dirigeait l'observatoire privé à Panzano (près de Bologne) depuis 1645 — avant de devenir le premier directeur de l'Observatoire de Paris, fondé en 1667. La renommée de Cassini est en partie due à ses calculs sur le Soleil et sur la réfraction (1656) ; ils lui permettent aussi de montrer, en collaboration avec Richer envoyé à Cayenne au moment de l'opposition périhélique de Mars de septembre 1672, que la parallaxe solaire est voisine de 10'' — ils la mesurent avec seulement 10 % d'erreur. Cela permit encore, au siècle suivant, la construction de nouvelles tables de la Lune [39] par Tobias Mayer (1723–1762), proposées pour la détermination de la longitude en mer. Au sujet de Gian Domenico Cassini (qui reçoit de Colbert des « Lettres de naturalité » française en avril 1673 [40, p. 69–71] et dont le prénom a dès lors été francisé), Delambre écrira en 1814 : « Dominique Cassini est le premier qui ait proposé une hypothèse propre à calculer les réfractions pour toutes les hauteurs; et la table qu'il en dressa était déjà d'une exactitude très-remarquable. » [41, p. 294] Quelle est cette hypothèse, et quel est vraiment le degré d'exactitude de ses résultats ?

Dans les années 1660 les astronomes ne pensaient pas forcément que les rayons lumineux dans l'atmosphère sont courbes ; quoi qu'il en soit, ils n'avaient pas les moyens de les mettre en équations : le calcul différentiel et intégral leur manquait. De plus, à l'instar des penseurs antiques, puis de Brahe, Kepler et Maignan, Cassini croit l'atmosphère limitée et sans vagues. Alors il utilise, comme avant lui Kepler, le modèle attribué à Ptolémée, où la masse volumique μ de l'air est supposée uniforme — Cassini est probablement le dernier. Venant de Bologne et arrivant à Paris le 4 avril 1669 sur l'appel de Colbert pour prendre la direction de l'Observatoire et être reçu à l'Académie des sciences (avec une rémunération quintuple des gratifications ordinaires des autres académiciens), il fut présenté le 6 avril au Roi, qui « le reçut, dit Fontenelle dans son éloge funèbre, & comme un homme rare, & comme un Etranger qui quittoit sa Patrie pour lui » [40, p. 6] ; il était considéré, depuis la publication de ses *Ephemerides bononienses Mediceorum siderum* en 1668 à Bologne, comme un scientifique de « réputation de grand savoir ». Puisqu'en 1669 les murs de l'Observatoire atteignaient alors juste le premier étage, Charles

Perrault lui apprête un logement aux Galeries du Louvre, où il réside jusqu'à son installation à l'Observatoire le 14 septembre 1671 — alors que le gros œuvre ne sera terminé qu'en 1672 [42]. Il pouvait être informé facilement de la mesure précise du rayon terrestre (que nous assimilerons à la distance r_S entre S et le centre C de la Terre) : 6 371,9 km d'après la campagne géodésique d'Amiens à La Ferté-Alais effectuée entre 1669 et 1670 par l'un des trois premiers académiciens astronomes français, l'Abbé Jean Picard (1620–1682) — les deux autres étant Adrien Auzout et Jean Richer. Cassini utilisait aussi la *hauteur de l'atmosphère homogène* (ou *hauteur réduite*) H_1 , i.e. celle qui donnerait (à l'équilibre et en négligeant la variation de la pesanteur g avec l'altitude) la même pression au sol que l'atmosphère réelle (voir aussi [3, sous-paragraphe 4.1] de notre exposé des « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique [...] » dans ce numéro spécial) ; muni d'une valeur précise de r_S , il pourra regarder en confiance le calcul numérique de H_1 ...

Il considérait donc dès le début des années 1660 la réfraction par un dioptre sphérique à l'altitude H_1 (par rapport à l'observateur) entre le vide et l'air supposé homogène (qui d'ailleurs serait instable vis-à-vis de la convection — voir le sous-paragraphe suivant). Toutes ses études sont sans algèbre, uniquement fondées sur des rapports géométriques exprimant les lois de la réfraction, connues depuis moins d'un siècle. Leur traduction en formules, pour S supposé au sol, donne [43] :

$$\chi_S = \arcsin\left(\frac{r_S}{r_S + H_1} n_S \sin Z'\right) - \arcsin\left(\frac{r_S}{r_S + H_1} \sin Z'\right). \quad (2)$$

Afin de mieux comprendre certaines propriétés importantes qui apparaîtront aux paragraphes 3 et 4, il est intéressant de considérer ici χ_S comme une fonction des deux paramètres petits fondamentaux (à savoir la réfractivité $\eta_S := n_S - 1$ de l'air en S — le symbole $:=$ indiquant une définition ou une notation — et la hauteur réduite relative $h_1 := H_1 / r_S$ de l'atmosphère) donnant

$$\chi_S(\eta_S, h_1) = \arcsin\left(\frac{1 + \eta_S}{1 + h_1} \sin Z'\right) - \arcsin\left(\frac{1}{1 + h_1} \sin Z'\right), \quad (3)$$

et de calculer — selon une idée due à James Ivory (1765–1842) en 1821 — son développement limité à l'ordre total 2 au voisinage de $(0, 0)$: on trouve

$$\chi_S(\eta_S, h_1) = \eta_S (\tan Z') \left[(1 - h_1) - \left(h_1 - \frac{\eta_S}{2} \right) \tan^2 Z' \right] + o(\eta_S^2 + h_1^2). \quad (4)$$

Comme cette expression n'est pas définie en $Z' = 90^\circ$, on préfère une autre approximation, même si elle est obtenue de manière moins systématique que la précédente. Pour cela on part de l'expression (3), mise sous une forme symétrisée par rapport à l'argument $\frac{\sin Z'}{1 + h_1} \left(1 + \frac{\eta_S}{2}\right)$:

$$\chi_S = \arcsin\left[\frac{\sin Z'}{1 + h_1} \left(1 + \frac{\eta_S}{2}\right) + \frac{\eta_S}{2} \frac{\sin Z'}{1 + h_1}\right] - \arcsin\left[\frac{\sin Z'}{1 + h_1} \left(1 + \frac{\eta_S}{2}\right) - \frac{\eta_S}{2} \frac{\sin Z'}{1 + h_1}\right]; \quad (5)$$

on en déduit une approximation ayant seulement une erreur d'ordre 3 en η_S , au lieu d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \chi_S &\cong 2 \frac{\eta_S}{2} \frac{\sin Z'}{1 + h_1} / \sqrt{1 - \left[\frac{\sin Z'}{1 + h_1} \left(1 + \frac{\eta_S}{2}\right)\right]^2} \\ &\cong \eta_S \left(1 - \frac{\eta_S}{2}\right) \sin Z' / \sqrt{2 \left(h_1 - \frac{\eta_S}{2}\right) + \cos^2 Z'}. \end{aligned} \quad (6)$$

Cette expression est en accord avec celle donnée par Radau [44, p. B.7].

Quelle que soit l'expression considérée, la fonction $Z' \mapsto \chi_S$ est complètement déterminée par deux paramètres (par exemple η_S et h_1), que Cassini ajuste de façon à retrouver ses valeurs de référence : $\chi_S \cong 5' 28'' \cong 1,59 \times 10^{-3}$ rad pour $\psi' = 10^\circ$, et $\chi_{S_h} \cong 32' 20'' \cong 9,405 \times 10^{-3}$ rad. La seconde valeur, en particulier, est intrigante car relativement irréaliste ; en 1821 Delambre disait encore : « nous n'avons pu deviner comment il a trouvé [ses] deux réfractions fondamentales » [45, p. 725] — et il confirme sa perplexité quelques années plus tard [46, p. 260].

Grâce à son étude quantitative, Jean-Dominique Cassini démontra, aux dires mêmes de son fils Jacques (1677–1756), un résultat que Flamsteed lui-même aura du mal à croire : les « refractions [...] diminuent à mesure que les Astres s’elevent, & ne cessent entierement qu’au Zenith, comme mon Pere l’a démontré, quoique tous les Astronomes avant lui ayent été persuadés qu’elles étoient insensibles à la hauteur de 45 degrés » [25, p. 43] et même nulles suffisamment au-dessus selon Tycho. Jean-Dominique a déjà conscience, ainsi que Tycho et Picard, de leurs variations saisonnières (niées par La Hire), et il devine qu’elles sont dues à la variation de température moyenne, mais il oublie l’influence de la pression — contrairement à son collègue Edmond Halley (1656–1742), deuxième *Astronomer Royal*, qui la signale en 1720 [47] ; et plus tard, on mettra bien en évidence des variations saisonnières de pression atmosphérique, mais moins importantes (en valeur relative) que celles de température absolue.

Sauf près de l’horizon, le modèle de Ptolémée, joint au schéma calculatoire de J.-D. Cassini, était (en vertu de la loi de Simpson — voir le paragraphe 4) encore utilisé, avec des valeurs contemporaines de η_S et H_1 , par le Bureau des longitudes au XIX^e siècle ; en 1821, Ivory disait :

« The simple hypothesis of Cassini seems hardly to have met from astronomers with the attention it deserves; for, if we use accurate elementary quantities in the computation, it will determine the refractions to the extent of 74° from the zenith with the same degree of exactness as any of the other methods, without even excepting the formula of Laplace. » [48, p. 322]

En effet, à 74° de distance zénithale (où $\chi_S \cong 3'20''$) la formule (2) n’a que 0,051'' d’erreur, donc elle y satisfait largement l’exigence de précision actuelle de 0,04 % [49] ; mais son erreur devient 1'' à 81°, 4'' à 84°, croît très vite au-delà et atteint 13' à l’horizon. Confiant envers les mesures de réfraction réalisées par Tycho, Kepler avait déjà prévu dans son livre de 1604 [30] que le modèle de Ptolémée ne donnerait pas une loi de réfraction (en fonction de la distance zénithale) expliquant l’aplatissement apparent du Soleil au voisinage de l’horizon. Mais au lieu de remettre en cause le modèle d’atmosphère, Kepler mettait en doute la loi de la réfraction, et trouvait même qu’aucune loi basée sur la trigonométrie ne pourrait arranger ce problème ! En 1665 Giovanni Battista Riccioli (1598–1671, jésuite, astronome en chef de l’Église), croyait encore (à l’instar de Tycho) les réfractions nulles à partir d’une certaine hauteur, qu’il estime à 26° [46, p. 775] ; mais il signale [50], comme étant une coquille possible, le même problème que celui déjà prévu par Kepler [30] : notamment, si l’on exprime χ_S en fonction de la hauteur apparente ψ' , on constate que dans la table calculée par Jean-Dominique Cassini $\chi_S(1^\circ) - \chi_S(2^\circ) > \chi_S(0^\circ) - \chi_S(1^\circ)$, ce qui n’est pas conforme aux observations (la valeur de $\chi_S(0^\circ)$ donnée par Cassini est 3' trop petite, et $\chi_S(1^\circ)$ environ 3' trop grande) ; Cassini répond par lettre, publiée deux fois ([51], [52, p. 306 ss]) qu’il n’y a pas de coquille et, en somme, que *ses calculs* sont justes (voir [53, sous-paragraphe 2.2] dans ce numéro spécial)... Magnifique exemple de déni ! Mais ce défaut, encore pointé par Philippe de la Hire (1640–1718), sera reconnu par Jacques Cassini.

Au bout de tâtonnements numériques qu’il trouve laborieux (voir aussi une présentation moderne par Bruhns [54, p. 34–35]), Jean-Dominique lui-même, toujours en se servant de ses deux valeurs de χ_S de référence, trouve $h_1 \cong 6,115 \times 10^{-4}$ (sans s’intéresser à la réfractivité η de l’air ni à son indice de réfraction, ces notions n’étant pas définies à son époque) ; et il prend $r_S \cong 3\,271\,600$ toises $\cong 6\,376$ km, d’où $H_1 \cong 2\,000,6$ toises $\cong 3,899$ km (un peu plus que ce que pensait Kepler [30] en 1604). La reprise de cet ajustement à partir des formules rigoureuses (2)–(3) donne $h_1 \cong 6,116 \times 10^{-4}$, et $\eta_S \cong 2,848 \times 10^{-4}$; à 10 °C et 752 torr (conditions standard adoptées par Bradley — cf. le paragraphe 4) cette valeur de η_S est la réfractivité de l’air sec à 394 nm de longueur d’onde. Si on change la première valeur de référence en une autre tirée de la même table (en particulier, $\chi_S \cong 59'' \cong 2,860 \times 10^{-4}$ rad pour $\psi' = 45^\circ$ dans l’espoir, si comme Cassini on procède « à la main », d’arriver plus vite à une bonne approximation de η_S), on trouve des

résultats augmentés d'un peu moins de 1 % : $H_1 \cong 3,937$ km et $\eta_S \cong 2,863 \times 10^{-4}$; la différence avec les résultats précédents, ainsi que la couleur violette associée aux 394 nm, si elles ne sont pas dues à des données erronées, pourraient montrer de manière interne le caractère irréaliste du modèle de Cassini. Mais cet irréalisme se manifeste surtout de manière externe, quand on sait que la valeur actuellement admise pour H_1 est 7,990 km dans les conditions normales (0 °C, 760 torr = 1 atm) sous nos latitudes ! Pire : si on voulait obtenir encore $\chi_S \cong 5'28''$ pour $\psi' = 10^\circ$, mais aussi la valeur correspondante réaliste de 35' pour χ_{Sh} , il faudrait prendre $H_1 \cong 3,4$ km ! L'origine de cette double surprise — le fait qu'un modèle très simple donne une valeur aussi bonne pour η_S , contrastant avec son résultat deux fois trop petit pour H_1 — s'éclairera au fur et à mesure de la marche du temps. En ce tout début d'étude, contentons-nous de souligner le fait que la très mauvaise estimation de H_1 ne vient pas d'un problème numérique ni de données fortement erronées : elle vient des défauts du modèle irréaliste utilisé, trompeur car ils ont des effets insensibles sur les valeurs de la réfraction χ_S assez loin de l'horizon, mais ils produisent en revanche des erreurs importantes concernant la réfraction horizontale χ_{Sh} ; pour s'en convaincre, il suffit de comparer ce que donne la formule (6) pour $Z' = 90^\circ$, avec la formule (16) liée à un modèle moins grossier. Avec des valeurs correctes de η_S et h_1 , le modèle de Ptolémée-Cassini surestime χ_S très légèrement (de moins de 0,1'') pour $Z' < 78^\circ$, mais le sous-estime pour $Z' > 78^\circ$ et de plus en plus gravement (de 13' à l'horizon — cf. supra). Malheureusement, la duperie provoquée par ce modèle induira une idée fautive qui entravera la réflexion de Bouguer (voir le paragraphe 3).

Jean-Dominique publie en 1684 une nouvelle table de réfraction, plus précise. *La Connoissance des Temps*, recueil annuel d'éphémérides dont le premier est édité pour l'an 1679, publie une première table des réfractions dans l'édition suivante (la table de Tycho, pour le Soleil...), puis utilisera en partie la nouvelle table de Cassini pour 1685–1688, et la publiera intégralement pour 1689–1765 (avec une précision de 1'' pour tous les degrés de hauteur à partir de 1702 seulement).

Jacques Cassini poursuit avec son père la mesure de la méridienne de France prévue par Picard. Une nouvelle campagne géodésique, en 1700–1701, les mène dans les Pyrénées. Entre autres, ils visent l'horizon marin depuis divers points élevés dont ils venaient de déterminer l'altitude, comme la Tour de la Massane dans le Roussillon [55, p. 139–141]. Reprise par Bouguer, cette mesure connaîtra d'intéressants rebondissements, concernant la navigation astronomique d'une part (voir [56, sous-paragraphe 3.7], et [8, sous-paragraphe 4.2 et 4.3], dans ce numéro spécial), mais aussi la théorie de la géodésie elle-même d'autre part : une cinquantaine d'années plus tard, Lambert (voir [57, p. 82] présenté par l'article [58] dans ce numéro spécial) utilise les mesures d'altitudes faites par les Cassini, non sans préciser « que la plupart de ces hauteurs souffrent une correction considérable parce qu'elles sont calculées sans la réfraction. Voici donc les hauteurs corrigées [...] » [58, paragraphe 2].

Au décès de son père en 1712, Jacques Cassini lui succède à la tête de l'Observatoire. Il reviendra sur l'estimation de H_1 par Jean-Dominique. Dans une présentation de leur travail en 1714 à l'Académie des sciences par son Secrétaire perpétuel — de 1699 à 1740, Bernard le Bouyer de Fontenelle (1657–1757) — on lit [24, p. 65] : « Cette hauteur de 2 000 Toises, qui n'est pas d'une Lieuë, est beaucoup plus petite que celle de 6 lieuës 1/2 que donnent à l'Atmosphère ceux qui lui donnent le moins, comme Messieurs Cassini & Maraldi, car il y en a d'autres qui vont jusqu'à 18 ou 20 » (notons qu'aux Indes, un demi-siècle plus tard, Le Gentil trouvait 1 750 toises [59, p. 426–447]).

Au moins depuis le x^e siècle, on avait l'idée d'utiliser l'observation de l'arche crépusculaire et de sa durée pour estimer la hauteur totale de l'atmosphère : lors de la transition entre les crépuscules nautique et astronomique, i.e. quand le Soleil est à 12° sous l'horizon, un observateur au niveau de la mer ne peut voir éclairées par les rayons solaires que les portions de l'atmosphère

situées à plus de 30 km d'altitude environ — et 70 km environ à la fin du crépuscule astronomique (Soleil à 18° sous l'horizon). Alors la petitesse de cette valeur de 2 000 toises intriguait les Cassini à juste titre, même si on peut dire que la hauteur réduite H_1 est inférieure à la hauteur « totale » de l'atmosphère (qu'ils croyaient finie).

En effet, au début du XVIII^e siècle, ces chercheurs se débattaient avec des données troublantes. Il y avait d'une part celles de Jean-Dominique Cassini : il mène des recherches sur la base des observations, par Spole et Bilberg en 1695 en Botnie, de la valeur élevée (58' et plus selon La Hire [60]) de la réfraction horizontale (impressionnante avant le début du XX^e siècle, tant qu'on n'avait pas compris qu'elle est majoritairement due à la présence, dès le niveau du sol, de la forte inversion de température nocturne très courante dans les contrées nordiques — voir le paragraphe 3) ; supposant toujours l'air homogène, Jean-Dominique avait lu un mémoire à la séance de l'Académie des sciences le 17 février 1700 [61], où il arrivait à la conclusion que la réfraction horizontale en Botnie devait être presque double de celle de Paris, et par rapport à celle-ci moindre d'environ un tiers dans les régions équatoriales — or « Entre les Tropiques, le Barometre en général s'éleve moins que dans les païs Septentrionaux, ce qui marque sûrement que l'air de la Zone Torride est plus leger, & ce plus de legereté s'accorde bien avec de moindres refractions. » [62] D'autre part, il y avait les constatations de La Hire qui, à la séance précédente du 13 février 1700, avait lu un mémoire dans lequel il notait que le baromètre donnait les mêmes indications en Suède et à Paris — et nous ajoutons que la température *absolue* T n'est pas deux fois plus petite en Botnie qu'à Paris. Sous l'autorité du Secrétaire perpétuel, vient la conclusion du moment :

« Il y a une remarque à faire, laquelle est fort considérable, que la partie de l'air qui cause les Refractions, n'a point de rapport avec celle qui fait la pesanteur, puisqu'il arrive à Stockholm et à Paris les mêmes changements de mercure dans le tuyau du baromètre, & qu'on y a aussi observé les mêmes hauteurs à très-peu-près. » [63] « Voilà bien des contrariétés apparentes, qui éloignent beaucoup l'établissement d'un système ; il suffit maintenant de ramasser tous les sujets d'incertitude, & peut-être quand ils seront en assés grand nombre, produiront-ils quelque certitude, ou quelque vrai-semblance. » [62]

L'exposé du travail de Jacques Cassini continue ainsi [24, p. 65] : « L'Atmosphere ne seroit donc réfractive que dans une petite partie de son étenduë, & dans ses couches les plus basses, ou, si l'on veut, la matiere réfractive seroit différente de l'Atmosphère. [...] » De cette conception erronée, la seconde partie au moins vient de J.-P. Maraldi, qui l'introduisit en 1703 : en extrapolant la baisse de pression qu'il mesure entre divers sommets de cotes croissantes connues, il conclut qu'elle doit s'annuler à 12 796 toises d'altitude (soit les « 6 lieuës 1/2 » mentionnées plus haut), et cet important désaccord avec les 2 000 toises de hauteur réduite d'atmosphère trouvée par Jean-Dominique Cassini poussa Maraldi à « conjecturer qu'il pourroit y avoir quelque matiere fluide répandue dans la partie inférieure de l'air, & peu élevée sur les plus hautes montagnes de la terre, qui fut la cause principale des réfractions des Astres » [64]. À sa suite, Jean-Dominique Cassini, écrivait en 1707 : « [...] la partie de l'air qui cause la refraction est d'une nature differente de la partie à laquelle on attribué la pesanteur qui équilibre la hauteur des liqueurs dans le vuide » [65, p. 197] ; et un argument avancé l'année précédente (mais dont on sait maintenant qu'il est mal fondé car il repose sur l'idée fausse selon laquelle la vapeur d'eau augmenterait la réfraction) allait dans le même sens :

« Il sembleroit de même que la refraction d'un Astre vû au travers d'un nuage devoit être plus grande. Elle ne l'est pourtant pas, & c'est ce que M. Cassini & le P. Laval ont observé plusieurs fois. Delà M. Cassini conjecture qu'il pourroit y avoir dans l'air une *matiere refractive* differente de l'air. » [62, p. 103]

On verra (au paragraphe 3) que Bouguer reprendra à son compte l'intégralité de cette conception erronée, mais sans y tenir vraiment, puis il s'en écartera progressivement !

Cependant, le Secrétaire expose une autre idée [24, p. 65–66] :

« Mais l'hypothèse d'où l'on tire cette hauteur de 2 000 Toises est que le rayon rompu vienne à l'œil en ligne droite, & l'hypothèse peut fort bien n'être pas vraie. [On fait alors] l'hypothèse la plus simple qu'il soit possible, c'est que la densité croisse toujours également à chaque couche infiniment peu épaisse de la matière, c'est-à-dire, comme les nombres naturels 1, 2, 3, & c. De-là il suit que le rayon rompu [...] est le côté de la Courbe qui se décrit [...] »

Jacques Cassini devait bien avoir, dès les années 1690 au moins, l'idée que les rayons lumineux étaient en fait courbes, et Jean-Dominique s'est finalement penché sur cette idée ; car celui-ci, au sujet de son unique retour temporaire en Italie pour des travaux astronomiques mais aussi et surtout techniques (« rétablir la méridienne de l'église Saint-Pétrone à Bologne, [...] et] discuter directement avec le pape à propos des travaux d'assainissement des terres de l'état pontifical près de Bologne et Ferrare, périodiquement inondées » [66]), décrit les difficultés de mesures de triangulation faites sur des points proches de son village natal (Perinaldo) du 7 au 9 novembre 1694 :

« une seule station suffiroit si les rayons visuels des objets éloignés s'etendoient en ligne droite comme l'on supposoit autrefois, mais cela n'arrive pas toujours a cause de la refraction qu'ils souffrent dans l'air qui les fait plier vers la Terre, et transformer en des lignes courbes [...] Il faudroit pouvoir connoitre la nature de ces courbes [...] » [67, 68].

Tel est bien le nœud du problème, mais celui-ci était inabordable dans toute sa rigueur à l'époque, faute de disposer des outils mathématiques appropriés. De plus, notons que ci-dessus Cassini a écrit « pas toujours », comme si, l'idée de courbure des rayons étant trop nouvelle, il n'était pas encore vraiment convaincu que c'est la règle générale dans l'atmosphère — dans [3, sous-paragraphe 7.1.4], on voit qu'ils n'y sont rectilignes que si le gradient thermique dT/dr vers le haut vaut $-34 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$. Il faudra attendre 1715, avec la parution du livre de Taylor en Angleterre (voir le sous-paragraphe 2.3), et juin 1716 en France, avec la lecture à l'Académie, par le père jésuite Pierre Varignon (1654–1722), d'un mémoire sur les différentes densités de l'air où il cite Taylor et utilise le calcul différentiel et intégral, pour que l'usage du calcul infinitésimal commence à se répandre. Bouguer profitera de cet intérêt nouveau, qui relativise l'importance du débat sur la « matière réfractive ». Par la suite, P.-L. Moreau de Maupertuis (1698–1759) commencera, après son élection à la *Royal Society* en 1728, puis sa rencontre à Bâle en 1729 avec Jean Bernoulli (1657–1748), à jouer un rôle dans la diffusion du calcul infinitésimal en France [63]. En attendant, Jacques Cassini croit avoir prouvé que dans son modèle d'atmosphère à profil de densité affine, les rayons lumineux sont rigoureusement des arcs de cercle, ce qui est faux ; mais en se servant de cela, il calcule (voir à ce propos les relations (5) et (7) de [69] dans ce numéro spécial) une nouvelle table de réfractions, qui s'accorde bien mieux aux observations proches de l'horizon que celle de son père, et il en déduit une hauteur totale d'atmosphère de 3,4 lieues — un résultat acceptable en terme de hauteur réduite (8 km environ, soit 2 lieues), qui pour le modèle à profil affine est la moitié de la hauteur totale — cependant cela le gêne encore car les autres estimations de son époque vont de 6,5 à 20 lieues [24, p. 65]. Il ne pouvait pas savoir que Newton avait calculé χ_S avec ce même modèle (à profil affine) vingt ans auparavant, puis l'avait rejeté car il le trouvait mauvais lui aussi...

2.2. Isaac Newton (1642–1727)

John Flamsteed (1646–1719), premier *Astronomer Royal* de l'histoire anglaise, avait réalisé, 6 ans après sa nomination à ce poste créé en 1675 [70], une campagne de mesure exhaustive de la réfraction, en atteignant la précision inédite de 1'' ; il disposait donc de bonnes tables observationnelles de χ_S . Il appelait de ses vœux une bonne théorie pour l'expliquer, sans pouvoir la formuler lui-même car il était expérimentateur ; en 1694, il écrivit à Newton pour le solliciter à cette fin.

Pour simplifier la présentation du travail de Newton, nous commettons l'anachronisme d'utiliser l'indice de réfraction n — car à l'époque on parlait plutôt du « rapport des sinus », et en 1772 Lagrange l'appelait « raison de réfraction » [71]. Newton sera le premier à traiter analytiquement le cas d'une atmosphère continue, avec une masse volumique μ proportionnelle à son « pouvoir réfringent » $n^2 - 1$ [72] (ou sa « puissance réfractive » [73–75]), et une constante de proportionnalité uniforme car il suppose la composition de l'air uniforme (cas de l'atmosphère ou de l'air dit « bien mélangé »). Il n'a pas publié son étude théorique de la réfraction astronomique, réalisée de novembre 1694 à mars 1695, mais on peut s'en faire une idée d'après ses lettres [76] (voir notamment la Lettre 474, du 11 octobre 1694) à Flamsteed — sa correspondance avec Newton ayant été publiée intégralement (contre l'avis des disciples du Maître !) en 1835 par Francis Baily, président de la *Royal Astronomical Society* [26].

La proportionnalité entre $n^2 - 1$ et μ était conjecturée empiriquement par Newton dès 1694, mais il ne la publia qu'en 1704 dans son *Opticks* ; nous verrons qu'elle n'a été remise en cause qu'à partir du milieu du XIX^e siècle. Entretemps, cette conjecture a été publiée par le Révérend John Lowthorp (qui écrivait, dès 1699 : « it would be more than probable that the Refractive Powers of the Atmosphere are every where, at all heights above the Earth, proportional to it's Densities and Expansions. And here it would be no difficult matter to trace the Light through it » [77] — noter le caractère téméraire de la dernière phrase !

Newton cherche donc à traiter la réfraction par un modèle plus fin que celui de Ptolémée–Kepler–Cassini, en considérant des rayons courbes, mais toujours dans un milieu à symétrie sphérique de centre C : pour une longueur d'onde dans le vide λ_0 fixée, l'indice de réfraction $n(r)$ de l'air en un point M ne varie qu'avec la distance $r := CM$. Son travail a été reconstitué par Christian Kramp [78], puis Jean-Baptiste Biot [72, 79], et plus récemment par Derek Whiteside [80] et par Waldemar Lehn [81]. Dans le cadre de sa théorie corpusculaire (appelée autrefois « système de l'émission »), où la vitesse des « molécules de lumière » est proportionnelle à n , Newton étudie le mouvement à force centrale de ces molécules. En lui appliquant la loi des aires il trouve l'invariant dit de Bouguer

$$I_B := nr \sin \alpha = n_S r_S \sin Z', \quad (7)$$

et en déduit approximativement la réfraction χ_S , sous forme de l'intégrale [81]

$$\chi_S \cong \int_1^{n_S} dn / \sqrt{\left(\frac{nr}{n_S r_S \sin Z'}\right)^2 - 1}. \quad (8)$$

Newton considère d'abord un modèle d'atmosphère de composition uniforme et de hauteur totale H_A , où la masse volumique μ de l'air varie avec l'altitude $z := r - r_S$ (d'origine en S) de façon affine, i.e. où

$$\mu(z) = \left(1 - \frac{z}{H_A}\right) \mu_S \quad (9)$$

(on met systématiquement l'indice S pour désigner la valeur prise par une grandeur en S). On sait *a posteriori* qu'il s'agit, dans l'approximation où g est uniforme, d'un modèle polytropique d'indice $j = 1$, i.e. où la pression P varie avec z proportionnellement à $\mu^{1+(1/j)}$. D'autres modèles polytropiques seront très étudiés au XIX^e siècle, mais avec $j > 1/(\gamma - 1) \cong 5/2$ (où $\gamma \cong 7/5$ est le coefficient adiabatique de l'air), car on sait que l'atmosphère est instable (vis-à-vis de la

convection) sinon ; et on voit que l'atmosphère homogène du modèle de Cassini serait instable aussi (comme la première atmosphère de Newton ci-dessus), puisqu'à la limite c'est un modèle polytropique d'indice 0 — à l'opposé de l'atmosphère isotherme, qui est à la limite un modèle polytropique d'indice infini. En fait, dans la troposphère standard $j \cong 4,26$. On peut penser [81] que Newton n'a vraisemblablement pas calculé numériquement l'intégrale (8), mais qu'il a utilisé une expression littérale approchée, obtenue en commençant par développer nr à l'ordre 1 en $(z/r_S, \eta, \eta_S)$, ce qui donne

$$\chi_S \cong \int_0^{\eta_S} d\eta / \sqrt{\left(\frac{1+Y}{\sin Z'}\right)^2 - 1} \quad \text{où } Y := \frac{z}{r_S} + \eta - \eta_S ; \quad (10)$$

puis en appliquant cela avec le profil affine de μ , et donc aussi de η car $n^2 - 1$ se confond avec 2η à l'ordre 1 en η , il vient

$$\begin{aligned} \chi_S &= -\frac{\eta_S}{H_A} \int_{H_A}^0 dz / \sqrt{\left\{ \frac{1}{\sin Z'} \left[1 + \left(\frac{1}{r_S} - \frac{\eta_S}{H_A} \right) z \right] \right\}^2 - 1} \\ &= \frac{\eta_S}{H_A} (\sin Z') \left(\frac{1}{r_S} - \frac{\eta_S}{H_A} \right)^{-1} \left[\operatorname{argch} \left\{ \frac{1}{\sin Z'} \left[1 + \left(\frac{1}{r_S} - \frac{\eta_S}{H_A} \right) z \right] \right\} \right]_{H_A}^{0} \end{aligned} \quad (11)$$

— où nous avons mis = au lieu de \cong car nous n'avons pas introduit de nouvelle approximation depuis l'expression (10). Mais si, compte tenu de la petitesse de Y , on approxime $(1+Y)^2$ par $1+2Y$ (ainsi que Newton l'a très probablement fait [81]), l'intégration est encore plus simple :

$$\begin{aligned} \chi_S &\cong -\frac{\eta_S}{H_A} (\sin Z') \int_{H_A}^0 dz / \sqrt{\left[1 + 2 \left(\frac{1}{r_S} - \frac{\eta_S}{H_A} \right) z \right] - \sin^2 Z'} \\ &= \eta_S \frac{\sin(2Z')}{2} \left(\frac{H_A}{r_S} - \eta_S \right)^{-1} \left[\sqrt{1 + \frac{2}{\cos^2 Z'} \left(\frac{H_A}{r_S} - \eta_S \right) z} - 1 \right] \\ &= \eta_S (\sin Z') \left(\frac{H_A}{r_S} - \eta_S \right)^{-1} \left[\sqrt{\cos^2 Z' + 2 \left(\frac{H_A}{r_S} - \eta_S \right) z} - \cos Z' \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Les expressions finales de (11) et (12) ne divergent pas en $Z' = 90^\circ$, contrairement à l'approximation qu'on en verra au paragraphe 4. La valeur de r_S étant connue précisément depuis 1670, il restait à déterminer les valeurs des deux paramètres η_S et H_A du modèle affine. Newton se sert alors de deux valeurs mesurées de la réfraction ; pour obtenir sa table printemps-automne, il a l'intention d'utiliser des données observationnelles de Flamsteed qu'il modifie un peu [81] : $\chi_S \cong 33'20''$ (au lieu de $33'30''$) pour $Z' = 90^\circ$, et $\chi_S \cong 13'40''$ (au lieu de $14'00''$) pour $Z' = 87^\circ$ — et finalement il en a visiblement pris d'autres qui nous sont inconnues, mais il a dû trouver η_S entre $2,51 \times 10^{-4}$ et $2,57 \times 10^{-4}$, H_A entre 10,1 km et 11,6 km [81]. Pour des distances zénithales supérieures à 60° , Newton donne aussi une table pour l'été et une pour l'hiver, déduites de sa table printemps-automne par multiplication par 16/17 et 18/17 respectivement [81] ; un siècle plus tard, on savait théoriquement [82–84], et expérimentalement grâce aux mesures de James Bradley (1693–1762, *Astronomer Royal* de 1742 à 1762) vers 1750 reprises par Nevil Maskelyne [85] (1732–1811, *Astronomer Royal* de 1765 à 1811), et Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) [86], puis Friedrich Wilhelm Argelander (1799–1875) en 1820–1821 [87] et le Révérend Robert Main (1808–1878) vers 1850 [88], que ce n'est pas du tout correct théoriquement, surtout pour les astres en-dessous de $2\text{--}3^\circ$ de hauteur, même si les profils de réfractivité pour les différentes saisons étaient proportionnels entre eux [3, paragraphes 8 et 9.2]. Il envoie le tout à Flamsteed le 17/11/1694, avec qui il commençait une querelle qui durera jusqu'au décès de ce dernier [89, p. 57–60] ; mais il ne veut pas publier, car il trouve ses propres tables imprécises (lettre du 4/12/1694) et son modèle irréaliste (lettre du 15/01/1695) [26] ; en plus, il a donné $\chi_S \cong 33'20''$ pour $Z' = 90^\circ$, mais

nous avons déjà dit qu'il a probablement utilisé une valeur de référence différente pour faire ses calculs, qui ne devaient pas redonner $\chi_S \cong 33'20''$ pour $Z' = 90^\circ$ [81].

Alors il reprend ces calculs pour un profil de μ allusivement indiqué (et déjà donné dans ses *Principia* [90, Prop. 22]) qu'il justifie en s'appuyant sur la proportionnalité de μ à P dans le cas isotherme — loi de Boyle (1662) et Mariotte (1676). Robert Hooke (1635–1703) avait trouvé le même profil de façon plus simple [91, p. 227], mais jamais Newton n'utilise ni ne cite sa démonstration : c'est habituel avec Newton, qui « ne fait d'ailleurs jamais aucune référence à aucun autre que lui, sauf si c'est absolument inévitable » [89, p. 50] ; en plus, Newton s'était aussi querellé avec Hooke de 1671 à la mort de celui-ci, et juste avant la parution de ses *Principia* il en avait effacé toute mention dans son manuscrit, car l'idée d'une force gravitationnelle en $1/r^2$ lui venait de Hooke [89, p. 48–52]. Le modèle isotherme était privilégié à cette époque, où la loi de Charles concernant la dilatation des gaz (donc la variation de μ avec T à P constant) n'était pas connue, ni la valeur du gradient thermique atmosphérique vertical (il faudra attendre l'ascension de Joseph Louis Gay-Lussac en ballon, le 16 septembre 1804, jusqu'à 7 016 m d'altitude, pour savoir qu'il est proche de $-6^\circ\text{C} / \text{km}$). En 1695, Newton déduit de son nouveau profil de μ une nouvelle table qu'il donne à Flamsteed. Cependant, Newton n'est toujours pas vraiment satisfait par sa nouvelle table, car il n'arrive pas à retrouver simultanément deux valeurs de référence tirées des observations de Flamsteed [53, sous-paragraphe 5.1] ; de plus, il sait que le profil thermique de l'atmosphère a son importance, mais il ne pouvait pas le mettre en équations et personne n'en avait la moindre idée à son époque. C'est vraisemblablement pour ces raisons que Newton ne consacre que très peu de pages à la réfraction astronomique dans son *Opticks* (1704), où il traite seulement le modèle de la Terre plate avec une atmosphère stratifiée :

« The Refraction [$n_S = 3201/3200$] of the Air [...] is determin'd by that of the Atmosphere observed by Astronomers. For, if Light pass through many refracting Substances or Mediums gradually denser and denser, and terminated with parallel Surfaces, the Sum of all the Refractions will be equal to the single Refraction which it would have suffer'd in passing immediately out of the first Medium into the last. And this holds true, though the Number of the refracting Substances be increased to Infinity [...] » [92, Prop. X de la part. III du second livre].

C'est le dévoué Halley, que Flamsteed exérait, qui s'empresse de publier en 1721, dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society* [93], cette fameuse table que Newton lui a communiquée sur le tard.

Comme Newton a gardé secrètes les valeurs numériques des paramètres du profil de réfractivité qu'il utilise pour bâtir sa nouvelle table, Kramp a cherché à le reconstituer [78], et Biot a fait de même à son tour — d'ailleurs à cette occasion il a republié cette table pour la rendre plus accessible [72]. Ils ont trouvé qu'apparemment Newton a assez vite négligé la variation de la norme g du champ de pesanteur (qu'il mettait initialement en $1/r^2$), et a utilisé l'expression classique

$$\eta(z) = \eta_S \exp(-z/H_1) \quad (13)$$

dont ils ont déterminé les paramètres : η_S , et H_1 qui se confond avec la hauteur réduite au sens de Cassini (devenu classique). Reprenant ce travail avec le logiciel MATLAB, en 2008 Lehn a proposé [81] un meilleur ajustement des valeurs de la nouvelle table de Newton, obtenu en jouant sur plus de degrés de liberté. Leurs résultats sont regroupés dans la Table 1.

La loi de Charles n'ayant été découverte qu'en 1787, Newton ne pouvait pas relier quantitativement H_1 à la température absolue T_S en S , contrairement à Kramp qui trouve que la valeur numérique de H_1 qu'il a reconstituée correspond à une température de 18 et 2/3 degrés Réaumur ($23,3^\circ\text{C}$), ce qui est bien trop élevé pour une température moyenne en Angleterre et lui pose question : « il faudra se demander d'abord, pourquoi *Newton* a-t-il supposé dans le calcul de sa table,

TABLE 1. Paramètres du profil exponentiel de réfractivité utilisé par Newton pour sa nouvelle table

| | Ajustement selon Kramp [78] | Ajustement selon Biot [79] | Ajustement selon Lehn [81] |
|----------|-------------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| η_S | $2,618 \times 10^{-4}$ | $2,625\ 068 \times 10^{-4}$ | $2,677 \times 10^{-4}$ |
| H_1 | 4 377 toises \cong 8,531 km | 8,597 78 km | 8,725 km |

la température de 18 degrés, préférablement à toute autre ? » [78, p. 20] En fait, notre connaissance actuelle des constantes physiques nous fait dire que les valeurs de H_1 reconstituées par Kramp et Lehn correspondent à 18 °C et 25 °C respectivement : le problème soulevé par Kramp persiste, malgré l'écart avec la température déduite par Kramp (désaccord largement imputable à l'état des connaissances sur les constantes physiques à la fin du XVIII^e siècle, en particulier celle du zéro absolu des températures — comme en témoignent les 9 valeurs du coefficient de dilatation de l'air citées par Kramp, qui vont de 1/266 °R à 1/165 °R).

Quant à $\eta_S = n_S - 1$, il est apparu clairement que Newton n'a pas utilisé la valeur $n_S = 3201/3200 = 1 + 3,125 \times 10^{-4}$ qu'il a publiée ultérieurement dans son *Opticks*, mais une valeur sous-estimée pour s'ajuster aux deux mesures de χ_S pour des hauteurs angulaires apparentes ψ' proches de 0° qu'il a prises comme valeurs de référence.

La procédure de Newton donne automatiquement un assez bon ajustement entre ses valeurs de χ_S calculées et celles mesurées au voisinage de l'horizon, où deux conditions ont pu être satisfaites en adaptant les valeurs des deux paramètres η_S et H_1 . Il faudrait plus de paramètres ajustables et indépendants pour ajuster les valeurs de χ_S calculées et celles mesurées plus loin de l'horizon, mais dans ce domaine χ_S est plus petit et Newton espérait sans doute que les défauts de son modèle soient moins visibles. La comparaison des valeurs de χ_S entre la table d'Ivory (établie explicitement pour 10 °C, soit 283,15 K) et celle de Newton montre que, pour Z' compris entre 30° et 60°, les valeurs de celle-là sont en moyenne 9 % plus grandes ; non seulement cet excès relatif n'a aucune raison d'être égal à l'excès relatif de température absolue pour 25 °C par rapport à 10 °C, mais en plus il lui est nettement supérieur...

Dans [3, paragraphe 8] nous reviendrons sur le parti qu'on peut tirer du paramètre H_1 .

2.3. Brook Taylor (1685–1731)

Mathématicien, il met en place, dans son traité de mathématiques de 1715 en latin [94], des outils fondamentaux : les séries de Taylor, et le théorème d'intégration par parties. Il consacre à la réfraction les onze dernières pages de son livre, mais quelles pages ! Thomas Young (1773–1829) les citera en ces termes : « Taylor, who first applied to the problem of atmospherical refraction his very useful theorem for "integration by parts," as the process is sometimes now called » [95]. Précisons qu'en fait Young, ainsi qu'Ivory avec qui il aura une controverse (comme nous le verrons au sous-paragraphe 6.3), parlent effectivement de réfraction astronomique quand bien même ils disent « atmospherical refraction ».

Taylor démontre le profil exponentiel de μ dans le modèle de l'atmosphère isotherme, dont il a longtemps été considéré comme l'inventeur, puisque Newton n'a jamais laissé publier ses études de 1694–1695 sur la réfraction — sauf sa seconde table, imprimée six ans après la sortie du traité de Taylor. Ce dernier déduit que l'atmosphère serait étendue à l'infini, ce qui le soucie : selon l'historien des mathématiques Clifford A. Truesdell (1919–2000), « if the atmosphere of the earth extends far enough that heavenly bodies encounter it, the success of the system of the world calculated by the theory of motions in vacuo becomes puzzling. » [63] Car à l'époque, ni plus tard du temps d'Euler, on n'avait pas encore pleinement réalisé que l'exponentielle décroît plus vite que toute fonction puissance ; nous comprenons alors la gêne des chercheurs du moment face

au modèle isotherme, et la raison de la conclusion réservée de Taylor, disant que l'atmosphère est contenue dans des limites finies [94, p. 105].

Il trouve aussi (p. 108 ss) l'expression différentielle de la réfraction (voir l'article [56] dans ce numéro spécial), et il dit tout de suite que pour l'intégrer il faudra recourir aux séries qu'il vient de formuler. Nous verrons aux paragraphes 4 et 6.3 combien cette injonction sera suivie, par d'autres que lui.

Alors il ne calcule pas χ_S : à son époque, dans le modèle de l'atmosphère isotherme, on ne savait le faire que numériquement. Mais à la dernière page de son traité il obtient une valeur numérique très intéressante : $\kappa_S \cong 1/5$ « ad superficiem Terræ », que nous allons expliquer tout de suite.

3. Les géodésiens expérimentateurs

En géodésie, afin de tenir compte des effets de la réfraction terrestre, on se sert du coefficient de réfraction de l'atmosphère en S : c'est le quotient κ_S de la courbure des rayons horizontaux en S par la courbure méridienne de la Terre — en moyenne 0,14 pour les géodésiens, car leurs mesures se font souvent par de belles après-midi chaudes et ensoleillées en des lieux relativement élevés [3, sous-paragraphe 7.1.4]. Mais quand on veut déterminer avec précision la latitude par la méthode astronomique, on doit prendre aussi en compte la réfraction astronomique. Comme la connaissance concrète de ce phénomène était encore peu précise et lacunaire, des progrès étaient nécessaires pour remplir correctement les objectifs visés.

Or au XVIII^e siècle la géodésie était mise à l'honneur, pour trancher les controverses de l'époque sur la forme de la Terre : est-elle aplatie comme une mandarine selon les partisans de la physique de Newton ainsi que Huygens, ou allongée selon l'axe des pôles comme un citron — ainsi que l'écrivaient les tenants de la physique de Descartes, mais aussi Jacques Cassini à partir de 1713 puis son fils César-François Cassini de Thury sur la période 1735–1740 [96] ? La mesure de la méridienne de l'Observatoire de Paris, initiée par Picard en 1669–1670, avait été prolongée sur ordre de Louis XIV en 1683, vers le nord de Paris par La Hire et vers le sud par Jean-Dominique Cassini, mais arrêtée à la mort de Colbert en septembre de cette même année, puis reprise par Jean-Dominique et Jacques Cassini en 1700–1701 où ils atteignirent le Roussillon ; ces mesures leur ont fait croire que la longueur d'un degré de méridien croissait du nord au sud. Or elle est proportionnelle au rayon de courbure du méridien terrestre, et non pas à la distance au centre de la Terre comme l'a pensé implicitement J.-D. Cassini ; alors, à cause de ces deux erreurs, celui-ci annonça en 1701 que la Terre est aplatie aux pôles [96] — ce qui s'avèrera exact. En 1713 à l'Académie des sciences, Jacques corrigea sans mot dire l'erreur de raisonnement de son père, puis Fontenelle le fit explicitement la même année (en tant que Secrétaire perpétuel) : d'après ces mesures, la Terre devrait être étirée aux pôles, donc J. Cassini changea l'opinion familiale sur plus de vingt ans, confirmant son revirement en 1718, 1720 et 1723 [55,96], et nourrissant ainsi la controverse dans le monde scientifique et au sein de l'Académie quant à la « figure de la Terre ».

Deux expéditions furent donc montées [97, 98] pour préciser la forme de la Terre, en déterminant la longueur d'un degré de méridien proche de l'équateur (Godin-La Condamine en Amérique du sud de 1735 à 1745) et aussi en haute latitude — Maupertuis en Laponie de 1736 à 1737. Dès le retour rapide de celui-ci, et à sa grande fierté, l'idée de l'aplatissement de la Terre lui semblait acquise, et l'Académie des sciences convaincue. Ces campagnes géodésiques dans des conditions inhabituelles de froid ou d'altitude donneront l'occasion de voir ce que devient la réfraction dans ces conditions, où elle réservera quelques surprises obligeant à corriger les idées théoriques de l'époque. C'est à la seconde expédition que font référence les vers célèbres de Voltaire :

Courriers de la physique, argonautes nouveaux,
 Qui franchissez les monts, qui traversez les eaux,
 Ramenez des climats soumis aux trois couronnes
 Vos perches, vos secteurs et surtout deux Laponnes,
 Vous avez confirmé dans ces lieux pleins d'ennui
 Ce que Newton connut sans sortir de chez lui.

(Discours en vers sur l'homme — IV. De la modération en tout)

En attendant confirmation de l'aplatissement terrestre par l'expédition plus lointaine de La Condamine, la conclusion de Maupertuis fut à l'origine d'opérations de vérification concernant le territoire français. Ainsi en 1739 Le Monnier (qui faisait partie de l'expédition de Maupertuis) reprit *seulement* les repérages astraux de Picard, en tenant compte *incomplètement* de la réfraction que celui-ci négligeait (et de la nutation et de l'aberration qu'il ignorait), ce qui fit passer le « degré de Picard » (1670) de 57 060 à 57 183 toises (bon exemple de l'importance des effets de réfraction sur ces mesures !) ; mais le « degré de Laponie » (1737) lui restait nettement supérieur, étant estimé à 57 438 toises [96]. Puis Cassini de Thury, consacrant les années 1739–1740 à une vaste opération de la méridienne de l'Observatoire de Paris sur toute la France, modifia encore le degré de Picard (57 074 toises) et reconnu dès 1740 qu'en fait les degrés de méridien décroissent du nord au sud de la France [99].

Pierre Bouguer (1698–1758) a participé, en tant qu'astronome, à l'expédition de La Condamine [97, 98, 100, 101]. Il avait obtenu bien auparavant trois prix successifs de l'Académie des sciences, dont celui de 1729, suite au concours qu'elle avait lancé sur la détermination en mer de la hauteur vraie des astres. Dans le livre publiant son travail [27] (et que nous présentons dans ce numéro spécial [56]), Bouguer montre très clairement la nécessité, pour la navigation astronomique, de tenir compte de corrections dues à χ_S d'une part et κ_S d'autre part (même s'il n'introduit pas ce coefficient). De même que Newton, mais indépendamment de lui et sans l'approximation qu'il a faite, Bouguer écrit rigoureusement χ_S comme une intégrale qui fait intervenir l'invariant I_B qu'il a trouvé aussi de son côté. Pour un rayon lumineux (R) plan et arrivant en S (depuis le point extra-atmosphérique A concerné à l'infini — voir la Figure 1), Bouguer trouve la dernière des trois formes ci-dessous :

$$\chi_S = \int_1^{n_S} \frac{\tan \alpha}{n} dn = n_S r_S (\sin Z') \int_1^{n_S} \frac{n^{-1}}{\sqrt{n^2 r^2 - (n_S r_S \sin Z')^2}} dn = \int_{n_S^{-1}}^1 \frac{I_B}{\sqrt{r^2 - (n^{-1})^2 I_B^2}} dn^{-1} \quad (14)$$

où α est l'angle entre le rayon lumineux et **grad** n — pour une démonstration moderne de (14), voir [3, paragraphes 2 et 5] (mais rappelons déjà que cette intégrale suppose que $\tan \alpha$ soit une fonction non équivoque de n , donc que sur le rayon lumineux (R) considéré, r ne passe pas par un extrémum). La deuxième forme de (14) deviendra un point de passage traditionnel de beaucoup d'auteurs dont Laplace [102, p. 469], Ivory [84, p. 420], Radau [44, p. B.2], etc., et on voit que l'intégrale (8) traitée par Newton en diffère par le facteur n^{-1} qu'il a omis au numérateur.

Puis Bouguer, en proposant — comme Giacomo Filippo Maraldi (1665–1729) puis Jean-Dominique et Jacques Cassini avant lui — l'idée de l'existence d'une « matière réfractive » mêlée de façon inhomogène à l'air de l'atmosphère, se permet de considérer que dans l'atmosphère n est proportionnel à r^{-q} (et au passage il déduit de son invariant I_B l'existence de rayons en spirale logarithmique quand $q = 1$). Grâce à son exploitation des propriétés géométriques des rayons dans un tel modèle d'atmosphère (de hauteur totale H au-dessus de l'observateur), il construit une nouvelle table de $\chi_S(\psi')$, en ajustant (comme Newton) les deux seuls paramètres indépendants ajustables de son modèle, q et $h_r := H/r_S$, à deux valeurs de référence : $\chi_S(0^\circ) \cong 33'$ d'après les observations, et $\chi_S(26^\circ) \cong 2'12''$ d'après les tables de La Hire. Malheureusement la table de Bouguer (qui correspond à $q \cong 0,1281 \cong 1/7,805$) donne des valeurs en moyenne 10 %

trop élevées, sauf aux faibles hauteurs ; corrélativement, la valeur de référence tirée de la table de La Hire ($2'12''$) est 11 % plus forte que la valeur correspondante donnée par la table d'Ivory ($\chi_S(26^\circ) \cong 1'59,22''$) [84].

Dans un rapport à l'Académie des sciences [103] pendant l'expédition, il est dit que Bouguer « a découvert un autre fait formellement contraire à ce qui paroissoit bien établi », et qui trouble aussi son lointain collègue Le Gentil : sur les pentes du volcan Pichincha proche de Quito, à 527 toises au-dessus de cette capitale (qui est déjà à 1 466 toises = 2 857 m d'altitude), « On y respiroit à peine à cause de la grande subtilité de l'Air à cette hauteur, & le froid y étoit extrême », mais χ_S était plus faible qu'à plus basse altitude, contrairement à ce que donne le calcul de Jean-Dominique Cassini qui supposait uniforme la réfractivité de l'air, et prévoyait une décroissance de χ_S en fonction de l'altitude H_1 du sommet de l'atmosphère par rapport à S — voir les expressions (4)–(6) — or H_1 baisse lorsque l'observateur s'élève, et la variation de χ_{Sh} en fonction de H_1 devient critique — voir (3) — quand ce paramètre est au voisinage de $\eta_S r_S$, i.e. proche de 1,8 km (aussi en accord avec la valeur numérique de l'autre paramètre de J.-D. Cassini). Apparemment Bouguer n'a pas remarqué que d'après ces données du modèle de Jean-Dominique Cassini (et contrairement à ce que lui auraient prédit les données numériques du modèle de Jacques Cassini), avec l'horizon dégagé dont il devait jouir à 527 toises au-dessus de Quito, à cette altitude inférieure de quelques centaines de mètres seulement à celle du sommet de l'atmosphère selon Jean-Dominique, il aurait dû observer systématiquement dans le ciel une bande occultant par réflexion totale les astres sur un petit degré de part et d'autre de l'horizon astronomique — ce que l'on appelle maintenant la « bande vide de Wegener » (voir le document [104] associé à l'article [3], et [8, paragraphe 3], dans ce numéro spécial). Trop imprégné des idées de Jean-Dominique et pas assez de celles de Jacques, Bouguer ne voit pas le lien causal entre les baisses de pression P_S en S , de η_S et de χ_S — alors que Halley l'avait deviné dès 1720.

Dans un article suivant [105] publié aussi en 1741 mais reprenant sa lettre de Quito du 24 juillet 1737, Bouguer réfléchit à la contradiction avec le modèle de Cassini, et alors il prévoit l'effet modérateur, sur la baisse de χ_S avec l'altitude, de la baisse de température : en altitude « le froid, [...] en condensant l'air, peut faire une espece de compensation, & rendre l'inégalité moins considérable. » Pour étudier cette décroissance de χ_S en fonction de l'altitude il concentre ses mesures de χ_S vers une hauteur de 15° au-dessus de l'horizon, car « Au-dessous, les Réfractions sont trop variables, & au-dessus trop petites, pour pouvoir être saisies avec précision. » Mais il n'identifie pas explicitement la cause de cette décroissance : la baisse de réfractivité η_S au niveau de l'observateur. Par ailleurs, il estime que n décroît, dans l'atmosphère supposée limitée, en $1/r^q$ avec $1/q \cong 7$ — cohérent avec la valeur de κ_S généralement adoptée par les marins et les géodésiens.

Dans un mémoire publié en 1753 [106], soit neuf ans après son retour d'expédition, Bouguer s'interroge sur « la matière qui cause la réfraction & qui est répandue dans l'air [...] Il se pourroit fort bien qu'il n'y eût point de matière réfractive, & que les réfractions répondissent, non pas aux dilatations de l'air grossier, mais à une certaine fonction de ces dilatations » : c'est exact, et il l'avait déjà dit en 1729 [56, paragraphe 2]. Il rappelle aussi l'invariant qu'il avait déjà trouvé [27] pour un rayon dans un milieu continu à symétrie sphérique ; il redit que si n variait en $1/r^q$ avec $q = 1$ le rayon serait une spirale logarithmique, et qu'il serait possible qu'un tel rayon suive une courbe qui « s'étendrait circulairement tout autour de la Terre, & elle ne seroit bornée que par l'Observateur même, qui se verroit de dos. » Il comprend que q supérieur à 1 produirait la suppression d'une bande de l'image usuelle du ciel au-dessus de l'horizon astronomique car l'observateur serait dans un chenal optique (notion définie dans le document [104]) ; cette bande est un avatar de la bande vide de Wegener, dans un cas particulier qui correspondrait à la vision d'une mer concave par effet *hillingar* (ou « mirage arctique ») [107, 108] — ce qui a déjà été

observé concrètement [8, paragraphe 3], y compris sur le Lac Léman [109, p. 541]. Il revient, par plusieurs méthodes expérimentales, sur l'estimation de q donnée dans l'article précédent, et trouve $1/q = 1/\kappa_S$ compris entre $7 + (5/8)$ et $9 + (1/8)$, donc supérieur à 7 ; ceci peut s'expliquer par l'altitude des Andes, car à $(dT/dr)_S$ fixé, $1/\kappa_S$ est [3, sous-paragraphe 7.1.4] proportionnel à T_S^2/P_S . La dispersion de ses résultats ne doit pas nous surprendre : d'une part il y a les erreurs de mesure, mais d'autre part q est un paramètre associé à un modèle d'atmosphère très éloigné de la réalité, donc la valeur de q peut très bien différer selon la propriété du modèle qui est confrontée à la réalité. Bouguer montre que, avec son atmosphère de hauteur totale relative h_τ , la réfraction horizontale χ_{Sh} varie avec q environ comme \sqrt{q} , l'indice n_S au niveau de l'observateur étant fixé ; cela s'explique grâce à l'expression (24) de [56], qui s'écrit

$$\chi_{Sh} \cong \sqrt{\eta_S \frac{2q}{1-q}} = \sqrt{\eta_S \frac{2\kappa_S}{1-\kappa_S}} \cong \eta_S \sqrt{\frac{2}{h_\tau - \eta_S}} \quad (15)$$

et montre effectivement que, à η_S fixé, χ_{Sh} est quasiment proportionnel à \sqrt{q} puisque $q \ll 1$. Quand on verra l'expression approchée suivante (16) de χ_{Sh} donnée par un autre modèle, on notera sa ressemblance avec (15) ; quant aux différences, nous les commenterons au paragraphe 4. Bouguer s'inquiète, par ailleurs, de l'effet sur χ_S de l'aplatissement terrestre : « La courbure de la circonférence de la Terre se trouvant plus grande dans le sens du méridien que dans celui du premier vertical, » i.e. vers l'est (ou l'ouest), χ_S doit être plus grand pour celui-ci — mais cet effet est ordinairement négligeable. De plus, un effet notable attire l'attention de Bouguer : à des hauteurs inférieures à 8° , la variation journalière de la réfraction. Il constate pour les valeurs de χ_S (à une hauteur inférieure à 7°) un accroissement relatif la nuit entre $1/6$ et $1/7$:

« Sans doute qu'elles ne sont jamais portées plus loin que quelque temps avant le lever du Soleil : c'est alors que le froid est le plus grand ; l'atmosphère plus condensée doit avoir perdu le plus de sa hauteur, au moins par sa partie inférieure, & il n'est guère vrai-semble que la matière réfractive ne participe aussi un peu à cette altération. »

Cette explication reste dans le cadre du modèle de Cassini, alors qu'à ce sujet elle est quantitativement très insuffisante ; il est dommage que Bouguer n'ait pas effectué de mesure de température (absolue) au sol : sa baisse nocturne relative est inférieure à $1/6$! Et il invoque (à tort, comme beaucoup) l'effet de la vapeur d'eau...

Mais un article non signé (probablement écrit par le Secrétaire perpétuel), publié la même année, contient une phrase ambiguë plus proche de l'interprétation correcte : « Les variations diurnes des réfractions ne sont probablement dûes qu'à la dilatation des couches les plus basses de l'atmosphère » [28]. Peu avant, il estime aussi (p. 154) la hauteur totale de l'atmosphère réfractive à 5 158 toises — une valeur inférieure à celle donnée par Jacques Cassini. Cependant ce texte anonyme s'achève sur un constat plein d'humilité, qui ne nous rend que plus attachant son auteur : « Combien de choses inconnues sur une matière aussi importante, & qui avoit été déjà traitée tant de fois ! »

Les premières études des variations diurnes, qualitatives, remonteraient à Jean Picard (1669) puis Pierre Perrault (1674) [22]. Christian Huygens (1629–1695) indiquait en 1690 un moyen simple de les constater, le plus manifestement, en observant au voisinage de l'horizontale :

« il y a une expérience qui rend cette réfraction fort visible ; qui est qu'en fixant une lunette d'approche en quelqu'endroit, en sorte qu'elle regarde un objet éloigné de demi lieuë ou plus, comme un clocher ou une maison, si on y regarde à des heures différentes du jour, la laissant toujours attachée de mesme, l'on verra que ce ne seront pas les mesmes endroits de l'objet qui se presenteront au milieu de l'ouverture de la lunette, mais que d'ordinaire le matin & le soir,

lorsqu'il y a plus de vapeurs près de la Terre, ces objets semblent monter plus haut » [23, p. 42–43].

En 1798 Woltmann indique que κ_S est plus grand le matin que le soir [110]. Bessel était très au courant de ces variations diurnes, et conscient du fait que la cause de celles qui sont vues près de l'horizon réside dans les modifications des couches limites proches de l'observateur [111] ; c'était d'ailleurs l'un des rares astronomes considérant que la réfraction mérite d'être étudiée pour elle-même, et pas comme une simple correction. Les études systématiques les plus récentes sont dues à Hellerich [112], Schaeffer et Liller [113], Sampson *et al.* [114], et enfin Tschudin [115].

En fait, il s'installe souvent la nuit une inversion de température depuis le sol (*surface-based inversion layer*), car celui-ci, en l'absence de rayonnement solaire incident, se refroidit par rayonnement infrarouge, puis par contact il refroidit l'air, dont la faible conductivité thermique permet à celui situé assez haut de rester plus chaud. L'épaisseur est usuellement 100 à 500 m pour la couche d'inversion, au sommet de laquelle l'accroissement de température par rapport au sol est fort, valant 5 à 15 K ; il y a un changement important dans la couche limite. La première mention claire de l'existence de cette inversion semble due à Brandes en 1806 [116], confirmée par les mesures de l'astronome et météorologue James Glaisher (1809–1903) prises lors de son ascension en ballon du 2 octobre 1865 [117]. Elle sera étudiée par Egon von Oppolzer [118].

Quand on observe les astres assez loin de l'horizon, pour tenir compte du changement de réfraction au cours de la nuit il suffit de tenir compte des variations de T_S et P_S : la composante périodique de celles de T_S est due au cycle jour-nuit, mais pour P_S elle est due aux marées atmosphériques dont l'amplitude est beaucoup moins importante en valeur relative — de l'ordre de 10^{-3} atm. Mais pour la réfraction horizontale χ_{Sh} , l'influence de $(dT/dz)_S$ est sensible, et son changement de signe à l'entrée de la nuit, i.e. l'apparition de l'inversion de température nocturne, augmente κ_S , ce qui a des effets plus importants que ceux de la diminution de T_S . L'expression approchée

$$\chi_{Sh} \cong \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\eta_S \kappa_S}{1 - \kappa_S}} \cong \eta_S \sqrt{\frac{\pi}{2(h_1 - \eta_S)}} \quad (16)$$

due à Kramp [3, Eq. (87)], dont nous parlerons au paragraphe 4 (en précisant que $\kappa_S \cong \eta_S/h_1$), permet, malgré ses défauts que nous signalerons, de le comprendre facilement. À P_S constant, si du jour à la nuit T_S passe de 15 °C à 0 °C, cela produit une multiplication de χ_{Sh} par $\sqrt{288,15 \text{ K}/273,15 \text{ K}} \cong 1,027$; et si en plus $(dT/dz)_S$ passe de sa valeur standard $-6,5 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ à $+5 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$, alors κ_S passe de sa valeur standard 1/5,9 à 1/3,8 d'après l'ensemble des données de [3, sous-paragraphe 7.1.4], ce qui fait subir à χ_{Sh} une nouvelle multiplication par 1,14, donc explique qu'il manquait à χ_{Sh} quelques minutes d'angle quand on le calculait à partir de la valeur diurne de κ_S . Avec T_S correspondant à 0 °C et $(dT/dz)_S = 20 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$, on trouve $\chi_{Sh} \cong 59'$; à Edmonton des valeurs supérieures à 1° ont été observées dans 3 % des cas [114]. En exploitant les différences entre les valeurs de χ_S de la table de Kramp et de celle d'Argelander–Bessel (basée sur les mesures de l'observatoire de Königsberg) pour les hauteurs apparentes 0,5° et 1° relevées par Ivory [119], il serait possible de caractériser l'inversion de température nocturne moyenne à Königsberg ; cette étude a été effectivement réalisée par Tschudin en 2019 [115]. L'augmentation de χ_S est moindre dès que l'astre est à 1° au-dessus de l'horizon astronomique, mais elle atteint couramment 5–10' à l'aube ; il reste que, dans ces circonstances, l'accroissement de χ_S est plus dû à la variation de $(dT/dz)_S$ qu'à celle de T_S , ce qui pose un grave problème de réduction des observations : $(dT/dz)_S$ n'est pas indiqué par un thermomètre fixe dans l'observatoire ! C'est l'une des causes d'incertitude des observations d'Arthur Eddington *et al.* pour tester la théorie de la relativité générale lors de l'éclipse de 1919 (déplacement de 1,75'' au bord du Soleil). Pour des raisons similaires, Carl Friedrich Gauss avait déjà compris la difficulté de tester la courbure

de l'espace lors de sa tentative de 1820 avec le grand triangle géodésique Brocken–Inselsberg–Hohen Hagen (somme des angles mesurés : $179^{\circ} 59' 59,32''$).

Pierre Charles Le Monnier (1715–1799) renchérit sur les variations temporelles de la réfraction : il retrouve qu'elles présentent une composante saisonnière liée à l'évolution de la température moyenne (ce que savaient déjà les Cassini ainsi que Halley), et que c'est, comme d'habitude, très sensible dans la réfraction horizontale ; il détaille ses observations devant l'Académie des sciences [120], où il explique les causes de divergences entre tables dues à différents auteurs. Il écrit :

« [...] il sembleroit néanmoins, d'après quelques essais intéressans, publiés dans nos Mémoires en 1749, par M. Bouguer, que ce seroit en vain, ou qu'on auroit tort d'expliquer par des différentes élévations du sol au-dessus du niveau de la Mer, les grandes différences qu'on trouve dans les Tables des réfractions de Picard, Cassini & de Flamstéed [...] ces Tables ne paroissent avoir été construites que conditionnellement & pour un état de température moyenne, puisqu'on trouve [...] des preuves suffisantes qu'ils ne doutoient nullement qu'on n'eût besoin de Tables différentes pour les diverses saisons du froid & du chaud. [...] Les] réfractions qui conviennent à l'horizon [...] ne sont pas les mêmes l'hiver que l'été, j'en ai déjà publié les différences dans l'*Histoire céleste* & ailleurs, d'après mes propres observations [...] ».

Il cite beaucoup de valeurs, y compris celles dues à Picard, montrant des réfractions horizontales hivernales supérieures de $12'$ ou $13'$ aux valeurs estivales, « d'où il est aisé de reconnoître que les différentes densités de l'air, [...] n'influe[nt] considérablement qu'aux approches de l'horizon [...] » (p. 91) Il cite encore les observations de Picard, « qui ont échappé à Flamstéed » et qui montrent, pour le 20 janvier 1675, une réfraction horizontale de $46' 14'' \frac{1}{2}$ et $50' 33''$ pour les limbes solaires, et le diamètre apparent vertical du Soleil réduit à $19' 52''$ [120]. En 1956, Sugawa poursuivra les investigations sur ces variations saisonnières [121], tout en se penchant sur l'effet d'inclinaison des isopycnes de l'air (i.e. de ses surfaces d'égale masse volumique) : 1 à $2'$ en moyenne, $10'$ maximum. L'erreur produite sur les mesures de latitude ne dépasse pas $0,2''$.

Les variations de réfraction ont été étudiées de manière systématique, sur toutes les heures du jour et toutes les saisons, pas Carl Max von Bauernfeind (1818–1894) — [122, Steindrucktafel II], [123, 124] — et par Alexander Thom [125].

L'abbé Nicolas-Louis de La Caille (1713–1762) — soit Lacaille pour la suite, car il signait ainsi — trouvait les tables de Cassini excellentes, de 15 – 23° de hauteur jusqu'au zénith, et meilleures que celle de Newton calibrée seulement par des mesures proches de l'horizon. Lacaille avait construit en 1757 sa table (pour 10°C et une pression de 28 pouces de mercure) en comparant les positions apparentes d'étoiles qu'il avait observées à Paris et pendant sa mission de 3 ans au Cap, donc de façon complètement empirique. Elle a été publiée par *La Connaissance des Mouvemens célestes* de 1760 à 1765 (aux côtés de celle de J.-D. Cassini). Mais l'arc de son sextant était affligé d'une erreur de graduation : il surestimait ses 64° de 10 – $12''$, comme l'ont vu Bradley et Mayer — d'où une controverse orageuse entre celui-ci et Lacaille, dont la table donnait $66,5''$ de réfraction moyenne à 45° de hauteur, alors que celle de Bradley (construite à partir de la formule (19)) donnait $56,9''$. Joseph Jérôme Lalande (1732–1807), en charge de *La Connaissance des Mouvemens célestes*, décida alors — cas unique en la matière — de proposer provisoirement pour 1766 les valeurs des deux tables, dans deux colonnes voisines.

Des conclusions incongrues sont parfois tirées de la comparaison de tables : c'est le cas avec Leonhard Euler (1707–1783), qui en 1754 a comparé [126] la table *calculée* par Jean-Dominique Cassini selon le modèle de Ptolémée (atmosphère homogène) avec la table *observationnelle* de

Flamsteed. Trouvant que les résultats de Cassini s'accordent mieux avec son modèle d'atmosphère à gradient thermique, et ceux de Flamsteed mieux avec un modèle d'atmosphère isotherme, il en déduit qu'il « semble qu'en Angleterre le degré de chaleur de l'atmosphère en montant diminuë moins qu'à Paris. » En effet, on sait que le modèle de Cassini correspond à $\kappa_S = 0$, donc (d'après [3, Eq. (56)]) à $(dT/dz)_S \cong -34 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ indépendamment de (T_S, P_S, λ_0) , alors que dans l'atmosphère standard $(dT/dz)_S = -6,5 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$; il est vrai que $-6,5$ est plus proche de 0 que -34 ...

4. Les Classiques

Après l'avancée théorique que représentent les formes (14) de l'intégrale de réfraction dans un milieu à symétrie sphérique, et par lesquelles repasseront quasiment tous les auteurs concernés du XVIII^e siècle, les efforts vont se concentrer pour tenter de cerner, avec les outils mathématiques usuels et diverses approximations, la fonction de Z' donnée par cette intégrale de réfraction. Disons tout de suite qu'actuellement on dispose de très bons ajustements numériques pour les conditions standard (15 °C et 1 atm en S), comme celui donné par

$$\chi_S \cong 59,861'' \tan \tilde{Z} - 0,023\,739'' \tan^3 \tilde{Z} + 7,4749 \times 10^{-6}'' \tan^5 \tilde{Z} \quad \text{où } \tilde{Z} = 0,9917Z' \quad (17)$$

exact à mieux que 4'' pour $Z' \in [0^\circ, 89^\circ]$; et il y en a un autre, exact à mieux que 1'' mais seulement pour $Z' \in [0^\circ, 88^\circ]$ [127, p. 635]. À ce degré de précision, il faut savoir que si S n'est plus dans les conditions standard, les trois premiers coefficients numériques de (17) doivent être changés, et pas de manière proportionnelle, comme l'auraient déjà signalé à leur façon Brinkley en 1818 [82, p. 171], puis Ivory [83, 84]. Quant à l'usage de la variable \tilde{Z} proportionnelle à Z' , il n'est pas issu de considérations théoriques ; il sera donc absent des productions des auteurs que nous allons présenter dans la suite de cet article.

Dans son recueil d'essais mathématiques de 1743 [128], Thomas Simpson (1710–1761) prouve une formule approximative simple, acceptable pour des astres pas trop proches de l'horizon :

$$\chi_S \cong \eta_S \tan Z' \quad (18)$$

Et dans le même recueil, Simpson expose une méthode améliorée d'estimation numérique d'une intégrale ; elle sera justement utilisée pour calculer des réfractions, notamment par Biot — voir le paragraphe 5. En ce qui concerne la précision de la formule (18), dite de Simpson, Maskelyne écrit : « This rule is exact enough for the purpose of the calculation of the longitude from observations of the distance of the Moon from stars at sea as low down as the altitude of 10° , for there the error is only $10''$ from the truth. » [85] En 1754 Leonhard Euler (1707–1783) était plus exigeant [126] (ce qui est normal pour l'astronomie) : il considérait que cette formule est bonne jusqu'à une distance zénithale de 70° . Pour S dans les conditions normales de température ($T_S \cong 273,15 \text{ K}$) et de pression ($P_S \cong 1013,25 \text{ hPa}$), avec de l'air sec à 400 ppmv de CO_2 (gazeux), et pour $\lambda_0 \cong 588 \text{ nm}$, on a $\mu \cong 1,293 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $\eta_S \cong 2,924 \times 10^{-4}$; cela correspond, en passant des radians aux secondes d'arc, à $60,31''$. On tient compte aussi, mais seulement pour des études d'astrométrie fine, des changements du taux d'humidité et de CO_2 : car à $\lambda_0 \cong 588 \text{ nm}$, 20° C et 1 atm, la variation relative de $n_S - 1$ entre l'air sec et l'air à 100 % d'humidité est seulement $-0,3\%$ (voir [129, paragraphe 3] associé à ce présent article).

Mais la variation quantitative de composition de l'air avec l'altitude (surtout en ce qui concerne sa teneur en vapeur d'eau) ne change rien à la validité de la formule de Simpson (18). Ainsi montre-t-il que, sauf à moins de 10° de l'horizon et pour η_S fixé, les valeurs de χ_S ne dépendent guère du profil de densité ; telle est la « loi de Simpson » — déjà entrevue par Flamsteed, par Newton [92], et redite par Euler en 1754 [126]. Cette loi est rigoureuse dans le cadre d'un modèle de Terre plate avec une atmosphère stratifiée ; dans un modèle à symétrie sphérique c'est une bonne approximation, sauf pour des distances zénithales trop proches de 90° .

Cette propriété plonge ses racines dans un résultat approximatif plus profond : le « théorème » d'Oriani (1787) qui stipule (moyennant des hypothèses précisées dans [3, sous-paragraphe 4.1]) que χ_S ne varie concrètement qu'avec Z' , λ_0 , T_S et P_S ; mais ce résultat n'est en fait qu'approximatif, d'où la présence des guillemets que nous rajoutons à son appellation traditionnelle de « théorème » [3, sous-paragraphe 5.1]. Quoiqu'il en soit, cette loi rend deux grands services : à ceux qui calculaient les premières tables de χ_S d'une part, elle a permis de prendre n'importe quel modèle d'atmosphère à symétrie sphérique où l'indice passe de 1 à n_S entre l'infini et S , mais de trouver quand même des valeurs satisfaisantes jusqu'à 80° de distance zénithale environ ; aux observateurs d'autre part, elle permet de déduire Z à partir de la mesure de Z' (supposé inférieur à 80° et fixé) en ne s'inquiétant que des variations de température et de pression au niveau de S .

Après de l'horizon, Simpson compare les résultats prédits par un profil de réfractivité exponentiel et un profil affine ; pour ce dernier il arrive par approximation à la même loi que son prédécesseur Bouguer transposée en [56, Eq. (12)], dont il ajuste les paramètres correspondant à η_S et H_A aux valeurs de χ_S pour $Z' = 90^\circ$ et 60° . Il trouve que les résultats du modèle affine sont plus proches des observations, alors que c'était le modèle qui satisfaisait le moins Newton — ce que Simpson ne pouvait qu'ignorer puisque les calculs littéraux de Newton sur la réfraction n'étaient pas publiés.

En 1758, Johann Heinrich Lambert (1728–1777) publie un petit livre dans lequel il prétend liquider l'une des rares choses qui seraient restées incomplètement traitées en optique géométrique : la réfraction astronomique ou terrestre [57]. Il met l'intégrale de réfraction sous sa forme la plus compacte de (14) en faisant apparaître la fonction tangente, puis il la transforme sans profiter explicitement de l'invariant de Bouguer [56]. Comme Euler quelques années auparavant [126], et semble-t-il indépendamment, il utilise la série binomiale $(1+x)^m$ pour évaluer l'intégrale de réfraction (14), avec $m = -1/2$; mais en plus, il fait entrevoir la différence de vitesse de convergence de deux séries pour χ_S [58].

Dans la même publication que celle où il commentait la formule de Simpson en 1764, Maske-lyne présente la formule

$$\chi_S \cong B \tan(Z' - w\chi_S) - \text{avec } w \cong 3 - \quad (19)$$

(trouvée par James Bradley, qui ne publiait guère) en ces termes : « the refraction is = $57'' \times$ tangent of the apparent zenith distance lessened by three times the corresponding refraction taken out of any common table. » [85] Lalande fait de même en 1771 : « la réfraction est comme la tangente de la distance apparente au zénith diminuée de trois fois la réfraction. » [130] Bradley tenait de Simpson lui-même l'idée de changer Z' en $Z' - w\chi_S$ dans la formule de Simpson, et la relation (19) donne des valeurs numériques très proches de celles que donne le résultat de l'intégrale (12) ; il s'attache à déterminer avec précision la valeur du paramètre B qu'il estime à $57,036''$ pour une température de $50^\circ\text{F} = 10^\circ\text{C}$ en S et une pression de 29,6 pouces anglais de mercure (environ 752 torr), et en déduit une table de réfraction qui sera largement et durablement utilisée, occultant les travaux de ses successeurs immédiats qui utiliseront, comme Kramp, le profil de réfractivité exponentiel au lieu du profil affine. Au siècle suivant, Mathieu dira que w est paramétré par T_S et P_S (cf. infra) ; et Laugier considérera que pour améliorer la formule de Bradley il faut faire varier w avec Z' [131]... Avant d'en arriver là, il reste que cette formule est très intéressante pour étudier la non-linéarité de χ_S par rapport à η_S , pour une valeur de w donnée (qui dépend de la forme du profil de réfractivité) [3, paragraphe 8]. Et comme l'a vu Simpson mais sans le publier, cette formule (19) se déduit [56, sous-paragraphe 3.5] du modèle de Bouguer [27], qui est numériquement très proche du modèle à profil affine.

Le modèle de réfractivité affine aura donc une belle postérité jusqu'à la fin du XVIII^e siècle. Il a été repris par Mayer qui calcule des tables en suivant une relation correspondant à (12), mais

en indiquant aussi des corrections pour les variations de T_S et P_S (ce que n'avaient jamais fait ni Simpson ni Bradley) ; ce travail sera publié à titre posthume [39], et s'avèrera très utile.

En 1772 Joseph Louis Lagrange (1736–1813) marche sur les traces de Bouguer, en étudiant le cas d'une atmosphère limitée où n décroît en r^{-q} ; mais il est le premier [71] à écrire la formule (appelée loi de Bouguer–Simpson [56, Eq. (12)]) traduisant le résultat rigoureux que Bouguer avait donné pour χ_S sous forme géométrique, et le premier à montrer que cette formule conduit aussi à celle de Bradley. Son étude permet de voir que [56, sous-paragraphe 3.5]

$$B \cong \eta_S \left(1 - \frac{\eta_S}{2}\right) \quad \text{et} \quad w = \frac{1-q}{2q} \quad \text{avec} \quad 1/q \cong h_T/\eta_S \quad (20)$$

donc que $w = 3$ correspond à $1/q = 7$ (légèrement plus petit que les dernières estimations de Bouguer vues au paragraphe 3).

Pour 1789, la table publiée par *La Connaissance des Temps* est justement calculée d'après cette formule de Bradley (19). Ce sera le cas jusque pour 1808, malgré les erreurs de $10''$ à $15''$ dues à cette formule vers $Z' = 86^\circ$ et mises en évidence par Borda et Delambre.

Christian Kramp (1760–1826), dans son traité de 1799 sur les réfractions astronomique et terrestre [78], effectue des percées mathématiques remarquables, devançant parfois Euler sur son propre terrain. En effet, nous verrons dans [3, paragraphe 8] que pour la réfraction au voisinage de l'horizon astronomique, et moyennant diverses approximations, on a

$$\chi_S \cong \frac{\eta_S}{\sqrt{2}H_1} \int_0^\infty e^{-z/H_1} \left[\left(\frac{1}{r_S} - \frac{\eta_S}{H_1} \right) z + \frac{\tan^2 \psi'}{2} \right]^{-1/2} dz \quad (21)$$

dans le cas d'un modèle d'atmosphère où $\mu(z) = \mu_S \exp(-z/H_1)$, adopté par Kramp, Bessel, etc. [78, 86]. Avec ces auteurs il ne s'agit pas [44, p. B.27] du modèle de l'atmosphère dite isotherme, dont la hauteur d'échelle (en supposant que l'air est un gaz parfait de masse molaire M_a) est $H_T = RT_S/(M_a g)$ (R désignant la constante des gaz parfaits), ce qui donne $H_T \cong 7,990$ km sous nos latitudes dans les conditions normales avec les estimations actuelles des constantes (mais Laplace prenait 7,974 km, et 6 366 km pour le rayon moyen terrestre au lieu de 6 371 km [37, chap. 1], [102, p. 476]) ; selon Radau [44, p. B.27], Kramp et Bessel prennent plutôt $H_1 = (1 + \varepsilon)H_T$, avec $\varepsilon \cong 2/11$ pour Kramp et $\varepsilon \cong 1/27$ pour Bessel, ce qui donne

$$\frac{dT}{dz}(0) = - \left(\frac{1}{H_T} - \frac{1}{H_1} \right) T_S = -\varepsilon \frac{T_S}{H_1} = -\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{M_a g}{R} \quad (22)$$

valant respectivement $-5,3 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ et $-1,2 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$. En fait, pour Kramp ce modèle est déjà une approximation, car au départ il adopte une loi de variation de T avec z qui n'est pas cohérente avec $\mu(z)$ exponentiel, et initialement il tenait compte de la variation de la pesanteur avec l'altitude ; mais il était rompu aux calculs avec le profil exponentiel, puisqu'il avait montré que c'est celui qu'a utilisé Newton. De plus, comme le fait remarquer Simon Newcomb [132, p. 186–187], la distribution hydrostatique des pressions dans un fluide impose (en négligeant la variation de g avec l'altitude)

$$\int_0^\infty \mu(z) g dz = P_S = \mu_S g H_1, \quad (23)$$

et pour un gaz parfait, avec la classique hauteur d'échelle isotherme H_T on a

$$P_S = \mu_S R T_S / M_a := \mu_S g H_T, \quad (24)$$

donc H_1 et H_T sont égaux, ce qui est contradictoire avec tout profil de μ exponentiel où $\varepsilon \neq 0$. C'est pourtant un tel profil que Bessel a utilisé (avec $\varepsilon \cong 1/27$ selon Radau) pour ses *Tabulae Regiomontanae* [133] de 1830, qui corrigent les importantes erreurs de ses tables précédentes [86] au-delà de 86° en utilisant les mesures d'Argelander ; ces nouvelles tables ont été d'un usage très répandu, de 1830 au début du xx^e siècle : elles sont publiées en Espagne dans l'*Almanaque Nautico*, en Amérique en 1906 [134, p. 571–575], etc. Car les paramètres du profil (13) peuvent être ajustés autrement que ne l'a fait Newton : d'abord on prend η_S déduit des mesures de T_S

et P_S , ce qui doit assurer un bon ajustement entre les valeurs calculées de $\chi_S(\psi')$ et les valeurs réelles pour $\psi' \in [0^\circ, 60^\circ]$; puis, sachant que si on prenait ensuite $H_1 = H_T$ on aurait κ_S trop grand donc $-\mathrm{d}\chi_S/\mathrm{d}\psi'(0)$ aussi d'après le théorème de Biot, on peut jouer alors sur le paramètre petit $\varepsilon := [MagH_1/(RT_S)] - 1$ pour trouver un compromis entre l'obtention de la bonne valeur de $\mathrm{d}\chi_S/\mathrm{d}\psi'(0)$ et de celle de χ_{Sh} . Sachant que $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z(0) = -6,5 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ dans la troposphère standard, l'application numérique faite juste après la relation (22) montre que $\varepsilon \cong 2/11$ (Kramp) doit donner une valeur de $-\mathrm{d}\chi_S/\mathrm{d}\psi'(0)$ plus proche (quoiqu'encore un peu trop grande) de sa valeur standard que $\varepsilon \cong 1/27$ (Bessel).

Quoiqu'il en soit, on voit qu'en plus de η_S il intervient aussi, à cause de la courbure des surfaces équii-indice, un second paramètre petit fondamental, à savoir $h_1 := H_1/r_S$ valant $(1 + \varepsilon) 1,25 \times 10^{-3}$ dans les conditions normales ; le premier conditionne l'existence de la réfraction, le second la module subtilement. Avec $\mu(z)$ exponentiel, [3, Eq. (54)] montre que ces deux paramètres fondamentaux sont reliés au coefficient de réfraction par

$$\eta_S/\kappa_S \cong h_1. \quad (25)$$

Confronté au genre d'intégrale intervenant dans l'expression approximative (21), Kramp utilise la fonction *gamma* (inventée par Euler en 1729 [135] et notée Γ par Legendre en 1811) ; il prouve $\Gamma(1/2) = 2 \int_0^\infty e^{-X^2} \mathrm{d}X = \sqrt{\pi}$ (qu'on appelle aussi l'intégrale de Gauss), et l'utilise pour montrer que la réfraction horizontale peut être développée en puissances demi-entières de κ_S ([78, p. 119 ss] ; voir aussi [102, p. 480–488]) :

$$\chi_{Sh} = \sqrt{\pi\eta_S\kappa_S/2} \left[1 + \left(\sqrt{2} - 1 \right) \kappa_S + \left(3^{3/2} - 2 \cdot 2^{3/2} + 1 \right) \kappa_S^2/2! + \left(4^{5/2} - 3 \cdot 3^{5/2} + 3 \cdot 2^{5/2} - 1 \right) \kappa_S^3/3! + \dots \right]; \quad (26)$$

il jubile de cette trouvaille qu'Euler n'avait pas réalisée ! Laplace ira plus loin en mettant cette expression sous la forme d'une fraction continue [102, p. 490–493]. Ivory donnera une présentation plus simple [136]. À partir de sa formule, Kramp effectue une application numérique [78, p. 120–121] : avec le profil de densité exponentiel il obtient $\log \kappa_S = -1 + 0,3704479$ (soit $\kappa_S \cong 1/4,26$, ce qui est très correct pour son atmosphère isotherme) en se basant sur le fait que le « citoyen Laplace dans l'*Exposition du système du monde*, a supposé $[H_1] = 24\,080$ pieds », i.e. $H_1 = 7,822 \text{ km}$; de plus, il assimile η_S (qu'il n'appelait pas ainsi) à la valeur de $\chi_S(45^\circ)$ en radians, et pour une température de 0°R et une pression « de 28 pouces de hauteur barométrique », i.e. 758 torr car un pouce est un douzième de pied (qui était, pour sa dernière année, le pied-de-roi défini par Colbert en 1668 et correspondant à 324,839 mm), il prend donc $\eta_S = 2,874 \times 10^{-4}$ (ce qui est un peu faible pour les valeurs de T_S et P_S indiquées), et alors il conclut que « la réfraction horizontale sera égale à 7 307 secondes de la nouvelle division [soit $39' 27''$] » ; ce qui se trouve parfaitement conforme au calcul du citoyen Laplace [qui avait trouvé 7 300 au lieu de 7 307]. » Eu égard aux tables actuelles, cette valeur de χ_{Sh} est trop forte de $4'$ pour les valeurs de T_S et P_S indiquées ; d'ailleurs χ_{Sh} sera systématiquement en excès dans les calculs numériques de Kramp, ainsi que $-\mathrm{d}\chi_S/\mathrm{d}\psi'(0)$, le tout à cause du gradient de température troposphérique qu'il ignore et qui lui a fait prendre κ_S trop fort ($\kappa_S \cong 1/4,26$ au lieu de $\kappa_S \cong 1/6$). Il est vrai que, si on augmente arbitrairement H_1 de $\varepsilon \cong 2/11$ en valeur relative tout en conservant $\mu(z)$ exponentiel, on diminue κ_S et on trouve par les formules de Kramp des valeurs de χ_{Sh} et $-\mathrm{d}\chi_S/\mathrm{d}\psi'(0)$ meilleures, mais elles restent encore un peu trop fortes ; il faudrait prendre plus que $2/11$, mais on a déjà compris qu'*a priori* il n'existe pas de valeur de ε donnant χ_{Sh} et $\mathrm{d}\chi_S/\mathrm{d}\psi'(0)$ simultanément corrects. En fait, à η_S et h_1 correctement fixés, abandonner le profil de μ exponentiel permettra de changer κ_S et l'expression (26) devenue évidemment obsolète (d'autant plus si le nouveau profil de μ fait intervenir plus de deux paramètres) ; d'où la possibilité de corriger les excès des valeurs de Kramp sans tomber dans l'incohérence mécanique, signalée par Newcomb, des cas où $\varepsilon \neq 0$.

Celui-là montre quelques pages plus loin [78, p. 148–149] qu’une approximation de la somme de sa série donne l’expression (16), que nous démontrons d’une autre façon dans [3, paragraphe 8]. Cette expression approchée, quand on la compare avec l’expression voisine (15) pour le modèle de Bouguer et avec ce que donne pour $Z' = 90^\circ$ la formule (6) du modèle de Cassini, illustre élégamment la dépendance de χ_{Sh} par rapport au profil de μ à η_S et h_1 fixés. En effet, pour le modèle exponentiel de Kramp, χ_{Sh} vaut quasiment $\eta_S \sqrt{\pi/[2(h_1 - \eta_S)]}$; pour le modèle de Bouguer qui débouche sur la formule de Bradley avec $w \cong (h_\tau - \eta_S)/(2\eta_S)$ [56, sous-paragraphe 3.5], comme $h_\tau \ll 1$, le profil de réfractivité de ce modèle est quasiment le même que le profil affine de Newton–Simpson–Mayer qui s’annule au sommet de l’atmosphère, donc sa hauteur réduite relative est $h_1 \cong h_\tau/2$ et, d’après les relations (15) et (20), χ_{Sh} s’écrit $\eta_S \sqrt{2/(2h_1 - \eta_S)} \cong \sqrt{\eta_S/w} \cong \sqrt{B/w}$; pour le modèle de Cassini, la formule (6) pour $Z' = 90^\circ$ donne $\eta_S[1 - (\eta_S/2)]/\sqrt{2h_1 - \eta_S}$, ce qui est notablement plus petit. Pour la raie d’*alias* D_3 (de l’hélium), donc à 588 nm (longueur d’onde standard actuelle pour indiquer ordinairement l’indice de réfraction d’un milieu transparent), et dans les conditions normales de température et de pression en S , $\eta_S \cong 2,924 \times 10^{-4}$, $h_1 \cong 1,25 \times 10^{-3}$, alors ces trois expressions donnent respectivement $\chi_{Sh} \cong 41'$, $30'$ et $21'$, tandis que de nos jours la valeur usuellement admise dans ces conditions est $35'$. Ces résultats n’auraient pas surpris John Brinkley (1766–1835), qui écrivait en 1818 : « It is admitted, that the true refraction is always less than that computed on the hypothesis of an uniform temperature, and greater than that obtained by supposing the density to decrease uniformly » [82, p. 166]. Mais avec les valeurs de Bradley pour 10°C et 752 torr ($w \cong 3$ et $B \cong 2,7652 \times 10^{-4}$ rad, ce qui d’après (20) correspond à $\eta_S \cong 2,7656 \times 10^{-4}$ et donc à $\lambda_0 \cong 816$ nm) la 2^e expression donne bien $33,00'$, comme il le voulait pour construire sa table ; la longueur d’onde correspondante étant dans l’infrarouge proche, on voit clairement que la valeur de B choisie par Bradley ne traduit pas les propriétés physiques de l’air, mais l’ajustement recherché pour donner une valeur correcte de valeur χ_{Sh} à 10°C et 752 torr avec sa formule qui ne donne pas une expression juste de χ_{Sh} et lui donne donc χ_S un peu trop fort aux distances zénithales pas trop grandes. D’autres ajustements avec la formule de Bradley seront recherchés par Brinkley, Groombridge, Piazzini, et Mathieu (cf. infra), mais sans forcément vouloir rendre compte de χ_{Sh} car, dans la pratique, les astronomes n’observent plus les astres trop bas sur l’horizon.

La contribution de Kramp ne s’est pas limitée aux formules donnant χ_{Sh} : il a introduit en plus la fonction transcendante K définie sur \mathbb{R}^+ et tabulée par lui [78, p. 195–202] — suivi de Bessel [86, p. 36–37] et de Radau qui complète [137], avec une variante — telle que

$$K(u) := \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(v+u^2)} dv / \sqrt{v+u^2}. \quad (27)$$

On voit que celle-ci, grâce au changement de variable $X := \sqrt{v+u^2}$, est liée à la fonction d’erreur erf (inconnue en 1799) définie par

$$\text{erf}(X) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X e^{-v^2} dv ; \quad (28)$$

en effet, $\text{erf}(\infty) = \Gamma(1/2)/\sqrt{\pi} = 1$ et

$$K(u) = \int_u^\infty e^{-X^2} dX = \int_0^\infty e^{-X^2} dX - \int_0^u e^{-X^2} dX = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \text{erf}(u)] \quad (29)$$

[78, p. 132–149].

Kramp comprend, comme Bouguer, que des rayons pourraient faire le tour de la Terre au niveau de la mer ; il dit que cela exigerait, de la part d’un profil exponentiel, $H_1 \cong 1\,880$ toises i.e. 3,664 km (mais cette valeur est erronée, peut-être à cause d’une méconnaissance de la constante des gaz parfaits ou de l’origine des températures absolues, car il faudrait $H_1 \cong 1,862$ km pour avoir $\kappa_S = 1$!), et il ajoute que « souvent nous [...] aurions [ce cas] dans nos climats, si les vapeurs dont l’air est chargé, ne nous empêchoient pas alors de discerner les objects éloignés. » Il a raison, au sens où le phénomène de mirage supérieur [1, sous-paragraphe 2.2] n’est pas rare, et se

produit quand κ dépasse 1 dans une couche d'air au-dessus de l'observateur, mais cette couche ne peut pas encercler toute la Terre — pour la prise en compte d'un effet lié à cette limitation, voir l'article [10] dans ce numéro spécial.

Avant de passer aux travaux classiques du siècle suivant, signalons aux lecteurs avides de plus de détails l'excellente et unique synthèse sur les recherches du XVIII^e siècle : celle de Carl Bruhns [54].

Dans son monument de physique mathématique du début du XIX^e siècle qu'est le *Traité de Mécanique Céleste*, l'éminent Pierre Simon de Laplace (1749–1827) aborde aussi le sujet de la réfraction astronomique [37, chap. 1], de la réfraction terrestre [37, chap. 2], et de l'extinction [37, chap. 3], dans le livre 10 (*Sur des sujets généraux relatifs au système du Monde*) du tome 4. Laplace est ici souvent difficile à lire, car il saute des éléments de démonstration, et omet quelques termes d'ordre supérieur pointés par Bemporad dans l'étude de l'absorption. Jean-Baptiste Biot (1774–1862), jeune professeur de mathématiques à Beauvais en 1797–1800, s'était proposé pour relire les épreuves d'imprimerie ; il rendit alors souvent visite à Laplace, en lui signalant les difficultés qu'il rencontrait à la lecture du texte. « Une fois, dit-il, je le vis passer ainsi près d'une heure à tâcher de ressaisir la chaîne de raisonnements qu'il avait cachée sous ce mystérieux symbole : *il est aisé de voir* » [138]. Pour exprimer les angles, Laplace utilise les unités de la Révolution française, à savoir les grades, les minutes « de la nouvelle division » (10^{-2} grade) et les secondes « de la nouvelle division » (10^{-4} grade). Le mathématicien américain Nathaniel Bowditch (1773–1838) acheva en 1818 une traduction des 4 premiers volumes de la *Mécanique Céleste*, dans laquelle il a revu toutes les démonstrations, et inséré toutes les explications manquantes dans des notes de bas de page, dont certaines ne laissent au texte traduit que 2–3 lignes en haut de page, voire occupent elles-mêmes 2 ou 3 pages. Cette adaptation fort utile [102, 139–141] a été publiée en retard, de 1829 à 1839, notamment à cause de son coût.

Au chap. 1 du livre 10 Laplace traite de la réfraction, dans le cadre mécaniste de la théorie corpusculaire de la lumière ; il relie l'invariant I_B de Bouguer à la constante des aires pour le mouvement à force centrale des « molécules de lumière ». Il démontre mieux (quoiqu'encore non rigoureusement) le théorème d'Oriani, par un développement astucieux de la deuxième forme de (14) — voir [3, sous-paragraphe 5.1] — donnant sa célèbre formule [102, p. 521–527]

$$\chi_S \cong \left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) \eta_S \tan Z' - \left(\frac{H_1}{r_S} - \frac{\eta_S}{2}\right) \eta_S \tan^3 Z', \quad (30)$$

qui étend donc sa validité bien au-delà du modèle basique de Cassini avec lequel nous l'avons déjà rencontrée (au sous-paragraphe 2.1) ; cela explique la longévité (1685–1765) des tables de Cassini dans *La Connaissance des Temps*. Numériquement, le terme en $\tan^3 Z'$ vaut 12,18'' pour $Z' = 80^\circ$, ce qui est cohérent avec la remarque de Maskelyne cité ci-dessus en ce qui concerne la fiabilité de la formule de Simpson. On notera qu'avec le modèle moins basique de Simpson (celui rejeté par Newton, avec son profil de μ affine), on a rigoureusementment

$$H_1 = H_A/2 \quad (31)$$

et que si on effectue un développement binomial, à l'ordre 2, de $\sqrt{1 + (2/\cos^2 Z')[(H_A/r_S) - \eta_S]}$ dans le résultat (12) de Newton–Mayer, on obtient

$$\begin{aligned} \chi_S &\cong \eta_S \frac{\sin(2Z')}{2} \left(\frac{H_A}{r_S} - \eta_S\right)^{-1} \left[\frac{1}{\cos^2 Z'} \left(\frac{H_A}{r_S} - \eta_S\right) - \frac{1}{2\cos^4 Z'} \left(\frac{H_A}{r_S} - \eta_S\right)^2 \right] \\ &= \eta_S (\tan Z') \left[1 - \left(\frac{H_1}{r_S} - \frac{\eta_S}{2}\right) - \left(\frac{H_1}{r_S} - \frac{\eta_S}{2}\right) \tan^2 Z' \right] \\ &\cong \eta_S \tan \left[Z' - \left(\frac{h_1}{\eta_S} - \frac{1}{2}\right) \chi_S \right]; \end{aligned} \quad (32)$$

cela ne redonne pas la formule de Laplace (30) à cause de l'approximation $n^{-1} \cong 1$ déjà faite par Newton dans l'expression (8) [3, sous-paragraphe 5.1], mais rappelle — si besoin était après les relations (20) — que le coefficient w doit bien, à l'instar de h_1/η_S , dépendre de T_S et P_S , contrairement à ce que pensait Bradley [46, p. 792–794] : dans les conditions normales et pour la raie d, $w \cong (h_1/\eta_S) - 0,5 \cong 3,79$, alors que Bradley disait $w \cong 3$. Claude-Louis Mathieu (1783–1875), ayant travaillé avec Biot [8, paragraphe 3] puis édité un livre posthume de Delambre [46], utilise des approximations analogues à celles donnant la dernière expression de (32), et se sert des valeurs de η_S et h_1 mesurées directement et exprimées en fonction de T_S et P_S , pour en déduire les expressions de B et w aussi en fonction de T_S et P_S , mais fondamentalement à partir des propriétés de l'air, et non plus comme Bradley à partir de valeurs de référence de χ_S . Comme attendu, cela lui fait réviser nettement à la hausse la valeur de w (dans les conditions de température et de pression prises par Bradley). Mathieu considère que la démarche approximative utilisée pour passer de la formule de Laplace (30) à celle de Bradley (19) est valable « jusqu'à [$Z' =$]75° ; elle peut même s'étendre plus loin, car elle [Eq. (19)] s'accorde avec la table du Bureau des Longitudes jusque vers 82° ; et à 86°, où les réfractions varient accidentellement d'une vingtaine de secondes, elle donne des réfractions qui ne diffèrent que d'environ 10''. Au-delà, elle conduit à des réfractions trop petites » [46, p. 793] : 30' au lieu de 35' pour $Z' = 90^\circ$ dans les conditions normales, avec les nouvelles valeurs de B et w calculées pour 0 °C et 760 torr d'après ses formules (au lieu de 10 °C et 752 torr pour Bradley). On voit donc que Mathieu abandonne la référence χ_{Sh} à 0 °C et 760 torr, où sa nouvelle valeur de B correspond à $\eta_S \cong 2,93876 \times 10^{-4}$ (valeur adoptée aussi par Laplace) et donc à $\lambda_0 \cong 512$ nm, ce qui n'est plus dans l'infrarouge !

Signalons qu'un rapport, présenté par Charles-Louis Largeteau (1791–1857) et François Arago (1786–1853) devant le Bureau des longitudes dans les années 1840, poussera à recalculer la réfraction à partir de la formule de Laplace, pour tenir compte des progrès des instruments astronomiques, des observations, et enfin de la connaissance des coefficients thermoélastiques du mercure et de l'air : nous avons vu au sous-paragraphe 2.2 combien la méconnaissance de ce dernier était grande en 1799, et en 1821 encore elle faisait qu'Ivory mettait à -250 °C le zéro absolu, ce qui l'induisait nettement en erreur dans ses analyses sur la réfraction horizontale [48]. Vincent Caillet (1811–1887), examinateur de la Marine, s'est chargé de ce travail ; il change les coefficients de la formule de Laplace, et précise leur variation avec T_S et P_S [142, 143].

Mais revenons à Laplace lui-même. Il traite trois cas où le profil d'indice est donné directement (et non pas indirectement comme dans son 4^e — et dernier — cas) : celui de Cassini qui est traitable rigoureusement [102, p. 473–477] ; celui de Newton isotherme (où il retrouve la série de Kramp (26) avec ses approximations préalables — [102, p. 477–497]) ; et celui de Bouguer qui est aussi traitable rigoureusement [102, p. 497–507].

Pour le voisinage de l'horizon astronomique, où la formule (30) n'est pas valable, Laplace appliquait une approximation fondamentale à la relation (14), la mettant sous la forme

$$\chi_S \cong \int_0^{\eta_S} d\eta / \sqrt{2Y + \tan^2 \psi'} \quad \text{où } Y := \frac{z}{r_S} + \eta - \eta_S \quad (33)$$

(voir [3, paragraphe 8]). Pour améliorer les modèles d'atmosphère précédents qui avaient des défauts opposés, il les combine linéairement dans l'espoir que leurs défauts se neutralisent mutuellement ; à cette fin il suppose [102, p. 497–521] qu'entre η et Y il y a la relation

$$\eta = (1 + \beta Y)\eta_S e^{-\xi Y} \quad (34)$$

où β et ξ sont deux constantes liées (par le biais de la définition de H_1 et de sa variation avec la température) à η_S et T_S qui sont fixés, mais aussi à la température à une altitude de 7 km par exemple. Laplace exprime χ_S à l'aide de la fonction K , et obtient la réfraction horizontale :

$$\begin{aligned}
\chi_{Sh} &= \eta_S \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{(\xi - \beta) + \beta \xi Y}{2\sqrt{Y}} e^{-\xi Y} dY \\
&= \eta_S \sqrt{2} \left\{ (\xi - \beta) \int_0^\infty \frac{e^{-\xi Y}}{2\sqrt{Y}} dY - \frac{\beta}{2} \left[\sqrt{Y} e^{-\xi Y} \right]_0^\infty + \frac{\beta}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\xi Y}}{2\sqrt{Y}} dY \right\} \\
&= \eta_S \sqrt{2} \left[(\xi - \beta) \frac{K(0)}{\sqrt{\xi}} + \frac{\beta}{2} \frac{K(0)}{\sqrt{\xi}} \right] = \eta_S \left(\xi - \frac{\beta}{2} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Pour T_S et μ_S fixés, il reste un degré de liberté permettant à Laplace de trouver β et ξ qui ajustent son modèle à la valeur de χ_{Sh} observée — mais, redisons-le, pas à $d\chi_S/d\psi'(0)$ simultanément. Les valeurs numériques ont été calculées à partir de 1806 par Alexis Bouvard (1767–1843) et Arago — qui sera en mission géodésique en Espagne de 1806 à 1808. Les tables correspondantes ont été mises dans *La Connaissance des Temps* pour 1809, publiées dès 1807.

Dans son édition de l'année suivante, on ajouta pour la première fois des tableaux (calculés par Delambre) permettant de corriger les effets des variations de T_S et P_S [144, p. 155].

Au chap. 3 de son livre 10 [37], Laplace montre le lien avec l'extinction : la masse d'air $Q_S := \int_{-\infty}^{s_S} \mu ds$ — où la variable s désigne l'abscisse curviligne sur (R) — est quasi proportionnelle, même pour ψ' proche de 0° ou 90° , à $\chi_S / \cos \psi'$ dans une atmosphère à profil exponentiel [3, sous-paragraphe 7.4] ; et pour d'autres atmosphères cela reste une bonne approximation [43]. On sait maintenant que les corrections liées au retard temporel des signaux des satellites sont quasiment proportionnelles à Q_S [145, 146], et il est fondamental de connaître la variation de cette quantité, donc aussi de χ_S , avec ψ' ; il existe des tables récentes et des formules approximatives (à trois paramètres) de Q_S en fonction de ψ' [147], ou de ψ (plus rares) [147, 148] — le passage précis des premières aux secondes nécessitant une bonne connaissance de χ_S . On comprend donc une des motivations actuelles pour maîtriser la théorie de la réfraction astronomique, d'autant plus que les satellites GPS sont souvent vus bas sur l'horizon !

Au cours de la première moitié du XIX^e siècle, le développement de nouvelles techniques (comme l'interférométrie [149]) et les progrès de l'instrumentation rendent possible une étude plus fine de l'indice de l'air, de sa variation avec la longueur d'onde, la température et la pression ; et la question de l'influence des « vapeurs », évoquées par tant d'auteurs à chaque fois qu'une réfraction paraissait anormalement forte, peut enfin être soumise au verdict de l'expérience.

5. Les géodésiens métrologistes

Par la loi du 30 mars 1791, la Révolution française décida de fonder un nouveau système d'unités, basé sur des grandeurs invariables et partagées par toute l'humanité : c'est ainsi que le mètre fut choisi comme étant la quarante millionième partie de méridien terrestre, dont la longueur avait été mesurée dans ce but lors de l'expédition géodésique de Jean-Baptiste Delambre (1749–1822) et Pierre Méchain (1744–1804) depuis Dunkerque jusqu'à Barcelone (1792–1799). Mais en 1794 Méchain constata un écart de $3,2''$ entre ses mesures d'une même latitude à Barcelone ; à son grand dam, la guerre entre l'Espagne et la France révolutionnaire l'a empêché de revenir sur les lieux pour reprendre cette mesure. Le 25 juin 1795, jour de la présentation d'un rapport de l'Abbé Grégoire devant la Convention, celle-ci adopta la loi créant le Bureau des longitudes, dont Delambre et Méchain comptent, avec Laplace, Lagrange et Lalande, parmi les dix membres fondateurs. Une dizaine d'années après, Biot et Arago avaient rappelé à Laplace, qu'ils voyaient à tour de rôle, l'intérêt de prolonger la mesure du méridien jusqu'aux Baléares (voir [150, paragraphe 1] dans ce numéro spécial). Ce projet plut à Laplace, qui obtint de Napoléon son financement, et le 2 mai 1806, le Bureau des longitudes charge Biot et Arago de l'accomplir (il les élira astronomes adjoints en août 1806 et en juillet 1807 respectivement) ; ils partent pour la Catalogne le 3 septembre 1806. Cette campagne géodésique, prévue pour 6 mois au plus, durera jusqu'en

1808, où le début de la guerre d'Espagne perturbera grandement la dernière mesure souhaitée par Arago : celle du triangle Majorque–Ibiza–Formentera, permettant de tester la symétrie de révolution pour la Terre. Quoiqu'il en soit, cette expédition donne à Arago l'occasion de voir que le cercle répétiteur utilisé par Méchain avait, pour son plus grand malheur, une erreur systématique qu'il ignorait ; puis vers 1812–1828 l'amélioration des tables de réfraction, entre autres, permettra de réduire au niveau des incertitudes (0,2'') la triste erreur de 3,2'' de Méchain. Biot et Arago utilisent un cercle répétiteur de Fortin, modèle Borda (1784). Gradué au 10^e de grade, il a des verniers au 40^e, et procure par répétition des pointés une précision comparable à celle donnée par un grand cercle (0,1''). Leurs prédécesseurs Delambre et Méchain utilisaient des cercles de Le Noir, avec une optique de Lerebours ; leur précision était moindre (1''), mais déjà 15 fois meilleure que celle des instruments antérieurs.

Biot a une connaissance très approfondie des réfractions astronomiques et terrestres, à cause de sa relecture de Laplace. Nul doute que son esprit brillant, confronté à des observations fines permises par l'accroissement de précision, sera mis en branle et fera progresser la compréhension des phénomènes de réfraction astronomique et terrestre. Dans ce paragraphe, nous en verrons deux exemples, dus essentiellement à Biot et à Delambre. Et dans [150], qui est un commentaire d'un texte historique majeur de Biot [72] dans ce numéro spécial, nous verrons comment il apporte deux résultats importants : son changement de variable et son théorème, que nous exposons dans [3] (paragraphe 6 et 7.1 respectivement).

Voici comment Biot lui-même, avec son style toujours ample et subtil, met en valeur qualitativement son théorème, lors de la séance du 5/09/1836 à l'Académie des Sciences : « Outre la singularité inattendue de trouver un élément de la réfraction horizontale, indépendant de l'état des couches lointaines, et s'obtenant, dans tous les cas possibles, sans intégration ; outre la liaison qui en résulte entre l'accroissement de la réfraction près de l'horizon et les variations également observables du pouvoir réfringent à partir de la couche inférieure, le théorème que je viens d'énoncer aura encore d'autres applications utiles. » [72], [151, p. 243].

Il peut s'énoncer de manière très simple :

$$1 - \kappa_S = \gamma_{Sh} := \left[\frac{d\psi}{d\psi'}(0) \right]^{-1} \quad (36)$$

où γ_{Sh} désigne le grandissement angulaire local vertical d'une image vue sur l'horizon astronomique. Cette formulation est encore plus compacte que l'énoncé équivalent donné par Biot.

Les applications utiles dont parle Biot sont surtout théoriques, notamment pour la construction des tables à partir de modèles dont il faut ajuster les paramètres : on peut obtenir directement une contrainte sur ces paramètres à partir de la valeur de $\gamma_{Sh} = [1 - (d\chi_S/d\psi')(0)]^{-1}$, comme par exemple la relation (36).

Quant à son changement de variable, il lui permet de transformer — sauf dans le cas où (R) traverse un chenal optique — l'intégrale de la réfraction (14), impropre pour les rayons arrivant en S horizontalement, en une intégrale ordinaire, même pour la réfraction horizontale (où $Z' = \pi/2$) :

$$\chi_S = \int_0^{Z'} - \frac{d \ln n / d \ln r}{1 + (d \ln n / d \ln r)} d\alpha. \quad (37)$$

Avec 13 points Biot l'a estimée numériquement selon la méthode de Simpson — i.e., celle qui améliore la « méthode des trapèzes » en prenant, comme approximation du graphe de la fonction intégrée, une succession d'arcs de paraboles passant par trois points consécutifs de ce graphe, au lieu d'une succession de segments joignant deux points consécutifs. Biot a obtenu un résultat à 1'' d'écart du résultat d'Ivory pour la réfraction horizontale. Mais cette technique astucieuse n'a guère suscité d'écho au XIX^e ; elle a été redécouverte par Auer et Standish en 1979 (qui l'ont mise en œuvre numériquement d'une manière différente de celle de Biot) mais sa publication a été refusée par le journal auquel ils l'ont soumise, alors ces auteurs ont diffusé leur travail

sous forme de polycopié du département d'astronomie de l'université de Yale [152] ; il a été tellement apprécié que leur méthode est devenue la méthode classique, recommandée depuis 1992 par l'*Explanatory supplement to the Astronomical Almanac* [153]. Finalement, le journal a fait amende honorable en 2000, et a publié le texte d'Auer et Standish [154] ! Mais, malgré la caution qu'elle a reçue, cette méthode ne doit pas être considérée comme universelle, car elle ne permet pas de traiter les cas où il y a un chenal optique : l'intégrande diverge pour, entre autres, la valeur de α correspondant au bord supérieur du chenal.

Depuis les deux autres expéditions de géodésie du siècle précédent (et que nous avons évoquées au paragraphe 3), on a compris que les variations de χ_S avec l'altitude (qui paraissaient mystérieuses et contraires aux idées prégnantes issues d'une exploitation abusive du modèle de Ptolémée–Kepler–Cassini), proviennent des changements de μ_S causés par ceux de P_S et T_S qui (avec λ_0) sont, dans la formule de Simpson (postérieure à ces deux expéditions), les seuls paramètres susceptibles de faire changer concrètement $\chi_S(\psi')$. Après ces expéditions est paru le théorème d'Oriani, qui étend le domaine de Z' où on peut dire que χ_S ne varie concrètement qu'avec le quadruplet $(Z', \lambda_0, T_S, P_S)$.

Or voilà qu'un observateur expérimenté comme Delambre, qui avait réalisé la partie Dunkerque-Rodez de la campagne géodésique de 1792–1799 visant à définir le mètre, constate que d'une nuit à l'autre, χ_S prend des valeurs différentes pour un même quadruplet ! Il accumule ce genre d'observations, et il les liste dans son traité d'astronomie de 1814. On y lit [41, p. 326] : « dans des circonstances qui étaient les mêmes en apparence, la réfraction variait de 15 à 20'' sans qu'on pût en soupçonner la cause ; mais les variations sont encore bien plus sensibles à l'horizon, on en jugera par le tableau suivant » qui cite, entre deux jours à même pression et température, des différences de réfraction à une distance zénithale donnée pour une même étoile : 35'' à 88° ; 45'' à 89°, etc. Brinkley publie des constatations similaires en 1815 : « the quantity of refraction varies so much from some unexplained cause, the heights of the barometer and thermometer remaining the same, that observations below 80° can be of little use » [155, p. 81]. Mathieu présente bien le caractère difficilement explicable de ce fait pour l'époque : il y a « des réfractions qui, dans des circonstances semblables en apparence, éprouvent des variations notables et souvent plus grandes que celles que l'on remarque entre les différentes théories proposées. » [46, p. 794]

D'autres observateurs ont signalé des réfractions horizontales atteignant plusieurs degrés, d'abord dans les contrées polaires (cas extrême : l'effet *Novaya Zemlya* [10]), mais aussi à Athènes, à San Diego, etc. Par exemple Kepler, dans *Ad Vitellionem paralipomena* [30], relate une observation de Vénus refusant de se coucher pendant 15 min jusqu'à ce que sa position réelle atteigne 2° sous l'horizon.

Voici donc un nouveau mystère à élucider, et une belle occasion de faire progresser la compréhension théorique fine de la réfraction.

Biot assurait déjà en 1806 que, d'après les mesures d'indice faites avec Arago [156], une variation à $Z' = 75^\circ$ ne peut pas être due à la vapeur d'eau (i.e. au fait que l'air n'est pas bien mélangé et que cela violerait sensiblement une des hypothèses de la formule de Laplace mise sous la forme (18) de [3, sous-paragraphe 4.1]) : ils furent dans les premiers à mesurer l'indice de plusieurs gaz (voir le sous-paragraphe 6.1). En 1836 Biot insiste : « la variation des pouvoirs réfringents due à l'inégale distribution de vapeur aqueuse, ou à des mélanges d'autres gaz, [doit] être nécessairement supposée très petite, à cause de l'accord déjà si approché des réfractions réelles avec les tables qui ne l'admettent point [...] » [72, p. 6]. Après avoir dressé de cette question un bref historique qu'il fait commencer en 1796 [149, p. 329–331], Arago abonde dans le même sens : « Mes expériences d'interférences accusent bien une différence entre les pouvoirs réfringents de l'air sec et de l'air humide, mais la méthode si délicate, si sensible, que j'ai imaginée prouve que cette différence doit être négligée dans le calcul des réfractions astronomiques. » [149, p. 332]

En fait, les variations importantes de χ_S relevées pour $Z' > 80^\circ$ sont rendues possibles par le fait que la formule de Laplace (sur laquelle est fondé le théorème d'Oriani) ne s'applique plus car Z' est trop proche de 90° : alors χ_S varie non seulement avec $(Z', \lambda_0, T_S, P_S)$, mais aussi avec la forme du profil de réfractivité — au paragraphe 4, la comparaison des formules (6), (15) et (16) nous en a fourni un bel exemple. Les variations observées à $(Z', \lambda_0, T_S, P_S)$ fixé doivent donc venir de modifications de forme du profil ; lesquelles ? Sont-elles (comme le pensaient Ivory, Mathieu, Newcomb, etc.) localisées surtout dans la haute atmosphère, ce qui fait qu'elles échappaient facilement aux instruments météorologiques du XIX^e ? Ou au contraire (selon Biot et Bessel) dans la basse atmosphère, voire dans la couche limite proche du sol (sur quelques centaines de mètres d'épaisseur) ? La question ne sera vraiment tranchée qu'au XXI^e siècle [157] : la bonne réponse est la dernière.

Quant aux écarts mentionnés pour $Z' \leq 80^\circ$, ils doivent en grande partie résulter d'erreurs matérielles (notamment sur la mesure de T_S à quelques dixièmes de degré près) : la transition, entre la partie du ciel où χ_S ne varie quasiment qu'avec n_S , et celle proche de l'horizon où χ_S devient très sensible à la structure détaillée de l'atmosphère (ainsi qu'à sa composition), est plutôt abrupte et se trouve à 2–3° de hauteur.

6. Les continueurs

Avec le temps des métrologistes est venue la quête de données précises sur lesquelles fonder les prédictions tirées de la théorie. En ce qui concerne les rayons lumineux, puisque leur courbure est due à une variation de n le long de (R) — liée surtout à la variation de la pression P et de la température absolue T avec l'altitude z — il se pose alors la question de la loi de variation de n avec (T, P) , ou plus fondamentalement de n avec la masse volumique μ de l'air. Nous avons vu (au sous-paragraphe 2.2) que Newton a publié dans son *Opticks* [92] une mesure ($n \cong 3201/3200$) sans préciser pour quel couple (T, P) ; cinq années auparavant, était parue la mesure de Lowthorp [77] qui, avec un prisme, trouvait $n \cong 1,00036$ (donc plus que Newton), et qui écrivait en substance la conjecture que Newton avait laissée implicite en 1694–1695 quand il étudiait la réfraction astronomique : le pouvoir réfringent $n^2 - 1$ est proportionnel à μ . Mais à partir du milieu du XIX^e, cette question s'est avérée plus subtile que prévu, et de nombreux travaux y ont été consacrés jusqu'à ces dernières années, notamment pour les besoins de la spectroscopie de précision (où il faut convertir les longueurs d'onde λ mesurées dans l'air en longueurs d'onde dans le vide $\lambda_0 = n\lambda$), puis de la télémétrie laser — avec la mesure précise de la distance Terre-Lune, etc. Pour les études actuelles impliquant une connaissance de la réfraction astronomique, la précision requise sur celle-ci est de 0,04 % [49], donc on peut encore se contenter de la loi empirique simple, dite de Gladstone–Dale [158] — selon laquelle la réfractivité $\eta := n - 1$ (ou « excès de réfraction » [74, 75], ce qui n'est pas le pouvoir réfringent) d'un gaz de composition donnée est proportionnelle à μ — alors que ce n'est pas une loi rigoureuse, et que les mesures de Gladstone et Dale portaient en fait sur des liquides ! Ainsi donc, vaut-il mieux dire que μ est proportionnel à $n - 1$ (comme Thomas Young — avant même l'article de Gladstone et Dale [158] — pour sa table de réfraction dans le *Nautical Almanac* de 1822, et sur la qualité de laquelle il a polémique avec Ivory), ou bien à $n^2 - 1$ (comme Newton, puis Kramp, Laplace, Biot et Arago, Newcomb, etc.) — ce qui, selon Bruns en 1891 [159, p. 169 en note de bas de page], complique inutilement ? Nous verrons tout de suite quelle réponse, nuancée, donner à cette question.

Un autre point à prendre en compte est la dispersion de l'air, i.e. la variation de n avec λ_0 [160] : elle donne encore lieu à divers travaux [161–163] (notamment pour élargir le domaine spectral de validité des relations de dispersion — voir le sous-paragraphe 6.2) ; elle produit des effets fameux comme le « rayon vert », mais aussi d'autres qui compliquent cependant les mesures [164] — voir [3, paragraphe 9].

Quant à la variation de n avec le degré hygrométrique [165–167], il est amusant de savoir que son rôle dans la réfraction a été très surestimé dès l'antiquité (voir par exemple [11–13, 22–28]) alors que, sauf pour les études actuelles d'astrométrie fine, c'est un effet très négligeable [149, 156] et allant en sens contraire de ce qu'on l'on imaginait jusqu'au XIX^e ! Nous détaillons cela dans [129, paragraphe 3].

6.1. *Discussion sur les lois régissant les variations d'indice de l'air avec la température et la pression*

Après la mesure unique de Lowthorp suivie de sa conjecture [77], des études avec plusieurs mesures ont été faites, de façon à dégager des lois. Et après un résultat contradictoire dû à Homberg (qui trouvait que la lumière n'est pas déviée lors de son passage du vide dans l'air) [61], Francis Hauksbee publie en 1709 des valeurs de la déviation des rayons traversant un prisme creux rempli d'air, montrant (à 5 % près) qu'elle est proportionnelle à sa densité [168]. Son résultat mettra longtemps à être admis, vu les doutes de l'époque.

Biot et Arago, en 1806, suivent la même méthode que Hauksbee, mais avec un meilleur prisme — celui de Borda, qui avait commencé cette expérience avant eux, mais que la mort avait emporté avant qu'il ne la mène à bien. Ils reprennent aussi de Borda un cercle répétiteur, car il augmente la précision des mesures de déviations. Ils prennent le temps de réaliser l'expérience avec plusieurs gaz — car Biot, professeur au Collège de France dès 1800 et académicien dès 1803, était en 1804 détaché à l'Observatoire de Paris pour effectuer, à la demande de Laplace, une étude de la réfraction astronomique (voir [150, paragraphe 1] dans ce numéro spécial). Celui-ci déclare, à la séance du 22 mars au Bureau des longitudes : « Les quantités qui résultent de ces nouvelles expériences s'accordent [pour l'air] singulièrement bien avec celles que Mrs Delambre et Ramond ont trouvé [cette même année] par les observations astronomiques et barométriques » [138, p. 108].

La première mesure interférentielle de l'indice de l'air a été effectuée par Jamin en 1857, ainsi que celle d'autres gaz [169].

Redisons que Laplace, et à sa suite Kramp, Biot, Ivory, Radau, etc., utilisaient une « loi » plus ancienne que celle de Gladstone–Dale, parue en 1863 : pour ceux-là, ce n'est pas $(n - 1)/\mu$ qui est indépendant de (T, P) avec un gaz, mais $(n^2 - 1)/\mu$ qu'on appelait en français son « pouvoir réfringent spécifique » — cette propriété étant liée, de manière assez naturelle, à des *a priori* de la théorie corpusculaire de la lumière. Cette ancienne loi est encore utilisée par Newcomb [132] au début du XX^e siècle ! En 1913, dans un article d'encyclopédie [170], Azeglio Bemporad (1875–1945) et Pierre Puiseux (1855–1928) dressent un inventaire des auteurs sur la réfraction, et précisent lesquels utilisent la constance de $(n - 1)/\mu$ ou bien celle de $(n^2 - 1)/\mu$ [170] ; en utilisant la même technique de développement limité que pour celui mis en œuvre dans [129, paragraphe 2], on peut voir que le second choix est environ 4 fois plus éloigné de la réalité que le premier — et Radau note que « les expériences de M. Mascart tendent à prouver que [cette loi-là] est plus exacte [que celle-ci] ; mais, pour les calculs relatifs à la réfraction atmosphérique, on pourra conserver l'ancienne formule sans avoir à craindre une différence appréciable dans les résultats » [44, p. B.2]. Bemporad et Puiseux en tirent une conséquence intéressante pour l'époque : « On devra donc, dans les théories de la réfraction et de l'extinction, choisir la formule la plus avantageuse au point de vue analytique » [170, p. 17].

En 1815 Arago continua ses mesures d'indices de fluides avec Petit, et observa que pour un même composé chimique le pouvoir réfringent spécifique du liquide n'est pas le même que celui de sa vapeur [73] ; ceci fut confirmé par Jamin en 1856, et dès lors on se mit à penser que l'intérêt du pouvoir réfringent spécifique avait été mal fondé par les idées newtoniennes. En cette seconde moitié du XIX^e apparurent les études de Mossotti [171], puis de Clausius [172,

p. 62–97], de Lorenz et Lorentz (voir par exemple [173, article III]) qui introduisirent la réfractivité moléculaire de l'air $\frac{M_a}{\mu} \frac{n^2-1}{n^2+2}$ (appelée aussi « réfraction molaire ») et montrèrent que, dans le modèle du champ local de Lorentz, elle ne dépend que de λ_0 et de la composition du milieu (plus ou moins humide ou chargé en CO_2 ...), mais pas de son état (gazeux ou liquide) ni des conditions de température et de pression. On comprit donc que la hausse de pouvoir réfringent spécifique entre une vapeur et le liquide correspondant vient de l'augmentation de $n^2 + 2$ lors de la liquéfaction — s'accompagnant d'un renforcement des influences électriques entre les dipôles des molécules voisines, ce qui permet alors à $n^2 + 2$ de devenir notablement supérieur à 3. La conservation de la réfractivité moléculaire lors du passage de l'état liquide à l'état gazeux a été notée par Lorenz et Prytz, entre autres, mais elle n'est pas vérifiée par l'eau pure, car les corrélations d'orientation entre molécules d'eau à cause des liaisons H invalident le modèle du champ local de Lorentz ; cependant les liaisons H sont quasiment inexistantes dans l'air humide, et la loi de Clausius–Mossotti s'y applique [174, p. 63–68].

Mais puisqu'en première approximation [173, article IV]

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} \cong \frac{n^2-1}{3} \cong \frac{2(n-1)}{3} \quad (38)$$

(compte tenu de $n \cong 1$), chacune des deux lois antérieures n'est qu'une version approchée de la loi de Clausius–Mossotti ou Lorentz–Lorenz. Pour les calculs de réfraction astronomique, les approximations faites en (38) sont tolérables [129, paragraphe 2], donc on peut « conserver l'ancienne formule sans avoir à craindre une différence appréciable dans les résultats ». De plus, cela laisse le choix entre trois expressions différentes, alors on peut en profiter pour choisir celle qui nous arrange le mieux, selon la parité de l'indice polytropique j par exemple [175, p. 403].

Avec le cas de l'eau [176] nous avons vu que la loi de Lorentz–Lorenz n'est pas valable pour tout diélectrique linéaire local isotrope ; à 1 atm, de 15 °C à 100 °C la réfractivité moléculaire de l'eau ne reste pas constante, mais varie de 0,2 % — alors que les variations de μ et de n (à 588 nm) sont voisines de 4 % et 1 % respectivement. Cette variation résiduelle de réfractivité moléculaire vient des failles du modèle du champ local de Lorentz [174], qui sert à déduire certaines propriétés macroscopiques du diélectrique (comme n) à partir de quelques-unes de ses caractéristiques microscopiques (comme la polarisabilité de ses entités chimiques). Autre problème pour cette relation de Lorentz–Lorenz : dans les mélanges le champ local est différent pour chaque constituant [177]. La loi qui relie le mieux n à μ est « le 2^e développement du viriel », qui exprime la réfractivité moléculaire comme une série entière de la masse volumique ; son second terme est perceptible aux hautes pressions (de l'ordre de 10 MPa), et n'est connu qu'à 10 % près environ [167].

Pour des études précises de la réfractivité de l'air en un point M (qui sont un préliminaire indispensable pour la spectroscopie de précision, la télémétrie laser-Lune, etc.), des écarts à la loi de Gladstone–Dale

$$\eta(T(M), P(M), \lambda_0) := n(T(M), P(M), \lambda_0) - 1 \cong C(\lambda_0, M) \mu(T(M), P(M)) \ll 1 \quad (39)$$

et à celle des gaz parfaits sont effectivement pris en compte. Certes, les pressions considérées dans l'air gazeux ne nécessitent pas l'utilisation du 2^e développement du viriel [167], mais on ne se contente pas [162, 163, 165, 166, 173, 178, 179] de l'approximation (38) d'ordre 1 en $\eta := n - 1$. En outre, depuis les travaux d'Éleuthère Mascart (1837–1908) qui a mesuré, dans les années 1870, les variations de η avec P de manière interférentielle, on sait que celles-ci (à température et longueur d'onde fixées) sont non-linéaires [74, 75]. Mascart trouvait que la difficulté des mesures ne permettait pas de conclure à une non-proportionnalité de η et μ quand P varie, au contraire, curieusement, du cas où T varie : il avait nettement observé que, quand T augmente, la décroissance relative de η est plus rapide que celle de μ . On en déduisait que la non-linéarité de η vue en fonction de P (à T fixé) provient uniquement des écarts de l'air à la loi des gaz parfaits.

Mais Lorentz, en réanalysant en 1878 les données de Mascart sur les liquides, a montré [173, article II] que la constance de η/μ est expérimentalement moins bien satisfaite que la constance de la réfractivité moléculaire — pour un historique plus détaillé, voir [165]. On dit maintenant que η n'est pas approximativement proportionnel à μ , mais à un « facteur de densité », qui n'est pas non plus proportionnel à P/T . Tout cela complique la variation de la réfractivité de l'air avec la température Celsius t et la pression — voir les formules contemporaines et précises de Barrell et Sears [165], Edlén [178], Owens [179], Jones [162], Bönsch et Potulski [166] (en ordre chronologique). À la fin de [129, paragraphe 2], on montre comment, en suivant Bönsch et Potulski, on trouve (avec $t := T - T_0 := T - 273,15$ K)

$$\eta(T, P, \lambda_0) \cong \left[1 + \frac{0,5953 - (0,009\,876\, t/^{\circ}\text{C}) P}{10^8\, \text{Pa}} \right] \frac{M_a C(\lambda_0, M)}{RT_0} \frac{P}{1 + (0,003\,6610\, t/^{\circ}\text{C})}. \quad (40)$$

Notons que le site internet du NIST fournit des calculateurs en ligne (voir leurs adresses URL dans [129, paragraphe 5]), donnant la valeur numérique de l'indice de réfraction, en fonction de celles des divers paramètres (y compris le degré hygrométrique dont nous discutons l'influence dans [129, paragraphe 3]) ; nous achevons la présente discussion en rappelant que les raffinements que nous venons de voir sont utiles pour la spectroscopie de précision, mais pas pour l'étude de la réfraction astronomique, où une précision de 0,04 % suffit. Aussi, pour cette dernière, on considère encore actuellement que le terme entre crochets dans la relation (40) est constant (ses variations ayant des effets bien plus faibles que ceux des erreurs de mesure de T_S et P_S), ce qui revient à adopter la loi de Gladstone–Dale et celle des gaz parfaits. C'était déjà la conclusion de Bemporad et Puiseux [170, p. 17], et c'est ce que nous ferons pour toute la suite de notre étude, ainsi que dans [3].

6.2. Dispersion chromatique dans l'air

Le mathématicien Augustin Louis Cauchy (1789–1857) postulait que les gaz ne présentent pas de dispersion chromatique ; cela lui attira les foudres d'Arago à l'Académie des sciences en 1836 [180, 181], car celui-ci rappelle qu'il l'avait mesurée pour l'air (par deux méthodes d'optique géométrique, la première en 1812 et la seconde en 1815, comme le montrent ses registres d'observation [182, p. 738–741]) puis pour d'autres gaz, et que ce travail a donné lieu à l'article inaugural des *Annales de Chimie et de Physique* [73], mais que la dispersion avait été entrevue par Bouguer dès 1748 [56, paragraphe 1], puis par Euler en 1754, Lemonnier en 1761, Dollond en 1779, ainsi qu'Herschel en 1783, 1785 et 1805 ! Arago aurait pu rajouter Bessel à sa liste [183, p. XIV]...

La première mesure interférentielle de la dispersion de l'air a été effectuée par Ketteler en 1865, également avec un interféromètre de Jamin [184].

Avec une erreur maximale de 0,001 % sur la réfractivité de l'ancien air normal (i.e. sec, à 15 °C et 1 atm, avec 330 ppmv de CO₂ [129, paragraphe 1]) de l'ultraviolet (0,23 μm) à l'infrarouge proche (1,69 μm), on a, d'après Peck et Reeder en 1972 [161] :

$$10^8 \eta \cong \frac{5\,791\,817\, \mu\text{m}^{-2}}{238,0185\, \mu\text{m}^{-2} - \lambda_0^{-2}} + \frac{167\,909\, \mu\text{m}^{-2}}{57,362\, \mu\text{m}^{-2} - \lambda_0^{-2}}. \quad (41)$$

Cette formule garantit donc, quant à la dispersion de l'ancien air normal, la précision de 0,04 % requise pour l'estimation de la réfraction en astrométrie fine. D'autres travaux ont été publiés depuis, pour mettre en équations le rôle des constituants mineurs de l'air, pour accroître la précision, et pour étendre le domaine de validité ; parmi eux, ceux qui font le plus autorité sont les trois articles consécutifs de Ciddor [163, 167, 185]. Notons que le titre moyen de CO₂ en avril 2021 était 415 ppmv — d'où, par rapport à 330 ppmv, un accroissement relatif de réfractivité de

0,0045 % dans le visible. Dans [129, paragraphe 4], on évoque le comportement de la réfractivité de l'infrarouge jusqu'aux ondes radio.

Les phénomènes de réfraction atmosphérique peuvent donc être accompagnés d'effets chromatiques, comme les liserés rouge et bleu découverts (et correctement interprétés) en 1748 par Bouguer, avec son héliomètre, sur deux bords opposés de l'image du Soleil (respectivement en bas et en haut si elle est redressée [56, paragraphe 1]) ; tel est l'effet usuel de la dispersion atmosphérique, dont nous détaillerons les conséquences (avec la forme basique du fameux « rayon vert ») dans [3, paragraphe 9].

Dans des cas non standard, on enregistre parfois des effets curieux, encore partiellement inexpliqués, comme les observations télescopiques de Devaux en 1928 sur Vénus et Jupiter au Pic du Midi [186] :

« Parfois même il y a renversement complet des couleurs, renversement qui ne dure en général qu'un instant. Mais le 8 février, il y eut renversement complet pendant plus d'une minute ; le rouge occupait nettement la partie supérieure du disque de Vénus, avec cependant des oscillations marquées. [...] Le 11 février, le même phénomène s'est reproduit, mais moins nettement, et pendant moins longtemps ».

Probablement des ondes de gravité dans l'atmosphère sont intervenues dans ce cas. Il y a aussi une intrigante observation ancienne de Bessel, en 1842 :

« [...] quoique l'air parût être parfaitement clair, le rouge et le bleu du spectre étaient seuls visibles, de manière que l'étoile ressemblait en quelque sorte à une étoile double, composée d'une étoile rouge et d'une bleu » [187] ;

elle ressemble fortement à celle de Bauer et Danjon :

« Le 24 août 1922, pendant un séjour à l'observatoire Vallot au Mont Blanc, à l'altitude de 4 347 m, ces deux savants ont été témoins du phénomène suivant : La planète Vénus était près de l'horizon, pendant une bonne période de visibilité, et l'un des observateurs l'examinait à l'aide d'une lunette (objectif de 0,090 m ; grossissement 150), tandis que l'autre observateur la suivait à la jumelle. La planète paraissait *double* : l'une de ses images, celle du bas, était rouge, l'autre était verte. Un intervalle obscur, assez large, séparait les deux images. [...] le spectroscopie montre alors que, dans ce cas, le spectre se compose de deux bandes, l'une dans le vert, l'autre dans le rouge, avec suppression complète du jaune et de l'orangé. Le bleu est supprimé par la diffusion atmosphérique. [...] Quand la planète fut très rapprochée de l'horizon, l'observateur à la lunette vit, tout à coup, l'image rouge s'éteindre, puis quelques secondes après, ce fut le tour de l'image verte ! Le phénomène fut perçu par l'autre observateur, qui ne pouvait, à la jumelle, séparer les deux images, de la manière suivante : Vénus lui apparaissait comme un gros point orangé qui, brusquement, tourna au vert et garda cette teinte jusqu'au coucher définitif. » [188]

6.3. La prolifération des modèles d'atmosphère et des développements en série

Dans le premier quart du XIX^e siècle, on manque toujours de connaissances sur la haute atmosphère, mais des outils mathématiques puissants et une connaissance de plus en plus précise des propriétés de l'air sont disponibles. On voit donc se perfectionner les approches analytiques de l'intégrale de réfraction, avec des profils de réfractivité plus variés mais sans qu'il soit possible de contrôler leur adéquation avec la physique atmosphérique ; c'est l'époque de prédilection pour une approche mathématique pure.

En 1823, Ivory proposera dans la foulée de Laplace un modèle exploitant une idée similaire à celle du quatrième modèle étudié par ce dernier (cf. paragraphe 4), mais qui évite d'être fondé sur la variable Y dont la signification physique n'est pas basique : il combine linéairement [84, p. 453] la relation fondamentale du modèle isotherme (où P varie proportionnellement à μ), avec celle du modèle polytropique d'indice $j = 1$ (où P varie proportionnellement à μ^2) qui a aussi un défaut opposé à la précédente (l'une donne des réfractions trop fortes, et l'autre trop faibles). Ce modèle est élégant, mais Biot y pointera cependant quelques faiblesses [72], et le calcul de l'intégrale de réfraction n'est pas simple même avec les approximations traditionnelles [84, p. 458–475] — cependant il ne fait pas intervenir de fonction transcendante.

La nouvelle table de Bessel (1830) [133], évoquée au paragraphe 4, a une erreur inférieure à 1'' jusqu'à 80° de distance zénithale. De 80° à 88°, les nombres de la table française (celle de Laplace) dépassent ceux de l'allemande (de Bessel), de 4'' pour 88°, et 2' 44'' pour 90°. La valeur de χ_{Sh} selon Delambre (33' 46'') est mise en doute ; χ_{Sh} sert de test permettant de départager les diverses théories. Mais les tables de Laplace sont maintenues dans *La Connaissance des Temps*, probablement sous l'influence d'Arago (entré au Bureau des longitudes dès 1802) qui privilégiait les travaux français.

D'autres modèles d'atmosphère ont encore été proposés : par exemple, en 1865 celui de Hugo Gylden (1841–1896), où $T(z)$ est un polynôme de degré 2 ; les modèles d'Ivory ou Kowalski, avec $1 - (T/T_S)$ proportionnel à $1 - (\mu/\mu_S)$ ou $[1 - (\mu/\mu_S)]^{5/7}$ respectivement ; les lois des atmosphères polytropiques [189] d'indice j égal à environ 4 selon Ivory [48, 190, 191] ou 5 selon Bauernfeind [192] (elles impliquent que T est proportionnel à r^{-1} et μ à r^{-j}). Pour intégrer χ_{Sh} dans le cas de l'atmosphère polytropique, Ivory part d'une expression approchée voisine de (33), effectue un changement de variable au profit de T/T_S , puis un développement en série binomial (en fonction d'un paramètre de l'ordre de η_S), facilement intégrable terme à terme moyennant un changement de variable... Le dernier modèle à utiliser une intégrale donnée par la fonction K de Kramp — définie par (27) — est probablement celui d'Esclangon [193] : il montre qu'en supposant $\ln(\eta/\eta_S)$ proportionnel à $n_S^2 r_S^2 - n^2 r^2$, ce qui est bien vérifié dans l'atmosphère jusqu'à 13 km d'altitude au moins, l'intégrale approximative de Newton (8) s'exprime facilement à l'aide de K .

À titre de dernier exemple de calcul littéral avec la fonction K , citons l'hypothèse

$$\eta = \eta_S [(1 + \beta)e^{-\xi Y} - \beta e^{-2\xi Y}] \quad (42)$$

proposée par Radau [44, p. B.26] car, à partir de la forme approximative fondamentale (33) pour le voisinage de l'horizon astronomique, elle conduit à une expression qui s'accorde alors mieux avec l'expérience :

$$\begin{aligned} \chi_S &= \frac{\sqrt{2}\eta_S \xi}{2} \int_0^\infty [(1 + \beta)e^{-\xi Y} - 2\beta e^{-2\xi Y}] dY \Big/ \sqrt{Y + \frac{\tan^2 \psi'}{2}} \\ &= \sqrt{2}\eta_S \sqrt{\xi} \left[(1 + \beta) \exp\left(\xi \frac{\tan^2 \psi'}{2}\right) K\left(\sqrt{\frac{\xi}{2}} \tan \psi'\right) - \sqrt{2}\beta \exp(\xi \tan^2 \psi') K\left(\sqrt{\xi} \tan \psi'\right) \right]. \quad (43) \end{aligned}$$

Mais Radau lui-même critique cet usage des relations entre η et Y probablement initié par Laplace, et qui masque la structure de l'atmosphère considérée ; dans la pratique, il est plus réaliste d'utiliser directement les données de T et P en fonction de z (et on admet que celle de μ en découle par la loi des gaz parfaits), ou des relations empiriques entre deux de ces trois fonctions, en plus de la loi de l'hydrostatique

$$dP/dz = -\mu g. \quad (44)$$

Avec ses deux mémoires de 1882 et 1889 [44, 194], primés par l'Académie des sciences, Rodolphe Radau (1835–1911) nous livre un concentré du type de calculs effectués à l'époque,

et notamment les développements en série. Dans [3, sous-paragraphe 5.2] (complété par [195] qui est un commentaire historique dans ce numéro spécial) on montre en termes modernes le cheminement de Radau : il met l'intégrale (14) de la réfraction sous la forme

$$\chi_S = n_S r_S (\tan Z') \int_1^{n_S} n^{-2} r^{-1} [1 + F(n, Z')]^{-1/2} dn \quad (45)$$

où on a posé, en tenant compte de la relation entre r et n à Z' fixé,

$$F(n, Z') := \left(1 - \frac{n_S^2 r_S^2}{n^2 r^2}\right) \tan^2 Z'; \quad (46)$$

et, en considérant implicitement le domaine des directions d'observation usuelles, donc telles que $|F(n, Z')| < 1 \quad \forall n \in]1, n_S]$, il développe en série le crochet de (45) — sans se soucier de la légitimité de permuter l'intégration et la sommation infinie ! — ce qui le conduit à admettre

$$\chi_S = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p \tan^{2p+1} Z' \quad (47)$$

avec

$$a_p = r_S \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \int_1^{n_S} n_S n^{-2} r^{-1} \left(1 - \frac{n_S^2 r_S^2}{n^2 r^2}\right)^p dn \quad (48)$$

où $N!$ et $N!!$ désignent respectivement la factorielle et la double factorielle de N .

Ensuite, Radau estime les coefficients a_p en utilisant l'approximation fondamentale présente aussi dans (33), ainsi que diverses techniques (dont d'autres développements en série occultant la physique du phénomène !). En approximant par 1 le préfacteur $n_S n^{-2}$ dans l'équation (48), il trouve

$$a_0 \cong (n_S - 1) [1 - (H_1 / r_S)], \quad (49)$$

ce qui confirme le premier terme de la formule de Laplace (30). Avec cette formule, en l'appliquant au cas du modèle de Cassini (sous-paragraphe 2.1) on retrouve une propriété identique à celle que Bouguer a prise en défaut [103] : quand l'observateur s'élève, n_S restant constant mais H_1 diminuant dans ce modèle, χ_S augmenterait un tout petit peu...

Moyennant une approximation faite uniquement à titre pédagogique [3, sous-paragraphe 5.2.1] mais ne changeant rien à la conclusion générale de ce calcul, nous trouvons, pour une atmosphère à profil de réfractivité exponentiel,

$$\chi_S \cong (n_S - 1) \left[\left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p (2p-1)!! \left(\frac{H_1}{r_S} \tan^2 Z'\right)^p \right] \tan Z' \quad (50)$$

et on voit que cette série diverge, même violemment puisque $\lim_{p \rightarrow \infty} (2p-1)!! [(H_1 / r_S) \tan^2 Z']^p = \infty$. Radau obtient une expression similaire [44, p. B.14], et dit qu'elle donne une excellente approximation jusqu'à $Z' = 80^\circ$; le caractère alterné de la série (47), et impair (évident par symétrie) favorise l'obtention d'une bonne approximation. Mais pour $Z' = \arctan 10 \cong 84,3^\circ$ « la série diverge à partir » de $p = 5$ — tel que $a_5 \tan^{11} Z' \cong 10''$ [44, p. B.15]. Radau ne dit jamais explicitement (ni dans son mémoire ultérieur de 1889 sur le même sujet [194]) que la série approchée obtenue finalement pour $\chi_S(\tan Z')$ est semi-convergente, ni que $\lim_{p \rightarrow \infty} a_p \tan^{2p+1} Z' = \infty$ aussi petits que soient H_1 et même $\tan Z'$ (non nuls) ! Nous expliquons dans [3, sous-paragraphe 5.2.2], et plus en détail dans [195], d'où vient ce paradoxe gênant, qui nous fait toucher du doigt les limites de l'approche par développement en puissances de $\tan Z'$. Malgré cela, les tables de Radau ont été publiées dans *La Connaissance des Temps*, pour 1860 ; avec une constante légèrement modifiée, elles continuent à être utilisées de nos jours dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes* — alors que l'usage de la formule de Laplace a disparu définitivement de *La Connaissance des Temps* (nouvelle série depuis 1980) à partir de 1995.

Ce type d'approche de la réfraction astronomique était très répandu aux XVIII^e et XIX^e siècles, où de nombreuses études visant à approcher χ_S ainsi ont été effectuées. Malheureusement elles sont très lourdes : pour calculer les intégrales donnant les coefficients des développements, des méthodes subtiles d'intégration ont été parfois utilisées, notamment avec un théorème de Lagrange ([44, p. B.40], [196, p. 237]) ; nous avons vu aussi (au début de ce même sous-paragraphe) le cas d'une atmosphère polytropicque, pour laquelle la méthode d'Ivory donne les coefficients de la série exprimant χ_S eux-mêmes sous la forme de séries, d'où une série double — la dernière en date semblant être celle de Garfinkel en 1967 [196]. Un exemple paroxystique est le travail de Bauernfeind publié en 1864 [192], qui mène les calculs jusqu'à l'ordre 28 en sec Z' pour une atmosphère polytropicque d'indice 5... Quant à Ivory, son plus grand mérite n'est pas d'avoir étudié aussi une atmosphère polytropicque [48, 190, 191], ni d'avoir proposé un modèle d'atmosphère supplémentaire en 1823 [84], mais d'être le premier à montrer ([84, p. 467], [197]) que les développements de son époque sont seulement des développements limités pour une distance zénithale au voisinage de 0, et que ce ne sont pas des séries convergentes ; on dit dans ce cas que les développements sont semi-convergentes. Par chance leur divergence est lente, et ils ont quand même pu fournir des tables numériques d'assez bonne qualité pour une distance zénithale allant de 0° à 82°. Cet avertissement de 1821 resta en général ignoré, même par Newcomb, et valut à Ivory une controverse de 1821 à 1825 avec un Thomas Young indûment sarcastique [95, 198–200] ; les premiers qui retrouvèrent sérieusement cette idée furent Theodor von Oppolzer (1841–1886) [201, p. 18] puis Bruns en 1891 [159, p. 180]. Ivory était trop en avance sur ses collègues ! La notion de semi-convergence était nouvelle (et peu familière aux astronomes) : elle serait due aux *Exercices de Calcul Intégral* de Legendre [202, p. 267 et 294], où il discute des séries « demi-convergentes » dont le terme général décroît en valeur absolue (« converge ») puis croît (« diverge »).

Ivory est moins lucide sur les variations de réfraction horizontale (comparer [84, p. 424] et [84, p. 436]) : ses calculs montrent que la structure de la haute atmosphère influe peu, mais il déclare le contraire par ailleurs — comme s'il avait du mal à les croire ! Cela peut s'expliquer par le fait qu'en valeur absolue, les termes d'ordre plus élevé de (50) croissent plus vite avec Z' que les termes d'ordre inférieur, d'où l'idée fautive suivie par Ivory, Mathieu, Newcomb, etc. : que les moments d'ordre élevé de la dérivée de diverses puissances de μ [195, sous-paragraphe 3.1.2], et donc la structure de la haute atmosphère, joueraient un rôle important dans la réfraction près de l'horizon — dont on pourrait déduire cette structure ; c'est tout le contraire, comme l'avaient deviné Bessel, Biot, etc. Le caractère alterné de (50) fait que les évolutions des termes d'ordre élevé se compensent partiellement.

L'écriture sous forme de série, qui a connu tant de succès en mécanique céleste au XIX^e, a été suivie aussi pour la réfraction astronomique et a freiné la compréhension de ses propriétés — d'où l'idée fautive d'Ivory, suivi de Newcomb (et l'insatisfaction avouée par celui-ci dans son livre). En fait, aucun des profils d'atmosphère envisagés à cette époque n'est pleinement satisfaisant, puisqu'aucun ne correspond au profil réel. Mais au XIX^e siècle, en l'absence de moyens de calculs numériques puissants, c'était un pis-aller dont Newcomb écrivait en 1906 : « There is, perhaps, no branch of practical astronomy on which so much has been written as on this and which is still in so unsatisfactory a state » [132, p. 223] ; c'était quand même intéressant tant qu'on n'allait pas trop loin dans la somme de la série. C'est pourquoi Bemporad et Puiseux, dans leur article de synthèse sur les calculs de réfraction, notamment ceux de Bessel et Radau, écrivent : « Quand on réfléchit à la peine qu'ont demandée les développements analytiques des théories de la réfraction, et notamment les plus complets de ces développements élaborés par *H. Gylden* et *R. Radau*, on a le droit de penser que la réfraction astronomique s'obtiendra plus aisément par un simple calcul numérique (quadrature mécanique), qui tiendra compte directement des données de la physique de l'atmosphère. » [170, p. 37] En effet, lorsque les calculs littéraux,

même à grand renfort d'approximations, deviennent trop volumineux et utilisent des notions très sophistiquées, l'avantage qu'ils devaient apporter en termes de gain en compréhension et en temps s'amenuise, et le recours à une étude purement numérique perd son caractère frustrant.

6.4. *Autres observations ; passage aux calculs informatisés*

Rodolphe Radau était lié au *gentleman scientist* [203] Antoine d'Abbadie (1810–1897) — voir l'introduction de [195]. Celui-ci voulait étudier les changements d'azimut apparent dus à la réfraction — ce qui serait important pour les mesures géodésiques comme celles qu'il a faites lors de son exploration de l'Abyssinie et pour son établissement de la première cartographie de ce pays. Dès le début de la construction (1864–1870) de son château néo-gothique *Abbadia* dans le Pays Basque, il avait prévu des ouvertures dans les murs pour y installer les composants d'une lunette d'une vingtaine de mètres de focale visant le sommet de La Rhune. Mais cette expérience fut un échec, probablement par défaut de qualité des images. Au lieu de faire boucher ces ouvertures par la suite, d'Abbadie les a laissées apparentes, et a mis autour de l'une d'elles une pierre monumentale gravée d'une devise écrite par lui en basque : « *Ez ikusi, ez ikasi* » (« Je n'ai rien vu, je n'ai rien appris »).

D'Abbadie n'était pas le seul à s'intéresser à cette *réfraction latérale*. Sur ce terrain, il a été rejoint en 1880 par Bauernfeind, qui n'a rien trouvé non plus [122, p. 226–243]. Dans son manuel de géodésie de 1950, Gossett consacre une page à ce sujet, et dit : « The errors caused by horizontal [i.e., lateral] refraction may be of considerable size. Night observations have occasionally been found to be in error by five or six seconds because of horizontal refraction and daylight observations by two or three times that amount » [204, p. 135–136] ; mais cela semble exagéré. Le cas exceptionnel de réfraction latérale sur le lac Léman, décrit par Jurine et Soret pour le 17 septembre 1818, semble relever d'une erreur d'interprétation d'après Forel [109, p. 561–565]. En 1959, Danton considérait encore qu'à ce sujet il n'y a toujours rien de prouvé [205]. On en est au même point actuellement : « the rare reports of such sightings undoubtedly arose from misinterpretations of observations. » [206]

À l'époque de la parution des mémoires de Radau, apparaît un progrès dans les méthodes de mesure de χ_S , dû à Maurice Loewy (1833–1907), directeur de l'Observatoire de Paris de 1896 à 1907. Auparavant, pour permettre à un observateur d'observer à la lunette le ciel entier sans quitter son siège, Loewy avait inventé l'équatorial coudé, qu'il utilisa de 1883 à 1886 à Paris pour mesurer des positions d'astéroïdes, de comètes et de nébuleuses. Puis en 1886, Loewy tente de mesurer plus précisément, avec cet équatorial, la réfraction astronomique. Pour cela il place devant l'objectif un prisme d'angle 45° dont les faces sont argentées, de façon à superposer les images d'objets angulairement distants de 90° . En choisissant d'observer ainsi une paire d'étoiles qui sont initialement à la même hauteur, et en notant la variation d'écart vertical entre leurs images jusqu'à ce que l'une d'elles arrive à l'horizon, on en déduit des mesures précises de la réfraction. Loewy n'a pas publié ses résultats, mais en 1905 il réfléchissait encore à de nouvelles mesures, empêchées par son décès brutal.

À la fin de l'époque classique, deux principales voies d'étude s'offraient pour traiter de la réfraction astronomique : celle des intégrations plus ou moins rigoureuses de (14), mais avec des profils $n(r)$ non réalistes (comme ceux de Simpson–Mayer ou de Bouguer) ; celle des développements, qui malheureusement ne sont que semi-convergens (Ivory, Bauernfeind, Radau, Newcomb), mais donnent par chance des valeurs numériques satisfaisantes à condition de les tronquer à des termes d'ordre pas trop élevé.

De nos jours, il n'est plus nécessaire de choisir entre ces deux voies analytiques, car les moyens informatiques permettent un recours massif aux méthodes purement numériques. Nous détaillons dans [150, sous-paragraphe 3.1] l'histoire de la méthode de Biot–Auer–Standish [72, 152]

implémentée par Hohenkerk et Sinclair [207] pour le modèle du *Royal Greenwich Observatory* [208] reprenant celui de Garfinkel [196] et Saastamoinen [145] (une troposphère polytropique d'indice 4,256 surmontée d'une stratosphère isotherme) ; on a vu que c'est devenu la technique classique, recommandée par l'*Explanatory supplement to the Astronomical Almanac* depuis 1992.

Malgré cette caution, elle a ses faiblesses [150, sous-paragraphe 3.1], alors elle est concurrencée par la méthode de Kivalov et Young [209] ; et il existe d'autres modèles, comme ceux d'une atmosphère polytropique par morceaux [210].

Mais à la fin du XIX^e siècle, les propriétés de l'indice de l'air étant connues avec une précision suffisante pour la réfraction astronomique, on butait sur le problème des séries semi-convergentes et sur la méconnaissance de la structure de la haute atmosphère. Des ouvertures dans ces directions étaient attendues ; nous en mentionnerons deux.

7. Les ouvreurs

La première ouverture est purement théorique, due à Ernst Kummer (1810–1893). Il renouvelle l'étude traditionnelle de $\chi_S(\psi')$ en ayant l'idée [211], rare dans ce contexte, d'exploiter une méthode d'usage courant en mécanique : la discussion graphique d'une quadrature. Il montre ainsi que, dans des cas académiques de milieux à symétrie sphérique qui n'ont malheureusement pas d'existence matérielle, les rayons lumineux peuvent avoir des formes surprenantes. Son modèle peut quand même servir de première approche pour comprendre certains aspects de l'image de l'horizon. Or celle-ci est impliquée dans une des corrections qu'il faut appliquer aux mesures angulaires de position des astres utilisées pour la navigation astronomique ; on imagine l'embarras des sobres marins lorsqu'ils doivent faire le point mais qu'ils observent que l'horizon est double [212] — voir par exemple la photographie de [8, Figure 2]. Nous réservons cet article [8] aux mathématiques des corrections optiques indispensables en navigation astronomique, en lien avec la réfraction et l'analyse proposée par Kummer. Malheureusement, son travail fut trop original par rapport à ce qu'utilisaient les astronomes ; il a sombré dans l'oubli.

Une trentaine d'années plus tard, un autre mathématicien, Félix Hausdorff, s'intéresse, dans sa thèse [213–215] puis son habilitation [175], à la détermination de la structure de l'atmosphère (et surtout de sa partie haute, inaccessible à son époque) à partir de la réfraction puis de l'extinction : bel exemple de problème inverse, à l'historique duquel est consacré [53] dans ce numéro spécial. Bouguer et Biot considéraient à tort l'atmosphère bornée, mais ils savaient à juste titre que l'influence de la structure de ses parties hautes est infime sur la réfraction — [150, sous-paragraphe 3.3] dans ce numéro spécial.

Hausdorff retrouve cela... Bien des recherches au XIX^e, sur ce problème mal posé, ont ainsi été menées en pure perte !

En contrepartie, Hausdorff découvre de belles propriétés mathématiques de l'intégrale de réfraction, au moyen de changements de variable astucieux essentiellement [214]. À la suite de son professeur Heinrich Bruns (qui était lui-même élève de Kummer), il propose des développements en série plus rigoureux, reliant la réfraction à la structure de l'atmosphère ; dans son habilitation [175] il fait de même avec l'extinction, dont on sait (grâce au théorème de réfraction-extinction de Laplace) qu'elle est intrinsèquement liée à la réfraction. Ses expressions témoignent d'une grande virtuosité mathématique. Malheureusement elles ne sont pas plus utiles que les développements antérieurs ; et Hausdorff montre que les mesures de l'extinction n'étaient pas assez précises pour permettre de déduire la structure de l'atmosphère. Ce travail, n'ayant donc pas eu de suite, est tombé dans l'oubli. Hausdorff traite aussi du très faible effet de l'aplatissement de la Terre, ce qui témoigne encore de sa virtuosité ; puis il abandonnera ce sujet pour se tourner, avec bonheur, vers la topologie...

8. Conclusion

L'histoire ne s'arrête pas là...

Dans les années 1920, Harzer effectue le premier calcul numérique à partir de données météorologiques, où il tient compte de la saison, l'heure du jour, la vitesse du vent, etc. Les astronomes restent réticents : « The astronomer with long routine experience with meridian observations may be unpleasantly impressed by such an array of new factors to be considered... » [216, p. 226]

L'usage des ordinateurs n'a pas tari l'intérêt pour des formules empiriques : il paraît toujours des articles qui en proposent ou en font la synthèse [127, p. 635–636], [217] ; la plupart d'entre elles sont données avec un jeu unique de valeurs numériques de leurs coefficients, variables seulement dans les conditions et le profil d'atmosphère standard. Le calculateur en ligne <http://wise-obs.tau.ac.il/~eran/Wise/Util/Refraction.html> de l'Observatoire israélien Wise (dans le désert du Néguev) utilise l'une d'elles pour les hauteurs angulaires inférieures à 15° ; malheureusement, elle a le défaut déjà dénoncé théoriquement par Ivory en 1823 et que nous avons exposé au sous-paragraphe 2.2 — voir aussi [3, paragraphes 8 et 9.2].

Quant au problème inverse, dans un milieu à symétrie sphérique, il a été prouvé que c'est un problème mal posé au-dessus de l'observateur, mais bien posé au-dessous : il y a unicité de la solution [218], grâce à un argument de symétrie permettant d'éliminer l'effet de l'atmosphère située au-dessus de l'observateur [53, sous-paragraphe 9.2].

Les motivations actuelles pour étudier finement la réfraction sont de deux types. En géodésie-géophysique, elle conditionne les performances des mesures par VLBI, orbitographie satellitale, et GPS (les satellites utilisés étant souvent vus bas sur l'horizon, et la correction de célérité étant liée à la valeur de la réfraction) [146]. En astronomie-astrophysique, elle sert pour le pointage correct des télescopes et l'astrométrie, pour le bon usage des corrections de mesures photométriques ; selon Stone [49] la précision requise dans les mesures astrométriques fines est 0,05'' à plus de 20° de hauteur (où la réfraction est 147''), 1'' près de l'horizon (la réfraction horizontale étant 35' = 2 100'' dans les conditions normales), soit 0,04 % d'erreur tolérable. La réfraction astronomique est responsable de plusieurs effets indirects qui sont autant de problèmes pour l'astrométrie fine. Par exemple, la dispersion de l'air jointe à l'effet Purkinje (i.e. le passage du maximum de sensibilité de l'œil humain de 555 nm en vision photopique à 507 nm en vision scotopique [219, p. 68–69]), entraîne lors de ce passage une augmentation de 0,2'' de la hauteur apparente effective ψ'_e des étoiles vues à 45° du zénith [164]. Et ψ'_e varie aussi avec le type spectral, car le spectre de l'étoile en dépend (ainsi que de la classe de luminosité, mais moins) : ψ'_e varie de $-(0,022'' \pm 0,003'')$ tan Z' quand on avance d'un type spectral dans la classification, d'après van Herk [220].

La précision des tables actuelles est 0,3 % ; si on en veut une meilleure, il faut tenir compte de l'aplatissement terrestre, donner la température mieux qu'à 1 °C près, etc. ; des calculs personnalisés sont possibles, mais non tabulés. L'implémentation numérique traditionnelle d'Auer-Standish-Hohenkerk-Sinclair fonctionne bien pour les cas standard, mais reste à améliorer pour certains autres (voir la fin de [150, sous-paragraphe 3.1]).

Les télescopes spatiaux sont, certes, affranchis des effets de la réfraction ; mais leur nombre reste très limité par leur coût. Dans l'utilisation des techniques spatiales, la prise en compte précise de la réfraction est indispensable aussi, comme nous venons de le rappeler, pour la précision du GPS ainsi que de l'orbitographie satellitale. Quant aux exigences de l'astrométrie fine contemporaine, elles n'incitent guère à reléguer l'étude de la réfraction au musée des considérations dépassées.

Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

Remerciements

L'auteur exprime ses vifs remerciements au Dr. Andrew Young pour la mise à disposition de sa fastidieuse bibliographie en ligne (<https://aty.sdsu.edu/bibliog/bibliog.html>), et pour de très nombreux échanges scientifiques depuis l'an 2000 ; au Dr. Siebren van der Werf pour ses indications bibliographiques sur Kepler ; au Dr. François Mignard, pour son signalement de certaines sources historiques ; à Justine Fabre (Directrice du Patrimoine et des ressources scientifiques — Académie des sciences), pour son aide à la présentation correcte des listes de références de tous les articles de ce numéro spécial ; et au Prof. Michel Chastang, pour sa traduction d'un texte latin de Tycho Brahe.

Références

- [1] L. Dettwiller, « Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 103-132.
- [2] A. T. Young, « Did Monge really explain inferior mirages? », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 467-481.
- [3] L. Dettwiller, « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 63-102.
- [4] National Geospatial-Intelligence Agency, *American Practical Navigator BOWDITCH 2017 edition*, vol. 1, Paradise Cay 2033 Publications, Arcata (Californie), 2018.
- [5] National Geospatial-Intelligence Agency, *American Practical Navigator BOWDITCH 2017 edition*, vol. 2, Paradise Cay 2033 Publications, Arcata (Californie), 2018.
- [6] P. Brassier, *Navigations astronomique*, Vuibert, Paris, 1999, nouvelle édition.
- [7] UK Hydrographic, *Nautical Almanac 2020*, Paradise Cay Publications, Arcata (Californie), 2019.
- [8] L. Dettwiller, « La discussion par Kummer d'une quadrature sur la réfraction astronomique : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 503-525.
- [9] Regiomontanus, *Scripta Clarissimi Mathematici M. Ioannis Regiomontani*, Ioannem Montanum et Vlicum Neuberger, Nuremberg, 1544, édité par J. Schöner.
- [10] S. van der Werf, « Novaya Zemlya effect and Fata Morgana – Raytracing in a spherically non-symmetric atmosphere », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 365-389.
- [11] Cleomède, *Cleomedis de Motu Circulari Corporum Caelestium, Libri Duo*, B. G. Teubner, Leipzig, 1891, Édité par H. Ziegler.
- [12] H. E. Ross, « Cleomedes (ca. 1st century A.D.) on the celestial illusion, atmospheric enlargement, and size–distance invariance », *Perception* **29** (2000), n° 7, p. 863-871.
- [13] A. I. Sabra, « Psychology vs mathematics : Ptolemy and Alhazen on the moon illusion », in *Mathematics and its Applications to Science and Natural Philosophy in the Middle Ages* (E. Grant, J. E. Murdoch, eds.), Cambridge University, Cambridge, 1987.
- [14] M. Hershenson (éd.), *The Moon illusion*, LEA, Hillsdale (New Jersey), 1989.
- [15] H. Ross, C. Plug, *The Mystery of The Moon Illusion*, Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [16] F. Risner (éd.), *Opticae thesaurus. Alhazeni Arabis libri septem, nuncprimum editi. Eiusdem liber De Crepusculis et nubium ascensionibus. Item Vitellonis Thuringopoloni libri X*, Johnson Reprint Corp., New York, 1972, [réimpr. de l'édition originale de 1572].
- [17] T. Brahe, *Astronomiae instauratae progymnasmata*, Typis inchoata Vraniburgi Daniae, Prague, 1602 (J. Kepler, éd.).
- [18] J.-D. Cassini, *Specimen Observationum Bononiensium*, H. H. de Ducis, Bologne, 1656.
- [19] J. Le Rond d'Alembert, « Réfraction », in *Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, vol. XIII, Samuel Faulche & Cie, Neuchâtel, 1765, p. 892b-900a.
- [20] A. Koestler, *Les Somnambules – Essai sur l'histoire des conceptions de l'Univers*, Les Belles Lettres, Paris, 2010.
- [21] H. Chardak, *Tycho Brahé – L'homme au nez d'or*, Presses de la Renaissance, Paris, 2004.
- [22] P. Perrault, *De l'origine des fontaines*, Le Petit, Paris, 1674.
- [23] C. Huygens, *Traité de la Lumière*, Pierre Van der Aa, Leyde, 1690.
- [24] « Sur les réfractions astronomiques », *Hist. Acad. Roy. Sci. année 1714* (1717), p. 61-67.
- [25] J. Cassini, « Des réfractions astronomiques », *Mem. Acad. Roy. Sci. année 1714* (1719), p. 42-67, [réimpression à Amsterdam de la publication originale : Paris, *Mém. Acad. Roy. Sci. année 1714* (1717), p. 33-54].
- [26] F. Baily, *An Account of the Revd. John Flamsteed*, Lords Commissioners of the Admiralty, Londres, 1835.
- [27] P. Bouguer, *De la Méthode d'Observer Exactly sur Mer la Hauteur des Astres*, Claude Jombert, Paris, 1729.
- [28] « Sur les réfractions », *Hist. Acad. Roy. Sci. année 1749* (1753), p. 152-157.
- [29] W. H. Lehn, S. van der Werf, « Atmospheric refraction : a history », *Appl. Opt.* **44** (2005), p. 5624-5636.

- [30] J. Kepler, *Ad Vitellionem paralipomena, quibus Astronomiae pars optica traditur*, Claudium Marnium & Hæredes Ioannis Aubrii, Francfort, 1604.
- [31] J. Kepler, *Tabulae Rudolphinae*, J. Saurus, Ulm, 1627.
- [32] C. Scheiner, *Sol ellipticus : hoc est, novum et perpetuum Solis contrahi soliti phaenomenon quod noviter inventum Strenae loco*, Typis Christophori Magii, Augsburg, 1615.
- [33] L. Dettwiller, « La photométrie des éclipses de Lune, vue par František Link : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 537-555.
- [34] R. Descartes, *Les Principes de la Philosophie*, Le Gras, Paris, 1647.
- [35] E. Maignan, *Perspectiva horaria*, Rubei, Rome, 1648.
- [36] J. Arnould, *La Terre d'un clic – Du bon usage des satellites*, Odile Jacob, Paris, 2010.
- [37] P. S. Laplace, *Traité de Mécanique Céleste*, t. 4, livre 10, J. B. M. Duprat, Paris, 1805.
- [38] G. D. Cassini, « correspondance sur la réfraction », in *Ephemerides Novissimæ Motuum Coelestium Marchionis Corneli Malvasiae*, ex typographia Andreae Cassiani, Mvtnæ impensis avthoris, 1662.
- [39] T. Mayer, *Tabulae motuum Solis et Lunæ novæ et correctæ*, Typis Gulielmi et Johannis Richardson, Londres, 1770.
- [40] C. Wolf, *Histoire de l'Observatoire de Paris de sa fondation à 1793*, Gauthier-Villars, Paris, 1902.
- [41] J.-B. Delambre, *Astronomie Théorique et Pratique*, t. I, Courcier, Paris, 1814.
- [42] J. Lequeux, *L'Observatoire de Paris – 350 ans de science*, Gallimard / Observatoire de Paris, Paris, 2012.
- [43] A. T. Young, « Understanding astronomical refraction », *Observatory* **126** (2006), p. 82-115.
- [44] R. Radau, « Recherches sur la théorie des réfractions astronomiques », *Annales de l'Observatoire de Paris* **16** (1880), p. B.1-B.114.
- [45] J.-B. Delambre, *Histoire de l'astronomie moderne*, t. 2, Courcier, Paris, 1821.
- [46] J.-B. Delambre, *Histoire de l'Astronomie au Dix-Huitième Siècle* (C.-L. Mathieu, éd.), Bachelier, Paris, 1827.
- [47] E. Halley, « Some remarks on a late essay of Mr. Cassini, wherein he proposes to find, by observation, the parallax and magnitude of Sirius », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **31** (1720), p. 1-4.
- [48] J. Ivory, « On the atmospherical refraction », *Phil. Mag.* **57** (1821), p. 321-325.
- [49] R. C. Stone, « An accurate method for computing atmospheric refraction air », *Publ. Astron. Soc. Pac.* **108** (1996), p. 1051-1058.
- [50] I. B. Riccioli, *Astronomiæ Reformatæ Tomi Duo*, Ex Typographia Hæredis Victorij Benatij, Bologne, 1665.
- [51] G. D. Cassini, « De solis hypothesibus, & de refractionibus siderum ad dubia A. R. P. Io. Baptistæ Riccioli Soc. Iesu », in *Epistolæ Duæ Astronomicæ* (G. Montanari, éd.), Typographia Ferroniana, Bologne, 1666, p. 31-52.
- [52] J.-D. Cassini, « De solaribus hypothesibus et refractionibus epistolætres », in *Miscellanea italica physico-mathematica* (G. Roberti, éd.), Typographia Pisariana, Bologne, 1692, p. 281-340.
- [53] A. T. Young, « Relations among atmospheric structure, refraction, and extinction », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 179-212.
- [54] C. Bruhns, *Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwicklung*, Voigt & Günther, Leipzig, 1861.
- [55] J. Cassini, *Traité de la grandeur et de la figure de la Terre*, Pierre de Coup, Amsterdam, 1723.
- [56] L. Dettwiller, « L'invariant de Bouguer et ses conséquences : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 415-452.
- [57] J. H. Lambert, *Les propriétés remarquables de la route de la lumière*, H. Scheurleer F. Z. & Compagnie, La Haye, 1758.
- [58] L. Dettwiller, « Les développements de Lambert : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 453-465.
- [59] G. Le Gentil, *Voyage dans les mers de l'Inde*, vol. 1, Impr. royale, Paris, 1779.
- [60] P. de la Hire, « Remarques sur les observations des refractions, tirées du Livre intitulé, *Refractio Solis inoccidui in Septentrionalibus oris, jussu Caroli XI. Regis Suevorum, &c.* à Joanne Bilberg Holmiæ. 1695 », *Mem. Acad. Roy. Sci.* (1700), p. 37-38.
- [61] « Sur les refractions », *Hist. Acad. Roy. Sci. année 1700* (1761), p. 112-116.
- [62] « Sur les refractions », *Hist. Acad. Roy. Sci. année 1706* (1731), p. 101-103.
- [63] A. Mayrargue, « Air, lumière et matière réfractive », *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie* **44** (2009), p. 47-60.
- [64] J.-P. Maraldi, « Expériences du barometre faites sur diverses montagnes de France », *Mem. Acad. Roy. Sci.* **1703** (1720), p. 229-237.
- [65] J.-D. Cassini, « Des irregularitez de l'abaissement apparent de l'horizon de la mer », *Mem. Acad. Roy. Sci.* **1707** (1730), p. 195-197.
- [66] A. Cassini, « Perinaldo, pays d'astronomes : à la recherche des lieux cassiniens », in *Sur les traces des Cassini – Astronomes et observatoires du sud de la France* (P. Brouzeng, S. Débarbat, éd.), Éditions du CTHS, Paris, 2001, p. 33-42.
- [67] J.-D. Cassini, J. Cassini, « Observations astronomiques faites dans les voyages de France et d'Italie en 1694, 95, 96 », manuscrit numérisé de la Bibliothèque de l'Observatoire de Paris, B4/3 (128). Bibliothèque numérique - Observatoire de Paris, consulté le 11 août 2022, <https://bibnum.obspm.fr/ark:/11287/2pB4l>.
- [68] J.-D. Cassini, J. Cassini, « Observations astronomiques faites dans les voyages de France et d'Italie en 1694, 95, 96 », *Mém. Acad. Roy. Sci.* **VII** (1729), p. 463-533.

- [69] F. Mignard, « Les tables de réfraction astronomique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 133-178.
- [70] A. J. Perkins, « King Charles and the Founding of the Royal Observatory », in *The History of Celestial Navigation – Rise of the Royal Observatory and Nautical Almanacs* (P. Kenneth Seidelmann, C. Y. Hohenkerk, éd.), Springer Nature, Cham (Suisse), 2020, p. 21-67.
- [71] J.-L. la Grange, « Sur les réfractions astronomiques », *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres (Berlin), Année MDCCLXXII [1772]* (1774), p. 259-282.
- [72] J.-B. Biot, « Sur les réfractions astronomiques », *Additions à la Connaissance des Temps* **1839** (1836), p. 3-114.
- [73] F. Arago, T. Petit, « Sur les puissances réfractives et dispersives de certains liquides et des vapeurs qu'ils forment », *Ann. Chim. Phys.* **1** (1816), p. 1-9.
- [74] E. Mascart, « Sur la réfraction des gaz », *C. R. Acad. Sci. Paris* **78** (1874), p. 617-621.
- [75] E. Mascart, « Sur la réfraction des gaz », *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris* **6** (1877), p. 9-78.
- [76] J. F. Scott (éd.), *The Correspondence of Isaac Newton*, vol. IV, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- [77] J. Lowthorp, « An experiment of the refraction of the air made at the command of the Royal Society, Mar. 28. 1699 », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **21** (1699), p. 339-342.
- [78] C. Kramp, *Analyse des Réfractions Astronomiques et Terrestres*, Dannbach, Strasbourg, an VII – et Schwikkert, Leipzig, 1799.
- [79] J.-B. Biot, « Analyse des Tables de Réfraction construites par Newton, avec l'indication des procédés numériques par lesquels il a pu les calculer », *J. Savants* **1836** (1836), p. 735-754.
- [80] D. T. Whiteside, « Kepler, Newton and Flamsteed on refraction through a 'regular aire': the mathematical and the practical », *Centaurus* **24** (1980), p. 288-315.
- [81] W. Lehn, « Isaac Newton and the astronomical refraction », *Appl. Opt.* **47** (2008), p. H95-H105.
- [82] J. Brinkley, « A method of computing astronomical refractions for objects near the horizon », *Trans. Roy. Irish Acad.* **13** (1818), p. 165-173.
- [83] J. Ivory, « On Mayer's formula for the astronomical refraction », *Phil. Mag.* **58** (1821), p. 341-347.
- [84] J. Ivory, « On the astronomical refractions », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **113** (1823), p. 409-495.
- [85] N. Maskelyne, « Concise rules for computing the effects of refraction and parallax in varying the apparent distance of the Moon from the Sun or a star », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **54** (1764), p. 263-276.
- [86] F. W. Bessel, *Fundamenta astronomiæ pro anno MDCCLV: deducta ex observationibus per annos 1750-1762 institutis viri incomparabilis James Bradley in specula astronomica Grenovicensi*, F. Nicolovium, Regiomonti (Königsberg), 1818.
- [87] F. W. Bessel, *Astronomische Beobachtungen auf der Universitäts-Sterwarte zu Königsberg*, vol. 8, 1822.
- [88] R. Main, « On the Value of the Constant of Refraction, as determined from Zenith Distance Observations of Stars near the North and the South Horizon, at the Royal Observatory, Greenwich, in the Years from 1836 to 1854 », *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **26** (1858), p. 45-130.
- [89] Y. Nazé, *Astronomie de l'étrange – Individus singuliers – Objets bizarres – Idées insolites*, Belin, Paris, 2021.
- [90] I. Newton, *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, vol. II, Royal Society, Londres, 1687.
- [91] R. Hooke, *Micrographia or Some Physiological Descriptions of Minute Bodies*, John Martyn and James Allestry, Londres, 1665.
- [92] I. Newton, *Opticks*, Royal Society, Londres, 1704.
- [93] E. Halley, « Some remarks on the allowances to be made in astronomical observations for the refraction of the air », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **31** (1721), p. 169-172.
- [94] B. Taylor, *Methodus Incrementorum directa & inversa*, Gul. Innys, Londres, 1715.
- [95] « An extension of the inverse series for the computation of refraction, together with a direct solution of the problem », *Quart. J. Sci. Lit. & Arts* **16** (1823), p. 139-148.
- [96] J. Gapaillard, « Pierre Bouguer, Lacaïlle et la mesure du méridien », in *Éprouver la science : Pierre Bouguer et le premier XVIII^e siècle, Actes du colloque Nantes-Le Croisic, 6-7 juin 1998*, S & TP, II^e série, vol. 3, 1999, p. 233-252.
- [97] A. Simaan, *La science au péril de sa vie – Les aventuriers de la mesure du monde*, Vuibert / ADAPT, Paris, 2001.
- [98] J.-P. Luminet, *Histoires extraordinaires et insolites d'astronomes*, Buchet / Chastel, Paris, 2022.
- [99] C.-E. Cassini de Thury, *La Méridienne de l'Observatoire royal de Paris, Vérifiée dans toute l'étendue du Royaume par de nouvelles Observations*, Guérin, Paris, 1744.
- [100] F. Trystram, *Le procès des étoiles*, Seghers, Paris, 1979.
- [101] P. Murdin, *Full Meridian of Glory*, Springer, New York, 2009.
- [102] N. Bowditch, *Mécanique Céleste. By the Marquis de La Place, translated, with a commentary*, vol. IV, Little and Brown, Boston, 1839.
- [103] « Sur les réfractions astronomiques année 1739 », *Hist. Acad. Roy. Sci.* (1741), p. 45-48.
- [104] L. Dettwiller, « Properties of optical ducts, their chromatism and its effects on astronomical refraction », *preprint*, 2022, <https://arxiv.org/abs/2204.02605>.
- [105] P. Bouguer, « Sur les réfractions astronomiques dans la Zone Torride », *Mém. Acad. Roy. Sci. année 1739* (1741), p. 407-423.

- [106] P. Bouguer, « Second mémoire sur les réfractions astronomiques, observées dans la Zone Torride ; avec diverses remarques sur la manière d'en construire les Tables », *Mém. Acad. Roy. Sci. année 1749* (1753), p. 75-112.
- [107] H. L. Sawatzky, W. H. Lehn, « The Arctic mirage and the early North Atlantic », *Science* **192** (1976), p. 1300-1305.
- [108] L. Dettwiller, « Some theorems on "arctic mirages" : *hillingar* effect and superior mirages », *J. Opt. Soc. Am. A* **36** (2019), p. 1997-2004.
- [109] F.-A. Forel, *Le Léman — Monographie limnologique*, t. 2, F. Rouge, Lausanne, 1895.
- [110] R. Woltmann, « Bemerkungen über ein Katoptrisches Phänomen, welches an den Gegenständen nahe am Horizont nicht selten sichtbar ist », *Neuere Abhandlungen der königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften* **3** (1798), p. 69-97.
- [111] F. W. Bessel, « Auszug aus einem Schreiben des Herrn Professors und Ritters Bessel an den Herausgeber », *Astron. Nachr.* **2** (1823), p. 381-386.
- [112] J. Hellerich, « Beobachtung der Strahlenbrechung in der Nähe des Horizontes », *Astr. Nachr.* **232** (1928), p. 57-66.
- [113] B. E. Schaeffer, W. Liller, « Variability in the astronomical refraction of the rising and setting Sun », *Publ. Astron. Soc. Pac.* **102** (1990), p. 796-805.
- [114] R. D. Sampson, E. P. Lozowski, A. E. Peterson, D. P. Hube, « Variability in the astronomical refraction of the rising and setting Sun », *Publ. Astron. Soc. Pac.* **115** (2003), p. 1256-1261.
- [115] M. E. Tschudin, « Refraction near the horizon – An empirical approach. Part 2 : variability of astronomical refraction at low positive altitude (LPAAR) », *Observatory* **139** (2019), p. 29-68.
- [116] D. Brandes, « Einige kritische Bemerkungen zu den in den Annalen befindlichen Aufsätzen über die irdische Strahlenbrechung, und Nachricht von der Vollendung seiner Refractions-Beobachtungen », *Gilb. Ann. Physik* **23** (1806), p. 380-393.
- [117] J. Glaisher, « An account of meteorological and physical observations in three balloon ascents made in the years 1865 and 1866 », *Report of the Thirty-Sixth Meeting of the British Association for the Advancement of Science* (1867), p. 367-401.
- [118] E. von Oppolzer, « Strahlenbrechung », in *Handwörterbuch der Astronomie* (W. Valentiner, éd.), vol. IIIb, Verlag von Eduard Trewendt, Breslau, 1901, p. 548-601.
- [119] J. Ivory, « Note on the astronomical refractions », *Astr. Nachr.* **12** (1835), p. 109-114.
- [120] P. C. le Monnier, « Examen des causes générales, des principes de Physique, & de ce qui a porté les Observateurs au siècle précédent, à publier des Tables des Réfractions qui diffèrent les unes des autres pour les mêmes hauteurs », *Mémoires Math. Phys. Acad. Roy. Sci.* (1780), p. 87-93.
- [121] C. Sugawa, « On the effect of the anomalous refraction on the latitude observations », *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **8** (1956), p. 27-39.
- [122] C. M. von Bauernfeind, « Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion. Erste Mittheilung enthaltend die Feststellung von Thatsachen », *Abhandlungen der II. [math.-phys.] Classe d. k. bayer. Akad. Wiss. München* **13** (1880), p. 179-310.
- [123] C. M. von Bauernfeind, « Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion. Zweite Mittheilung enthaltend weitere Thatsachen und ihre Erklärung », *Abhandlungen der II. [math.-phys.] Classe d. k. bayer. Akad. Wiss. München* **15** (1886), p. 1-102.
- [124] C. M. von Bauernfeind, « Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion », *Abhandlungen der II. [math.-phys.] Classe d. k. bayer. Akad. Wiss. München* **16** (1888), p. 517-567.
- [125] A. Thom, « An empirical investigation of atmospheric refraction », *Emp. Surv. Rev.* **14** (1958), p. 248-262.
- [126] L. Euler, « De la réfraction de la lumière en passant par l'atmosphère selon les divers degrés tant de la chaleur que de l'élasticité de l'air », *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin Année MDCCLIV* (1756), n° 10, p. 131-172.
- [127] F. Mignard, V. Brumberg, « Corrections pour la réduction des observations optiques », in *Introduction aux éphémérides et phénomènes astronomiques – Supplément explicatif à la Connaissance des Temps* (J. Berthier, P. Descamps, F. Mignard, éd.), IMCCE / EDP Sciences, Paris, 2021, p. 597-643.
- [128] T. Simpson, *Mathematical Dissertations on a Variety of Physical and Analytical Subjects*, T. Woodward, Londres, 1743.
- [129] L. Dettwiller, « Short review on the refractive index of air as a function of temperature, pressure, humidity and ionization », *preprint*, 2022, <https://arxiv.org/abs/2204.02603>.
- [130] J. Lalande, *Astronomie*, vol. 2, La Veuve Desaint, Paris, 1771.
- [131] Laugier, « Note sur la formule proposée par M. Faye pour calculer les réfractions astronomiques », *C. R. Acad. Sci.* **39** (1854), p. 521-524.
- [132] S. Newcomb, *A Compendium of Spherical Astronomy*, Macmillan, New York, 1906.
- [133] F. W. Bessel, *Tabulae Regiomontanae reductionum observationum astronomicarum ab anno 1750 usque ad annum 1850 computatae*, Borntraeger, Regiomonti Prussorum (Königsberg), 1830.
- [134] W. Chauvenet, *Manual of Spherical and Practical Astronomy*, vol. 2, Lippincott, Philadelphie, 1906.
- [135] A. Warusfel, *Euler – Les mathématiques et la vie*, Vuibert, Paris, 2009.

- [136] J. Ivory, « Calculation of the horizontal refraction in an atmosphere of uniform temperature », *Phil. Mag.* **59** (1822), p. 90-93.
- [137] R. Radau, « Tables de l'intégrale $\psi(Z) = e^{Z^2} \int_Z^\infty e^{-t^2} dt$ », *Ann. Obs. Paris* **18** (1885), p. B.1-B.25.
- [138] J.-P. Poirier, *Jean-Baptiste Biot (1774-1862) Un savant méconnu*, Hermann, Paris, 2011.
- [139] N. Bowditch, *Mécanique Céleste. By the Marquis de La Place, translated, with a commentary*, vol. I, Hilliard, Gray, Little, and Wilkins, Boston, 1829.
- [140] N. Bowditch, *Mécanique Céleste. By the Marquis de La Place, translated, with a commentary*, vol. II, Hilliard, Gray, Little, and Wilkins, Boston, 1832.
- [141] N. Bowditch, *Mécanique Céleste. By the Marquis de La Place, translated, with a commentary*, vol. III, Hilliard, Gray, Little, and Wilkins, Boston, 1834.
- [142] F. Arago, J.-B. Biot, C.-L. Largeteau, « Rapport fait au Bureau des longitudes – Sur des Tables de réfractions astronomiques calculées, d'après la théorie de Laplace, par M. Caillet, Examineur de la Marine », *Additions à la Connaissance des Temps* **1851** (1848), p. 3-8.
- [143] V. Caillet, *Tables de réfractions astronomiques, calculées par M. V. Caillet, précédées d'un rapport fait au Bureau des longitudes, par M. Largeteau*, Mallet-Bachelier, Paris, 1854.
- [144] Bureau des longitudes, *Connaissance des Temps* **1810** (1808).
- [145] J. Saastamoinen, « Contributions to the theory of atmospheric refraction. Part II. Refraction corrections in satellite geodesy », *Bull. Géodésique* **47** (1973), p. 13-34.
- [146] Í. Rapp-Arrará, J. M. Domingo-Santos, « Extinction, refraction, and delay in the atmosphere », *J. Geophys. Res.* **113** (2008), article n° D20116.
- [147] F. Kasten, A. T. Young, « Revised optical air mass tables and approximation formula », *Appl. Opt.* **28** (1989), p. 4735-4738.
- [148] A. T. Young, « Air mass and refraction », *Appl. Opt.* **33** (1994), p. 1108-1110.
- [149] F. Arago, « Mémoire sur la méthode des interférences appliquée à la recherche des indices de réfraction », in *Œuvres complètes* (J.-A. Barral, éd.), Gide, Paris, 1858, t. 10, p. 312-334.
- [150] L. Dettwiller, « Le théorème de Biot et le changement de variable de Biot–Auer–Standish : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 483-501.
- [151] J.-B. Biot, « Sur les réfractions astronomiques », *C. R. Acad. Sci.* **3** (1836), p. 237-244.
- [152] L. H. Auer, E. M. Standish, *Astronomical Refraction : Computational Method for all Zenith Angles*, Yale University Astronomy Dept., 1979.
- [153] P. K. Seidelmann, *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, University Science Books, Mill Valley (Californie), 1992.
- [154] L. H. Auer, E. M. Standish, « Astronomical refraction : computational method for all zenith angles », *Astron. J.* **119** (2000), p. 2472-2474.
- [155] J. Brinkley, « Analytical investigations respecting astronomical refractions and the application thereof to the formation of convenient tables together with the results of observations of circumpolar stars, tending to illustrate the theory of refractions », *Trans. Roy. Irish Acad.* **12** (1815), p. 77-118.
- [156] J.-B. Biot, F. Arago, « Mémoire sur les affinités des corps pour la lumière, et particulièrement sur les forces réfringentes des différens gaz », *Mém. Inst.* **7** (1806), p. 39-66.
- [157] A. T. Young, « Sunset Science. IV. Low-Altitude Refraction », *A. J.* **127** (2004), p. 3622-3637.
- [158] J. H. Gladstone, T. P. Dale, « Researches on the refraction, dispersion, and sensitiveness of liquids », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **153** (1863), p. 317-343.
- [159] H. Bruns, « Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung », *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Classe* **43** (1891), p. 164-227.
- [160] B. Edlén, « The dispersion of standard air », *J. Opt. Soc. Am.* **43** (1953), p. 339-344.
- [161] E. R. Peck, K. Reeder, « Dispersion of air », *J. Opt. Soc. Am.* **62** (1972), p. 958-962.
- [162] F. E. Jones, « The refractivity of air », *J. Res. NBS* **86** (1981), p. 27-32.
- [163] P. E. Ciddor, « Refractive index of air : new equations for the visible and near infrared », *Appl. Opt.* **41** (1996), p. 1566-1573.
- [164] R. C. Stone, « The effect of differential color refraction on declinations determined in meridian circle programs », *Astron. Astrophys.* **138** (1984), p. 275-284.
- [165] H. Barrell, J. E. Sears, « The refraction and dispersion of air for the visible spectrum », *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A* **238** (1939), p. 1-64.
- [166] G. Bönsch, E. Potulski, « Measurement of the refractive index of air and comparison with modified Edlén's formulae », *Metrologia* **35** (1998), p. 133-139.
- [167] P. E. Ciddor, « Refractive index of air : 3. The roles of CO₂, H₂O, and refractivity virials », *Appl. Opt.* **41** (2002), p. 2292-2298.
- [168] F. Hauksbee, *Physico-Mechanical Experiments on Various Subjects*, R. Brugis, Londres, 1709.
- [169] J. Jamin, « Mémoire sur la mesure des indices de réfraction des gaz », *Ann. Chim. Phys.* **49** (1857), p. 282-303.

- [170] A. Bemporad, P. Puiseux, « Réfraction et Extinction », in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées. T. 7 – Astronomie*, vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1913, p. 14-67.
- [171] O. F. Mossotti, « Azioni e deformazioni nei dielettrici », *Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle Scienze Residente in Modena* **24** (1850), p. 49-74.
- [172] R. Clausius, *Die Mechanische Wärmetheorie*, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1879.
- [173] H. A. Lorentz, « Concerning the relation between the velocity of propagation of light and the density and composition of media », *Verh. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam* **18** (1878), p. 1-119, in *Collected papers*. t. 2, Nijhoff, La Hague, 1936.
- [174] M. Bertin, J.-P. Faroux, J. Renault, *Électromagnétisme 4 – milieux diélectriques et milieux aimantés*, Dunod Université, Paris, 1984.
- [175] F. Hausdorff, « Ueber die Absorption des Lichtes in der Atmosphäre », *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Classe* **47** (1895), p. 401-482.
- [176] A. B. Djurišić, B. V. Stanić, « Modeling the temperature dependence of the index of refraction of liquid water in the visible and the near-ultraviolet ranges by a genetic algorithm », *Appl. Opt.* **38** (1999), p. 11-16.
- [177] C. J. F. Böttcher, *Theory of Electric Polarisation*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1952.
- [178] B. Edlén, « The refractive index of air », *Metrologia* **2** (1966), p. 71-80.
- [179] J. C. Owens, « Optical refractive index of air: dependence on pressure, temperature and composition », *Appl. Opt.* **6** (1967), p. 51-59.
- [180] F. Arago, « Correspondance », *C. R. Acad. Sci.* **3** (1836), p. 233.
- [181] F. Arago, « Réclamation de M. Arago au sujet de la lettre de M. Cauchy à M. Libri, insérée dans le Compte Rendu de la séance du 3 octobre », *C. R. Acad. Sci.* **3** (1836), p. 459-462.
- [182] F. Arago, « Sur les pouvoirs dispersifs », in *Œuvres complètes. Tome 11* (J.-A. Barral, éd.), vol. 2, Gide, Paris, 1859, p. 733-748.
- [183] F. W. Bessel, « Strahlenbrechungen nahe am Horizonte », in *Astronomische Beobachtungen auf der Königlich Universitäts-Sternwarte in Königsberg*, Achte Abtheilung, Universitäts-Buchhandlung, Königsberg, 1823, p. IX-XVI.
- [184] E. Ketteler, « Ueber die Dispersion des Lichts in den Gasen », *Ann. Phys. (Leipzig)* **200** (1865), p. 390-406.
- [185] P. E. Ciddor, R. J. Hill, « Refractive index of air : 2. Group index », *Appl. Opt.* **38** (1999), p. 1663-1667.
- [186] J. Devaux, « Sur le "rayon vert" », *L'Astronomie* **42** (1928), p. 384-389.
- [187] F. W. Bessel, « Sur la réfraction astronomique », *C. R. Acad. Sci.* **15** (1842), p. 181-185.
- [188] E. Touchet, « Sur le "rayon vert" », *La Nature (Paris)* **53** (1925), p. 358-366.
- [189] J.-C.-E. Schmidt, *Theorie der Astron. Strahlenbrechung*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1828.
- [190] J. Ivory, « Letter on the astronomical refractions », *Phil. Mag.* **63** (1824), p. 418-427.
- [191] J. Ivory, « On the constitution of the atmosphere », *Phil. Mag.* **66** (1825), p. 81-93, 241-250.
- [192] C. M. Bauernfeind, « Die atmosphärische Strahlenbrechung », *Astron. Nachr.* **62** (1864), p. 209-252.
- [193] E. Esclangon, « Sur la réfraction astronomique », *C. R. Acad. Sci.* **216** (1943), p. 100-103.
- [194] R. Radau, « Essai sur les réfractions astronomiques », *Annales de l'Observatoire de Paris* **19** (1889), p. G.1-G.90.
- [195] L. Dettwiller, « Les développements de Radau et leur divergence : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 527-536.
- [196] B. Garfinkel, « Astronomical refraction in a polytropic atmosphere », *Astron. J.* **72** (1967), p. 235-254.
- [197] J. Ivory, « On the new method proposed by Dr. Young for calculating the atmospherical refraction », *Phil. Mag.* **58** (1821), p. 161-168.
- [198] T. Young, « Apology for the Postscript on Refraction, in answer to Mr. Ivory's remarks », *Quart. J. Sci. Lit. & Arts* **12** (1822), p. 390-396.
- [199] T. Young, « The variation of the Temperature of the atmosphere deduced from the mean Refraction », *Quart. J. Sci. Lit. & Arts* **12**, p. 396-398.
- [200] T. Young, « Historical sketch of the various solutions of the problem of atmospherical refraction, from the time of Dr. Brook Taylor, to that of the latest computations », *Quart. J. Sci.* **18** (1825), p. 347-378.
- [201] Th. v. Oppolzer, « Über die astronomische Refraction », *Denkschriften kaiserl. Akademie der Wiss., Wien, Math.-Naturwiss. Cl.* **53** (1887), p. 1-52.
- [202] A.-M. Legendre, *Exercices de Calcul Intégral, sur divers ordres de Transcendantes et sur les quadratures*, Courcier, Paris, 1811-1817.
- [203] J.-P. Poirier, *Antoine d'Abbadie Voyageur et physicien du globe au XIX^e siècle*, Hermann, Paris, 2009.
- [204] F. R. Gossett, *Manual of Geodetic Triangulation (U.S. Dept. of Commerce Special Pub. No. 247)*, Government Printing Office, Washington, DC, 1950.
- [205] A. Danjon, *Astronomie générale – Astronomie sphérique et éléments de mécanique céleste*, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1986, 2^e éd., nouveau tirage, 1^e éd. 1959.
- [206] T. S. Glickman, *Glossary of Meteorology*, 2^e éd., American Meteorological Society, Boston, 2000.
- [207] C. Y. Hohenkerk, A. T. Sinclair, « The Computation of Angular Atmospheric Refraction at Large Zenith Angles », *Nautical Almanach Office Tech. Note* (1985), article n° 63.

- [208] A. T. Sinclair, « The effect of atmospheric refraction on laser ranging data », *Nautical Almanach Office Tech. Note* (1982), article n° 59.
- [209] S. N. Kivalov, A. T. Young, « Horizontal magnification of finite-sized celestial objects », *Appl. Opt.* **49** (2010), p. 2720-2727.
- [210] S. Mikkola, « Refraction in a piecewise polytropic atmosphere », *Astron. & Astrophys.* **94** (1981), p. 20-24.
- [211] E. E. Kummer, « Mémoire sur la réfraction atmosphérique par M. Kummer », *Ann. Chim. Phys.* **61** (1861), p. 496-507, traduit par É. Verdet de "Über atmosphärische Strahlenbrechung", *Monatsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* **5** (1860), p. 405-420.
- [212] H. C. Freiesleben, « Luftspiegelung nach oben », *Ann. Hydrog. u. Maritimem Met.* **62** (1934), p. 426.
- [213] F. Hausdorff, « Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung », *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-phys. Classe* **43** (1891), p. 491-566.
- [214] F. Hausdorff, « Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung », *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-phys. Classe* **45** (1893), p. 120-162.
- [215] F. Hausdorff, « Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung », *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-phys. Classe* **45** (1893), p. 758-804.
- [216] G. C. Comstock, « The atmospheric refraction », *Pop. Astron.* **37** (1929), p. 222-231.
- [217] A. D. Wittmann, « Astronomical refraction: formulas for all zenith distances », *Astron. Nachr.* **318** (1997), p. 305-312.
- [218] W. D. Bruton, G. W. Kattawar, « Unique temperature profiles for the atmosphere below an observer from sunset images », *Appl. Opt.* **36** (1997), p. 6957-6961.
- [219] Y. Le Grand, *Optique physiologique. t. 2 Lumière et couleurs*, 2^e éd., Masson, Paris, 1972.
- [220] A. van Herk, « The influence of the spectral type of a star on its declination as derived from meridian-circle observations », *Bull. Astron. Inst. Netherlands* **11** (1952), p. 489-493.