



INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus

Physique

Luc Dettwiler

Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique

Volume 23, Special Issue S1 (2022), p. 63-102

Published online: 8 March 2023

Issue date: 27 October 2023

<https://doi.org/10.5802/crphys.113>

Part of Special Issue: Astronomie, atmosphères et réfraction

Guest editors: Pierre Léna (Professeur émérite, Observatoire de Paris et Université Paris Cité, membre de l'Académie des sciences) and Luc Dettwiler (Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France)



This article is licensed under the
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION 4.0 INTERNATIONAL LICENSE.
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



*Les Comptes Rendus. Physique sont membres du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte*
www.centre-mersenne.org
e-ISSN : 1878-1535



Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique

Remarkable properties of astronomical refraction in a spherically symmetric atmosphere

Luc Dettwiller[✉]*, ^a

^a Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School,
Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France
Courriel: dettwiller.luc@gmail.com

Résumé. On expose les propriétés théoriques générales et diverses formules approximatives pour l'angle χ_S de réfraction astronomique en S, commençant par son expression fondamentale avec l'intégrale de réfraction et débouchant aussitôt sur la formule de Simpson. En supposant dorénavant l'atmosphère à symétrie sphérique, beaucoup de résultats supplémentaires émergent : en premier, le « théorème » d'Oriani, et l'équation de Bouguer. De celle-ci, on tire une forme particulière usuelle de l'intégrale de réfraction. On montre comment une approximation fondamentale permet d'en déduire la formule de Laplace, puis les développements en série qui la généralisent mais sont divergents — à cause de l'approximation fondamentale, pour une atmosphère isotherme. Il subsiste de vrais théorèmes, exempts de toute approximation : celui de Biot (qui se démontre facilement avec son changement de variable fort utile par ailleurs pour des calculs numériques), et celui de Biot–Sang–Meyer–Fraser–White. On voit ensuite le lien approximatif avec l'extinction (trouvé par Laplace), et l'étude approchée de la réfraction horizontale χ_{Sh} (i.e. la valeur de χ_S pour des points vus sur l'horizon astronomique). Puis on calcule les effets chromatiques sur χ_S , χ_{Sh} — ainsi que (dans un document associé à cet article) sur diverses caractéristiques de chenaux optiques considérés dans l'air — et on introduit (dans l'Annexe B) le « coefficient de distorsion angulaire verticale locale », dont on donne une expression originale sur l'horizon.

Abstract. The general theoretical properties and various approximate formulas for the angle χ_S of astronomical refraction at S are presented, beginning with its fundamental expression by the refraction integral and immediately leading to the Simpson formula. Assuming a spherically symmetric atmosphere, many additional results show up, starting with Oriani's "theorem" and Bouguer's equation. From these, an usual form of the refraction integral is derived. A fundamental approximation follows to deduce the Laplace formula, then the series expansions that generalize it but are divergent for an isothermal atmosphere—because of the approximation made. Two results, free from any approximation, exist and are presented: Biot's and Biot–Sang–Meyer–Fraser–White's theorems. It leads to an approximate link with extinction, as found by Laplace,

* Auteur correspondant.

and an approximation of the refraction χ_{Sh} for points on the astronomical horizon. We compute the chromatic effects on χ_S , χ_{Sh} —and (in a document associated with this article) on various characteristics of optical ducts considered in air—and an original expression of the “local vertical angular distortion coefficient” on the horizon (in Annexe B).

Mots-clés. Réfraction astronomique, Formule de Laplace, Théorème d’Oriani, Accourcissement, Théorème de Biot–Sang–Meyer–Fraser–White, Théorème de réfraction–extinction de Laplace, Coefficient de distorsion angulaire verticale locale.

Keywords. Astronomical refraction, Laplace’s formula, Oriani’s theorem, Flattening, Biot–Sang–Meyer–Fraser–White’s theorem, Laplace’s refraction–extinction theorem, Local vertical angular distortion coefficient.

Published online: 8 March 2023, Issue date: 27 October 2023

« It is nice to know that the computer understands the problem, but I would like to understand it too. »

Attribué à Eugène Wigner (prix Nobel de physique 1963) et cité par H. M. Nussenzveig, *Diffraction Effects in Semiclassical Scattering*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992, p. 37.

1. Introduction

La compréhension d’un phénomène physique complexe ne se limite pas à la capacité de le reproduire numériquement. Pour comprendre, l’esprit humain a besoin d’une traduction en idées suffisamment simples pour être appréhendées et traduites en images mentales, qui donnent un support à la pensée, permettent d’articuler harmonieusement les différentes notions relatives au phénomène étudié, et soient susceptibles d’orienter la recherche ultérieure ainsi que le choix des calculs numériques toujours imparfaits demandés à un ordinateur — autrement dit, d’habiller les équations par un langage qui permet de communiquer du compréhensible et de donner confiance. Quand un modèle physique permet de rendre compte de l’essentiel du phénomène, on considère que celui-là en expose les ressorts fondamentaux. Il fournit alors un premier cadre de pensée, permettant d’appliquer aux observations une grille d’analyse susceptible de révéler d’éventuels écarts significatifs entre les prédictions du modèle et la réalité, pour mieux se concentrer ensuite sur la recherche des causes élucidant ces résidus inexpliqués — que l’on classera dans les irrégularités, les anomalies, etc., et qui relèvent souvent de petits aménagements de la théorie, mais parfois d’un changement complet de paradigme. On élabore ainsi un nouveau modèle, par rapport auquel on réexamine les observations, éventuellement enrichies de nouvelles données expérimentales dont la quête a été suscitée par l’élaboration du second modèle. À chaque itération de ce processus, la compréhension du phénomène se précise, se corrige, s’affine et s’enrichit. L’intérêt de l’explication trouve son origine dans l’éternelle imperfection de la compréhension, qui lui confère un caractère intrinsèquement dynamique : René Thom souligne bien que prédire n’est pas expliquer [1].

Notre « panorama historique [...] » [2] dans ce numéro spécial a montré que, même en excluant la réfraction terrestre de notre propos initial, le corpus des faits d’observation concernant la réfraction astronomique est multiforme, foisonnant et parfois intrigant. Que l’on songe, d’après le paragraphe 5 de [2] par exemple, aux variations de $35''$ pour une étoile à 88° de distance zénithale apparente Z' , et de $45''$ à 89° , entre deux jours à même pression et température en un point S fixe, pour les valeurs relevées de sa réfraction $\chi_S = \psi' - \psi$ (où ψ' et ψ sont les hauteurs apparente et vraie de l’étoile — une table des notations est donnée en fin d’article) ; ces variations peuvent s’expliquer dans le cadre du présent article où l’on étudie les propriétés des modèles à symétrie sphérique. Par contre, certains écarts faibles, notamment l’agitation d’une image stellaire (quantifiable par sa fonction de transfert de modulation [3]), ou le renversement du sens

des irisations de l'image de Vénus (invisibles à l'œil nu) [4] ne le pourront pas, ainsi que des écarts beaucoup plus importants et donc stupéfiants, comme ceux connus sous le nom d'*effet Novaya Zemlya*; ils relèvent de modèles différents, qui seront présentés respectivement par les articles [5, 6] dans ce numéro spécial.

En ce qui concerne la compréhension des effets de réfraction astronomique, la première itération consiste à les modéliser en considérant les trajets courbes des rayons lumineux dans une atmosphère supposée à symétrie sphérique; ce sera l'objet de cet article entier. Car, malgré le peu de mots nécessaires pour présenter le cadre de cette étude, nous verrons que la difficulté des problèmes soulevés appelle de longs développements, débouchant sur des effets variés, agrémentés de beaux résultats parfois subtils.

Notre progression ne suivra plus un ordre chronologique comme dans [2], mais un ordre logique. Nous serons bien sûr amenés à revoir diverses propriétés déjà énoncées dans [2], mais ce sera sous l'angle physique et non plus historique, pour en examiner les racines et en déduire la portée réelle. Ainsi verrons-nous, entre autres, que le soi-disant théorème d'Oriani (voir le paragraphe 4 de [2]) n'en est pas un, et qu'il confond la nature des développements de la réfraction possibles — limités ou en série, et par rapport à quelles variables?

Dans un premier temps, nous commencerons par rappeler l'expression classique de la réfraction χ_S sous la forme d'une intégrale (dite « de réfraction »), en supposant que le rayon lumineux allant du point extra-atmosphérique A jusqu'à l'observateur S soit plan — ce qui est bien le cas avec une atmosphère à symétrie sphérique — et ne traverse pas de chenal optique (pour sa définition, voir le paragraphe 3 de [7]). Cette intégrale fait bien sûr intervenir le profil d'indice de réfraction de l'air en fonction de l'altitude, et pour un profil quelconque on ne sait en général pas l'intégrer : *a priori* il n'existe pas d'expression littérale *rigoureuse* de χ_S , de même qu'il n'en existe pas qui donnent *rigoureusement* les profils de température, etc., dans l'air, dont dépend l'indice de réfraction.

Partant de cette constatation, si on veut éviter d'être intellectuellement asservi par le recours systématique aux méthodes purement numériques qui frustreraient Wigner cité en épigraphe (elles ont aussi leurs limites, même avec ordinateur, car des instabilités numériques affectent l'étude des rayons qui rasant la frontière supérieure d'un chenal optique), on se trouve dans l'obligation de tenter diverses approximations, tant sur le calcul de l'intégrale elle-même avec des techniques mathématiques variées, que sur les fonctions donnant le profil d'indice. La multiplicité des combinaisons possibles engendre beaucoup de modèles au sein de la catégorie « à symétrie sphérique », chacun débouchant sur une expression de χ_S . Certaines approximations pourront sembler osées; mais quand elles donnent un résultat numérique assez précis pour le but visé, on apprécie le raccourci offert, par rapport au calcul numérique brut, par la formule littérale approchée obtenue. Toutes les formules que nous donnerons ont leurs qualités et leurs défauts, plus ou moins importants pour ces derniers, surtout au voisinage de l'horizon astronomique (i.e. l'ensemble des directions horizontales pour S); alors on doit toujours relativiser les conséquences qu'on en tire et, si elles sont numériques (ce qui ne sera pas le propos de cet article, mais plutôt de l'article [8] dans ce numéro spécial), il faut être capable d'encadrer numériquement l'erreur. La démonstration de la première formule approximative que nous rencontrerons, celle de Simpson, est très simple, et nous verrons qu'elle apporte une préfiguration du « théorème d'Oriani ». Pour aller plus loin, il sera nécessaire d'utiliser l'invariant de Bouguer de tout rayon lumineux dans un milieu à symétrie sphérique. Après l'avoir démontré, nous montrerons comment on l'incorpore dans l'intégrale donnant χ_S , que l'on essaye de calculer avec des approximations fort diverses, donnant un résultat (sous forme de développements en puissances de $\tan Z'$) acceptable sauf auprès de l'horizon, comme celui de Laplace, ou vice-versa; sur ce sujet la littérature est si fournie, et les calculs souvent si lourds, qu'il est vain d'espérer en donner une présentation exhaustive. En contraste avec ce qui précède, nous citerons l'exemple d'un cas rigoureusement intégrable, et fa-

cilement au moyen d'un changement de variable fécond trouvé par Biot en 1839. De plus, celui-ci a prouvé un théorème remarquable, car rigoureusement valable pour tout modèle d'atmosphère à symétrie sphérique sans chenal; nous l'exposerons, ainsi que d'autres théorèmes, dont celui de Laplace (qui recèle cependant quelques approximations). Enfin, la variation d'indice de l'air avec la longueur d'onde (i.e. son caractère dispersif) n'étant pas négligeable (quoique moins fort que pour le verre ordinaire), il est nécessaire de s'enquérir des effets chromatiques pour la réfraction astronomique; ils sont systématiques et gênants, malgré leur petitesse, pour les dispositifs hypersensibles que sont les grands télescopes et les interféromètres astronomiques (voir l'article [9] sur la « correction de la dispersion atmosphérique dans l'imagerie par les grands télescopes [...] » dans ce numéro spécial), mais parfois ils sont esthétiques et visibles à l'œil nu, comme le fameux « rayon vert » dont nous détaillerons la forme la plus simple.

2. Expression intégrale de la réfraction

Depuis Brook Taylor en 1715 [10] (voir les paragraphes 2.3, 3 et 4 de [2]), il est connu que la réfraction χ_S pour un observateur S s'écrit par essence sous la forme d'une intégrale fondamentale, dite « de réfraction » :

$$\chi_S = \int_1^{n_S} d\chi(n) \text{ avec } d\chi(n) = \frac{\tan \alpha}{n} dn \quad (1)$$

où n désigne l'indice de réfraction variable le long du rayon lumineux (R) supposé plan et arrivant en S (depuis le point extra-atmosphérique A concerné à l'infini), la borne n_S est l'indice de réfraction en S , et l'angle arithmétique α est celui entre les vecteurs \mathbf{u} et $\mathbf{grad} \, n$ (\mathbf{u} étant unitaire tangent à (R), orienté dans le sens de la lumière). Historiquement, cette expression était démontrée en considérant l'atmosphère inhomogène comme un empilement de couches infinitésimales homogènes; il existe heureusement une démonstration plus rigoureuse en termes modernes. En considérant s , abscisse curviligne sur (R) et orientée comme \mathbf{u} , par définition du rayon de courbure \mathcal{R} conventionnellement positif le long de (R) on a, s_S désignant l'abscisse curviligne de S , l'angle de réfraction (compté positivement vers le haut) qui s'écrit, pour un rayon plan,

$$\chi_S = \int_{-\infty}^{s_S} \pm ds / \mathcal{R} \quad (2)$$

avec le signe + si la concavité du rayon est vers le bas.

Or, au moins depuis certains travaux de William H. Wollaston [11] on sait [12, p. 169], [13] que la courbure de (R) s'écrit

$$1/\mathcal{R} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} \ln n \quad (3)$$

où le vecteur unitaire normal \mathbf{n} est choisi dans le sens de la concavité du rayon, donc

$$1/\mathcal{R} = \|\mathbf{grad} \ln n\| |\sin \alpha|. \quad (4)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \chi_S &= \int_{-\infty}^{s_S} \pm ds / \mathcal{R} = \int_{-\infty}^{s_S} \pm |\sin \alpha| \|\mathbf{grad} \ln n\| ds = \int_{-\infty}^{s_S} \pm |\tan \alpha| \frac{|\cos \alpha| \|\mathbf{grad} \ln n\|}{n} ds \\ &= \int_{-\infty}^{s_S} \pm \frac{1}{n} \left| \tan \alpha \frac{dn}{ds} \right| ds \end{aligned} \quad (5)$$

Quand la concavité du rayon est vers le bas les signes \pm deviennent +, et on a soit ($dn/ds \geq 0, \tan \alpha \geq 0$), soit ($dn/ds \leq 0, \tan \alpha \leq 0$), donc de toute façon $(\tan \alpha) dn/ds \geq 0$; quand la concavité du rayon est vers le haut les signes \pm deviennent –, et on a de toute façon $(\tan \alpha) dn/ds \leq 0$. Dans tous les cas, il vient

$$\chi_S = \int_{-\infty}^{s_S} \frac{\tan \alpha}{n} \frac{dn}{ds} ds, \quad (6)$$

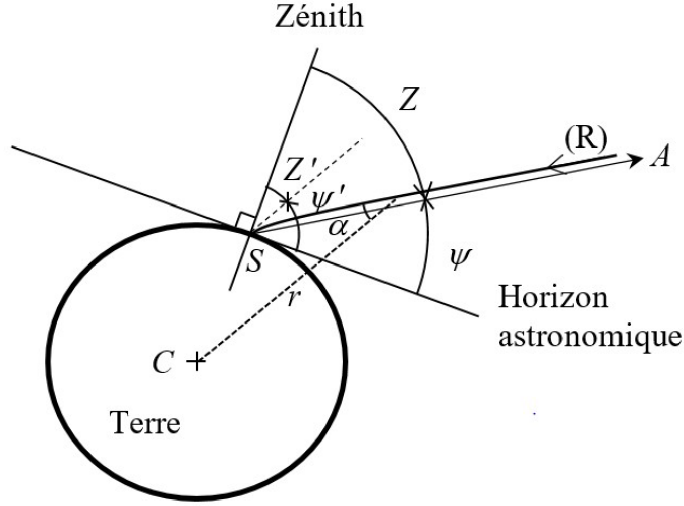


FIGURE 1. Définition des distances zénithales vraie et apparente Z et Z' de A , et de ses hauteurs vraie et apparente ψ et ψ' , le tout pour l'observateur S . Le point C et la distance r ne seront définis qu'à partir du paragraphe 4, où nous entrerons dans l'étude des cas à symétrie sphérique (de centre C).

d'où l'expression annoncée (1), en passant à la variable n (qui présente l'avantage de supprimer toute borne infinie), mais seulement à condition que $\tan \alpha$ soit une fonction non-équivoque de n , ce qui exige que n soit une fonction strictement monotone de s ; si tel n'était pas le cas, il faudrait repartir de l'expression (6) — par exemple, dans l'étude de la réfraction des ondes radio due à une couche ionosphérique.

On voit que l'hypothèse de symétrie sphérique du milieu, utilisée dans d'autres démonstrations [14–17], n'est pas nécessaire.

Cette expression générale (6) comporte trois difficultés importantes derrière son apparente simplicité : les relations donnant $\alpha(s)$ et $n(s)$ ne sont en général pas connues, elles donneraient des intégrales incalculables analytiquement, et en plus l'intégrale de l'expression (1) est impropre pour les rayons arrivant en S horizontalement. De ces difficultés découlent les innombrables études, tant numériques qu'analytiques, menées depuis le XVIII^e siècle, dans le but de connaître — mieux qu'avec le modèle de Cassini (1662) — la valeur de χ_S en fonction de la distance zénithale apparente Z' du point A de l'astre, et sa variation en fonction de différents paramètres pratiques : l'indice n_S (qui dépend de la température absolue T_S et de la pression P_S en S), et quelques renseignements apportant plus de précisions sur la structure de l'atmosphère (par exemple, différentes échelles de hauteur que nous introduirons le moment venu).

3. Formule de Simpson (1743)

L'approximation la plus radicale consiste à dire que, vu la petite différence entre n_S et 1, $\tan \alpha / n \cong \tan Z'$ (voir la Figure 1 pour un rappel de la définition de Z') sur tout le domaine d'intégration $[1, n_S]$ de l'équation (1), sauf quand α devient trop proche de 90° car les petites variations de α peuvent engendrer une variation non négligeable de $\tan \alpha$.

Avec cette restriction, mais même si n n'est pas une fonction monotone de s , on obtient la formule de Simpson

$$\chi_S = \tan Z' \int_{-\infty}^{s_S} \frac{dn}{ds} ds = \tan Z' \int_1^{n_S} dn = (n_S - 1) \tan Z' \quad (7)$$

(où nous avons mis $=$ au lieu de \cong car nous n'avons pas introduit de nouvelle approximation en plus de celle indiquée au début de ce paragraphe 3); au paragraphe 4 de [2] nous avons rappelé son domaine de validité tout en donnant des valeurs numériques précises. Mais grossièrement, pour S dans les conditions normales (0°C et 1 atm), $\chi_S \cong 1'$ avec $Z' = 45^\circ$, et cela quel que soit le profil de densité de l'air en fonction de l'altitude : cette indifférence constitue la loi de Simpson, qui est approximative ici, mais s'avère rigoureuse dans le cadre d'un modèle de Terre plate avec une atmosphère stratifiée (voir le paragraphe 4 de [2]), même si pour ce dernier modèle l'expression (7) n'est qu'une approximation d'ordre 1 en $n_S - 1$.

Comme annoncé aussi dans [2], cette loi de Simpson plonge ses racines dans un résultat approximatif plus profond, appelé exagérément « théorème » d'Oriani et que nous présentons dès maintenant. Il nécessite cependant l'hypothèse d'une atmosphère à symétrie sphérique de centre C , que nous adoptons pour toute la suite de cet article : dorénavant, pour une longueur d'onde dans le vide λ_0 fixée, l'indice de réfraction $n(r)$ de l'air en un point M ne varie qu'avec la distance $r := CM$; alors on pose $r_S := CS$ et on a $n_S := n(r_S)$ — le symbole $:=$ indiquant une définition ou une notation.

4. Deux propriétés fondamentales avec une atmosphère à symétrie sphérique

4.1. « Théorème » d'Oriani (1787)

Supposons que χ_S en fonction de $\tan Z'$ admette un développement en série entière. La formule de Simpson suggère que le coefficient de son terme d'ordre 1 est la réfractivité $\eta_S := n_S - 1$ de l'air en S . Et dans une atmosphère à symétrie sphérique de centre C , la symétrie de révolution du faisceau de rayons arrivant en S fait que tous les termes d'ordre pair de ce développement sont nuls. Barnaba Oriani (1752–1832, astronome à Milan) affirme [18, 19] que les coefficients des termes d'ordre 1 et 3 ne font pas intervenir tous les détails du profil d'indice n de l'air en fonction de l'altitude $z := r - r_S$ (d'origine en S), mais seulement η_S et la hauteur

$$H_1 := \frac{1}{\eta_S} \int_1^{n_S} z \, dn \quad (8)$$

dite « d'atmosphère homogène » (ou « hauteur réduite »). Au final, ces coefficients ne peuvent varier concrètement qu'avec λ_0 , T_S et P_S .

À ce stade, on utilise la loi empirique de Gladstone–Dale [20, p. 175], [21]. Nous avons rappelé, au sous-paragraphe 6.1 de [2], que c'est une conséquence approximative d'une relation théorique qui offre un meilleur accord avec l'expérience : la relation de Clausius–Mossotti ou Lorentz–Lorenz [22]; mais nous avons montré que l'approximation que représente la loi de Gladstone–Dale est suffisante pour couvrir les besoins de l'étude de la réfraction astronomique, avec la précision actuellement requise (0,05 %). Cette loi empirique est simple : elle donne, en un point M d'un gaz de composition quantitativement uniforme (i.e. indépendante de M), sa réfractivité en fonction de la température T et de la pression P sous la forme

$$\eta(\lambda_0, T(M), P(M)) := n(\lambda_0, T(M), P(M)) - 1 \cong C(\lambda_0)\mu(T(M), P(M)) \ll 1, \quad (9)$$

donc quasi proportionnelle à sa masse volumique μ , la constante de proportionnalité ne variant qu'avec λ_0 ; cette constante $C(\lambda_0)$ est une des caractéristiques de la composition du gaz. Certes, la composition quantitative de l'air est uniforme en dioxygène et diazote sur toute la troposphère, mais il n'en est pas de même pour sa teneur en vapeur d'eau : on dit que l'atmosphère ou l'air n'est pas bien mélangé, et alors dans l'équation (9) il faut remplacer $C(\lambda_0)$ par $C(M, \lambda_0)$; Biot avait déjà très nettement conscience de ce problème (voir l'introduction du paragraphe 3 de l'article [23] dans ce numéro spécial). Heureusement, nous avons annoncé au début du paragraphe 6 de [2] que l'influence de l'hygrométrie est très faible sur $n_S - 1$, et elle l'est encore plus sur μ . Dorénavant

nous négligerons les variations spatiales de $C(M, \lambda_0)$ dans tout cet article, où nous considérerons toujours que l'air est bien mélangé, donc que l'on peut utiliser $C(\lambda_0)$ qui a la même valeur en tout point; on en déduit

$$\eta = n - 1 = (n_S - 1)\mu/\mu_S = \eta_S \mu/\mu_S \quad (10)$$

(nous mettons l'indice S à une grandeur pour désigner sa valeur en S).

Alors H_1 est susceptible d'interprétations diverses. D'une part,

$$H_1 = \frac{1}{\mu_S} \int_0^{\mu_S} z d\mu = -\frac{1}{\mu_S} \int_0^\infty z \frac{d\mu}{dz} dz; \quad (11)$$

cela veut dire que H_1 est le moment réduit, d'ordre 1, du profil $-\eta'(z)$, mais aussi du profil $-\mu'(z)$. D'autre part, une intégration par parties donne

$$\mu_S H_1 = \int_\infty^0 z \frac{d\mu}{dz} dz = [z\mu(z)]_\infty^0 - \int_\infty^0 \mu(z) dz = \int_0^\infty \mu(z) dz. \quad (12)$$

Cela veut dire que H_1 est, dans le cadre d'un modèle de Terre plate, la hauteur d'une colonne d'atmosphère fictive homogène dont la masse volumique prendrait la valeur réelle du niveau de l'observateur, et qui aurait la même masse totale que la colonne de même section d'atmosphère située au-dessus de l'observateur. Avec la norme g du champ de pesanteur uniforme dans un modèle de Terre plate, et avec l'hypothèse des pressions hydrostatiques dans un fluide quelconque, on a

$$H_1 = \frac{1}{\mu_S g} \int_0^\infty \mu(z) g dz = \frac{P_S}{\mu_S g}. \quad (13)$$

Dans les conditions normales en S , cela donne $H_1 \cong 101\,325 \text{ Pa} / (1,293 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \times 9,807 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}) \cong 7,990 \text{ km}$ sous nos latitudes. En fait, on utilisera plutôt sa valeur relative $h_1 := H_1/r_S \cong 1,25 \times 10^{-3}$ ramenée à la valeur r_S — proche du rayon moyen terrestre $6\,371 \text{ km}$. Et la relation (17) ci-dessous montre que l'expression de h_1 se simplifie encore, si l'on suppose en plus que l'air en S est un gaz parfait.

Nous présenterons le cheminement conduisant à ce « théorème » d'Oriani au sous-paragraphe 5.1, dont la problématique est plus ambitieuse; mais nous verrons que le raisonnement n'est pas mathématiquement rigoureux, donc que la dénomination traditionnelle de « théorème » s'avère, pour les résultats d'Oriani, inadéquate. En attendant, nous donnons l'expression des coefficients des ordres 1 et 3, apparaissant dans la formule de Laplace (que nous démontrerons au sous-paragraphe 5.1) :

$$\begin{aligned} \chi_S &\cong \eta_S \left[(1 - h_1) - \left(h_1 - \frac{\eta_S}{2} \right) \tan^2 Z' \right] \tan Z' \\ &= C \mu_S \left[\left(1 - \frac{P_S}{\mu_S g r_S} \right) - \left(\frac{P_S}{\mu_S g r_S} - \frac{C \mu_S}{2} \right) \tan^2 Z' \right] \tan Z'; \end{aligned} \quad (14)$$

on voit que le coefficient conjecturé au début de ce sous-paragraphe à partir de la formule de Simpson est légèrement surévalué, en valeur relative, de h_1 . D'ailleurs, avec l'expression rigoureuse de χ_S donnée par le modèle de Cassini (voir le sous-paragraphe 2.1 de [2]), on trouve que le terme d'ordre 1 de son développement en tant que fonction de $\tan Z'$ est $\eta_S (\tan Z') / (1 + h_1)$, tandis qu'en fonction de η_S c'est $\eta_S (\sin Z') / \sqrt{\cos^2 Z' + 2h_1 + h_1^2}$ qui permet (contrairement au développement précédent) d'estimer la réfraction horizontale χ_{Sh} (i.e. la valeur de χ_S pour $Z' = 90^\circ$) :

$$\chi_{Sh} \cong \eta_S / \sqrt{2h_1 + h_1^2}; \quad (15)$$

une approximation d'ordre supérieur en η_S (voir le sous-paragraphe 2.1 de [2]) fournit

$$\chi_S \cong \eta_S \left(1 - \frac{\eta_S}{2} \right) \sin Z' / \sqrt{2 \left(h_1 - \frac{\eta_S}{2} \right) + \cos^2 Z'}. \quad (16)$$

Avec la raie d (*alias* D₃) — de l'hélium, celle actuellement standardisée pour donner ordinairement l'indice de réfraction d'un milieu transparent ($\lambda_0 \cong 588 \text{ nm}$) — et avec S dans les conditions normales, ces deux approximations et le calcul rigoureux donnent respectivement $\chi_{Sh} \cong 5,837 \times 10^{-3} \text{ rad} \cong 20'4''$ ou $6,211 \times 10^{-3} \text{ rad} \cong 21'21''$ et $21'24''$ au lieu des $35'$ observées (voir la figure de la référence [24], qui suppose une température de 15°C au lieu de 0°C), et la formule de Laplace donne $\chi_S \cong 60,14'' \tan Z' - 0,0668'' \tan^3 Z'$. Notons que son premier paramètre η_S varie avec T_S , P_S et λ_0 ; il n'en est pas de même pour son second paramètre h_1 qui ne varie pas avec λ_0 pour un air bien mélangé, et qui ne peut varier concrètement qu'avec T_S , indépendamment du reste du profil thermique de l'atmosphère, si on suppose que g est uniforme, que la distribution verticale de pression est hydrostatique, et que l'air en S est un gaz parfait — car ce second paramètre s'écrit alors

$$h_1 = \frac{P_S}{\mu_S g r_S} = \frac{RT_S}{M_a g r_S} \quad (17)$$

où M_a est la masse molaire de l'air et R la constante des gaz parfaits. Avec toutes ces hypothèses, la formule de Laplace se réécrit

$$\chi_S = C(\lambda_0) \frac{M_a P_S}{RT_S} \left\{ \left(1 - \frac{RT_S}{M_a g r_S} \right) - \left[\frac{RT_S}{M_a g r_S} - \frac{C(\lambda_0)}{2} \frac{M_a P_S}{RT_S} \right] \tan^2 Z' \right\} \tan Z'. \quad (18)$$

D'ores et déjà, nous livrons une application intéressante du théorème d'Oriani : si le gradient troposphérique de température se conservait dans la stratosphère, puisque le théorème d'Oriani s'y applique même pour la réfraction horizontale pour S au sol, celle-ci ne changerait que de $2''$, alors que la réfraction horizontale est due pour $1/8$ à la stratosphère !

En effet, toujours dans le cas de la réfraction horizontale, pour un point P sur la tropopause standard à la distance $r_P = r_S + 11 \text{ km}$ où (à $226,32 \text{ hPa}$ et $-56,5^\circ\text{C}$) l'indice à 550 nm vaut $n_P \cong 1,000078$ sur un rayon arrivant de l'infini dans un milieu à symétrie sphérique, l'angle du rayon par rapport à la direction radiale en P vaut α_P , et avec l'invariant de Bouguer $I_B := n r \sin \alpha$ (justifié dès le sous-paragraphe suivant) on trouve

$$\alpha_P = \arcsin \frac{n_S r_S}{n_P r_P} \cong 86,8^\circ; \quad (19)$$

ceci est suffisamment inférieur à 90° pour que la réfraction, partielle car observée en P et non en S , soit nettement moins sensible (en vertu de la loi de Simpson) à la façon dont l'indice tend vers 1 au-dessus de P , à partir de sa valeur imposée par les conditions de pression et de température en P .

Cette quasi-indépendance par rapport à la structure de la haute atmosphère, même pour la réfraction horizontale, avait déjà été soulignée par Biot [25, p. 112], Bemporad [26], etc.

4.2. Équation de Bouguer (1729)

Dans [2], nous avons vu que Bouguer a compris que, dans un milieu à symétrie sphérique de centre C , les rayons lumineux sont dans des plans passant par C , et que la grandeur

$$I_B := n r \sin \alpha \quad (20)$$

est invariante le long d'un rayon; l'équation de Bouguer consiste à écrire que I_B est une constante, ce qui donne une équation différentielle régissant le rayon [27], [28, Livre 10]. Bouguer a compris que certains rayons peuvent être circulaires de centre C .

Dans le présent sous-paragraphe, nous rappelons que l'invariant de Bouguer se démontre instantanément à partir de l'analogie cinématique valable pour les rayons lumineux en milieu continu, dans l'approximation de l'optique géométrique : la détermination d'un rayon lumineux se ramène à celle de la trajectoire d'une particule *fictive* de vitesse $v_0 n \mathbf{u}$ (et non $v_0 \mathbf{u}/n$!) dans un champ d'accélération $v_0^2 \mathbf{grad} n^2/2$ (où v_0 est une vitesse arbitraire constante).

Cette analogie, qui était déjà entrevue par Newton, puis enrichie par Wollaston (avec son expression de « refracting force » [11]) permet de réutiliser bien des résultats de la cinématique du point. Entre autres, dans le cas d'un milieu à symétrie sphérique, la particule fictive suit un mouvement à accélération centrale. On en déduit d'abord la planéité de sa trajectoire, comprise par Bouguer, ainsi que l'existence de la classique constante des aires qui n'est autre que $v_0^2 I_B$ ici.

5. Principe de deux développements classiques

Le principe de tous les développements est de partir de l'intégrale de réfraction (vue au paragraphe 2)

$$\chi_S = \int_1^{n_S} (\tan \alpha) dn/n, \quad (1)$$

ce qui suppose que sur le rayon lumineux (R) considéré, ni n ni r ne passent par un extrémum ou ne restent constants sur un domaine; pour l'atmosphère cela impose $dn/dr \leq 0$, mais aussi (voir notamment le paragraphe 3 de [7]) $df/dr \geq 0$ où $f(r) := r n(r)$. Alors on transforme (1) en

$$\chi_S = \int_1^{n_S} \frac{nr \sin \alpha}{\sqrt{n^2 r^2 - (nr \sin \alpha)^2}} \frac{dn}{n} \quad (21)$$

où apparaît l'invariant de Bouguer

$$nr \sin \alpha = n_S r_S \sin Z'; \quad (22)$$

ainsi obtient-on

$$\chi_S = n_S r_S (\sin Z') \int_1^{n_S} \frac{n^{-1}}{\sqrt{n^2 r^2 - (n_S r_S \sin Z')^2}} dn \quad (23)$$

qui est depuis Bouguer [27] l'expression traditionnellement utilisée par beaucoup d'auteurs, à quelques variantes près.

5.1. Développement à l'ordre 1 en fonction des variations d'indice avec l'altitude; formule de Laplace

Une première idée d'approximation serait d'effectuer un développement limité de l'intégrande de l'équation précédente, à l'ordre 1 par rapport à l'altitude z au voisinage de 0, car la hauteur utile de l'atmosphère est très petite devant r_S . Mais il faut dire d'emblée que certains aspects de cette approximation sont intolérables : ils reviennent à supposer que les petites variations de $n(r)$ ou de $r n(r)$ sont quasi affines sur toute la hauteur utile de l'atmosphère, ce qui est bien trop grossier.

C'est pourquoi on procède plus finement, en introduisant plusieurs infiniment petits d'ordre 1, comme $z/r_S \ll 1$ sur toute la hauteur utile de l'atmosphère, mais aussi la réfractivité η , ainsi que

$$\Delta n := n - n_S = \eta - \eta_S \quad (24)$$

et

$$\frac{\Delta(nr)}{n_S r_S} := \frac{(r_S + z)n - r_S n_S}{n_S r_S} = \left(1 + \frac{z}{r_S}\right) \frac{1 + \eta}{1 + \eta_S} - 1 \cong \frac{z}{r_S} + \eta - \eta_S := Y \quad (25)$$

(en reprenant la notation Y du paragraphe 2 de [2]); l'obtention de Y revient à assimiler la petite variation relative de nr à sa différentielle logarithmique à l'ordre 1 (en z/r_S et Δn et η_S) — cette technique fondamentale d'approximation se trouve promise à une (trop) large diffusion. Nous écrivons l'intégrande de l'expression (23) sous la forme de son terme d'ordre 0, i.e. sa valeur en

S, plus sa petite variation assimilée à une différentielle d'ordre 1 (au sens précisé ci-dessus) que nous calculons par différentiation logarithmique. Cela donne

$$\begin{aligned}\chi_S &\cong n_S r_S (\sin Z') \int_1^{n_S} \frac{n_S^{-1}}{\sqrt{(n_S r_S)^2 - (n_S r_S \sin Z')^2}} \left[1 - \frac{\Delta n}{n_S} - \frac{1}{2} \frac{2 n_S r_S \Delta(nr)}{(n_S r_S)^2 - (n_S r_S \sin Z')^2} \right] dn \\ &\cong \frac{\tan Z'}{n_S} \int_0^{\eta_S} \left[1 - (\eta - \eta_S) - \frac{Y}{\cos^2 Z'} \right] d\eta \\ &= \frac{\tan Z'}{1 + \eta_S} \left\{ \int_0^{\eta_S} \left[1 - (\eta - \eta_S) \left(1 + \frac{1}{\cos^2 Z'} \right) \right] d\eta - \frac{1}{r_S \cos^2 Z'} \int_0^{\eta_S} z d\eta \right\};\end{aligned}\quad (26)$$

mais la présence du préfacteur $1/\cos^2 Z'$ dans le terme d'ordre 1 de ce développement limité en z/r_S et Δn et η_S (voir notamment la deuxième des trois expressions précédentes) fait que la validité de l'approximation ci-dessus n'est plus assurée quand Z' approche trop de 90° . Par ailleurs, la première des intégrales de la dernière ligne vaut

$$\left[\eta - \frac{(\eta - \eta_S)^2}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos^2 Z'} \right) \right]_0^{\eta_S} = \eta_S + \frac{\eta_S^2}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos^2 Z'} \right); \quad (27)$$

la seconde intégrale vaut $\eta_S H_1$ par définition — équation (8). Alors on trouve

$$\chi_S = \frac{\tan Z'}{1 + \eta_S} \left[\eta_S + \frac{\eta_S^2}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos^2 Z'} \right) - \frac{\eta_S H_1}{r_S \cos^2 Z'} \right]. \quad (28)$$

Puis, avec $1/\cos^2 Z' = 1 + \tan^2 Z'$, on trouve la formule de Laplace [28, Livre 10, chap. 1], [29, p. 521–527] déjà donnée au sous-paragraphe 4.1 du présent article :

$$\chi_S \cong \eta_S \tan Z' \left[(1 - h_1) - \left(h_1 - \frac{\eta_S}{2} \right) \tan^2 Z' \right]. \quad (14)$$

Notons que si, à l'instar de Newton et Simpson, on avait fait l'approximation $n^{-1} \cong 1$, pour χ_S on aurait trouvé $(\tan Z') \{ \int_0^{\eta_S} [1 - ((\eta - \eta_S)/\cos^2 Z')] d\eta - 1/(r_S \cos^2 Z') \int_0^{\eta_S} z d\eta \}$, i.e. le résultat moins bon (32) de [2].

Quoiqu'il en soit, ces résultats montrent l'indépendance approximative de χ_S par rapport à la structure fine de l'atmosphère. Mais surtout, rappelons d'une part que pour arriver à la formule (14), nous n'avons pas fait un développement en série entière de χ_S en fonction de $\tan Z'$, mais un développement limité à l'ordre 1 en $(z/r_S, \Delta n, \eta_S)$ de l'intégrande de l'équation (23); ceci correspond donc, après intégration, à un développement limité à l'ordre 2 pour χ_S , puisque l'intégrale de (23) est celle d'une fonction de n , et c'est cohérent avec le développement de la formule de Cassini montré au paragraphe 2 de [2]. D'autre part, si nous avions poussé le développement limité de l'intégrande à l'ordre 2, il faudrait remplacer l'équation (26) par une expression plus compliquée, où il y aurait entre autres un terme $\int_0^{\eta_S} (z/\cos^2 Z')^2 d\eta$ qui, puisque $1/\cos^4 Z' = 1 + 2\tan^2 Z' + \tan^4 Z'$, rajouterait à chacun des coefficients $(1 - h_1)$ et $-(h_1 - (\eta_S/2))$ de la formule de Laplace (14) un terme ne s'exprimant ni en fonction de η_S , ni en fonction de H_1 — mais en fonction de H_2 (voir le sous-paragraphe 5.2.1). Chacune de ces deux dernières remarques suffit pour montrer que le contenu de ce sous-paragraphe 5.1 n'est donc aucunement une preuve rigoureuse du « théorème » d'Oriani, dont l'énoncé repose sur une confusion entre les variables par rapport auxquelles on développe.

5.2. Une méthode systématique de développement de $\chi_S(\tan Z')$ en série entière

Pour obtenir plus directement un développement en série entière de $\chi_S(\tan Z')$, d'autres manipulations de l'expression (23) sont possibles; pour illustrer les enseignements à tirer de ces diverses manipulations, il suffit que nous en présentions une seule : celle de la partie IV de l'article de 1882 de Rodolphe Radau [30]. Elle réécrit l'intégrale (23) sous la forme

$$\chi_S = n_S r_S (\sin Z') \int_1^{n_S} \frac{n^{-1}}{n r \cos Z'} \left[\frac{1}{\cos^2 Z'} - \frac{n_S^2 r_S^2}{n^2 r^2} \tan^2 Z' \right]^{-1/2} dn, \quad (29)$$

d'où les expressions utiles

$$F(n, Z') := \left(1 - \frac{n_S^2 r_S^2}{n^2 r^2} \right) \tan^2 Z' \quad (30)$$

(où on tient compte de la relation entre r et n à Z' fixé) et

$$\chi_S = n_S r_S (\tan Z') \int_1^{n_S} n^{-2} r^{-1} [1 + F(n, Z')]^{-1/2} dn. \quad (31)$$

5.2.1. Intervention des moments réduits d'ordre quelconque dans le développement de $\chi_S(\tan Z')$ en série entière

Radau développe $[1 + F(n, Z')]^{-1/2}$ en série entière de $F(n, Z')$. Sans se soucier de la légitimité de permuter l'intégration et la sommation infinie (cette question délicate mais nécessaire étant renvoyée à l'Annexe A), ceci le conduit à admettre

$$\chi_S = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p \tan^{2p+1} Z' \quad (32)$$

avec (en reprenant à la fin la technique d'approximation déjà utilisée au sous-paragraphe précédent sur la hauteur utile de l'atmosphère, et en y admettant que $n_S n^{-2} r^{-1} \cong r_S^{-1}$, ce qui majore un peu)

$$a_p = r_S \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \int_1^{n_S} n_S n^{-2} r^{-1} \left(1 - \frac{n_S^2 r_S^2}{n^2 r^2} \right)^p dn \cong \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \int_1^{n_S} (2Y)^p dn \quad (33)$$

où $N!$ et $N!!$ désignent respectivement la factorielle et la double factorielle de N ; la grandeur sans dimension Y a été introduite par la relation (25).

En nous appuyant sur le modèle d'atmosphère isotherme de hauteur d'échelle H_T , avec lequel (à 15 °C et $P_S = 1$ atm) $|\eta - \eta_S|/(z/r_S) \leq \eta_S/(H_T/r_S) \cong 1/4,8$ pour $z > 0$ (voir le sous-paragraphe 7.1.4), nous faisons ici, dans un but de simplification uniquement pédagogique, la grossière approximation supplémentaire $Y \cong z/r_S$ — mais dans l'article [31] de ce numéro spécial nous expliquons la méthode usuelle permettant de dépasser cette approximation. Nous obtenons ainsi (voir le sous-paragraphe 3.1.2 de [31]) une expression représentative de celles traditionnellement produites dans grand nombre de travaux du XIX^e siècle et du début du XX^e [30, 32, 33] :

$$\chi_S \cong (n_S - 1) \left[\left(1 - \frac{H_1}{r_S} \right) + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{(2p-1)!!}{p!} \left(\frac{H_p}{r_S} \tan^2 Z' \right)^p \right] \tan Z' \quad (34)$$

où intervient la hauteur caractéristique H_p qui est la racine p -ième du moment réduit d'ordre p de $-\eta'(z)$, utilisée en substance par Newcomb [33, p. 214], et donnée (pour $p \geq 1$) par

$$\eta_S H_p^p := - \int_0^{\infty} z^p \eta'(z) dz = \int_0^{\eta_S} z^p d\eta. \quad (35)$$

Ici les coefficients a_p apparaissent sous une forme explicite, car ils ont été simplifiés grâce aux approximations; mais souvent, ils restaient exprimés eux-mêmes par d'autres développements en série, occultant la physique du phénomène de réfraction ! Signalons enfin que l'approximation

obtenue avec $p = 0$ et 1 (soit quasiment la formule de Laplace) est bien moins bonne que ce que donne le modèle de Cassini (voir le paragraphe 2 du chap. 1), à toute distance zénithale !

5.2.2. Semi-convergence

Dans le cas de l'atmosphère bien mélangée et satisfaisant la loi de Gladstone–Dale, supposée en plus constituée d'un mélange idéal de gaz parfaits de température uniforme, avec une distribution verticale de pression hydrostatique dans le champ de pesanteur radial et de norme g considérée uniforme, on a un profil de réfractivité exponentiellement décroissant

$$\eta(z) = \eta_S e^{-z/H_T} \text{ avec } H_T = \frac{RT}{M_a g} \quad (36)$$

qui est l'échelle de hauteur de cette atmosphère dite isotherme. Alors H_p se déduit de H_T à l'aide de la fonction *gamma* (voir le paragraphe 4 de [2]) :

$$H_p^p := - \int_0^\infty z^p [\eta'(z)/\eta_S] dz = \int_0^\infty z^p e^{-z/H_T} dz / H_T = \Gamma(p+1) H_T^p = p! H_T^p \quad \forall p \in \mathbb{N}. \quad (37)$$

La pointe de ce sous-paragraphe consiste à remarquer que l'ensemble des résultats obtenus donne

$$\chi_S = (n_S - 1) \left[\left(1 - \frac{H_T}{r_S} \right) + \sum_{p=1}^\infty (-1)^p (2p-1)!! \left(\frac{H_T}{r_S} \tan^2 Z' \right)^p \right] \tan Z' \quad (38)$$

et que la série diverge, même violemment puisque $\lim_{p \rightarrow \infty} (2p-1)!! ((H_T/r_S) \tan^2 Z')^p = \infty$ aussi petits que soient $H_T = H_1$ et même $\tan Z'$ (non nuls) ! Avec un modèle voisin de celui de l'atmosphère isotherme, Radau obtient une expression voisine de (38), mais avec $H_1 - (\eta_S/2)r_S$ comme hauteur d'échelle au lieu de H_T (voir le sous-paragraphe 3.1.2 de [31]) ; il dit que son expression approchée donne une excellente approximation jusqu'à $Z' = 80^\circ$, mais que pour $Z' = \arctan 10 \cong 84,3^\circ$ « la série diverge à partir » de $p = 5$ — tel que $a_5 \tan^{11} Z' \cong 10''$ [30, B. 15]. En effet, on montre que la suite des $(2p-1)!! ((H_T/r_S) \tan^2 Z')^p$ est décroissante, comme on s'y attendait, mais de $p = 1$ jusqu'à seulement p voisin de $r_S/(2H_T \tan^2 Z')$ — tant que ce nombre est assez grand devant 1 (donc tant que Z' n'est pas trop proche de 90°) — et pour toutes les valeurs suivantes de p cette suite est croissante vers l'infini...

Comment en est-on arrivé là ?

L'Annexe A montre que l'erreur ne provient pas de l'interversion du développement en série et de l'intégrale — voir les relations (31)–(33). Elle ne provient pas non plus de nos approximations pédagogiques — Radau se heurte à la même incohérence. Dans le cas d'une atmosphère théoriquement illimitée comme celle du modèle isotherme, c'est l'approximation fondamentale majeure, consistant à assimiler $1 - [n_S^2 r_S^2 / (n^2 r^2)]$ à $2Y = 2[n - n_S + (z/r_S)]$ dans l'intégrale de l'expression de a_p , qui est maligne car elle semble très acceptable sur la hauteur utile de l'atmosphère, mais au-delà, son effet pour p grand est très sensible et désastreux, même avec un profil de η à décroissance aussi rapide qu'une exponentielle : la divergence vient du terme z/r_S introduit avec Y qui diverge à l'infini et ruine la convergence pour tout Z' non nul, en introduisant les moments réduits H_p^p qui croissent trop vite avec p (à cause de $p!$) par rapport à r_S^p (voir le sous-paragraphe 3.1.3 de [31]) ; comme $\eta - \eta_S$ ne diverge pas, prendre en compte ce terme dans Y en renonçant à notre approximation pédagogique ne change rien à la divergence de la série ainsi obtenue pour χ_S .

Mais pour une atmosphère limitée (comme celle du modèle polytropique) la suite des moments réduits relatifs $h_p^p := (H_p/r_S)^p$ est décroissante tendant vers zéro, et la série alternée approchée obtenue avec notre approximation pédagogique converge pour Z' assez petit, tel que la suite des $((2p-1)!!/p!2^p)(2h_p \tan^2 Z')^p$ soit aussi décroissante tendant vers 0 ; dans le cas polytropique h_p^p est analytiquement calculable par une « intégrale bêta » [34, p. 209], i.e. une intégrale eulérienne de première espèce — voir le sous-paragraphe 3.1.2 de [31].

En fait les développements ainsi obtenus, à cause de ces approximations, sont devenus seulement « semi-convergens », au sens où ce ne sont plus des développements de $\chi_S(\tan Z')$ en série entière, mais des développements limités (avec des approximations dans leurs coefficients) au voisinage de 0 — mais pour l'étude de la réfraction au voisinage de l'horizon astronomique il aurait mieux valu que ce soient des développements asymptotiques pour $\tan Z'$ au voisinage de l'infini. Au XIX^e, rares étaient les astronomes conscients de ce problème, à l'exception de James Ivory (1765–1842). Sur le plan pratique, cette méthode de calcul de χ_S était une impasse qui a fait son temps (voir le sous-paragraphe 6.3 de [2]). On se sort de ces difficultés en utilisant une méthode d'intégration numérique efficace, dont Biot est le précurseur très remarquable — comme nous allons le voir dès maintenant.

6. Changement de variable de Biot; quelques applications

Afin d'éviter l'inconvénient dû au caractère impropre, quand $Z' = 90^\circ$, de l'intégrale de réfraction

$$\chi_S = \int_1^{n_S} \frac{\tan \alpha}{n} dn, \quad (1)$$

Jean-Baptiste Biot (1774–1862) dès 1836 [25], puis indépendamment Auer et Standish en 1979 [35], ont exploité l'idée d'effectuer le changement de variable utilisant α , ce qui donne en substance :

$$\chi_S = \int_0^{Z'} \frac{\tan \alpha}{n} \frac{dn}{d\alpha} d\alpha. \quad (39)$$

Dans une atmosphère à symétrie sphérique, en utilisant $f(r) := r n(r)$ et en dérivant logarithmiquement l'équation de Bouguer (voir le sous-paragraphe 4.2) par rapport à α , on en tire une expression de $\tan \alpha$ qu'on injecte dans (39), et il vient alors

$$\chi_S = \int_0^{Z'} \frac{d \ln n}{d\alpha} \left(-\frac{d \ln f}{d\alpha} \right)^{-1} d\alpha. \quad (40)$$

Dans le cas de la réfraction des astres vus sur l'horizon astronomique, on a $Z' = \pi/2$, et cette expression pose encore un problème puisqu'usuellement la limite de $(d \ln n / d\alpha)(-d \ln f / d\alpha)^{-1}$ lorsque α tend vers $\pi/2$ est de la forme ∞/∞ . Mais pour lever l'indétermination il suffit de noter que

$$\chi_S = \int_0^{Z'} -\frac{d \ln n}{d \ln f} d\alpha = \int_0^{Z'} -\frac{d \ln n / d \ln r}{1 + (d \ln n / d \ln r)} d\alpha, \quad (41)$$

où intervient (sous réserve d'existence, donc en l'absence de chenal optique) l'application exprimant la dérivée de $\ln n$ par rapport à $\ln f$ non en fonction de $\ln f$ mais en fonction de α , moyennant

$$\ln f = \ln I_B - \ln \sin \alpha, \quad (42)$$

ou bien l'application exprimant la dérivée de $\ln n$ par rapport à $\ln r$ non en fonction de $\ln r$ mais en fonction de α , moyennant l'inversion de l'équation de Bouguer pour avoir r en fonction de α ; et même en $\alpha = \pi/2$ les intégrandes de (41) ne divergent généralement pas. Par contre, si (R) traverse un chenal, elles divergent pour, entre autres, la valeur de α correspondant au bord supérieur du chenal; dans ce cas, il vaut mieux exploiter l'intégrale traditionnelle.

Nous avons déjà dit [2] que ce changement de variable permet de mettre en œuvre des schémas de calcul numérique efficaces, et dans [23] dans ce numéro spécial nous présentons le texte historique de Biot correspondant, en donnant les références de son implantation sur ordinateur; nous y montrons aussi des prolongements théoriques intéressants, qui exploitent un cas où l'intégrale de réfraction est calculable rigoureusement et très facilement grâce à ce changement de variable — les expressions littérales obtenues aident à débusquer certaines idées fausses sur la dépendance de χ_{Sh} par rapport à η_S (voir le paragraphe 8 du présent article).

7. Théorèmes pour une atmosphère à symétrie sphérique

Plusieurs propriétés intéressantes concernent la relation entre la « hauteur (angulaire vraie) » ψ d'un objet à l'infini, et sa « hauteur apparente » $\psi' = 90^\circ - Z' = \psi + \chi_S$ — i.e. celle de sa pseudo-image vue par l'observateur S.

Le préfixe *pseudo* rappelle qu'en fait il n'y a pas stigmatisme par l'atmosphère pour un point objet A extra-atmosphérique : les tangentes, sur la pupille d'entrée du système optique de l'observateur, à tous les rayons courbes du pinceau venant de A, forment un pinceau *astigmat* muni de ses deux traditionnelles focales de Sturm. Dans le cadre du modèle de Cassini (voir le sous-paragraphe 2.1 de [2]), l'écart entre ces focales est facilement calculable, en fonction de la distance zénithale, par les formules classiques (21)–(22) du sous-paragraphe 4.6 du traité [13] par exemple. Une étude plus fine, avec un gradient thermique atmosphérique uniforme, est l'objet de la thèse de Friedrich Dobe [36] en 1911. Il confirme l'ordre de grandeur que donne le calcul avec le modèle de Cassini : la distance focale tangentielle (donc ici, celle qui concerne les rayons situés dans le plan vertical contenant S et A) est positive, de l'ordre de millions de kilomètres pour $\psi' = 45^\circ$, plus courte que la distance focale sagittale ; mais pour A proche de l'horizon la distance focale tangentielle devient de l'ordre de quelques centaines de kilomètres, et la distance focale sagittale quelques milliers de fois plus longue. L'effet de cet astigmatisme, sur la figure lumineuse due à A au voisinage du foyer du système d'observation, est largement dominé par la diffraction.

Notons que pour un objet donné il peut y avoir plusieurs pseudo-images, mais que dans une atmosphère donnée, pour une valeur de ψ' il n'y a qu'une seule valeur de ψ possible ; c'est pourquoi on définit la « courbe de transfert » comme étant le graphe de la fonction ψ de la variable ψ' pour l'observateur S. Nous étudions des exemples de telles courbes dans [7].

7.1. Théorème de Biot (1836)

7.1.1. Notions préliminaires

Grandissement angulaire. On définit $\gamma_S := d\psi'/d\psi$, qui est appelé le « grandissement angulaire vertical local » (pour l'observateur S) ; c'est l'inverse de la pente de la courbe de transfert. On note γ_{Sh} sa valeur pour une pseudo-image sur l'horizon astronomique (i.e. pour $\psi' = 0$).

Coefficient de réfraction. On définit aussi le « coefficient de réfraction de l'atmosphère » supposée à symétrie sphérique (de centre C) : à une distance r du centre de la Terre, c'est $\kappa(r) := r C_h(r)$ où $C_h(r)$ désigne la courbure d'un rayon lumineux (R) en un point H où il a une tangente horizontale à une distance r du centre C de la Terre ; cette courbure est comptée positivement lorsque la concavité du rayon est tournée vers le bas — ce qui est la situation usuelle. Compte tenu de cette convention, et de la relation (3) en H où \mathbf{n} est vertical, on a

$$\kappa = -r \frac{d \ln n}{dr} = -\frac{d \ln n}{d \ln r} = -\frac{r}{n} \frac{dn}{dr} = 1 - \frac{1}{n} \frac{d}{dr}(nr) = -\frac{d\chi}{d\theta} \quad (43)$$

— la dernière expression venant de la relation (9) de [37] dans ce numéro spécial.

On note $\kappa_S := \kappa(r_S)$ la valeur du coefficient de réfraction en S. Si S est au niveau de la mer, avec l'atmosphère standard US1976, $\kappa_S \cong 1/5,9$ (pour des explications sur les autres valeurs possibles, voir le sous-paragraphe 7.1.4) ; $\kappa_S > 0$ permet de voir, pour l'observateur S à une élévation $E := r_S - r_0$ au-dessus du niveau de la mer (où l'indice de l'air vaut n_0), un horizon marin plus éloigné que si les rayons étaient rectilignes, presque comme si dans ce cas r_S était changé en une valeur apparente plus grande

$$r_a = r_S(1 - \kappa_S)^{-1} \cong 1,20r_S \quad (44)$$

(voir le sous-paragraphe 4.2 de l'article [38] dans ce numéro spécial).

7.1.2. Énoncé du théorème

Le théorème de Biot fait intervenir cette grandeur κ_S , si importante pour la pratique, et la relie à γ_{Sh} par une expression générale, très simple et rigoureuse (de façon *a priori* inattendue, par contraste avec le paragraphe 5) :

$$\gamma_{Sh} = 1 - \kappa_S. \quad (45)$$

Comme le montrera la démonstration présentée ci-dessous, ce résultat ne suppose pas l'atmosphère bien mélangée; ayant conscience de la non-uniformité de l'hygrométrie en fonction de l'altitude, et dans le doute concernant l'apparition d'autres constituants de l'air à des altitudes encore non atteintes à l'époque de Biot, celui-ci privilégiait la recherche de lois indépendantes de l'uniformité de la composition de l'atmosphère. Notons aussi que le théorème de Biot (45) est indépendant de la relation adoptée entre n et μ (loi de Gladstone–Dale, ou bien de Clausius–Mossotti — voir le sous-paragraphe 6.1 de [2]), ainsi que de la relation entre μ et (T, P) — i.e. l'équation d'état. Par contre, l'expression de κ_S en fonction de $(dT/dr)_S$, etc., dépend de ces lois.

7.1.3. Démonstration

Nous connaissons trois démonstrations, en termes modernes, de ce théorème; celle que nous proposons ici est la plus proche de l'esprit de celle de Biot [25] (voir [23]).

La relation (41) se met sous la forme

$$\chi_S(\psi') = \int_0^{(\pi/2)-\psi'} g(\alpha, \psi') d\alpha \text{ où } g(\alpha, \psi') := -\frac{d \ln n}{d \ln f} (\ln f(r(\alpha, \psi'))), \quad (46)$$

l'expression $r(\alpha, \psi')$ étant donnée implicitement par l'équation de Bouguer (voir le sous-paragraphe 4.2)

$$f(r) \sin \alpha(r, \psi') = n_S r_S \cos \psi'. \quad (47)$$

Les propriétés de dérivation d'une fonction composée avec une intégrale donnent

$$\frac{d\chi_S}{d\psi'}(\psi') = \int_0^{(\pi/2)-\psi'} \frac{\partial g}{\partial \psi'}(\alpha, \psi') d\alpha - g\left(\frac{\pi}{2} - \psi', \psi'\right). \quad (48)$$

Cette expression compliquée se simplifie sur l'horizon de S : dans ce cas on a $\psi' = 0$, et surtout $\partial g / \partial \psi'(\alpha, 0) = 0$ car le théorème des fonctions implicites, appliqué à la relation (47), donne

$$\frac{\partial r}{\partial \psi'}(\alpha, \psi') = -n_S r_S \frac{\sin \psi'}{f'(r(\alpha, \psi')) \sin \alpha} \quad (49)$$

qui s'annule en $\psi' = 0$; alors

$$\frac{d\chi_S}{d\psi'}(0) = -g\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(\frac{d \ln n}{d \ln f}\right)_S = \frac{\frac{r_S}{n_S} \left(\frac{dn}{dr}\right)_S}{1 + \frac{r_S}{n_S} \left(\frac{dn}{dr}\right)_S} \quad (50)$$

car le point correspondant à $\alpha = \pi/2$, pour le rayon tel que $\psi' = 0$, est le point S — ce que rappelle l'indice S dans l'expression de la dérivée ci-dessus. Tel est, en substance (voir le sous-paragraphe 3.2 de [23]), le résultat obtenu par Biot. On le relie immédiatement au coefficient de réfraction $\kappa_S := -(r_S/n_S)(dn/dr)_S$ (quand l'indice S est mis aux autres grandeurs cela désigne leur valeur au niveau de l'observateur), ce qui donne

$$\frac{d\chi_S}{d\psi'}(0) = \frac{-\kappa_S}{1 - \kappa_S}. \quad (51)$$

Enfin, on en déduit le résultat encore plus compact concernant γ_{Sh} , annoncé au début de ce sous-paragraphe : comme $\psi' = \psi + \chi_S$, par dérivation il vient

$$1 = \frac{d\psi}{d\psi'}(\psi') + \frac{d\chi_S}{d\psi'}(\psi') = \frac{1}{\gamma_S(\psi')} + \frac{d\chi_S}{d\psi'}(\psi') \quad (52)$$

et donc, en utilisant l'indice h pour désigner les valeurs des dérivées pour $\psi' = 0$,

$$\frac{1}{\gamma_{Sh}} = 1 - \frac{d\chi_S}{d\psi'}(0) = 1 + \frac{\kappa_S}{1 - \kappa_S} \quad (53)$$

d'où finalement le résultat annoncé (45).

On voit que des propriétés de symétrie jouent un rôle essentiel dans l'obtention de ce résultat : ici, c'est la parité de la fonction cosinus qui intervient dans la relation (47). En utilisant des conséquences de cette symétrie, on peut proposer d'autres démonstrations. Dans l'Annexe B, nous en montrons une autre qui permet facilement d'aller encore plus loin, par le passage à la dérivée seconde, et d'obtenir ainsi une propriété de la distorsion angulaire verticale locale d'une image centrée sur l'horizon astronomique.

7.1.4. Discussion des valeurs du coefficient de réfraction

Dans une atmosphère à symétrie sphérique, d'après la relation (43) où $r/n \cong r$, le coefficient de réfraction est donné par

$$\kappa \cong -r \frac{dn}{dr}. \quad (54)$$

En supposant l'atmosphère bien mélangée, avec la loi de Gladstone–Dale (9) et celle des gaz parfaits que l'on dérive toutes les deux logarithmiquement, on trouve facilement l'expression de dn/dr , et il vient

$$\kappa = (n-1)r \left(\frac{\mu g}{P} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \right) \quad (55)$$

en admettant que dP/dr vaut $-\mu g$, i.e. que la distribution verticale de pression est hydrostatique. Dans le domaine visible, l'essentiel du coefficient de réfraction κ_S au niveau de l'observateur S est dû au gradient vertical de pression, qui change peu ; mais on observe fréquemment de grands écarts à la moyenne de κ_S , dus à la grande variabilité du gradient thermique $(dT/dr)_S$ au niveau de l'observateur, d'où le coefficient de réfraction en S :

$$\kappa_S = \eta_S \frac{r_S}{T_S} \left[\frac{T_S}{H_T} + \left(\frac{dT}{dr} \right)_S \right] \cong \frac{34 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1} + (dT/dr)_S}{150 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}}. \quad (56)$$

Dans le cadre des hypothèses ci-dessus concernant l'atmosphère et l'indice de l'air, le facteur numérique du numérateur de la formule (56) est indépendant de la longueur d'onde, la température et la pression : c'est l'opposé de la valeur de dT/dr qui permet aux rayons d'avoir un point d'inflexion ou un point méplat (ou à la limite d'aller en ligne droite dans l'atmosphère), et qui coïncide avec celles calculées par Everett en 1873 [39, p. 169], Emden en 1916 [40], Wegener en 1918 [41]. Par contre, le facteur numérique du dénominateur est, pour une longueur d'onde donnée, proportionnel à T_S^2/P_S (voir une autre forme de (56) donnée par la relation (3) de [42]) ; la valeur $150 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$ est valable, pour $\lambda_0 \cong 588 \text{ nm}$, dans l'air à $3,1 \text{ }^\circ\text{C}$ et 1 atm — les variations de 0 à 100 % du taux d'humidité, ainsi que celles de 0 à 1 000 ppmv de CO_2 , ne sont pas perceptibles sur le 3^e chiffre significatif du dénominateur. Dans des conditions stables $(dT/dr)_S > -9,8 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$, donc $\kappa_S > 1/6,7 > 0$ à $15 \text{ }^\circ\text{C}$ et 1 atm . L'effet du gradient thermique $(dT/dr)_S$ négatif contrecarre seulement un peu celui du gradient de pression vertical ; cela donne $\kappa_S \cong 0,17 \cong 1/5,9$ dans l'atmosphère standard US1976 au niveau de la mer (donc non pas à $3,1 \text{ }^\circ\text{C}$ mais à $15 \text{ }^\circ\text{C}$ avec $(dT/dr)_S = -6,5 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1} < 0$), en accord avec les indications ci-dessus — à comparer avec la valeur notée κ_{ST} que donnerait une atmosphère isotherme à $15 \text{ }^\circ\text{C}$, et 1 atm en S : $\kappa_{ST} = \eta_S/(H_T/r_S) \cong 1/4,8$, qui est le rapport des deux paramètres petits fondamentaux vus au paragraphe 4 de [2], et adaptés au cas isotherme. Noter que $(dT/dr)_S$ présente des variations diurnes, et que la valeur standard $-6,5 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$ est la mieux approchée au coucher du Soleil [43]. La prise en compte de cette courbure relative κ_S est très importante dans les mesures géodésiques, pour lesquelles on prend plutôt $\kappa_S \cong 0,14$ en moyenne, car ces mesures se

font souvent par de belles après-midi chaudes et ensoleillées en des lieux relativement élevés — ces faits allant tous les deux dans le sens d'une augmentation du dénominateur de l'expression numérique de (56). On note que le gradient minimum de guidage, caractérisé par $\kappa_S = 1$, est $(dT/dr)_S \cong +116 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ d'après nos valeurs numériques ; les estimations d'autres auteurs vont de $112,7 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ [44] à $117 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ [33] — pour plus de valeurs, voir [45].

Dans une situation proche du guidage au voisinage de S , on a $\kappa_S \cong 1$ et $(dT/dr)_S \cong +116 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ d'après (56). Cela ne peut être réalisé que dans une couche d'inversion de température, i.e. une couche où la température T croît avec r au lieu de décroître comme dans la troposphère standard. Alors la pseudo-image du Soleil sur l'horizon est très aplatie, et cet aplatissement anormalement fort permet d'estimer plus finement le gradient de température en S .

Si $\kappa_S \geq 1$, la bande vide de Wegener (voir le paragraphe 4 de [7], et le paragraphe 3 de [38]) empêche de voir sur l'horizon astronomique l'image d'un objet extra-atmosphérique, donc γ_{sh} n'existe plus.

7.1.5. Déformation apparente d'un objet extra-atmosphérique étendu

Puisque χ_S varie avec ψ' , la courbe de transfert n'est pas rectiligne, et l'image que S voit d'un objet étendu extra-atmosphérique est déformée.

Il est bien connu que la pseudo-image du Soleil ou de la Lune sur l'horizon astronomique est comprimée dans le sens vertical : son diamètre horizontal est quasiment $32'$ alors que son diamètre vertical devient $26'$ environ dans le cas standard (phénomène d'accourcissement). Conformément au théorème de Biot, cette valeur $\gamma_{sh} \cong 26'/32' \cong 0,81$ s'accorde à 2 % près avec la valeur standard $\kappa_S \cong 0,17$.

Il est moins connu que la largeur angulaire horizontale (aussi bien suivant un almicantrat que suivant un arc de grand cercle de la sphère céleste) est aussi rapetissée : cet effet, beaucoup plus faible, est dû au fait que la réfraction déplace les points le long des « sùnuts » (cercles verticaux) vers le zénith, où ils convergent. Des formules rigoureuses de Kivalov et Young [46] nous déduisons que, pour un objet dont le centre a la distance zénithale vraie Z et un petit diamètre angulaire horizontal D_h , celui de sa pseudo-image est

$$D'_h \cong (1 - \chi_S \cotan Z) D_h \quad (57)$$

vu que $\chi_S \ll 1 \text{ rad}$; ce résultat est intuitif puisque sur l'horizon astronomique les tangentes aux sùnuts sont verticales, donc parallèles entre elles. Pour Z pas trop proche de 90° , on obtient une bonne approximation du grandissement angulaire horizontal D'_h/D_h en utilisant la formule de Simpson, avec en plus $Z' \cong Z$, et nous trouvons

$$D'_h/D_h \cong 1 - \eta_S ; \quad (58)$$

cela reste encore évidemment valable quand $Z = 0$ (malgré la divergence de $\cotan Z$), car le rayon angulaire de l'objet est multiplié par $1 - \eta_S$ environ — mais la notion de direction horizontale n'a plus de sens dans ce cas. Nous voyons que l'effet de *contraction* horizontale est très petit (de l'ordre de 0,03 % dans les conditions normales) et quasi uniforme sur la majeure partie du ciel, sauf au voisinage de l'horizon : car quand Z tend vers 90° par valeurs inférieures, χ_S croît moins vite que $\tan Z$ et reste fini, donc $1 - \chi_S \cotan Z$ passe de $1 - \eta_S$ à 1 ; ainsi, contrairement à l'opinion courante erronée, le diamètre horizontal apparent de l'image à l'approche de l'horizon ne reste pas constant théoriquement, mais augmente — car sa contraction horizontale (due à la forme des sùnuts et à χ_S) disparaît au voisinage de l'horizon.

7.2. Théorème de Biot–Sang–Meyer–Fraser–White

7.2.1. Présentation

Ce théorème a été découvert par Jean-Baptiste Biot le premier en 1810 [47], puis oublié et redécouvert plusieurs fois de suite : par Edward Sang en 1884 [48], Rudolf Meyer en 1935 [49], Alistair Fraser en 1975 [50], Robert White en 1979 [51]...

Il stipule que la fonction ψ' de la variable ψ est strictement croissante pour $\psi' \in [0^\circ, 90^\circ]$, avec une dérivée non nulle quand $\psi' = 0$: les images situées au-dessus de l'horizon astronomique sont forcément droites pour un objet extra-atmosphérique, et ne peuvent avoir un grandissement angulaire local vertical qui serait nul sur l'horizon astronomique. Ce théorème impose donc $\gamma_{Sh} > 0$.

Attention : pour les pseudo-images d'objets à distance finie, les propriétés changent — car ce cas ne relève pas de la réfraction astronomique, mais de la réfraction terrestre.

7.2.2. Démonstration

Profitons de la planéité du rayon pour le définir par son équation en coordonnées polaires (r, θ) . Comme

$$\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta}, \quad (59)$$

et que

$$1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad (60)$$

on en déduit l'équation différentielle du rayon sous la forme d'une quadrature :

$$\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = r^2 \left[\frac{f^2(r)}{I_B^2} - 1 \right] := h(r, I_B) \text{ avec } I_B = f(r_S) \cos \psi'. \quad (61)$$

Choisissons judicieusement l'origine des angles, en sorte que $\theta = 0$ au point S. Dans le cas où $\psi' \geq 0$, et de façon que r varie de façon monotone sur le rayon entre r_S et l'infini, il vient

$$\frac{\pi}{2} - \psi = \int_{r_S}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{h(r, I_B)}} \text{ donc } -\frac{d\psi}{d\psi'} = \int_{r_S}^{\infty} \frac{\partial h^{-1/2}}{\partial I_B} \frac{dI_B}{d\psi'} dr. \quad (62)$$

Or

$$\frac{\partial h^{-1/2}}{\partial I_B} = -\frac{1}{2} h^{-3/2} \times \frac{-2r^2 f^2(r)}{I_B^3} > 0 \quad (63)$$

et, strictement au-dessus de l'horizon astronomique,

$$\frac{dI_B}{d\psi'} = -f(r_S) \sin \psi' < 0; \quad (64)$$

dans ce cas, on en déduit

$$d\psi'/d\psi = 1/(d\psi/d\psi') > 0. \quad (65)$$

On complète l'étude en regardant si cela tient toujours sur l'horizon astronomique, i.e. en se demandant si γ_{Sh} est strictement positif. Mais on sait (voir le sous-paragraphe 7.1.4) que si $\kappa_S \geq 1$, γ_{Sh} n'existe plus. En conséquence, $\kappa_S < 1$ quand γ_{Sh} existe; et $\gamma_{Sh} > 0$ d'après le théorème de Biot.

Dans [2, 37, 38], nous présentons d'autres applications intéressantes de l'équation (61) : comme toute quadrature, sa discussion donne sur la fonction inconnue r de la variable θ des informations rigoureuses, quantitatives ou qualitatives [52, p. 132–145] particulièrement fécondes dans le cas d'un chenal optique, dont nous détaillons les propriétés dans [7].



FIGURE 2. Soleil en oméga © Photo : Pekka Parviainen. Au lever « [...] c'étoit comme si deux soleils se fussent détachés l'un de l'autre, l'un avoit monté pendant que l'autre descendait » [53, p. 230] ; il « retournoit du côté de l'horizon & n'a disparu que 5 à 6 secondes après s'être détaché du véritable. » [54, p. 401].

7.2.3. Conséquences

Le théorème de Biot–Sang–Meyer–Fraser–White a une conséquence pratique pour la navigation astronomique : si au travers d'une atmosphère à symétrie sphérique on voit une image renversée d'un objet à l'infini (par exemple, le pied du « Soleil en oméga » — Figure 2) on sait que non seulement l'horizon astronomique n'est pas l'horizon sensible (en bas du « pied »), mais qu'il est même strictement au-dessus du haut de ce « pied ».

Le diamètre horizontal de cette image donne l'échelle angulaire : $32'$. L'erreur angulaire sur la position de l'horizon astronomique peut facilement excéder quelques minutes d'angle...

Une autre conséquence résulte de $\gamma_{sh} > 0$. Pour une atmosphère stable vis-à-vis de la convection, donc où $-(dT/dr)_S < 9,8 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$, nous savons que $\kappa_S > 0$ — voir le sous-paragraphe 7.1.4. Alors, grâce à la relation (51), on en déduit que $-d\chi_S/d\psi'(0) > 0$. On prouve donc ce que Pierre Bouguer avait constaté sur les sommets péruviens, et que Leonhard Euler a redécouvert au bout de sa plume une dizaine d'années après [55] : χ_S est plus grand juste sous l'horizon astronomique qu'au-dessus de lui.

Par contre, avec une couche d'air produisant un mirage inférieur car son support la chauffe de quelques degrés sur quelques décimètres (et il y a aussi une seconde longueur caractéristique, millimétrique [56]), $-dT/dr$ y dépasse $9,8 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ donc cette couche est instable (ce qui explique l'aspect dentelé de la limite inférieure du mirage — voir la Figure 2), et même $-dT/dr > 34 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ donc $\kappa(r) < 0$ (voir le sous-paragraphe 7.1.4). Par exemple, à l'ombre sur la laisse de basse mer à Dunkerque le 22 mars 1809, Biot et Mathieu ont relevé les températures suivantes : $11,0^\circ\text{C}$ sur le sable ; $9,5^\circ\text{C}$ à 3 cm au-dessus ; $7,0^\circ\text{C}$ à 15 cm ; $6,3^\circ\text{C}$ à 65 cm ; $6,1^\circ\text{C}$ à 93 cm [47, p. 31]. Dans cette situation, non seulement $-d\chi_S/d\psi'$ s'annule assez bas sous l'horizon astronomique, mais en plus il devient inférieur à -1 encore plus bas, là où on voit une image renversée (du Soleil par exemple, cf. Figure 2) ; cependant χ_S ne devient jamais négatif dans les cas concrets. Au lieu de relever l'horizon comme dans le cas standard (où la concavité des rayons qui

en forment l'image est vers le bas), la réfraction l'abaisse (car dans la couche chauffée la concavité des rayons est vers le haut); il se forme une image renversée du ciel — et du bas du Soleil, déjà signalée sur la Figure 2.

7.3. Équation différentielle du second ordre pour les rayons lumineux

Nous venons de voir que les rayons lumineux sont régis par la quadrature (61), qui donne facilement des résultats qualitatifs intéressants par une discussion graphique [7], car c'est une équation différentielle du premier ordre — ce qui est analytiquement un avantage. Par contre, son intégration numérique est informatiquement délicate : il faut discuter le signe de $dr/d\theta$. Avec l'informatique, il est rentable d'esquiver ce problème en remplaçant la quadrature par une équation différentielle équivalente, du second ordre, pour laquelle il n'y a plus de signe à discuter [57]. La procédure est très classique : on considère que l'équation (61) écrit, pour un rayon quelconque donné et donc pour I_B fixé, l'égalité de deux fonctions dérivables de θ , alors il y a égalité de leurs dérivées :

$$2 \frac{dr}{d\theta} \frac{d^2 r}{d\theta^2} = \frac{dr}{d\theta} \frac{\partial h}{\partial r}. \quad (66)$$

Après calcul de $\partial h/\partial r$ (compte tenu de la définition de $f = r n$ vue au paragraphe 6) et simplification par $2dr/d\theta$, on trouve

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} = r \left(\frac{f^2}{I_B^2} - 1 \right) + r^2 \frac{f}{I_B^2} \frac{df}{dr} = \frac{r^3 n}{I_B^2} \left(2n + r \frac{dn}{dr} \right) - r. \quad (67)$$

Cette équation se prête facilement à une intégration numérique.

7.4. Théorème de réfraction-extinction de Laplace (1805)

7.4.1. Présentation

Considérons la « profondeur optique » \mathcal{P} de l'atmosphère le long d'un rayon (R) — reliant un astre A à l'observateur S — i.e. l'opposé du logarithme népérien du facteur d'extinction le long de (R) : si on suppose l'atmosphère bien mélangée, \mathcal{P} est proportionnel à l'intégrale de la masse volumique μ de l'air le long de (R), appelée masse (optique) d'air absolue (introduite par Bouguer [58]) et notée ici $Q_S := \int_{-\infty}^{s_S} \mu ds$. Avec les mêmes hypothèses que celles de la relation (13) on trouve que, lorsque $P_S = 1$ atm sous nos latitudes, cette intégrale vaut $1,0350 \text{ kg}\cdot\text{cm}^{-2}$ pour un rayon vertical (i.e. pour $Z' = 0$). Il est intéressant de savoir comment cette quantité varie avec Z' : les corrections liées au retard temporel des signaux GPS sont quasiment proportionnelles à Q_S [59], comme le sont pour la photométrie les corrections de magnitude dues à l'extinction lors de la traversée de l'atmosphère.

Grâce à la loi de Gladstone–Dale dans une atmosphère à symétrie sphérique et bien mélangée (9), l'intégrale (6) devient, en supposant la symétrie sphérique et $(\tan \alpha)/n \cong \tan \alpha$,

$$\chi_S \cong C \int_{-\infty}^{s_S} \frac{d\mu}{ds} \tan \alpha ds = -C \int_{-\infty}^{s_S} \frac{d\mu}{dr} \sin \alpha ds \quad (68)$$

où $\tan \alpha$ est positif (resp. négatif) si le rayon provenant de l'infini se rapproche (resp. s'éloigne) de la Terre.

En admettant le profil classique de μ exponentiel avec l'échelle de hauteur H_1 , on a

$$\chi_S \cong -C \int_{-\infty}^{s_S} -\frac{\mu}{H_1} \sin \alpha ds. \quad (69)$$

On peut donc noter tout de suite que, comme ce théorème n'est valable que pour une forme donnée de profil de μ , il ne sera pas possible de transposer à Q_S le théorème d'Oriani. Enfin, comme

$\sin Z' \cong \sin \alpha$ là où μ n'est pas négligeable, on obtient le théorème de réfraction-extinction de Laplace [28, Livre 10, chap. 3], [29, p. 551–556], [60, 61]

$$\chi_S \cong C \frac{Q_S}{H_1} \sin Z'. \quad (70)$$

Cette approximation est assez bonne même pour des astres sur l'horizon ($\sin \alpha \cong 1$ sur toute la hauteur utile de l'atmosphère) ; ceci est minutieusement discuté par Schoenberg [60]. De plus, comme l'essentiel de la réfraction est dû à la portion de l'intégrale (6) correspondant à quelques kilomètres seulement au-dessus du sol, où la variation relative de température absolue est de quelques dixièmes seulement, l'approximation isotherme est d'assez bonne qualité pour l'atmosphère réelle [45]. Ainsi le théorème de Laplace permet-il de relier assez fidèlement les variations de Q_S avec Z' à celles de χ_S dans la plupart des cas. Une des exceptions est celui où les rayons traversant (ou approchant par le dessus), de manière rasante, une couche d'inversion créant un chenal optique, le long de laquelle ils peuvent parcourir un trajet de plusieurs kilomètres où on a (par dérivation logarithmique de la loi de Gladstone–Dale)

$$-\frac{d\mu}{dr} \cong \frac{n}{n-1} \frac{\mu}{r} \cong 4 \frac{\mu}{H_1} \quad (71)$$

et donc où le coefficient devant μ et mis par Laplace est sous-estimé d'un facteur 4 — sans oublier que cette sous-estimation est usuellement aggravée, dans l'expression de la profondeur optique en fonction de la distribution de μ , par le fait que dans la couche d'inversion l'air est relativement plus chargé en aérosols qui le rendent plus diffusant (donc la profondeur optique n'est plus proportionnelle à Q). En outre, l'erreur sur Q déduit de χ par les approximations de Laplace serait encore plus grande si le rayon pour lequel on cherche Q avait un point d'inflexion ($d\mu/dr$ changerait de signe !).

Si on utilise pour χ_S l'approximation de Simpson classique (7), on retrouve un fait bien connu [58, 61–64] : pour des distances zénithales pas trop proches de 90° , Q_S varie proportionnellement à $1/\cos Z'$, ce qui est son approximation la plus basique [58]. Cette propriété classique, valable aussi pour d'autres modèles d'atmosphère que le modèle isotherme, et même dans le cas où la composition de l'air varierait avec l'altitude seulement, permet d'estimer la profondeur optique au zénith par la pente de la droite de Bouguer [58] — critiquée cependant par Bemporad [64]. Mais le théorème de Laplace donne encore d'autres renseignements plus intéressants.

7.4.2. Application

Un prolongement intéressant consiste à en estimer la « masse d'air relative » pour l'observateur S et à l'horizon astronomique, $m_{Sh} := Q_{Sh}/Q_{S0}$, où Q_{Sh} (resp. Q_{S0}) est la valeur de l'intégrale Q_S pour des rayons arrivant en S avec $Z' = 90^\circ$ (resp. 0°). Pour cela, on part de

$$\frac{\chi_S}{\sin Z'} \cong C \frac{Q_S}{H_1} \cong \frac{\eta_S}{\cos Z'} \quad (72)$$

(approximation valable tant que Z' n'est pas trop proche de 90°), et en considérant cette égalité pour $Z' \rightarrow 0$ on trouve

$$\eta_S = C Q_{S0} / H_1, \quad (73)$$

ce qui redonne au passage, à une distance zénithale apparente quelconque mais pas trop proche de 90° , la masse d'air relative (pour S)

$$m_S := Q_S / Q_{S0} = 1 / \cos Z'; \quad (74)$$

mais cette approximation classique ne peut donner m_{Sh} . Avec une atmosphère isotherme, on contourne cette difficulté en appliquant le théorème de réfraction-extinction à l'horizon astronomique, qui conduit à

$$\chi_{Sh} = C Q_{Sh} / H_1; \quad (75)$$

la comparaison de χ_{Sh} et η_S dans le cas isotherme fournit donc

$$m_{Sh} = \chi_{Sh}/\eta_S. \quad (76)$$

Dans les conditions normales en S (0°C et 1 atm), $\chi_{Sh} \cong 1,02 \times 10^{-2}$ en radians (soit $35'$ environ) et $\eta_S \cong 2,924 \times 10^{-4}$ pour $\lambda_0 \cong 588\text{ nm}$, donc $m_{Sh} \cong 35$ quand on est proche du cas de l'atmosphère isotherme — mais quand on est proche de situations de guidage, on peut avoir $m_{Sh} \cong 80$. Sachant qu'au niveau de la mer la profondeur optique \mathcal{P}_{S0} de l'atmosphère au zénith vaut en moyenne $0,15$ vers $0,55\ \mu\text{m}$ (donc dans le vert) si l'air est pur (i.e. sans aérosols, ni vapeur d'eau ni ozone, qui rajoutent environ $0,08$ à la profondeur optique), cela donne pour lui la profondeur optique à l'horizon $\mathcal{P}_{Sh} \cong 35 \times 0,15 \cong 5$; donc dans les conditions normales la luminance apparente du disque solaire sur l'horizon doit être au moins $\exp \mathcal{P}_{Sh} / \exp \mathcal{P}_{S0} = \exp[(m_{Sh} - 1)\mathcal{P}_{S0}] \sim 10^2$ fois moins forte qu'au zénith. Dans la pratique elle est de l'ordre de 10^4 fois moins forte qu'au zénith ! Cela est dû à l'influence de constituants minoritaires qui ne sont pas bien mélangés à l'air pur et restent plus près du sol, notamment les aérosols et la vapeur d'eau dont la hauteur d'échelle est $H_v \sim 2\text{ km}$. Or on peut montrer que, si on applique à la vapeur d'eau l'hypothèse d'une distribution isotherme, sa masse d'air relative est de l'ordre de $\sqrt{r_S/H_v} \sim 70$; à cause de cela, sa contribution à Q est multipliée par 70 (et non pas 35 , car $H_v \sim H_1/4$) en passant du zénith à l'horizon; il en est de même pour les aérosols, et ces effets sur l'extinction deviennent aussi importants que ceux dus à l'air pur, la valeur de \mathcal{P}_{Sh} atteint 10 et cela suffit à expliquer la baisse de luminance d'un facteur 10^4 — ou encore plus si une couche d'inversion de température est présente à basse altitude, ce qui rend ces facteurs dus aux aérosols ou à la vapeur d'eau extrêmement variables d'un moment à l'autre et relativement imprévisibles. La contribution de l'ozone à \mathcal{P}_{S0} est de l'ordre de $0,03$ à $0,05$ au maximum de l'absorption de ses bandes de Chappuis (dans l'orange, donc pas à $0,55\ \mu\text{m}$), mais à cause de la haute altitude ($20\text{--}25\text{ km}$) de la couche d'ozone, cette contribution n'est multipliée que par 10 en passant du zénith à l'horizon [65] donc elle reste minoritaire dans \mathcal{P}_{Sh} , de l'ordre de $0,4$.

8. Réfraction au voisinage de l'horizon

Il s'agit du problème le plus délicat, où butent les approximations de Simpson, de Laplace, de Radau, etc. — mais pas celle de Bradley (voir le sous-paragraphe 3.5 de [37]). Son étude, la plus sensible au profil de réfractivité en fonction de l'altitude, nécessite un autre angle d'attaque. La difficulté à appréhender physiquement l'ensemble de ce phénomène vient de ce qu'il y a deux paramètres petits fondamentaux, η_S et h_1 ; le premier conditionne l'existence de la réfraction, le second ne fait que la moduler subtilement et de façon pas du tout négligeable car il est (dans le cas d'un profil de réfractivité exponentiel) 5 fois plus grand que le premier. Autant dire qu'aucune approximation simple ne fonctionnera, et cette étude nécessite des calculs lourds.

Un point de départ classique consiste à dire que, d'après la relation (23),

$$\chi_S = n_S r_S (\cos \psi') \int_1^{n_S} \frac{n^{-1}}{\sqrt{n^2 r^2 - (n_S r_S \cos \psi')^2}} dn = \int_1^{n_S} n^{-1} \left[\left(\frac{nr}{n_S r_S} \right)^2 (1 + \tan^2 \psi') - 1 \right]^{-1/2} dn. \quad (77)$$

En réutilisant la méthode approximative de développement du radical déjà vue au sous-paragraphe 5.1, et en admettant que $n^{-1} \cong \sqrt{2/(1+n_S^2)}$ — approximation de Laplace [29, p. 478], revenant à prendre au numérateur n uniforme très proche de la moyenne de 1 et n_S — voire $n^{-1} \cong 1$ (la variation du numérateur ayant beaucoup moins d'effet que celle de la racine carrée, car celle-ci devient très petite pour $n \cong n_S$ vu qu'on suppose ψ' petit), on obtient — toujours en notant Y l'approximation de $\Delta(nr)/n_S r_S$ —

$$\chi_S \cong \int_1^{n_S} \left[2 \frac{\Delta(nr)}{n_S r_S} + \left(\frac{nr}{n_S r_S} \tan \psi' \right)^2 \right]^{-1/2} dn \cong \int_1^{n_S} (2Y + \tan^2 \psi')^{-1/2} dn \quad (78)$$

d'où, grâce à (25) et à la loi de Gladstone–Dale,

$$\chi_S \cong \frac{C}{\sqrt{2}} \int_0^{\mu_S} \left[\frac{z}{r_S} + C(\mu - \mu_S) + \frac{\tan^2 \psi'}{2} \right]^{-1/2} d\mu. \quad (79)$$

Dans le cas particulier où $\psi' = 0$, on retrouve l'intégrale impropre classique rappelée par František Link pour ses études sur l'éclairement et la couleur de la Lune lors de ses éclipses [66, 67] — qui réalisent un des souhaits de Kepler (voir le paragraphe 1 de [2]). Grâce à un changement de variable astucieux, Link a transformé — voir les équations (5)–(10) de [68] dans ce numéro spécial — cette intégrale de façon à la rendre non-impropre pour $\psi' = 0$ (comme Biot [25] — voir le paragraphe 6 du présent article, et le sous-paragraphe 3.1 de [23]), et à l'estimer numériquement pour l'atmosphère réelle (d'après une table donnant les valeurs de μ tous les kilomètres, de 0 à 80 km d'altitude). Bouguer avait envisagé [69] d'utiliser les éclipses de Lune pour préciser le profil d'indice dans son modèle d'atmosphère — et surtout la valeur de son exposant q (voir le paragraphe 3 de [2]).

Notons au passage que

$$Q_S = \int_0^\infty \frac{\mu}{\cos \alpha} dz = \int_0^\infty \mu \frac{nr}{\sqrt{n^2 r^2 - I_B^2}} dz \quad (80)$$

s'écrit, avec à la fin les mêmes approximations que pour obtenir l'expression (79),

$$\begin{aligned} Q_S &= \int_0^\infty \mu(z) \frac{nr}{\sqrt{n^2 r^2 - (n_S r_S \cos \psi')^2}} dz = \int_0^\infty \mu(z) \left[1 - \left(\frac{n_S r_S}{nr} \right)^2 + \left(\frac{n_S r_S}{nr} \sin \psi' \right)^2 \right]^{-1/2} dz \\ &\cong \int_0^\infty \mu(z) \left[2Y + \left(\frac{n_S r_S}{nr} \right)^2 \sin^2 \psi' \right]^{-1/2} dz \\ &\cong \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \mu(z) \left[\frac{z}{r_S} + C(\mu - \mu_S) + \frac{\tan^2 \psi'}{2} \right]^{-1/2} dz \end{aligned} \quad (81)$$

compte tenu de la petitesse de ψ' . Et toujours dans le cas particulier où $\psi' = 0$, cette dernière expression est aussi celle donnée par Link [66] en parallèle avec l'expression de la réfraction.

Dans le cas d'un profil de μ exponentiellement décroissant, d'échelle de hauteur $H_1 = (1 + \varepsilon) H_T$, avec $\varepsilon \cong 2/11$ pour Kramp et $1/27$ pour Bessel selon Radau [30, B. 27], la comparaison des expressions (79) et (81) nous montre immédiatement que

$$\chi_S / \cos \psi' = C Q_S / H_1 \quad (82)$$

conformément au théorème de réfraction–extinction de Laplace, même pour ψ' très petit. De plus, l'expression (79) devient

$$\chi_S = \frac{\eta_S}{\sqrt{2} H_1} \int_0^\infty e^{-z/H_1} \left[\frac{z}{r_S} - \eta_S (1 - e^{-z/H_1}) + \frac{\tan^2 \psi'}{2} \right]^{-1/2} dz; \quad (83)$$

comme d'après la relation (54) $\eta_S / H_1 \cong \kappa_S / r_S \sim \eta_S / H_T \cong \kappa_{ST} / r_S \ll 1 / r_S$ car $\kappa_{ST} \cong 0,23 \ll 1$, une approximation supplémentaire est acceptable :

$$\begin{aligned} \chi_S &\cong \frac{\eta_S}{\sqrt{2} H_1} \int_0^\infty e^{-z/H_1} \left[\frac{z}{r_S} - \eta_S \frac{z}{H_1} + \frac{\tan^2 \psi'}{2} \right]^{-1/2} dz \\ &= \frac{\eta_S}{\sqrt{2} H_1} \int_0^\infty e^{-z/H_1} \left[\frac{z}{r_S} (1 - \kappa_S) + \frac{\tan^2 \psi'}{2} \right]^{-1/2} dz. \end{aligned} \quad (84)$$

Ici $\chi_S(\psi')$ s'exprime à l'aide de la fonction transcendante K , tabulée, telle que (voir le paragraphe 4 de [2])

$$K(u) := \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(v+u^2)} dv / \sqrt{v+u^2} = \int_u^\infty e^{-X^2} dX = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \operatorname{erf}(u)]; \quad (85)$$

tous calculs faits, on trouve

$$\chi_S = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\eta_S \kappa_S}{1 - \kappa_S}} \exp\left(\frac{\kappa_S}{1 - \kappa_S} \frac{\tan^2 \psi'}{2\eta_S}\right) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\kappa_S}{2(1 - \kappa_S)\eta_S}} \tan \psi'\right)\right] \quad (86)$$

ce qui est aussi un résultat voisin de la formule donnée par Oppolzer sans démonstration [70].

Sachant que $d\operatorname{erf}/dX(0) = 2/\sqrt{\pi}$, on vérifie que l'expression (86) redonne une version du théorème de Biot — la relation (51).

On déduit de (86) une expression approchée de la réfraction horizontale, que Kramp avait trouvée d'une autre façon [71, p. 148–149] :

$$\chi_{Sh} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\eta_S \kappa_S}{1 - \kappa_S}} = \eta_S \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{r_S}{(1 - \kappa_S)H_1}} = \eta_S \sqrt{\frac{\pi}{2(h_1 - \eta_S)}}; \quad (87)$$

dans le cas de l'atmosphère isotherme, elle donne $0,0012 \text{ rad} \cong 41'$ sur le visible dans les conditions normales, $40'$ avec $\varepsilon \cong 1/27$, et $37'$ avec $\varepsilon \cong 2/11$. Mais la valeur moyenne de χ_{Sh} pour l'atmosphère réelle est $35'$, dans les conditions normales en S ; l'écart entre $35'$ et $41'$ vient surtout de l'inadéquation du profil de μ exponentiel, et seulement un peu de l'approximation majorante $1 - e^{-z/H_1} \cong z/H_1$. D'ailleurs, avant de montrer l'expression (87), Kramp n'a pas fait cette approximation permettant de passer de la relation (83) à (84) : plus savamment, il a effectué un développement qui lui permet d'obtenir $\chi_{Sh}/\sqrt{\pi\eta_S\kappa_S/2}$ sous la forme d'une série entière de κ_S dont le début est numériquement $1 + 0,41\kappa_S$ (voir le paragraphe 4 de [2]) alors que le début de celui déduit de l'expression (87) est $1 + 0,50\kappa_S$; Kramp effectue les calculs numériques de sa série et montre qu'il faut retrancher environ $1'$ aux trois valeurs calculées ci-dessus, ce qui les ramène à $40'$, $39'$ et $36'$ respectivement, et permet de préciser la discussion menée au paragraphe 4 de [2] sur l'inanité du paramètre ε .

Intéressons-nous à la variation de χ_{Sh} avec (T_S, P_S) . En admettant la loi de Gladstone–Dale et celle des gaz parfaits, on sait que η_S est proportionnel à P_S/T_S , et on a vu au sous-paragraphe 7.1.4 qu'à $(dT/dr)_S$ fixé (donc à ε fixé d'après la relation (22) de [2]), κ_S est proportionnel à P_S/T_S^2 et h_1 à T_S ; donc le premier terme de la série de Kramp, i.e. $\sqrt{\pi\eta_S\kappa_S/2} = \eta_S\sqrt{\pi/(2h_1)}$, est proportionnel à $P_S/T_S^{3/2}$. À P_S fixé, pour adapter une table de réfraction à une nouvelle température, il est donc faux de multiplier cette table par l'ancienne valeur de T_S sur la nouvelle, contrairement à une pratique usuelle initiée avant le XIX^e siècle. Dès 1818, John Brinkley (1763–1835) pointait cette erreur commise dans des tables françaises [72, p. 171]; à partir de 1821, James Ivory renchérisait, car il était conscient du fait que χ_{Sh} est quasiment proportionnel à $T_S^{-3/2}$ [73], [32, p. 448 et 479]; en notre siècle cette faute subsiste encore [74, p. 562 et 709 Tables 27–28].

Une approche plus parlante du calcul de χ_{Sh} consiste à se fixer, pour une longueur d'onde donnée, une forme $p(r)$ de profil de réfractivité $\eta(r) = \eta_S p(r)$ — en posant $p(r_S) = 1$ — et à exprimer, à cette longueur d'onde et pour ce profil fixés, la dérivée de χ_{Sh} par rapport à η_S en $\eta_S = 0$. Comme le théorème d'Oriani ne s'applique pas dans le cas de la réfraction horizontale, il faut s'attendre à ce que le résultat dépende de la forme du profil, caractérisée par la fonction p — voir la comparaison des expressions (15) et (16) de [2]. On repart de l'expression intégrale (23), où l'on effectue le changement de variable de n à r :

$$\chi_{Sh} = \eta_S \int_{\infty}^{r_S} n_S r_S \frac{n^{-1}}{\sqrt{n^2 r^2 - (n_S r_S)^2}} \frac{dp}{dr} dr. \quad (88)$$

Comme η_S est en facteur devant l'intégrale, celle-ci est donc la dérivée que nous cherchons, quand on y prend $\eta_S = 0$, ce qui implique $n(r) = 1$ sur tout le domaine d'intégration; en effet,

$$\lim_{\eta_S \rightarrow 0} \frac{\chi_{Sh}}{\eta_S} = \int_{\infty}^{r_S} r_S \frac{1}{\sqrt{r^2 - r_S^2}} \frac{dp}{dr} dr. \quad (89)$$

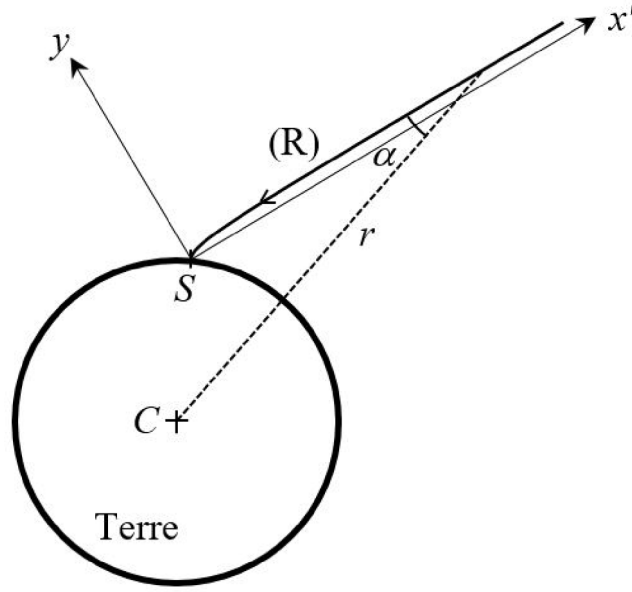


FIGURE 3. Axes permettant une interprétation géométrique du calcul simplifié de χ_{Sh} .

Avec le changement de variable $x := -\sqrt{r^2 - r_S^2}$, il vient

$$\lim_{\eta_S \rightarrow 0} \frac{\chi_{Sh}}{\eta_S} = \int_{-\infty}^0 r_S \frac{1}{\sqrt{x^2}} \frac{dp}{dr} \frac{x}{\sqrt{r_S^2 + x^2}} dx = \int_{-\infty}^0 -\frac{dp}{dr} \frac{r_S}{\sqrt{r_S^2 + x^2}} dx. \quad (90)$$

Ce résultat est susceptible d'une interprétation géométrique simple (cf. Figure 3), car à la limite où η_S tend vers 0, le rayon lumineux (R) tend vers une ligne droite, sur laquelle on met l'axe Ox' avec O en S ; c'est la *straight line approximation*, très utile pour interpréter les courbes de lumière enregistrées lors des occultations — voir le sous-paragraphe 5.1 de l'article [75] dans ce numéro spécial.

Alors on trouve facilement le résultat ci-dessus en exprimant, pour la vitesse finale de la particule fictive, le rapport de sa composante perpendiculaire à Ox' sur sa composante parallèle à Ox' . Cette technique sert aussi à étudier la petite déviation gravitationnelle d'un rayon lumineux rasant le Soleil, dans le formalisme semi-classique qui donne $0,875''$ (la moitié du résultat prévu par la relativité générale).

La petitesse de la hauteur réduite de l'atmosphère par rapport à r_S permet l'approximation suivante :

$$\lim_{\eta_S \rightarrow 0} \frac{\chi_{Sh}}{\eta_S} \cong \int_{-\infty}^0 -\frac{dp}{dr} dx. \quad (91)$$

Dans le cas d'un profil de η exponentiel, cela donne

$$\lim_{\eta_S \rightarrow 0} \frac{\chi_{Sh}}{\eta_S} = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{H_1} \exp\left(-\frac{\sqrt{r_S^2 + x^2} - r_S}{H_1}\right) dx \cong \int_{-\infty}^0 \frac{1}{H_1} \exp\left(-\frac{x^2}{2r_S H_1}\right) dx. \quad (92)$$

Sachant que $2 \int_0^\infty e^{-v^2} dv = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, on en déduit l'expression approximative correspondante :

$$\lim_{\eta_S \rightarrow 0} \frac{\chi_{Sh}}{\eta_S} = \sqrt{\frac{\pi}{2H_1}} = \sqrt{\frac{\pi \kappa_S}{2 \eta_S}} \quad (93)$$

qui est bien, à p fixé (donc h_1 aussi), cohérent avec l'expression (87) comme avec les autres de Kramp. Malheureusement, la petitesse de η_S ne suffit pas pour dire que, dans le domaine de ses valeurs usuelles, χ_{Sh} serait une fonction quasi linéaire de η_S à p fixé, contrairement à une opinion très répandue; en effet, à p fixé, χ_{Sh} diverge pour une valeur de η_S qui est petite aussi, comme h_1 — voir la relation (87). Et en fait, la non-linéarité de χ_S en fonction de η_S est déjà bien sensible avec $Z' > 70^\circ$.

On peut préciser cela facilement dans le cadre du modèle d'atmosphère de Bouguer (rapidement présenté au paragraphe 3 de [2], et détaillé dans le sous-paragraphe 3.5 de [37]) où $n(r) = K/r^q$ (avec q positif différent de 1) tant que n décroît de n_S à 1, puis

$$n(r) = 1 \text{ pour } r \geq r_S + H = r_S n_S^{1/q} \quad (94)$$

avec H la hauteur « totale » de cette atmosphère; on a vu au paragraphe 3 de [2] que Bouguer a cherché des valeurs numériques de q . Son modèle, qui utilise des rayons courbes et a (comme ceux de Simpson–Mayer et de Newton) deux paramètres indépendants ajustables (ici, $h := H/r_S \ll 1$ qui est la hauteur totale relative de son atmosphère, et $q \cong \eta_S/h$), donne (tant que la formule ci-dessous fournit une valeur positive, ce qui exclut le cas où $h - \eta_S$ et ψ' sont tous deux négatifs — or $h - \eta_S < 0$ équivaut à $q > 1$ à cause de la relation précédente)

$$\chi_S \cong \frac{\eta_S}{h - \eta_S} \left[\sqrt{2(h - \eta_S) + \psi'^2} - \psi' \right] = \frac{2\eta_S}{\sqrt{2(h - \eta_S) + \psi'^2} + \psi'} \text{ et } \left(\frac{\partial^2 \chi_S}{\partial \eta_S^2} \right)_{\psi'} > 0 \quad (95)$$

(voir le sous-paragraphe 3.5 de [37]). On en déduit

$$\psi = \psi' - \chi_S = \frac{h\psi' - \eta_S \sqrt{2(h - \eta_S) + \psi'^2}}{h - \eta_S} = \frac{\psi' - q \sqrt{2(1 - q)h + \psi'^2}}{1 - q} \quad (96)$$

qui s'inverse moyennant quelques calculs, donnant

$$\psi' = \frac{h\psi + \eta_S \sqrt{2(h + \eta_S) + \psi^2}}{h + \eta_S} \quad (97)$$

puis

$$\chi_S = \psi' - \psi = \frac{\eta_S}{h + \eta_S} \left[\sqrt{2(h + \eta_S) + \psi^2} - \psi \right] = \frac{2\eta_S}{\sqrt{2(h + \eta_S) + \psi^2} + \psi} \quad (98)$$

et $(\partial^2 \chi_S / \partial \eta_S^2)_{\psi} < 0$.

La réfraction dépend alors du profil de réfractivité en fonction de l'altitude; dans le modèle que nous avons adopté, cela se voit par le biais de h . Pour une forme de profil donnée qui fixe h , et pour ψ fixé, ψ' et χ_S en fonction de η_S ne divergent pas; ceci est intéressant, car à h et ψ fixés, leur variation avec la longueur d'onde n'est due qu'à celle de η_S , quasi proportionnelle à celle de q d'après l'équation (94).

Mais, à h et $\psi' \leq 0$ fixés (et non pas ψ), d'après les expressions (95)–(96) χ_S et ψ divergent lorsque η_S tend vers h par valeurs inférieures : par chance, les diverses approximations conduisant à cette conclusion se compensent relativement et cette divergence existe bien avec certains profils d'indice, le trajet du rayon qui arrive en S avec une direction donnée sous l'horizon astronomique tend à spiraler sous l'observateur, comme l'a prédit Bouguer pour $q = 1$ — car la relation (94) montre que $\lim_{\eta_S \rightarrow h} q = 1$; quand η_S se rapproche de h par valeurs inférieures, le rayon effectue (idéalement comme une spirale) un nombre de tours aussi grand que l'on veut en se raccourdant à sa partie rectiligne venant de l'extérieur de ce modèle d'atmosphère limitée. Si $\eta_S > h$ (i.e. $q > 1$), aucune image de la voûte céleste n'est visible avec $\psi' < \sqrt{2(\eta_S - h)} = \sqrt{2(q - 1)h}$; on est dans un cas d'observation d'une mer (ou d'un grand lac) qui paraît concave — voir le paragraphe 3 de [38]. L'absence de divergence pour $\psi' > 0$ n'est pas naturelle : c'est l'un des artefacts dus au point anguleux du profil d'indice.

En S et à un instant donné, η_S varie avec λ_0 à profil p fixé; cela engendre du chromatisme, dont un des effets est le fameux « rayon vert » visible à l'œil nu au lever ou au coucher du Soleil — ou de la Lune... Pour son étude, comme $Z' > 70^\circ$, on ne peut pas passer sous silence la non-linéarité de χ_S en fonction de η_S .

9. Effets chromatiques de la réfraction; application à une forme restreinte de « rayon vert »

La dispersion existe pour tout milieu matériel, y compris les gaz (contrairement à ce que croyait Cauchy encore en 1836–1842 — cf. le sous-paragraphe 6.2 de [2]). Le pouvoir dispersif de l'air est $(n_F - n_C)/(n_d - 1)$, où n_F et n_C désignent les indices respectifs pour les raies F bleue (à $\lambda_0 \cong 486$ nm) et C rouge (à 656 nm) de l'hydrogène, et n_d celui pour la raie d (de l'hélium, à 588 nm), tous les trois pour le même couple (T, P) ; la constringence (ou « nombre d'Abbe ») est son inverse, indépendant de (T, P) si on admet la loi de Gladstone–Dale, et valant 89,4 pour l'air — valeur plutôt moyenne, entre les deux extrêmes que sont 230 pour l'hélium et 26 pour le soufre gazeux. Notons que si on considérait la raie H (de Ca^+) à 397 nm au lieu de la raie F, et la raie tellurique B (de O_2) à 687 nm au lieu de la raie C — comme l'a fait Lord Rayleigh dans son étude de 1893 sur la scintillation — alors pour l'air 89,4 serait changé en 39,6 (d'après les données actuelles).

Les phénomènes de réfraction atmosphérique peuvent donc être accompagnés d'effets chromatiques. Pour l'observation visuelle à basse résolution, l'astronomie définit la longueur d'onde effective, comme étant celle qui correspond à l'effet moyenné sur l'ensemble du spectre visible. Quand Z' augmente, le rougissement apparent par extinction sélective dans l'atmosphère (déjà causé par la diffusion Rayleigh) augmente la longueur effective de l'astre observé, donc fait varier la valeur correspondante de n , et par contrecoup celle de χ ; on peut en tenir compte dans son calcul, de même qu'on tient compte de l'influence du type spectral d'une étoile, ainsi que de la différence de sensibilité spectrale de l'œil humain entre les visions photopique, mésopique et scotopique (effet Purkinje) [76, p. 68–69], [77].

À plus haute résolution, le caractère dispersif de l'air est systématiquement gênant en astronomie : lorsqu'on observe une étoile (de distance zénithale vraie Z) dans un instrument achromatique, elle apparaît sous l'aspect d'un petit spectre étalé verticalement. La dispersion de l'air dans le visible étant normale, n décroît avec la longueur d'onde, donc χ aussi dans l'atmosphère standard; pour le spectre observé, le rouge est en bas (raie C) et le bleu en haut (raie F) lorsque l'image est redressée. Cet effet, quoique faible, reste très gênant dans la mise en œuvre des dispositifs hypersensibles que sont les grands télescopes et les interféromètres astronomiques — voir l'article [9] dans ce numéro spécial. Parfois l'observation de ce spectre révèle des faits surprenants et encore partiellement inexpliqués, comme ceux mentionnés par Bessel en 1842, Bauer et Danjon en 1922, Devaux en 1928 — voir le sous-paragraphe 6.2 de [2].

Nous nous proposons d'estimer ici l'étendue angulaire du spectre dans le cas standard, de la raie C à la raie F.

9.1. Cas des astres de hauteur angulaire pas trop petite

Commençons par le cas des valeurs de Z compatibles avec l'utilisation de la formule de Laplace (14). Nous la récrivons sous la forme suivante, qui fait intervenir Z et qui met en évidence les termes variant avec λ_0 :

$$\begin{aligned} \chi_S(Z, T_S, P_S, \lambda_0) \cong & \eta_S(T_S, P_S, \lambda_0) \left(1 - \frac{H_1(T_S)}{r_S} \right) \tan(Z - \chi_S(Z, T_S, P_S, \lambda_0)) \\ & - \eta_S(T_S, P_S, \lambda_0) \left(\frac{H_1(T_S)}{r_S} - \frac{\eta_S(T_S, P_S, \lambda_0)}{2} \right) \tan^3(Z - \chi_S(Z, T_S, P_S, \lambda_0)). \end{aligned} \quad (99)$$

En dérivant par rapport à λ_0 à (Z, T_S, P_S) fixé, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_S}{\partial \lambda_0} = & \left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) \frac{\partial \eta_S}{\partial \lambda_0} \tan Z' - \left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) \eta_S \frac{\partial \chi_S / \partial \lambda_0}{\cos^2 Z'} \\ & - \left[\left(\frac{H_1}{r_S} \frac{\partial \eta_S}{\partial \lambda_0} - \eta_S \frac{\partial \eta_S}{\partial \lambda_0} \right) \tan^3 Z' - \left(\frac{H_1}{r_S} - \frac{\eta_S}{2} \right) \eta_S \frac{3 \tan^2 Z'}{\cos^2 Z'} \frac{\partial \chi_S}{\partial \lambda_0} \right] \end{aligned} \quad (100)$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} & \left[1 + \left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) \eta_S \frac{1}{\cos^2 Z'} - \left(\frac{H_1}{r_S} - \frac{\eta_S}{2} \right) \eta_S \frac{3 \tan^2 Z'}{\cos^2 Z'} \right] \frac{\partial \chi_S}{\partial \lambda_0} \\ & = \left[\left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) - \left(\frac{H_1}{r_S} - \eta_S \right) \tan^2 Z' \right] \frac{\partial \eta_S}{\partial \lambda_0} \tan Z'. \end{aligned} \quad (101)$$

On en déduit une estimation de l'étendue de spectre $\Delta \chi_S$, due à la variation $\Delta \eta_S$ de réfractivité au point S de la raie rouge de l'hydrogène à sa raie bleue en admettant (en première approximation) $\partial \chi_S / \partial \lambda_0 \cong (\chi_S / \nu) / [(486-656) \text{ nm}]$ et $\partial \eta_S / \partial \lambda_0 \cong (\eta_S / \nu) / [(486-656) \text{ nm}]$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \Delta \chi_S & \cong \frac{\left[\left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) - \left(\frac{H_1}{r_S} - \eta_S \right) \tan^2 Z' \right] \tan Z'}{1 + \left[\left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) - 3 \left(\frac{H_1}{r_S} - \frac{\eta_S}{2} \right) \tan^2 Z' \right] \frac{\eta_S}{\cos^2 Z'}} \frac{\eta_S}{\nu} \\ & = \frac{\chi_S}{\nu} \frac{\left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) - \left(\frac{H_1}{r_S} - \eta_S \right) \tan^2 Z'}{\left\{ 1 + \left[\left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) - 3 \left(\frac{H_1}{r_S} - \frac{\eta_S}{2} \right) \tan^2 Z' \right] \frac{\eta_S}{\cos^2 Z'} \right\} \left[\left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) - \left(\frac{H_1}{r_S} - \frac{\eta_S}{2} \right) \tan^2 Z' \right]} \end{aligned} \quad (102)$$

Pour $Z' = 80^\circ$, et S au niveau de la mer dans les conditions normales (0°C et 1 atm) pour l'air sec, cela donne $\Delta \chi_S \cong 0,996(\chi_S / \nu)$ (i.e. la variation relative de χ_S est 0,4 % plus petite que celle de η_S), et finalement $\Delta \chi_S \cong 0,996(5'29'' / 89,4) \cong 3,67''$.

Liserés vert et rouge du Soleil

Lorsque l'astre n'est pas très bas dans le ciel ($Z < 70^\circ$) on peut utiliser l'approximation de Simpson (7) et estimer ce décalage $\Delta \chi_S$ dû à la variation d'indice Δn_S valant $\eta_S / 89,4$ du rouge (C) au bleu (F) :

$$\Delta \chi_S / \chi_S \cong \Delta n_S / \eta_S \text{ et } \Delta \chi_S \cong \Delta n_S \tan Z \cong (2,92 \times 10^{-4} \text{ rad} / 89,4) \tan Z \cong 0,67'' \tan Z' \quad (103)$$

qui est très en dessous de la limite de perception de l'œil pour $Z' < 70^\circ$, donc les liserés (bleu en haut et rouge en bas) ne peuvent être vus qu'au moyen d'un instrument. Cela fut observé, et correctement expliqué, par Bouguer [78, p. 93–94] dès ses premières observations en 1748 avec son héliomètre, inventé la même année, et servant à déterminer le diamètre apparent du Soleil (ne pas se laisser abuser par les titres des publications de Bouguer [78, 79], car à son époque le Soleil était encore mis dans la catégorie des planètes, au sens étymologique d'astre errant parmi les étoiles fixes) :

« cette apparence peu sensible, lorsqu'on se sert de lunettes de sept à huit pieds, telles qu'on les a jusqu'ici employées à la recherche du diamètre du Soleil, devient très-marquée dans l'héliomètre; & les couleurs même qu'on observe dans les deux bords, lui en ont indiqué la cause : on sait qu'un rayon qui nous vient du Soleil n'est pas un rayon simple, mais un composé de sept faisceaux de rayons de couleurs différentes, & tous différemment refringibles. Le plus haut point du diamètre vertical sera donc vû par le faisceau de rayons bleus qui souffrira une plus grande réfraction, & qui par conséquent le fera paroître plus haut, & son extrémité la plus basse par le faisceau de rayons qui aura souffert la moindre réfraction, c'est-à-dire le faisceau de rayons rouges. [...] on observera toujours le bord supérieur terminé par un trait bleu, & l'inférieur par un

trait rouge, au lieu qu'on n'observera rien de pareil dans les bords latéraux, parce que la réfraction de leurs rayons se fait dans un plan vertical, & sans les déranger en aucune façon dans le sens du diamètre horizontal, dont elle ne peut par conséquent altérer ni la couleur, ni la netteté, ni la mesure. » [78, p. 93–94]

« Si le défaut continuuel de netteté des bords supérieur & inférieur du Soleil, est très-capable d'embarrasser les Observateurs scrupuleux, il offre aussi un sujet de problème pour les Physiciens, qui ne manqueront pas d'en demander la solution : elle n'est pas difficile à trouver, & je crois pouvoir l'indiquer d'une manière sûre. Cette apparence ne peut venir que de la décomposition que souffre la lumière en traversant notre atmosphère; les rayons bleus ou violets qui partent en même temps que les rayons des autres couleurs, du haut du disque, sont sujets à un peu plus de réfraction que ces derniers, ils se courbent un peu davantage; ils nous paroissent donc venir d'un peu plus haut, en portant plus loin l'illusion ordinaire des réfractions. C'est tout le contraire si nous jetons la vûe sur le bord inférieur, nous devons le voir principalement par des rayons rouges qui souffrent un peu moins de courbure dans leur trajet; ces rayons, en se courbant moins, doivent frapper nos yeux comme s'ils partoient d'un point plus bas, & par conséquent faire paroître un peu en dessous la partie inférieure du disque qu'ils étendent, pendant que les rayons bleus & violets contribuent à étendre ce même disque par sa partie supérieure. » [79]

9.2. *Cas des astres proches de l'horizon*

Les applications numériques du sous-paragraphe précédent indiquent des largeurs de liserés de l'ordre de la seconde d'angle; quand l'astre s'approche plus de l'horizon, cette largeur peut s'approcher de la minute d'angle, mais normalement les liserés en eux-mêmes restent invisibles à l'œil nu [80]. Sur la photo montrée à la Figure 2 et prise au téléobjectif, on voit en haut de l'image principale du Soleil un fin liseré vert — et non pas bleu car, au niveau de la mer, la lumière parasite due à la diffusion par les aérosols masque usuellement le liseré bleu qui est déjà, compte tenu de la diffusion Rayleigh par l'atmosphère pure, beaucoup moins lumineux que le liseré vert. En ce qui concerne le Soleil, l'élargissement de son liseré supérieur au fur et à mesure de son coucher se trouve simulé sur la Figure 4.

Cependant, malgré la largeur angulaire du liseré vert toujours très inférieure à $1'$, il est possible d'en voir à l'œil nu une conséquence : pendant la seconde de temps où l'image rouge du Soleil est cachée derrière un obstacle lointain et à bord net, comme une crête montagneuse aride ou lointaine, mais que seules émergent les images vertes (et bleues, etc.), alors on voit un point lumineux vert (ou bleu, selon la pureté de l'air quant aux aérosols) sans largeur angulaire appréciable; telle est la forme élémentaire, et peu spectaculaire, du « rayon vert » — voir la Figure 5.

Mais quand un phénomène de mirage intervient, de façon à étirer verticalement ce liseré vert-bleu, alors la parcelle d'image de cette couleur peut avoir une largeur nettement perceptible à l'œil nu; selon le type de mirage qui exalte la dispersion chromatique, mais qu'il n'est pas possible de détailler ici, on distingue surtout deux types de « rayons verts » qui sont les plus couramment observés [82], puis quelques formes rares. La première publication scientifique sur l'observation d'un « rayon vert » daterait de 1852 [83], mais la prise de conscience de ce phénomène pourrait remonter à l'antiquité égyptienne [84].

D'après le même modèle d'atmosphère qui donnait l'expression (95) on tire, dans le cas où $\psi' = 0$, la valeur de la réfraction

$$\chi_{sh} \cong \eta_s \sqrt{\frac{2}{h - \eta_s}}. \quad (104)$$

On voit que χ_{sh} est une fonction fortement convexe de η_s , sa convexité se manifestant déjà pour η_s de l'ordre de quelques dix millièmes puisque h est de l'ordre du millième. La variation

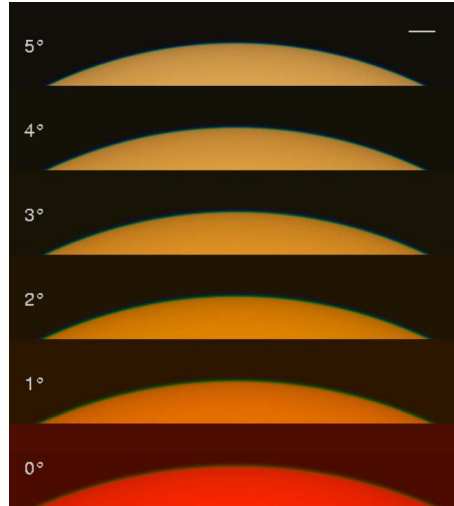


FIGURE 4. Simulation du liseré vert au bord supérieur de l'image du Soleil. En haut à droite, le segment horizontal indique l'échelle angulaire ($1'$). La hauteur angulaire indiquée à gauche est celle du liseré. Plus elle est faible, plus l'extinction est forte et le rougissement important, ce qui empêche de voir le bleu; mais en contrepartie la largeur angulaire du liseré vert augmente [80]. © Andrew T. Young, <https://aty.sdsu.edu/explain/simulations/std/rims.html>.



FIGURE 5. Séquence photographique prise depuis le Pic du Midi (2 877 m) et montrant le coucher du Soleil derrière une crête montagneuse lointaine, isolant aux derniers instants des fragments du liseré bleu. L'air était assez dépourvu d'aérosols pour rendre possible l'observation de ce liseré bleu; cela n'est pas rare en altitude, comme l'avait remarqué Lord Kelvin en 1899 dans les Alpes [81]. © Photos : Christophe Gervier

relative de χ_{sh} avec η_S est donc sensiblement différente de celle de η_S ; Euler l'a pressenti dès 1754 : « à moins que l'astre ne soit trop proche de l'horizon, la réfraction est assés exactement proportionnelle à la hauteur du barometre; & réciproquement proportionnelle à la hauteur du thermometre, ou plutôt au degré de chaleur. Mais, pour les hauteurs de l'astre fort petites, le changement causé par le barometre & le thermometre devient plus grand que selon lesdites raisons, & cela surtout à l'égard des changemens de la chaleur. » [55]

Précisons cette remarque dans le cas où la variation de η_S est due à celle de la longueur d'onde, à profil fixé. Comme la diffusion atmosphérique rend les images bleue et violette de l'astre sur l'horizon usuellement imperceptibles, on ne considérera ici que les images rouge et verte. Connaissant la variation relative de réfractivité de l'air au sol entre le rouge et le vert, $\Delta\eta_S/\eta_S \cong 1/150$, le décalage vertical $\Delta\chi_{Sh1}$ entre des points objet dont les images rouge et verte se trouvent toutes deux sur l'horizon astronomique s'obtient approximativement par différentiation logarithmique de (104) :

$$\frac{\Delta\chi_{Sh1}}{\chi_{Sh}} \cong \frac{\Delta\eta_S}{\eta_S} - \frac{1}{2} \frac{(-\Delta\eta_S)}{h - \eta_S} = \frac{\Delta\eta_S}{\eta_S} \left[1 + \frac{\eta_S}{2(h - \eta_S)} \right] > \frac{\Delta\eta_S}{\eta_S} \quad (105)$$

(h ne variant pas avec λ_0 d'après la loi de Gladstone–Dale). On peut obtenir la même expression approximative (105) avec le profil uniforme du modèle de Cassini, sachant que h est quasiment le double de la hauteur réduite relative h_1 (cf. le paragraphe 4 de [2]). On voit que la variation relative de χ_{Sh} est supérieure à celle de η_S , contrairement à ce que beaucoup supposaient, comme Ranyard en 1889; il est probablement le premier à publier une estimation théorique de la largeur angulaire de l'image d'un point vu sur l'horizon : « To express it in numbers, the atmospheric dispersion from [the Fraunhofer line] B to [the line] G of the spectrum is about one-sixtieth of the atmospheric refraction. On the horizon at the sea-level, the horizontal refraction is about 34 minutes, and the length of the spectrum from B to G is 34''. » [85] La forte convexité de χ_{Sh} en fonction de η_S vient du fait que $Z' = 90^\circ$ correspond à une orientation locale du rayon telle que le gradient radial d'indice permette le plus facilement son guidage, et donc une variation de χ_{Sh} qui ne peut être linéaire mais qui diverge. En prenant comme épaisseur relative d'atmosphère terrestre $h \cong 10 \text{ km}/6,4 \times 10^3 \text{ km} \cong 1,6 \times 10^{-3}$ typique pour un tel modèle, on trouve $\eta_S/[2(h - \eta_S)] \cong 11 \%$. C'est justement ce qu'on observe expérimentalement : l'article de Banakhevich [86, Partie 3] regroupe des mesures de variations *relatives* de réfraction horizontale dues à des variations *relatives* de pression, à température fixée; il montre que celles-là excèdent de 10 % celles-ci. Rarissime publication où l'influence, sur le rayon vert, de la non-linéarité entre la réfraction et la réfractivité est prise en compte — alors qu'en dehors des cas trop proches de la réfraction horizontale, la formule de Laplace (14) montrait déjà une telle non-linéarité, mais seulement de $-0,4 \%$ dans l'exemple du sous-paragraphe 9.1 où $Z' = 80^\circ$! Donc $\Delta\chi_{Sh1}/\chi_{Sh} \cong 1,11 \times 1/150 \cong 7,4 \times 10^{-3}$, mais comme $\chi_{Sh} \cong 35'$ on trouve $\Delta\chi_{Sh1} \cong 16''$. La vitesse angulaire apparente de rotation de la voûte céleste étant de $15^\circ/h = 15''/s$, cela explique que la durée des phénomènes de « rayon vert » au sens large est de l'ordre de la seconde.

Mais si le calcul de $\Delta\chi_{Sh1}$ à $\psi' = 0$ fixé permet de calculer la durée d'un flash de liseré vert vu sur l'horizon astronomique, il ne faut pas confondre avec la largeur $\Delta\chi_{Sh2}$ de ce liseré quand le sommet de l'image rouge du Soleil se trouve sur l'horizon astronomique. En effet, à l'instant où $\psi' = 0$ pour le rouge on a, d'après le théorème des fonctions implicites,

$$\frac{\Delta\chi_{Sh2}}{\Delta\eta_S} \cong \left(\frac{\partial\psi'}{\partial\eta_S} \right)_{\psi} = - \left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta_S} \right)_{\psi'} \left(\frac{\partial\psi'}{\partial\psi} \right)_{\eta_S} = \frac{\Delta\chi_{Sh1}}{\Delta\eta_S} \gamma_{Sh}; \quad (106)$$

or d'après le théorème de Biot, $\gamma_{Sh} = 1 - q \cong (h - \eta_S)/h$ ici, donc

$$\frac{\Delta\chi_{Sh2}}{\chi_{Sh}} = \gamma_{Sh} \frac{\Delta\chi_{Sh1}}{\chi_{Sh}} = \frac{\Delta\eta_S}{\eta_S} \left[1 + \frac{\eta_S}{2(h - \eta_S)} \right] \frac{h - \eta_S}{h} = \frac{\Delta\eta_S}{\eta_S} \left(1 - \frac{\eta_S}{2h} \right) < \frac{\Delta\eta_S}{\eta_S}. \quad (107)$$

Toujours avec $\eta_S \cong 2,92 \times 10^{-4}$ et $h \cong 1,6 \times 10^{-3}$, on voit que la concavité de ψ' en fonction de η_S à ψ fixé diminue de $\eta_S/(2h) \cong 9 \%$ la valeur de $\Delta\chi_{Sh2}/\chi_{Sh}$ par rapport à celle que donnerait une fonction linéaire, et on trouve $\Delta\chi_{Sh2} \cong 13'' \ll 1'$ donc la largeur angulaire verticale du dernier fragment vert du Soleil couchant est inappréciable à l'œil nu. Quand elle devient appréciable, c'est à cause d'un étirement vertical très important dû à des phénomènes de mirage, comme le



FIGURE 6. Liserés rouge en bas et vert en haut (mais pas bleu à cause de sa plus forte extinction sélective par diffusion Rayleigh) sur l'image des planètes Vénus (à gauche) et Mercure (à droite) vues très bas sur l'horizon ($\psi' \cong 2^\circ$ pour chacune de ces planètes). Arago, utilisant une lunette astronomique et voyant donc des images renversées, a noté dans ses registres d'observation, pour le 9 mai 1811 : « Mars [...] était teint dans son bord supérieur apparent d'un rouge très-vif, tandis que le bord inférieur, au contraire, était bleu intérieurement et violet extérieurement, cette dernière couleur étant d'ailleurs un peu faible. » [87, p. 738] © Photos : Marcella Giulia Pace — APOD 30 mai 2020.

comprit Maggi (1809–1854) dès 1852 [83] ; cela se produit lorsque la position de ce fragment du Soleil correspond à une portion quasi horizontale de la courbe de transfert.

Notons que tous les calculs de ce sous-paragraphe 9.2, basés sur le modèle de Bouguer, sont directement transposables au profil exponentiel, en remplaçant seulement h par h_1 , à condition de partir du résultat approché (87) de Kramp.

10. Conclusion

L'étude de la réfraction astronomique dans une atmosphère idéale à symétrie sphérique plante le décor et fournit un cadre permettant de mieux observer les cas réels de réfraction, en testant la présence ou l'absence de propriétés subtiles du modèle à symétrie sphérique, ce qui permet d'affûter l'analyse des observations expérimentales. Le moment à partir duquel la théorie doit abandonner le modèle à symétrie sphérique apparaîtra donc plus nettement, et dépendra du degré de précision obtenu ou souhaité pour les observations et leur dépouillement.

Sachant que le coût des observations depuis le sol est, pour longtemps encore, bien inférieur à celui des observations effectuées depuis l'espace, la connaissance et la prise en compte des effets de réfraction astronomique ne sont pas près de se trouver mises au rebut. Il est donc nécessaire de poursuivre son étude en se penchant sur l'effet des brisures de symétrie sphérique dans l'atmosphère réelle [5, 6].

Enfin, pour maintenir une précision optimale dans les mesures en astronomie, la réfraction ne doit pas être considérée isolément, mais en parallèle avec l'extinction. Nous avons déjà évoqué, en présentant le théorème de réfraction-extinction de Laplace, le lien existant entre ces deux phénomènes. Traditionnellement dans les observations astronomiques, leur prise en compte était partagée entre deux communautés distinctes : la réfraction pour les astrométristes, l'extinction pour les photométristes. Mais sur le plan pratique aussi ces deux effets s'influencent mutuellement : les tables de masses d'air permettant de corriger de l'extinction atmosphérique sont données en fonction de Z' , alors que les éphémérides pour un astre permettent de calculer

Z en fonction du temps, donc les photométristes doivent tenir compte de la réfraction χ_S pour la retrancher à Z et effectuer la correction photométrique avec la masse d'air m_S correcte; en sens inverse, les astrométristes qui observent un astre et veulent remonter précisément à la connaissance de Z au cours du temps doivent tenir compte de l'extinction, car sa sélectivité (qui entraîne un rougissement — voir la Figure 6) varie avec Z' , ce qui modifie au cours du temps la longueur d'onde effective de l'astre, donc contribue à l'évolution de χ_S en changeant un des paramètres qui le conditionnent, en plus de la variable Z' . Dorénavant, une prise en compte globale et fine de ces effets intriqués est donc requise dans l'astronomie observationnelle contemporaine. D'ailleurs, une nouvelle méthode de calcul des masses d'air [88] a pu être adaptée pour calculer la réfraction [46].

Conflit d'intérêt

L'auteur n'a pas de conflit d'intérêts à déclarer.

Remerciements

L'auteur exprime ses vifs remerciements au Dr. Andrew Young pour de très nombreux échanges scientifiques depuis l'an 2000. Il le remercie aussi pour son autorisation de réutiliser une de ses figures, ainsi que Pekka Parviainen, Christophe Gervier et Marcella Giulia Pace qui ont donné la permission de reproduire certaines de leurs photographies.

Annexe A. Problèmes de convergence

La convergence dont Radau ne s'est pas souciée, en passant de (31) à (32)–(33), se justifie pour $\tan Z'$ assez petit, i.e. tel que

$$\sup_{n \in [1, n_S]} |F(n, Z')| := M(Z') < 1. \quad (\text{A1})$$

Dans ce cas en effet, le développement du crochet de (31) — dont le rayon de convergence est 1 (voir [89, p. 241–243]) — converge normalement (voir [89, p. 211–213]), et (32) aussi, car

$$\sup_{n \in [1, n_S]} \left| n^{-2} \frac{r_S}{r} \frac{(2p-1)!!}{p! 2^p} F(n, Z')^p \right| \leq \frac{(2p-1)!!}{p! 2^p} M(Z')^p \underset{\infty}{\sim} \frac{M(Z')^p}{\sqrt{\pi p}} \quad (\text{A2})$$

(où l'équivalent est obtenu grâce à la formule de Stirling [34, p. 2868]). On peut en déduire, comme l'intégrale (31) est définie (i.e. sur un domaine borné), que la série des fonctions $(-1)^p a_p \tan^{2p+1} Z'$ converge absolument et uniformément [89, p. 212–213].

En outre, on voit que pour la série (32) la convergence n'est plus assurée au voisinage de l'horizon, i.e. quand Z' est trop proche de 90° , car dans ce cas $M(Z') \geq 1$. Malgré cela, l'espoir de remonter des observations de $\chi_S(\tan Z')$ à la structure de l'atmosphère était tenace au XIX^e siècle (voir l'article [90] dans ce numéro spécial), bien que les H_p pour p élevé ne soient sensibles qu'au voisinage de l'horizon — là où la série n'est plus utilisable.

Annexe B. Coefficient de distorsion angulaire verticale locale

On considère l'expression $\chi(r(\theta), \psi'(\theta))$ de la réfraction en M pour le rayon lumineux (R_{Sh}) arrivant horizontal en S , et dont la direction de la tangente en M fait, avec la direction orthoradiale, l'angle $\psi'(\theta) = \theta - u(\theta)$. On voit que (Figure B1)

$$\chi(r(\theta), \psi'(\theta)) = \chi(r_S, 0) - u(\theta). \quad (\text{B1})$$

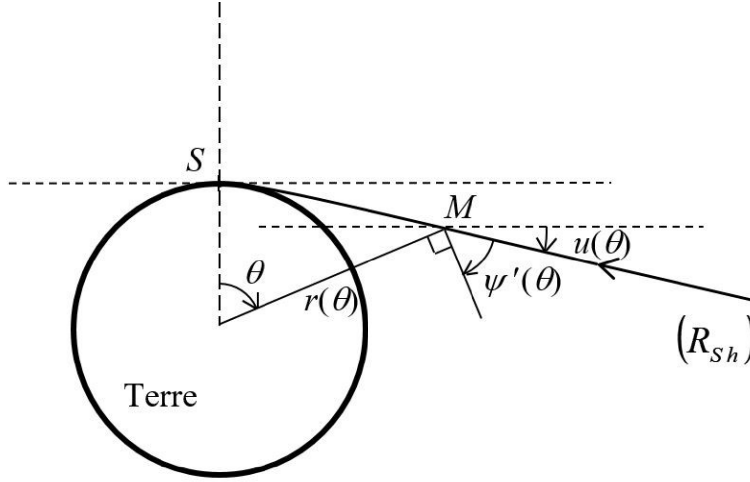


FIGURE B1. Notations utiles pour la deuxième démonstration du théorème de Biot, et son prolongement au second ordre; le sens positif pour les angles définis ici est le sens indirect, et sur cette figure $\psi'(\theta)$ et $\psi(\theta)$ sont positifs — ce signe étant cohérent avec ce qui précède dans le présent article.

Comme cette relation est vraie pour tout θ , dans un premier temps on en déduit l'égalité des dérivées premières

$$\frac{d\chi}{d\theta} = \frac{\partial\chi}{\partial r} \frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial\chi}{\partial\psi'} \left(1 - \frac{du}{d\theta}\right) = -\frac{du}{d\theta} \quad (\text{B2})$$

et on va voir que cela nous fait retrouver le théorème de Biot. En effet, au point S tel que $\theta := 0$ et $r = r_S$, on a $dr/d\theta = 0$ (c'est la symétrie essentielle pour cette démonstration, qui découle de la symétrie de la loi de Bouguer exprimée avec la fonction cosinus); de plus, en S on a $ds/d\theta = r_S$, donc

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{ds} \frac{ds}{d\theta} = C_S r_S = \kappa_S \quad (\text{B3})$$

et alors

$$(1 - \kappa_S) \left(\frac{\partial\chi}{\partial\psi'} \right)_{Sh} = -\kappa_S. \quad (\text{B4})$$

Comme ici κ est de signe quelconque, ainsi que u , le résultat est valable aussi bien pour $\psi' \rightarrow 0_+$ que pour $\psi' \rightarrow 0_-$; cela montre que χ et donc ψ sont dérivables par rapport à ψ' en $\psi' = 0$. On utilise encore $\psi' = \psi + \chi$, et par dérivation par rapport à ψ' il vient

$$1 = \frac{\partial\psi}{\partial\psi'} + \frac{\partial\chi}{\partial\psi'}; \quad (\text{B5})$$

donc sur l'horizon de S on a

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\psi'} \right)_{Sh} = 1 - \left(\frac{\partial\chi}{\partial\psi'} \right)_{Sh} = 1 - \frac{-\kappa_S}{1 - \kappa_S} \quad (\text{B6})$$

et finalement on retrouve le résultat

$$\gamma_{Sh} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\psi'} \right)_{Sh}^{-1} = 1 - \kappa_S. \quad (\text{B7})$$

Dans un second temps, on déduit de (B1) l'égalité des dérivées secondes :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\chi}{d\theta^2} = & \left(\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} \frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial^2\chi}{\partial\psi'\partial r} \frac{d\psi'}{d\theta} \right) \frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial\chi}{\partial r} \frac{d^2r}{d\theta^2} \\ & + \left(\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial\psi'} \frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial^2\chi}{\partial\psi'^2} \frac{d\psi'}{d\theta} \right) \frac{d\psi'}{d\theta} + \frac{\partial\chi}{\partial\psi'} \frac{d^2\psi'}{d\theta^2} = -\frac{d^2u}{d\theta^2} \end{aligned} \quad (B8)$$

où

$$\frac{d\psi'}{d\theta} = 1 - \frac{du}{d\theta} \text{ et } \frac{d^2\psi'}{d\theta^2} = -\frac{d^2u}{d\theta^2}. \quad (B9)$$

Au point S, beaucoup de termes disparaissent car on a, en plus de ce qui a été dit au début de cette Annexe, $d^2u/d\theta^2 = 0$ car la fonction u de la variable θ est impaire. Donc

$$\frac{\partial\chi}{\partial r}(r_S, 0) \frac{d^2r}{d\theta^2}(0) + \frac{\partial^2\chi}{\partial\psi'^2}(r_S, 0) \left[1 - \frac{du}{d\theta}(0) \right]^2 = 0. \quad (B10)$$

De l'expression de la courbure de (R_{Sh}) en coordonnées polaires,

$$C = \left[r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r \frac{d^2r}{d\theta^2} \right] / \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{3/2}, \quad (B11)$$

dont on considère la valeur C_{Sh} en S, on tire

$$\frac{d^2r}{d\theta^2}(0) = r_S(1 - C_{Sh} r_S) = r_S(1 - \kappa_S). \quad (B12)$$

Et comme, d'après le théorème de Biot et (B2), on a

$$\frac{du}{d\theta}(0) = \kappa_S \quad (B13)$$

— voir (B3) — il vient

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial\psi'^2}(r_S, 0) = -\frac{r_S}{1 - \kappa_S} \frac{\partial\chi}{\partial r}(r_S, 0) \text{ noté } \left(\frac{\partial^2\chi}{\partial\psi'^2} \right)_{Sh} = -\frac{r_S}{1 - \kappa_S} \left(\frac{\partial\chi}{\partial r} \right)_{Sh}, \quad (B14)$$

donc

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\psi'^2} \right)_{Sh} = \frac{r_S}{1 - \kappa_S} \left(\frac{\partial\chi}{\partial r} \right)_{Sh} \quad (B15)$$

car

$$\chi(r, \psi') = \psi' - \psi(r, \psi'). \quad (B16)$$

Enfin,

$$\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial\psi'^2} \right)_{Sh} = - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\psi'^2} \right)_{Sh} / \left(\frac{\partial\psi}{\partial\psi'} \right)_{Sh}^3 = -\gamma_{Sh} \Delta_{Sh} = -r_S(1 - \kappa_S)^2 \left(\frac{\partial\chi}{\partial r} \right)_{Sh} > 0 \quad (B17)$$

où Δ_{Sh} désigne la valeur en S, pour $\psi' = 0$, du coefficient d'asymétrie Δ défini au sous-paragraphe 2.2.2 de l'article [91] dans ce numéro spécial; nous avons ainsi obtenu plusieurs expressions de $(\partial^2\psi'/\partial\psi'^2)_{Sh}$ que nous appelons le « coefficient de distorsion angulaire verticale locale » sur l'horizon. Il dépend de tout le profil d'indice de l'atmosphère, contrairement à γ_{Sh} qui ne dépend que de n_S et $(dn/dr)_S$. La grandeur $(\partial\chi/\partial r)_{Sh}$ à laquelle il est relié joue un grand rôle dans la théorie des éclipses et des occultations par les planètes [66, p. 92], [67, 68]; c'est celle que Link noterait $(1/2)(d\omega/dh_0)$ (voir le paragraphe 3 de [68]). Sur la Figure 4 de l'article [91] de ce numéro spécial, la mesure de la différence des positions relatives des points haut et bas de l'image du Soleil couchant (par rapport aux points haut et bas du cercle pointillé respectivement) permet d'estimer, pour la hauteur angulaire vraie du centre du Soleil, la valeur du coefficient de distorsion angulaire verticale locale, $\partial^2\psi'/\partial\psi'^2 \cong (0,24 \pm 0,08)^\circ$ alors que d'après la Table 1 de ce même article il devrait valoir $0,06^\circ \dots$

TABLE 1. Grandeurs utilisées dans cet article

Symbole	Grandeur	Unités usuelles
S	Point de l'observateur	
Z, Z'	Distances zénithales vraie et apparente pour l'observateur S	$^{\circ}, ', ''$, rad
ψ, ψ'	Hauteurs (angulaires) vraie et apparente pour S	$^{\circ}, ', ''$, rad
$\chi_S = \psi' - \psi = Z - Z'$	(Angle de) réfraction (astronomique) pour S	$^{\circ}, ', ''$, rad
n	Indice de réfraction de l'air	
(R)	Rayon lumineux provenant de A à l'infini et arrivant en S	
\mathbf{u}	Vecteur unitaire tangent à (R)	
α	Angle entre \mathbf{u} et grad n	$^{\circ}, ', ''$, rad
s	Abscisse curviligne sur (R) en un point courant	km
M		
\mathcal{R}	Rayon de courbure (positif) de (R) en M	km
T	Température absolue dans l'air	K
P	Pression dans l'air	atm
λ_0	Longueur d'onde dans le vide	$\mu\text{m}, \text{nm}$
$r := CM$	Distance entre M et le centre de symétrie sphérique C	km
$\eta := n - 1$	Réfractivité de l'air	
μ	Masse volumique de l'air	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
$C_h(r)$	Courbure de (R) en un point H où il a une tangente horizontale à une distance r de C	km^{-1}
$\kappa(r) := r C_h(r)$	Coefficient de réfraction de l'atmosphère, à une distance r du centre C de la Terre	
$C(M, \lambda_0)$	Constante de la loi empirique de Gladstone–Dale	$\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}$
$n_S, T_S, P_S, \eta_S, \mu_S, r_S, \kappa_S, C_{Sh}$	$n, T, P, \eta, \mu, r, \kappa, C_h$ en S	Divers
$z := r - r_S$	Altitude de M par rapport à S	m, km
H_T	Échelle de hauteur de l'atmosphère isotherme	km
κ_{ST}	κ_S pour une atmosphère isotherme	
H_1	Hauteur réduite de l'atmosphère, i.e. moment réduit d'ordre 1 de $-\eta'(z)$	km
$h_1 := H_1/r_S$	Hauteur réduite relative	
$h_p^p := (H_p/r_S)^p$	Moments réduits relatifs d'ordre p de $-\eta'(z)$	
H_p	Racine p -ième du moment réduit d'ordre p de $-\eta'(z)$	km
ε	Augmentation relative de H_1 par rapport à H_T	
H	Hauteur totale de l'atmosphère de Bouguer	km
h	Hauteur totale relative de l'atmosphère de Bouguer	
H_v	Hauteur d'échelle des aérosols et de la vapeur d'eau	km
$\gamma_S := d\psi'/d\psi$	Grandissement angulaire vertical local (pour l'observateur S)	

(continued on next page)

TABLE 1. (suite)

Symbole	Grandeur	Unités usuelles
$Q_S := \int_{-\infty}^{SS} \mu ds$	« Masse d'air » absolue le long de (R)	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$
γ_{Sh}	γ_S pour $Z' = 90^\circ$	
χ_{Sh}	Réfraction horizontale en S, i.e. χ_S pour $Z' = 90^\circ$	$^\circ, ', ''$, rad
\mathcal{P}_{S0}	Profondeur optique de l'atmosphère au zénith	
\mathcal{P}_{Sh}	Profondeur optique à l'horizon astronomique	
Q_{Sh} (resp. Q_{S0})	Q_S pour des rayons arrivant en S avec $Z' = 90^\circ$ (resp. 0°)	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$
$m_{Sh} := Q_{Sh}/Q_{S0}$	« Masse d'air » relative, à l'horizon astronomique	
Δ_{Sh}	Valeur en S, pour $\psi' = 0$, du coefficient d'asymétrie	$/^\circ$
R	Constante des gaz parfaits	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
M_a	Masse molaire de l'air	$\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
g	Norme du champ de pesanteur	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
r_P, n_P, α_P	r, n, α en P, sur la tropopause standard	Divers
$I_B := n r \sin \alpha$	Invariant de Bouguer	km
v_0	Vitesse arbitraire constante	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$\Delta n, \Delta(n r)$	Variation de n , de $n r$ depuis r_S jusqu'à r	Divers
Y	Approximation fondamentale linéaire de $\Delta(n r)/(n_S r_S)$	
$F(n, Z') := \left(1 - \frac{n_S^2 r_S^2}{n^2 r^2}\right) \tan^2 Z'$	Grandeur sous le radical donnant le développement binomial	
$M(Z')$	Borne supérieure de $ F(n, Z') $ pour $n \in [1, n_S]$	
$(-1)^p a_p \tan^{2p+1} Z'$	Terme général de la série usuelle donnant χ_S	$^\circ, ', ''$, rad
$f(r) := r n(r)$	Ordonnée du diagramme de Young-Kattawar	m
$r_a = r_S (1 - \kappa_S)^{-1}$	Rayon de courbure apparent d'un méridien terrestre	km
D_h, D'_h	Diamètres angulaires vrai et apparent d'un objet extra-atmosphérique	$^\circ, ', ''$, rad
$h(r, I_B) := r^2 \left[\frac{f^2(r)}{I_B^2} - 1 \right]$	Fonction pour l'étude de (R) par quadrature	m^2
$p(r)$	Profil de réfractivité normalisé par $p(r_S) = 1$	
q	Exposant du modèle de Bouguer	
n_F, n_C , et n_d	Indices respectifs de l'air pour les raies F (486 nm), C (656 nm), et d (588 nm)	
$\nu := [(n_F - n_C)/(n_d - 1)]^{-1}$	Constringence	
$\Delta \chi_S$	Variation de χ_S due à la variation d'indice Δn_S	$^\circ, ', ''$, rad
$\Delta \chi_{Sh1}$	Décalage angulaire vertical entre des points objet dont les images rouge et verte se trouvent toutes deux sur l'horizon astronomique	$^\circ, ', ''$, rad
$\Delta \chi_{Sh2}$	Largeur angulaire verticale du liseré (de rouge à vert) quand le sommet de l'image rouge du Soleil se trouve sur l'horizon astronomique	$^\circ, ', ''$, rad

Références

- [1] R. Thom, *Prédire n'est pas expliquer – Entretiens avec Émile Noël*, coll. Champs Sciences; Flammarion, Paris, 1993.
- [2] L. Dettwiller, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 13-62.
- [3] G. Coupinot, J. Hecquet, « Résolution angulaire en astronomie optique », *J. Opt. (Paris)* **21** (1990), p. 27-33.
- [4] J. Devaux, « Sur le "rayon vert" », *L'Astronomie* **42** (1928), p. 384-389.
- [5] D. Bonneau, « Les effets optiques de la turbulence atmosphérique dans les images astronomiques », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 269-291.
- [6] S. van der Werf, « Novaya Zemlya effect and Fata Morgana. Raytracing in a spherically non-symmetric atmosphere », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 365-389.
- [7] L. Dettwiller, « Properties of optical ducts, their chromatism and its effects on astronomical refraction », 2022, *preprint*, <https://arxiv.org/abs/2204.02605>.
- [8] F. Mignard, « Les tables de réfraction astronomique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 133-178.
- [9] L. Koechlin, L. Dettwiller, « Correction de la dispersion atmosphérique dans l'imagerie par les grands télescopes et les interféromètres astronomiques », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 345-364.
- [10] B. Taylor, *Methodus Incrementorum directa & inversa*, Gul. Innys, Londres, 1715.
- [11] W. H. Wollaston, « On double images caused by atmospheric refraction », *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **90** (1800), p. 239-254.
- [12] J.-P. Pérez, *Optique géométrique et ondulatoire*, 4^e éd., Masson, Paris, 1994.
- [13] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics – Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, 6^e éd., Pergamon Press, Oxford, 1980.
- [14] J. H. Lambert, *Les propriétés remarquables de la route de la lumière*, H. Scheurleer F. Z. & Compagnie, La Haye, 1758.
- [15] H. Faye, *Leçons de cosmographie – rédigées d'après les programmes officiels*, Hachette, Paris, 1852.
- [16] A. Danjon, *Astronomie générale – Astronomie sphérique et éléments de mécanique céleste*, 2^e éd., Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1986.
- [17] L. K. Kristensen, « Astronomical refraction and airmass », *Astron. Nachr.* **319** (1998), p. 193-198.
- [18] B. Oriani, « De refractionibus astronomicis », in *Ephemerides astronomicae Anni Intercalaris 1788*, Joseph Galeatium, Milan, 1787, p. 164-277.
- [19] B. Oriani, « De refractionibus astronomicis », in *Opuscula Astronomica ex Ephemeridibus Mediolanensibus ad annos 1788 & 1789 excerpta*, Joseph Galeatium, Milan, 1787, p. 44-107.
- [20] F. Hauksbee, *Physico-Mechanical Experiments on Various Subjects*, R. Brugsis, Londres, 1709.
- [21] J. H. Gladstone, T. P. Dale, « Researches on the refraction, dispersion, and sensitiveness of liquids », *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **153** (1863), p. 317-343.
- [22] H. A. Lorentz, « Concerning the relation between the velocity of propagation of light and the density and composition of media », *Verh. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam* **18** (1878), p. 1-119, in *Collected papers*, t. 2, Nijhoff, La Haye, 1936.
- [23] L. Dettwiller, « Le théorème de Biot et le changement de variable de Biot–Auer–Standish : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 483-501.
- [24] A. T. Young, « The Cassini Model's Problem at the Horizon », 2013, https://aty.sdsu.edu/explain/atmos_refr/models/Cass_hor.html (Page consultée le 9 janvier 2022).
- [25] J.-B. Biot, « Sur les réfractions astronomiques », *Additions à la Connaissance des Temps* **1839** (1836), p. 3-114.
- [26] A. Bemporad, « La teoria della refrazione astronomica direttamente fondata sui risultati della fisica dell'atmosfera », in *Atti della Accademia gioenia di scienze naturali in Catania*, ser. 5, vol. 3, mem. V, C. Galàtola, Catane, 1910.
- [27] P. Bouguer, *De la Méthode d'Observer Exactlyement sur Mer la Hauteur des Astres*, Claude Jombert, Paris, 1729.
- [28] P. S. Laplace, *Traité de Mécanique Céleste*, t. 4, J. B. M. Duprat, Paris, 1805.
- [29] N. Bowditch, *Mécanique Céleste. By the Marquis de La Place, translated, with a commentary*, vol. VI, Little and Brown, Boston, 1839.
- [30] R. Radau, « Recherches sur la théorie des réfractions astronomiques », *Ann. l'Observatoire Paris* **16** (1882), p. B.1-B.114.
- [31] L. Dettwiller, « Les développements de Radau et leur divergence : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 527-536.
- [32] J. Ivory, « On the astronomical refractions », *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **113** (1823), p. 409-495.
- [33] S. Newcomb, *A Compendium of Spherical Astronomy*, Macmillan, New York, 1906.
- [34] E. W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, 2^e éd., Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [35] L. H. Auer, E. M. Standish, *Astronomical Refraction: Computational Method for all Zenith Angles*, Yale University Astronomy Department, New Haven, 1979.
- [36] F. Dobe, *Astigmatismus bei der astronomischen Strahlenbrechung*, C. Schulze & Co., Gräfenhainichen, 1911.
- [37] L. Dettwiller, « L'invariant de Bouguer et ses conséquences : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 415-452.

- [38] L. Dettwiller, « La discussion par Kummer d'une quadrature sur la réfraction astronomique : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 503-525.
- [39] J. D. Everett, « On the optics of mirage », *Philos. Mag.* **45** (1873), p. 161-172.
- [40] R. Emden, « Beiträge zur Thermodynamik der Atmosphäre. 1. Mitteilung : Über polytrope Atmosphären », *Met. Zs.* **33** (1916), p. 351-360.
- [41] A. Wegener, « Elementare Theorie der atmosphärischen Spiegelungen », *Ann. Phys.* **57** (1918), p. 203-230.
- [42] R. D. Sampson, E. P. Lozowski, A. E. Peterson, « Comparison of modelled and observed astronomical refraction of the setting Sun », *Appl. Opt.* **42** (2003), p. 342-353.
- [43] M. E. Tschudin, « Refraction near the horizon – An empirical approach. Part 2: variability of astronomical refraction at low positive altitude (LPAAR) », *Observatory* **139** (2019), p. 29-68.
- [44] W. H. Lehn, « Exact temperature profile for the *hillingar* mirage », *Am. J. Phys.* **69** (2001), p. 598-600.
- [45] A. T. Young, « Understanding astronomical refraction », *Observatory* **126** (2006), p. 82-115.
- [46] S. N. Kivalov, A. T. Young, « Horizontal magnification of finite-sized celestial objects », *Appl. Opt.* **49** (2010), p. 2720-2727.
- [47] J.-B. Biot, « Recherches sur les réfractions extraordinaires qui ont lieu près de l'horizon », in *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France, Année 1809*, Garnery, Paris, 1810, p. 1-266.
- [48] E. Sang, « On the impossibility of inverted images in the air », *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **12** (1884), p. 129-136.
- [49] R. Meyer, « Atmosphärische Strahlenbrechung », in *Handbuch der Geophysik : Physik der Atmosphäre I* (F. Linke, F. Möller, éds.), vol. 8, Gebr. Borntraeger, Berlin, 1942, article 13, p. 769-821.
- [50] A. B. Fraser, « The Green Flash and clear air turbulence », *Atmosphere* **13** (1975), p. 1-10.
- [51] R. White, « A new theory of the green flash », *J. Meteorol.* **4** (1979), p. 270-277.
- [52] V. Arnold, *Équations différentielles ordinaires*, 4^e éd., Mir, Moscou, 1988.
- [53] G. Le Gentil, « Extrait d'un mémoire sur des observations astronomiques faites sur les réfractions, en 1786, 1787 et 1788 », *Mém. Acad. Roy. Sci. année 1789* (1793), p. 224-236.
- [54] G. Le Gentil, *Voyage dans les mers de l'Inde*, vol. 1, Impr. royale, Paris, 1779.
- [55] L. Euler, « De la réfraction de la lumière en passant par l'atmosphère selon les divers degrés tant de la chaleur que de l'élasticité de l'air », *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, Année MDCCLIV* **10** (1756), p. 131-172.
- [56] A. T. Young, « Inferior mirages: an improved model », *Appl. Opt.* **54** (2015), p. B170-B176.
- [57] F. Mignard, V. Brumberg, « Corrections pour la réduction des observations optiques », in *Introduction aux éphémérides et phénomènes astronomiques – Supplément explicatif à la Connaissance des Temps* (J. Berthier, P. Descamps, F. Mignard, éds.), IMCCE / EDP Sciences, Paris, 2021, p. 597-643.
- [58] P. Bouguer, *Essai d'Optique sur la Gradation de la Lumière*, Claude Jombert, Paris, 1729.
- [59] Í. Rapp-Arrará, J. M. Domingo-Santos, « Extinction, refraction, and delay in the atmosphere », *J. Geophys. Res.* **113** (2008), article n° D20116.
- [60] E. Schoenberg, « Theoretische Photometrie », in *Handbuch der Astrophysik* (G. Eberhard, A. Kohlschütter, H. Ludendorff, éds.), vol. II/1, Springer, Berlin, 1929.
- [61] A. T. Young, « Air mass and refraction », *Appl. Opt.* **33** (1994), p. 1108-1110.
- [62] J. H. Lambert, *Photometria, sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae*, Eberhard Klett, Augsburg, 1760.
- [63] J. D. Forbes, « On the transparency of the atmosphere and the law of extinction of the solar rays in passing through it », *Phil. Trans.* **132** (1842), p. 225-273.
- [64] A. Bemporad, « Zur Theorie der Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre », *Mitt. Grossherzoglich. Sternwarte, Heidelberg* (1904), n° 4, p. 1-78.
- [65] A. T. Young, « Observational technique and data reduction », in *Methods of Experimental Physics, vol. 12. Astrophysics, Part A: Optical and Infrared* (N. Carleton, éd.), Academic Press, New York, 1974, p. 123-192.
- [66] F. Link, « Théorie photométrique des éclipses de Lune », *Bull. Astron.* **8** (1933), p. 77-108.
- [67] F. Link, *Eclipse Phenomena in Astronomy*, Springer, New York, 1969.
- [68] L. Dettwiller, « La photométrie des éclipses de Lune, vue par František Link : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 537-555.
- [69] P. Bouguer, « Second mémoire sur les réfractions astronomiques, observées dans la Zone Torride; avec diverses remarques sur la manière d'en construire les Tables », *Mém. Acad. Roy. Sci. année 1749* (1753), p. 75-112.
- [70] T. von Oppolzer, « Vorläufige Mittheilung über eine neue Refraktionsformel », *Astron. Nachr.* **89** (1877), p. 365-368.
- [71] C. Kramp, *Analyse des Réfractions Astronomiques et Terrestres*, Dannbach, Strasbourg, an VII — et Schwikkert, Leipzig, 1799.
- [72] J. Brinkley, « A method of computing astronomical refractions for objects near the horizon », *Trans. Roy. Irish Acad.* **13** (1818), p. 165-173.
- [73] J. Ivory, « On Mayer's formula for the astronomical refraction », *Philos. Mag.* **58** (1821), p. 341-347.
- [74] National Imaging and Mapping Agency, *The American Practical Navigator – An Epitome of Navigation – Originally by N. Bowditch – 2002 Bicentennial edition*, National Imaging and Mapping Agency, Bethesda, 2002.

- [75] B. Sicardy, « Study of atmospheres in the solar system, from stellar occultation or planetary transit », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 213-241.
- [76] Y. Le Grand, *Optique physiologique, t. 2, Lumière et couleurs*, 2^e éd., Masson, Paris, 1972.
- [77] R. C. Stone, « The effect of differential color refraction on declinations determined in meridian circle programs », *Astron. Astrophys.* **138** (1984), p. 275-284.
- [78] « Sur la mesure du diamètre des plus grandes planètes », *Hist. Acad. Roy. Sci. année 1748* (1752), p. 87-94.
- [79] P. Bouguer, « De la mesure des diamètres des plus grandes planètes : Description d'un nouvel Instrument qu'on peut nommer Héliomètre, propre à les déterminer; & Observations sur le Soleil », *Mém. Acad. Roy. Sci. année 1748* (1752), p. 11-34.
- [80] G. Dietze, « Die Sichtbarkeit des "grünen Strahls" », *Zeitschr. Meteorol.* **9** (1955), p. 169-178.
- [81] Lord Kelvin, « Blue ray of sunrise over Mont Blanc », *Nature* **60** (1899), p. 411.
- [82] A. T. Young, « Green flashes and mirages », *Opt. Photon. News* **10** (1999), p. 31-37.
- [83] P. G. Maggi, « Sopra alcune apparenze del Sole presso all'orizzonte », *Atti delle Adunanze dell'I. R. Istituto Veneto Sci. Lett. Arti* **3** (1852), p. 186-189.
- [84] W. Groff, « La plus ancienne observation d'un phénomène naturel ou astronomique », *Bull. Inst. Égypt.* **4** (1893), p. 149-156.
- [85] A. C. Ranyard, « The blue ray [30424] », *English Mechanic and World of Science* **50** (1889), p. 116.
- [86] T. A. Banakhevich, « Tri eskiza po teorii refraktsii », *Ucheniya Zapiski [Kazan]* **82** (1915), p. 1-27.
- [87] F. Arago, « Sur les pouvoirs dispersifs », in *Œuvres complètes* (J.-A. Barral, éd.), t. 11, vol. 2, Gide, Paris, 1859, p. 733-748.
- [88] S. N. Kivalov, « Improved ray tracing air mass numbers model », *Appl. Opt.* **46** (2007), p. 7091-7098.
- [89] R. Couty, J. Ezra, *Analyse*, t. 2, 4^e éd., A. Colin, Paris, 1976.
- [90] A. T. Young, « Relations among atmospheric structure, refraction, and extinction », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 179-212.
- [91] F. Mignard, « Images du Soleil et de la Lune à l'horizon, depuis le sol ou la Station spatiale internationale », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 391-414.