



INSTITUT DE FRANCE  
Académie des sciences

# *Comptes Rendus*

---

# *Physique*

Luc Dettwiller

**L'invariant de Bouguer et ses conséquences : commentaire historique**

Volume 23, Special Issue S1 (2022), p. 415-452

Published online: 3 March 2023

Issue date: 27 October 2023

<https://doi.org/10.5802/crphys.115>

**Part of Special Issue:** Astronomie, atmosphères et réfraction

**Guest editors:** Pierre Léna (Professeur émérite, Observatoire de Paris et Université Paris Cité, membre de l'Académie des sciences) and Luc Dettwiller (Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France)

 This article is licensed under the  
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION 4.0 INTERNATIONAL LICENSE.  
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



*Les Comptes Rendus. Physique* sont membres du  
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

[www.centre-mersenne.org](http://www.centre-mersenne.org)

e-ISSN : 1878-1535



---

Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

# L'invariant de Bouguer et ses conséquences : commentaire historique

*The Bouguer invariant and its consequences:  
an historical commentary*

Luc Dettwiler<sup>® a</sup>

<sup>a</sup> Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School,  
Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France

Courriel: dettwiller.luc@gmail.com

**Résumé.** Dans la seconde partie de son essai primé de 1729, Bouguer (1698–1758) introduit, pour un rayon lumineux dans un milieu à symétrie sphérique, son invariant ainsi qu'une forme de l'intégrale de réfraction, dont il dresse une table pour un modèle particulier d'atmosphère; puis il étudie l'influence de la courbure des rayons sur la dépression de l'horizon — à propos de laquelle il prédit l'effet *hillingar*. À titre de complément, on rappelle que la formule de Bradley pourra se déduire du modèle de Bouguer; on montre qu'elle aide à comprendre la forte convexité de la réfraction horizontale en fonction de la réfractivité.

**Abstract.** In the second part of his prize-winning essay of 1729, Bouguer (1698–1758) considers a light ray in a spherically symmetric medium and introduces the invariant named after him. He deduces an expression of the refraction integral, leading to a table which is computed for a particular atmospheric model. He then studies the influence of the ray's curvature on the horizon dip and predicts the *hillingar* effect. As a complement, we recall that the Bradley formula can be derived from the Bouguer model. This helps to understand the strong convexity of horizontal refraction versus refractivity.

Published online: 3 March 2023, Issue date: 27 October 2023

## 1. Introduction

Pierre Bouguer est né le 16 février 1698 au Croisic, port très florissant où son père Jan (ou bien Jean) avait été nommé premier *maître d'hydrographie* (enseignant « l'art de naviguer par règles et principes » [1, p. 372–375]) dans une nouvelle école, gratuite et publique, créée en 1691. Il se révèle vite comme un enfant surdoué, ouvert et curieux, faisant de brillantes études au collège des Jésuites à Vannes. Puis il revient dans sa ville natale à cause de la maladie de son père, et il y commence sa carrière à 16 ans en lui succédant le 27 juin 1714 comme professeur royal (i.e. « maître ») d'hydrographie ; celui-là, décédé le 17 mai 1714, était l'un des meilleurs hydrographes de son temps. Sa compétence de très jeune enseignant force l'admiration de ses élèves, tous plus âgés, et lui vaut une célébrité précoce, grâce à laquelle l'école du Croisic devient rapidement très cotée.

À partir de 1720, et pendant plus d'un siècle, l'Académie des sciences lançait des concours annuels sur des questions de physique générale alternant avec des questions de navigation, en vue de l'attribution d'un prix (d'au moins 2 000 £ au XVIII<sup>e</sup> siècle) ; un exemple célèbre dans l'histoire de l'optique est la question sur la diffraction, posée en 1817 pour le prix de 1819, remis à Fresnel en récompense de son magnifique mémoire de 135 pages. Bouguer en a remporté trois sur la navigation, tous consécutifs : en 1727 avec *De la maturité des vaisseaux* [2], en 1729 avec *De la méthode d'observer exactement sur mer la hauteur des astres* [3], et en 1731 avec *De la méthode d'observer en mer la déclinaison de la boussole* [4]. Au moins avec son essai primé de 1729, où il utilise le calcul infinitésimal qui n'est pratiqué en France que depuis une dizaine d'années, Bouguer surfe sur l'intérêt nouveau de l'Académie pour cette nouvelle théorie [5, p. 67], ainsi que pour une physique plus mathématique [6, p. 560], comme le montre l'étude du contexte intellectuel [7].

En 1729 aussi, il fait œuvre de physicien en publiant un *Essai d'optique sur la gradation de la lumière* [8], véritablement novateur, que Lambert [9] déclarera très beau (voir [10] dans ce numéro spécial). Le 1<sup>er</sup> décembre 1730, il est nommé professeur à l'école d'hydrographie du Havre. Début septembre 1731, l'Académie des Sciences le reçoit comme associé géomètre, sur la place libérée par la promotion de Pierre Louis Moreau de Maupertuis, du grade d'associé à celui de pensionnaire ; Bouguer saute donc le grade d'adjoint, ce qui est exceptionnel — le seul cas connu avant lui étant celui de Dortous de Mairan. Alors il sera souvent absent du Havre, se faisant remplacer pour venir à Paris ; par conséquent, il ne s'intégrera pas réellement dans la société havraise. Suite au décès de l'astronome pensionnaire Jacques Lieutaud en 1733, il est choisi par le roi pour lui succéder le 24 janvier 1735, car il était déjà connu pour un travail en mécanique céleste [11] ; il doit s'établir à Paris, où il ne restera pas longtemps.

En effet, en remplacement de l'astronome (et assistant à l'Académie des sciences, futur Secrétaire perpétuel) Jean-Paul Grandjean de Fouchy « qui se désista pour d'obscures raisons de santé (en fait, il était amoureux et ne voulait pas quitter sa belle) » [12, p. 74], Bouguer part pour 9 ans le 9 mars 1736 vers le Pérou avec l'expédition de Godin et La Condamine, dont le but est de mesurer la longueur d'un arc de méridien auprès de l'équateur [13, 14], afin d'en déduire le sens de l'aplatissement terrestre et sa valeur, grâce à la comparaison avec un arc de méridien mesuré en Laponie par l'expédition de Maupertuis (1736–1737). Avec ses mesures de la pesanteur en août 1737 au sommet du volcan Pichinchá (à 2 434 toises = 4 744 m d'altitude), mais aussi à Quito qui se trouve au pied de celui-ci (à 1 466 toises = 2 857 m d'altitude), et plus tard au niveau de la mer [15, p. 329–364], il introduit la « correction à l'air libre » et la « correction de plateau » [16, p. 362–365] ; en 1738 il est intrigué aussi par la faiblesse de la déviation du fil à plomb (quelques secondes d'angle, considérées par lui comme peu fiables [17, p. 248]) qu'il mesure à proximité du Chimborazo, par rapport à l'ordre de grandeur prévu par son modèle (14 fois plus) — il effectue donc un travail de géophysicien et d'astronome, qui lui fait soupçonner la présence de zones de densité anormalement faible sous la montagne, ce en quoi il est précurseur de la théorie de l'isostasie et des racines crustales des chaînes de montagnes [15, p. 379–394].

De retour à Paris en 1744, il publie ses observations dans son livre sur *La Figure de la Terre*, paru en 1749 [15] ; et de par son expérience de la géodésie, il prend position, mais de manière ambiguë, dans la polémique de 1743–1757 sur la longueur d'un degré de méridien en France. Dès 1745, il avait été sollicité par l'Académie des sciences et par les ministres de la Marine successifs, Phélypeaux (comte de Maurepas) puis Rouillé (comte de Jouy), pour examiner un certain nombre de mémoires et projets visant à résoudre le problème des « longitudes à la mer », déposés devant les autorités. Sur terre, la mesure des longitudes était efficacement réalisée au XVII<sup>e</sup>–XVIII<sup>e</sup> siècle par l'utilisation de bonnes horloges et l'observation synchronisée des éclipses des satellites galiléens de Jupiter : c'est ainsi qu'en 1671 Jean Picard, sur le site de l'ancien observatoire de Tycho Brahe au Danemark, et Jean-Dominique Cassini à l'Observatoire de Paris, ont pu observer simultanément cinq de ces éclipses, et en déduire la différence de longitude entre

ces deux lieux. Mais cette méthode s'est avérée inutilisable en mer, à cause des mouvements du bateau qui perturbaient les horloges à pendule et rendent quasiment impossible l'observation des satellites de Jupiter [18]. Maupertuis étant parti début 1745, sur l'invitation de Frédéric II de Prusse, pour présider l'Académie des sciences de Berlin, Bouguer avait été chargé de le remplacer au poste de « préposé au perfectionnement de la marine ». En 1746 paraît son œuvre magistrale, probablement écrite en grande partie dans les Andes, pendant les longues périodes d'inactivité forcée : le *Traité du navire*, où il introduit la notion mathématique de métacentre permettant de prédire la stabilité des vaisseaux [19]. En 1748 il invente l'héliomètre (ou lunette à double objectif) pour mesurer avec précision le diamètre apparent du Soleil, afin de voir « si la théorie de Newton est vérifiée pour cet astre, à savoir s'il est aplati aux pôles » ; il n'obtient pas de résultat positif, vu la petitesse cet effet :  $0,0089'' \pm 0,0021''$  mesurés pour le 10 septembre 1996 par l'héliomètre de Jean Rösch au Pic du Midi, en parfait accord avec les  $0,0087'' \pm 0,0028''$  mesurés par le satellite SOHO pour les 19–20 mars 1997. Mais très vite Bouguer découvre avec son héliomètre les liserés colorés du limbe solaire (rouge en bas, bleu en haut si l'image est redressée) et les explique correctement par le pouvoir dispersif de l'air [20, 21].

En 1749, le ministre Rouillé lui attribue la pension de 3 000 £ qui avait été spécialement créée par son prédécesseur pour le poste de Maupertuis, à l'automne 1739. Bouguer s'acquittera scrupuleusement de la tâche afférente jusqu'à son décès. Ses expertises sur les propositions de méthode de mesure des longitudes le conduiront à penser que l'utilisation d'horloges dans ce but est vouée à l'échec et ne mérite pas d'être encouragée, car on ne dispose pas d'horloges ayant un fonctionnement suffisamment régulier (quoique des horlogers — au moins les familles Le Roy et Berthoud — y travaillaient) ; ainsi, les avis émis par Bouguer auraient agi comme un obstacle au développement de l'horlogerie de marine en France dans les années 1750 [22]. En 1753, son *Nouveau traité de navigation contenant la théorie et la pratique du pilotage* [23] est fort bien accueilli — comme en 1757 son dernier gros ouvrage de marine, *De la manœuvre des vaisseaux* [24].

Il participe activement à la rédaction du *Journal des savans* jusqu'en 1755. En août 1754, année de la mort de son seul frère, il suggère au tout nouveau ministre de la Marine, Machault d'Arnouville, d'ordonner de nouvelles mesures géodésiques en France, avec l'espoir évident de s'en voir confier la responsabilité — pour combattre une solitude devenue trop pesante (il ne s'est jamais marié) [19] ou compenser une gloire émoussée, et assombrie par de pénibles querelles [12, p. 280 et 409–410] avec La Condamine qui jetaient le discrédit sur l'ensemble de la communauté scientifique [25], depuis un retour d'expédition vieux de 10 ans [26] ? Son souhait est partiellement exaucé, car il fait partie d'une des deux commissions chargées par l'Académie des sciences de remesurer en 1756 la distance Paris-Amiens pour clore les controverses sur le degré de France.

À côté de tout cela, il continue à travailler sur la photométrie jusqu'à la fin de sa vie. Car il avait toujours le souci de perfectionner les instruments de mesure, d'éviter les perturbations et de développer des corrections, comme il l'avait déjà fait entre autres pour ses pendules gravimétriques à Quito et au sommet du Pichincha où, pour analyser leurs différences de période il tient compte, non seulement de la différence de température, mais aussi de celle de pression qui entraîne un changement de masse volumique de l'air et donc de poussée d'Archimède [15, p. 338–340] ; par la suite, Bessel a montré (en 1826) comment l'usage d'un pendule réversible de forme symétrique permet d'éliminer cette influence de l'air dans les calculs de gravimétrie [16, p. 320–321 et 342–347], ce qui rend inutile cette prise en compte de la pression. Il reste que Bouguer se trouve être l'un des principaux instigateurs d'une nouvelle approche des mesures qui accroît leur exactitude et leur qualité, permettant ainsi un net développement de la physique de son siècle.

Il a été juge pour 6 prix de l'Académie des sciences (notamment sur des questions de mécanique céleste), et accumule aussi les titres et les honneurs : membre de la *Royal Society* (1750),

de l'Académie royale de Bordeaux, membre honoraire de l'Académie de Marine (1752), sous-directeur de l'Académie royale des Sciences de Paris en 1747 et 1754, et directeur en 1748 puis 1755.

En photométrie, « il passa les deux dernières années de sa vie à se mettre en état de faire un nouvel Ouvrage sur la même matière, mais qui n'auroit plus besoin du titre d'Essai. Après avoir fait toutes les expériences & tous les calculs dont il avoit besoin, M. Bouguer s'occupoit à les rédiger, lorsqu'il fut attaqué d'une maladie qui le fit languir plusieurs mois : elle ne put l'obliger à interrompre son travail ; forcé même par une hydropsie déclarée, de garder le lit, il ne fut pas possible de l'empêcher de s'occuper de son Livre pendant plusieurs heures du jour : il eut enfin la satisfaction d'en voir les dernières pages mises au net, quelques jours avant que de mourir » le 15 août 1758 [27, p. iv-v].

Ses travaux en construction navale, en hydrographie, en mathématiques, en optique, en astronomie, en géodésie et en géophysique font de lui une figure emblématique de savant aux connaissances encyclopédiques, conforme à l'idéal du siècle des Lumières [28–30]. Le poète croisicais Paul Desforges-Maillard, son cadet d'un an et ami de toujours avec qui il entretint une abondante correspondance, écrira [31] :

## XXIII \*

### SUR LA MORT DE BOUGUER.

 BOUGUER est mort. Il étoit de mon âme,  
Pendant qu'il a vécu, la plus chère moitié ;  
Et la noire Atropos, qui vint couper sa trame,  
N'a pu rompre les noeuds de ma tendre amitié.

Ses immenses talens, de mémoire immortelle,  
N'égaloient point encor la bonté de son cœur :  
Accompli, né sans fard, prévenant et fidèle <sup>2</sup>,  
Tous ceux qui l'ont connu connoissoient sa candeur.

Éclairés en tous lieux par son sçavoir sublime,  
Le ciel, la terre et l'eau lui doivent des regrets,  
Et jamais des humains la plus célèbre estime  
Ne pourra payer ses bienfaits.

\* *Journal de Verdun de 1758*, t. II, Décembre, p. 448.

[31, p. 78] Source : gallica.bnf.fr / BnF

L'interminable querelle avec La Condamine (1701–1774), qui ne cessera vraiment qu'à la mort de ce dernier, avait laissé de Bouguer l'image d'un homme difficile ; Condorcet le réhabilitera dans son *Eloge de M. de La Condamine*, lu par lui à l'assemblée publique de l'Académie (qui se

déroule deux fois par an), comme l'a été celui de Bouguer par Grandjean de Fouchy [1, p. 372–375].

Nous présentons ici son deuxième essai [3] primé : [P.] Bouguer, *De la Méthode d'Observer Exactement sur Mer la Hauteur des Astres*, Claude Jombert, Paris, 1729. Il est disponible à <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN528571516>

Ce n'est pas son seul texte où il traite de réfraction astronomique : il en publiera d'autres pour l'Académie des Sciences de Paris [32, 33], et ses travaux seront aussi présentés par le Secrétaire perpétuel [34, 35] ; mais l'essentiel de ses idées novatrices se trouve déjà dans son essai primé de 1729, et nous présentons les quelques idées supplémentaires de ses autres articles dans le paragraphe 3 de notre « panorama historique [...] » [36] dans ce numéro spécial. Pour une bibliographie plus complète de Bouguer, on pourra se reporter à celle établie par Maheu [37], qui recense 47 titres sûrs.



# DE LA METHODE D'O B S E R V E R EXACTEMENT SUR MER LA HAUTEUR DES ASTRES.

————— Oculosque sub astra tenebat.

*Virg. Mar. Aenei. Lib v.*

**I**ORSQUE l'Academie Royale des Sciences propose aux Scavans de toutes les Nations, de déterminer quelle est la meilleure Méthode d'observer les hauteurs sur Mer, par le Soleil & par les Etoiles, soit par des instrumens déjà connus, soit par des instrumens de nouvelle invention, Elle montre dans cette rencontre, comme dans toutes les autres, l'extrême attention qu'elle a pour l'utilité publique, & pour la perfection des Arts. Elle ne pouvoit pas choisir en effet de matière plus importante, & qui interressât davantage les Marins. Car réduits en Mer à ne pouvoir trouver que la seule latitude, avec un peu de précision, les Pilotes ne

A

## 2. Résumé et commentaires

Ce mémoire [3] de 74 pages se compose de deux parties.

La première (p. 3–38) est formée de 4 chapitres (et non pas 6, comme cela est marqué par erreur en tête des pages 33 et 35) consacrés aux divers instruments de mesure de la hauteur angulaire apparente  $\psi' = 90^\circ - Z'$  d'un astre, à leurs avantages et leurs inconvénients respectifs, et leurs perfectionnements éventuels. Ils sont classés en deux catégories, selon qu'ils se servent de l'horizon marin comme référence (c'est le cas de l'arbalestrille, du bâton astronomique, etc. — mais le sextant moderne ne sera inventé que dans les années 1730), ou bien utilisent un fil à plomb (resp. une disposition imprimée par la pesanteur à l'instrument) comme le quadrant de Gunter (resp. l'astrolabe lourd et pendu par un anneau), etc. — ce qui semble *a priori* exclu à cause du balancement du navire, mais Bouguer remet en cause cet *a priori* en réétudiant au chap. III différents systèmes : « car est-il certain qu'on ne pourroit pas à l'aide d'une bonne suspension, garantir [ces derniers] des plus grandes agitations du vaisseau ? »

La seconde partie (p. 39–72) est consacrée aux corrections optiques qu'il est nécessaire d'apporter aux mesures. Bouguer montre très clairement la nécessité, en navigation astronomique, de tenir compte (pour un observateur  $S$ ) de corrections dues d'une part à la réfraction astronomique  $\chi_S$  (qui fait l'objet du chapitre I — p. 39–62 — de cette partie), d'autre part à la réfraction atmosphérique (ou « terrestre ») qui fait l'objet du chapitre II — et que Lambert [9] caractérisera en moyenne par le coefficient de réfraction  $\kappa_S$ , i.e. le quotient de la courbure des rayons horizontaux en  $S$  par la courbure méridienne de la Terre (voir le paragraphe 3 de [36], puis 7.1.1 de notre exposé des « propriétés remarquables de la réfraction astronomique [...] » [38], et 3 de [39], tous dans ce numéro spécial).

Indépendamment de Newton qui l'avait précédé en 1694 sur l'étude de  $\chi_S$  dans un milieu à symétrie sphérique mais ne l'avait pas publiée (voir le sous-paragraphe 2.2 de [36]), Bouguer écrit, moins approximativement que Newton, l'expression de  $\chi_S$  sous la forme d'une intégrale (dite « de réfraction ») pour un rayon lumineux ( $R$ ) supposé plan et allant d'un astre à  $S$ ; si on utilise la fonction tangente et l'indice de réfraction  $n$  (ainsi que sa valeur  $n_S$  en  $S$ ) au lieu de rapports de côtés de triangles et de sinus comme Bouguer, on peut la mettre sous la forme actuelle

$$\chi_S = \int_1^{n_S} \frac{\tan \alpha}{n} dn \quad (1)$$

où  $\alpha$  est, en un point courant  $P$  de ( $R$ ), l'angle entre un vecteur tangent à ( $R$ ) et le vecteur **grad** $n$  — pour une démonstration moderne de (1), voir le paragraphe 2 de [38] (mais rappelons surtout que cette intégrale suppose que  $\tan \alpha$  soit une fonction non-équivoque de  $n$ ). Bouguer consacre tout son §. XLI, intitulé « LEMME », à démontrer ce que nous appelons actuellement son invariant : à savoir, après transposition (cf. Table 1) en termes actuels ici comme dans toute la suite,

$$I_B := nr \sin \alpha = n_S r_S \sin Z' \quad (2)$$

pour ( $R$ ) dans un milieu à symétrie sphérique de centre  $C$  — l'indice  $S$  mis à une grandeur indiquant que l'on considère sa valeur au niveau de  $S$ , le symbole  $:=$  indiquant une définition ou une notation, et la variable  $r$  désignant la longueur du segment  $CP$  (Bouguer appelle ce dernier « l'appliquée » de  $P$ ). La démonstration de Bouguer [3, p. 41–42] est rédigée encore en termes de géométrie sans aucune équation, et toujours indépendamment de Newton. Puis, après des explications (qui seront plus claires dans son mémoire de 1753 [33]) occupant essentiellement les pages 44–46, Bouguer en tire (p. 46) l'expression de l'élément différentiel de réfraction, sous

la forme

$$d\chi = \frac{I_B}{\sqrt{r^2 - (n^{-1})^2 I_B^2}} dn^{-1}. \quad (3)$$

Bouguer dit que « presque tous les personnes qui ont traité ce sujet » [3, p. 47] ont supposé que les valeurs de  $1/n$  — et non pas  $1/(n-1)$ , car il parle ici « des sinus » — sont proportionnelles aux valeurs d'*un* volume massique (Bouguer parle de « dilatations »). Or il note qu'avec la forte baisse de masse volumique  $\mu$  de l'air en fonction de l'altitude, cela donnerait  $\chi_S$  bien plus grand que ce qui est observé, donc il écrit que ceci l'a « obligé de supposer que les réfractions étoient causées dans l'Atmosphère par une matière différente de l'air, & que nous avons appellée *réfractive* » (p. 48) ; derrière cette supposition se trouve vraisemblablement l'idée que  $1/n$  est proportionnel au volume massique de cette « matière réfractive », qui ne forme pas un mélange homogène avec l'air dans l'atmosphère : en cela, il reprend une idée émise au tournant du XVIII<sup>e</sup> siècle, afin d'expliquer des faits troublants pour l'époque, au moins selon Giacomo Filippo Maraldi [40] suivi par les Cassini ([41, p. 197], [42, p. 84]) — mais sans les citer. Alors Bouguer considère que, vraisemblablement,  $1/n$  est une fonction (peut-être proportionnelle à une puissance) du volume massique de l'air, et il suppose plus quantitativement que  $1/n$  est proportionnel à  $r^q$  [3, p. 48]. Sans le savoir, Bouguer considérait donc pour cette « matière réfractive » un modèle d'état d'équilibre polytropique d'un certain indice  $j$  (voir le sous-paragraphe 2.2 de [36]), car on sait maintenant que dans ce modèle la masse volumique est inversement proportionnelle à  $r^j$  (avec une pesanteur inversement proportionnelle à  $r^2$ ) et la température absolue  $T$  inversement proportionnelle à  $r$  pour un gaz parfait. Autrement dit, Bouguer ignorait, ou occultait, ou interprétrait mal les conclusions expérimentales de Hauksbee [43, p. 175] qui préfiguraient la loi empirique de Gladstone–Dale. Serait-ce un cas de *wishful thinking*, car Bouguer aurait eu très envie d'utiliser les belles propriétés qu'il a découvertes pour des rayons dans un milieu où  $n$  est inversement proportionnel à  $r^q$ ? À sa décharge, signalons que le résultat de l'expérience de Hauksbee mit longtemps à être admis, vu les doutes de l'époque liés notamment à son résultat contradictoire avec l'expérience (en fait défectiveuse) de Homberg [44, p. 115] ; mais surtout, au XVIII<sup>e</sup> siècle les appellations, différentes des nôtres, étaient encore bien ambiguës et entretenaient la confusion entre ce qu'on appelle maintenant l'indice  $n$  et la réfractivité  $\eta := n - 1$  : le mot « réfraction » était utilisé pour désigner tantôt, à l'instar de  $\chi_S$ , une déviation (quasi proportionnelle à  $n - 1$  dans les expériences de Hauksbee, qui écrivait « By these Experiments it plainly appear'd, That the Refraction of the Air was, as far as the Eye could distinguish it, exactly proportional to its *Density* » [43, p. 175]), tantôt le rapport des « sinus des angles d'incidence & de réfraction » [3, p. 47]. Bouguer aurait-il pris dans l'article de Hauksbee le mot « refraction » [43, p. 175] avec sa seconde acception, alors qu'il relevait ici de la première ? Puisqu'on ne parlait donc pas encore d'indice de réfraction à cette époque, mais de rapports de sinus,  $n$  ne saurait alors être défini qu'à une constante multiplicative près, donc il est naturel que  $n_S$  soit absent du modèle de Bouguer, et selon lui il ne serait pas illogique de considérer un profil d'indice tel que  $\lim_{r \rightarrow \infty} n(r) = 0$  ; cependant Bouguer considère que l'atmosphère de son modèle a une étendue limitée, et que les rayons lumineux ne présentent pas de point anguleux à sa frontière haute, donc (en termes actuels) que l'indice n'y est pas discontinu.

Bouguer déduit de son invariant  $I_B$  l'équivalence entre l'existence de rayons en spirale logarithmique et le fait que les valeurs des « dilatations » (donc de  $n^{-1}$  selon Bouguer) sont proportionnelles à  $r$  [3, p. 43 et 52] — notons qu'alors l'élément différentiel de l'intégrale de réfraction  $d\chi = (\tan \alpha) dn / n$  est, en vertu de simples propriétés géométriques, égal (en valeur absolue) à l'angle au centre  $d\theta$  correspondant. Bouguer a trouvé aussi (p. 49) une loi plus générale dans le cas où  $n$  est inversement proportionnel à  $r^q$ . Notons qu'avec ce profil d'indice particulier on a  $\kappa_S = q$  — en vertu de la relation (43) de [38] de ce numéro spécial. Et c'est en appliquant

« des méthodes géométriques » [3, p. 52] aux rayons dans un tel modèle d'atmosphère (de hauteur  $H$  au-dessus de l'observateur) que Bouguer construit une table de  $\chi_S(\psi')$ , en ajustant (comme Newton) les deux seuls paramètres indépendants ajustables de son modèle,  $q$  et  $h_\tau := H/r_S$ , à deux valeurs de référence :  $\chi_S(0^\circ) \cong 33'$  d'après les observations, et  $\chi_S(26^\circ) \cong 2' 12''$  d'après les tables de La Hire [3, p. 57]. Malheureusement la table obtenue par Bouguer (et qui correspond à  $q \cong 0,1281 \cong 1/7,805$ ) donne des valeurs en moyenne 10 % trop élevées, sauf aux faibles hauteurs (nous reviendrons sur ce point aux sous-paragraphe 3.4 et 3.5 du présent article) ; pendant l'expédition du Pérou, Bouguer annoncera le calcul d'autres tables, « en suivant en partie la méthode que j'ai expliquée dans la Pièce que je publiai en l'année 1729, sur la manière d'observer en Mer la hauteur des Astres. » [32] Après avoir cité la table de Tycho, il termine ce chapitre en comparant la sienne à celle de *La connaissance des Temps*, qui est calculée selon le modèle de Cassini [3, p. 61–62] ; il constate que la variation des réfractions près de l'horizon, qui était mal reproduite avec le modèle de Cassini, l'est mieux avec le sien (ce que le théorème de Biot explique très facilement — voir le sous-paragraphe 7.1 de [38]).

Le dernier chapitre est consacré à la dépression de l'horizon, à savoir l'angle  $\delta$  égal à la hauteur de l'horizon astronomique (i.e. l'ensemble des directions horizontales pour  $S$ ) par rapport à l'horizon réel (qui usuellement est plus bas) ; Bouguer commence par calculer  $\delta$  (qu'il appelle « l'inclinaison de l'horizon sensible ») en considérant que les rayons lumineux venant de l'horizon marin sont rectilignes (comme le faisaient ses prédécesseurs), et il produit ainsi une table de  $\delta$  en fonction de l'élévation  $E$  de l'observateur  $S$  [3, p. 65], mais il montre qu'il y a un désaccord net avec une observation datant de la campagne géodésique des Cassini (au début du XVIII<sup>e</sup>) depuis une élévation de 408,5 toises (2 451 pieds) :  $50' 20''$  observées, contre  $54' 20''$  attendues (p. 66). Alors il montre (et il semble être en cela le premier) comment tenir compte de la courbure des rayons lumineux pour analyser les observations des objets terrestres ; elle diminue  $\delta$ , d'où une nouvelle table de  $\delta$  (p. 70), dont la différence avec l'ancienne n'est pas négligeable pour les marins (p. 71). Cette diminution de  $\delta$  était déjà prévue par Jean-Dominique Cassini, à propos des observations faites depuis Perinaldo lors de son bref et unique retour dans son village natal en novembre 1694, mais il ne savait pas comment mettre en équations les rayons courbes pour calculer  $\delta$  théoriquement (voir la fin du sous-paragraphe 2.1 de [36]). À la dernière page, Bouguer tombe dans le travers de la plupart de ses illustres contemporains (comme Jacques Cassini [42] — voir le paragraphe 1 de [36]) et de ses prédécesseurs (Newton et Flamsteed dans leur correspondance de 1694–1695, Huygens, Brahe, etc.), consistant à attribuer les « irrégularités » de réfraction à « la différente quantité de vapeurs qui se soutiennent dans la partie basse de l'Atmosphère » [3, p. 72], au lieu de les expliquer par un profil thermique non standard.

Pour d'autres détails, voir

A. T. Young. (Page consultée 12 janvier 2022), *Annotated bibliography of mirages, green flashes, atmospheric refraction, etc.*, [En ligne]. Adresse URL : <https://aty.sdsu.edu/bibliog/bibliog.html>

### 3. Présentation illustrée des idées fondamentales

La partie qui nous intéresse est la seconde, puisqu'elle seule traite de la réfraction — voir aussi [7] pour une présentation moins analytique. Dès son premier chapitre consacré à  $\chi_S$ , Bouguer laisse clairement entendre qu'il vise une étude meilleure que le traitement sommaire de  $\chi_S$  par Newton (1642–1727) dans son *Opticks* (1704) [45, Prop. X de la part. III du second livre] : voir ci-dessous, dans les pages 39–40 de [3], le paragraphe qui, malgré sa déférence envers les « grands Géomètres » comme Newton récemment décédé, n'en est pas moins une pierre jetée dans son jardin.

## SECON. PARTIE. CHAP. I.

39

## SECONDE PARTIE.

*Des corrections qu'il faut faire à la hauteur apparente  
des Astres, pour avoir la hauteur véritable.*

## CHAPITRE PREMIER.

*De la réfraction Astronomique.*

## §. XXXIX.

Plusieurs grands Géometres ont cherché la nature de la *Solaire*, ou de cette ligne courbe que tracent dans l'air les raïons qui nous viennent des Astres : mais ils ont toujours négligé la sphéricité des différentes couches, dont on peut concevoir que l'Atmosphère est formée. Cependant il est certain qu'on doit y faire une expresse attention ; & qu'il ne suffit pas, comme on le pourroit croire d'abord, de chercher la nature de la *Solaire* pour des couches planes, & de courber ensuite cette ligne à proportion qu'on suppose que les couches se courbent elles-mêmes pour devenir sphériques. Car un raïon de lumiere qui avance ici horizontalement, fait avec les couches supérieures des angles de 30<sup>min.</sup> d'un degré, de deux degrés &c. & cette diversité d'angles d'incidence, qui vient principalement de la courbure des couches, doit apporter de la différence dans la réfraction même. C'est aussi par cette raison qu'on ne peut pas appliquer à l'Atmosphère, le fameux Théorème avancé par M. *Newton* dans son Optique.

[3, p. 39] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

## 40 DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &amp;c.

que,\* qu'un raïon de lumiere qui passe à travers plusieurs milieux de différentes densitez, & compris entre des surfaces paralelles, souffre précisément par le trajet de tous ces milieux, la même réfraction que s'il passoit immédiatement du premier au dernier. Cette proposition n'est vraie que lorsque les surfaces sont planes, & il s'en faut extrêmement qu'on puisse s'en servir pour déterminer les réfractions astronomiques, ni pour découvrir le pouvoir *refringent* qu'a l'air grossier d'ici - bas, par rapport à celui qu'a l'air subtil du haut de l'Atmosphère.

[3, p. 40] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Avec son modèle d'atmosphère stratifiée sur une Terre plate, Newton introduisait donc l'invariant de Snell-Descartes. Bien sûr, dans ses lettres de 1694 à Flamsteed (voir le sous-

paragraphe 2.2 de [36]), il avait fait mieux, et introduit l'invariant  $I_B$  (2) ; mais Bouguer ne pouvait pas le savoir, puisque cette correspondance n'a été publiée qu'en 1835. Alors, après avoir posé le problème de l'étude du rayon (R) que Bouguer appelle la *Solaire*, celui-ci démontre son invariant  $I_B$  dans un lemme [3, p. 41].

### 3.1. Invariant de Bouguer

#### Correspondance des notations

**TABLE 1.** Notations (le symbole := indique une définition)

| Notations de Bouguer [3]  | Notations de Dettwiller [36, 38] dans ce numéro de <i>C. R. Phys.</i> | Indications [et unités usuelles]  |
|---|---|---|
| A   | S   | Point de l'observateur  |
| la <i>Solaire</i>   | le rayon lumineux (R)   | Rayon allant d'un astre à S   |
| « la distance » $y :=$ CP de « l'appliquée »  | $r$   | Distance entre un point courant $P$ — du rayon lumineux (R) — et le centre $C$ de la Terre, pour un modèle d'atmosphère à symétrie sphérique [km]           |
| $a$   | $r_S$   | $CS$ (quasiment le rayon terrestre) [km]  |
| $dy :=$ SP de la Fig. 11 de Bouguer   | $dr$  | Variation élémentaire de $r$ pour un déplacement élémentaire de $P$ sur (R) [m]   |
| « l'ordonnée » $z :=$ FG du point courant G d'une « courbe » qui est le graphe des « dilatations $z$ de la matière réfractive » | $r_S n^{-1}$  | Inverse de l'indice de réfraction, multiplié par $r_S$ [km]   |
| $c$   | $I_B$   | Invariant de Bouguer [km]   |
| « progrès horizontal » élémentaire, du  | $r_S d\theta$   | Longueur de la projection sur Terre du déplacement élémentaire de $P$ sur (R) [m]   |
| $\frac{cdz}{\sqrt{y^2 - (c^2/a^2)z^2}}$   | $r_S d\chi = \frac{I_B r_S dn^{-1}}{\sqrt{r^2 - (n^{-1})^2 I_B^2}}$   | Réfraction élémentaire — correspondant au déplacement élémentaire de $P$ sur (R) — et multipliée par le rayon terrestre [m]<br>(suite sur la page suivante) |

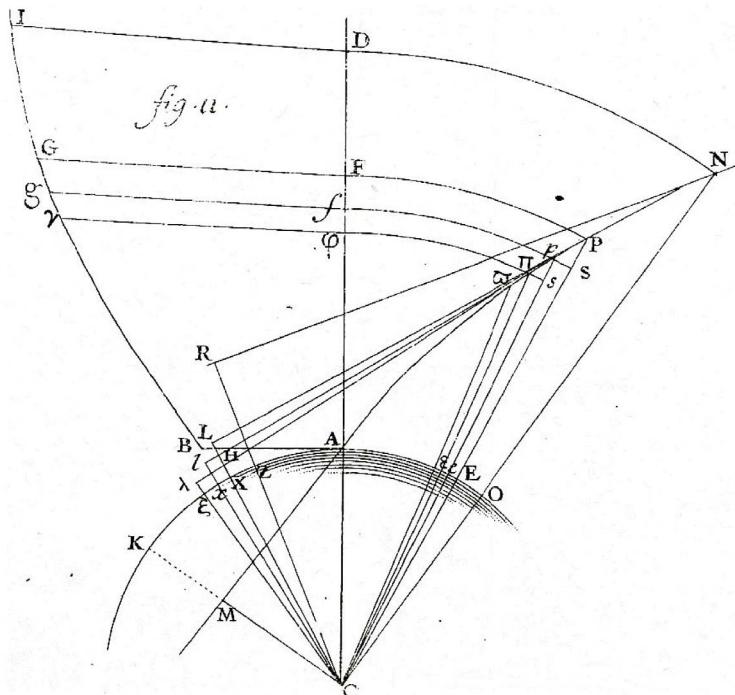
**TABLE 1.** (suite)

| Notations de Bouguer [3]   | Notations de Dettwiler [36, 38] dans ce numéro de <i>C. R. Phys.</i> | Indications [et unités usuelles]   |
|----------------------------|--|--|
| $m$                        | $q$  | Exposant du modèle de Bouguer  |
| CN                         | $r_S + H$  | Rayon de la frontière supérieure de l'atmosphère, dans le modèle de Bouguer [km] |
| $h = (m - 1)/m$            | $-2w = (q - 1)/q$  | Coefficient utile  |
| $1 - g = a^{1-m} CN^{m-1}$ | $[1 + (H/r_S)]^{m-1} = r_S^{1-m} (r_S + H)^{m-1}$                    | Autre coefficient utile  |
| $q$                        | $\sin \psi'$   | Sinus de la hauteur apparente  |
| $p$                        | $\cos \psi' = \sin Z'$   | Sinus de la distance zénithale apparente   |
| $e$                        | $\chi_S(0) := \chi_{Sh}$ (1 <sup>e</sup> valeur de référence)        | Donnée numérique utilisée pour la construction de la table de Bouguer [°, ', "'] |
| $f$                        | $\chi_S(26^\circ)$ (2 <sup>e</sup> valeur de référence)              | <i>Idem</i>  |

**§. X L.**

Peut-être donc qu'on entreprend ici de donner la première solution légitime du problème de la *Solaire*. Pour entrer en matière; on suposera que KAO (*Fig. II.*) est une portion de la surface de la terre, dont le point C est le centre: on concevra le semidiamètre CA prolongé indéfiniment vers D, & on imaginera une courbe BGI qui ait CD pour axe, & dont les ordonnées AB, FG, DI représentent les différentes dilatations de l'air à chaque hauteur au-dessus de la terre; ou plutôt ces ordonnées doivent marquer les diverses dilatations de la matière réfractive répandue dans l'air. Concevant après cela un rayon de lumière NPA, qui à cause de la réfraction continue qu'il souffre en passant toujours dans un milieu plus dense, décrit avant de parvenir à nous la courbe N PA, nous considererons les trois parties consécutives & infinitement petites  $Pp$ ,  $p\pi$ ,  $\pi\varpi$ ; & les ayant prolongées indéfiniment vers le bas, afin d'avoir les trois tangentes PL,  $p\ell$ ,  $\pi\lambda$  à la courbe NPA, nous abaîserons du centre C de la terre, les trois perpendiculaires CL,  $C\ell$ , &  $C\lambda$  sur ces tangentes. Enfin on tirera les lignes CP,  $C\pi$ ; & ayant décrit du point C comme centre, les trois arcs PF,  $S\pi f$ ,

\* Dans la propos. X de la troisième Partie du seconde Livre.



[3, Fig. 11 en fin d'ouvrage] Source : Biblioteca Virtual del Patrimonio Bibliografico (<https://bvpb.mcu.es/es/consulta/registro.do?id=576360>). CC-BY 4.0

Noter que la courbe (BGI) ci-dessus, de point courant G, est d'abord présentée comme le graphe de  $\mu^{-1}$  (« dilatation de l'air ») en fonction de la « hauteur au-dessus de la terre » [3, p. 40] ; mais ensuite Bouguer se ravisera ouvertement (p. 48) : à une constante multiplicative près, (BGI) devient le graphe de la « dilatation de la matière réfractive » (en fait, celui de  $r_S n^{-1}$  en termes actuels) que Bouguer appelle « l'ordonnée z » du point courant.

S E C O N . P A R T I E . C H A P . I .      41  
s'après, on élèvera perpendiculairement à l'axe CD de la  
courbe BGI, les trois ordonnées FG, fg, φy.

#### L E M M E .

#### §. X L I .

Cela supposé, il est évident qu'à cause de l'infinie petitsse des épaisseurs  $Ff$ ,  $f\phi$ , on peut supposer que l'ordonnée  $GF$  exprime la dilatation de l'air ou de la matière réfractive qui est comprise dans toute la couche sphérique, dont  $F\phi f$  est une portion, & dont  $Ff$  est l'épaisseur; & que l'ordonnée  $fg$  représente pareillement la dilatation de la matière réfractive, comprise dans toute la couche qui est immédiatement au-dessous, & dont  $f\phi$  ou  $ps$  est la petite épaisseur. Ainsi le rayon de lumière fera le petit trajet  $Pp$  sans se courber : mais rendu en  $p$ , il s'y rom-

pra, parce qu'il rencontrera en cet endroit de l'air plus condensé; & par consequent, au lieu de continuer le long de  $pL$ , il se détournera selon  $pl$ ; & le détour sera tel, qu'il y aura même rapport de  $FG$  au sinus de l'angle d'incidence que de  $fg$  au sinus de l'angle de réfraction. C'est ce qui doit arriver selon la loi ordinaire des réfractions: mais si on considere que  $Cpl$ , est égal à l'angle d'incidence, & que  $Cpl$  est l'angle même de réfraction, on conclura que  $FG$  est à  $CL$ , comme  $fg$  est à  $Cl$ ; puisque dans les deux triangles  $Cpl$ ,  $Cpl$  qui ont même hypoténuse  $Cp$ , les côtez  $CL$ , &  $Cl$  sont en même raison que les sinus des angles  $Cpl$ ,  $Cpl$ , & que par la nature de la réfraction,  $FG$  doit être au sinus de l'angle  $Cpl$ , comme  $fg$  au sinus de l'angle  $Cpl$ . On prouvera avec la même facilité que  $fg$  est à  $Cl$ , comme  $\varphi\gamma$  est à  $C\lambda$ : car le raion étant parvenu en  $\pi$  en faisant avec la verticale  $C\pi$ , un angle d'incidence  $C\pi l$ , il souffrira dans ce point un second détour, ensuite duquel il avancera selon  $\pi\lambda$  & fera avec la même verticale  $C\pi$ , l'angle de réfraction  $C$

F

[3, p. 41] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

#### 42 DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &c.

Mais comme les deux triangles rectangles  $C\pi l$ ,  $C\pi\lambda$  ont encore une même hypoténuse  $C\pi$ , il est clair que  $Cl$  sera à  $C\lambda$ , comme le sinus de l'angle  $C\pi l$  sera au sinus de l'angle  $C\pi\lambda$ : & qu'ainsi les ordonnées  $gf$  &  $\gamma\varphi$  qui expriment le rapport qui doit être entre les sinus des angles d'incidence & de refraction  $C\pi l$  &  $C\pi\lambda$ , exprimeront aussi le rapport qui doit se trouver entre  $Cl$  &  $C\lambda$ ; & il y aura donc par consequent même raison de  $gf$  à  $Cl$ , que de  $\gamma\varphi$  à  $C\lambda$ . Or il résulte de tout cela que  $GF$  est à  $CL$ , comme  $\lambda\varphi$  est à  $C\lambda$ ; puisque l'un & l'autre de ces raports, est égal à celui de  $gf$  à  $Cl$ . Et comme on peut appliquer le même raisonnement à toutes les autres Parties de la Solaire ou de la courbe tracée par le raion de lumière; il s'ensuit que les perpendiculaires tirées du centre de la terre sur les tangentes de cette courbe, feront continuellement proportionnelles aux ordonnées correspondantes de la courbe IGB des dilatations: c'est-à-dire, que si on tire du centre  $C$  de la terre des perpendiculaires  $CR$ ,  $CM$  &c. sur les tangentes  $NR$ ,  $AM$  &c. de la Solaire, il y aura continuellement même rapport de  $ID$  à  $CR$  que de  $AB$  à  $CM$ , que de  $GF$  à  $CL$ , &c.

[3, p. 42] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Ce §. XLI, que nous avons reproduit intégralement, est tout entier occupé par la démonstration de l'invariance de  $I_B := nr \sin \alpha$ . Muni de ce résultat, et après une digression intéressante (§. XLII) mais inutile dans la pratique, Bouguer va écrire  $\chi_s$  rigoureusement sous la forme d'une intégrale.

### 3.2. Intégrale de réfraction

#### §. XLIV.

Si on fait maintenant attention au Lemme démontré §. 41. que les ordonnées de la courbe des dilatations sont continuellement proportionnelles aux perpendiculaires tirées du centre C sur les tangentes de la solaire, on pourra faire cette proportion  $AB=a | CM=c \parallel GF=z |$

$CL=\frac{cz}{a}$ . Ainsi la question se réduit à faire ensuite que la courbe ANP que décrit le rayon de lumière, ait effectivement dans tous ses points,  $\frac{cz}{a}$  pour les perpendiculaires comme CL tirées du centre C, sur ses tangentes PL. Pour cela je cherche la petite ligne ou le petit arc  $pS$ , par cette analogie;  $CE=a | cE=du | CP=y | pS=$

[3, p. 44] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

#### SECON. PARTIE CHAP. I. 45

$\frac{ydu}{a}$ ; & ajoutant le carré de  $pS$  avec celui de  $SP=dy$ , & tirant la racine carrée de la somme, il me vient  $\sqrt{\frac{y^2 du^2 + dy^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{y^2 du^2 + a^2 dy^2}{a^2}}$  pour la valeur de  $pP$ . La ressemblance du petit triangle  $pSP$  & du grand  $CLP$  me fait ensuite découvrir la valeur de la perpendiculaire  $CL$  par cette analogie,  $pP = \sqrt{\frac{y^2 du^2 + a^2 dy^2}{a^2}} | pS = \frac{ydu}{a} \parallel CP = y | CL = \frac{y^2 du}{\sqrt{y^2 du^2 + a^2 dy^2}}$ . Et comme cette perpendiculaire  $CL$  que nous trouvons ainsi égale à  $\frac{y^2 du}{\sqrt{y^2 du^2 + a^2 dy^2}}$ , le doit être aussi à  $\frac{cz}{a}$ , nous aurons l'équation  $\frac{y^2 du}{\sqrt{y^2 du^2 + a^2 dy^2}} = \frac{cz}{a}$ , dont nous tirons  $a^2 y^2 du^2 = c^2 z^2 y^2 da^2 + a^2 c^2 z^2 dy^2$ , &  $a^2 y^2 du^2 - c^2 z^2 y^2 da^2 = a^2 c^2 z^2 dy^2$ , & enfin la formule  $du = \frac{acz dy}{y \sqrt{a^2 y^2 - c^2 z^2}}$ , où  $du = \frac{cz dy}{y \sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}}$ . Or on voit assez

qu'on peut toujours construire aisément la solaire par cette formule; pourvu qu'on suppose connue la quadrature des courbes. C'est ce qu'il n'est pas nécessaire d'expliquer. Nous pourrions aussi nous dispenser de dire que pour trouver la valeur de  $u$  ou de l'arc  $AE$  par le calcul, il n'y a qu'à tirer l'expression de  $z$  en  $y$ , de l'équation qui marque la nature de la courbe BGI des dilatations, & qu'introduisant cette expression à la place de  $z$ , dans la formule  $du = \frac{cz dy}{y \sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}}$ , le second membre ne

contientra plus que  $y$  de seule variable avec sa différentielle; ce qui nous permettra toujours d'en prendre l'intégrale, & de trouver au moins par approximation, la valeur de l'arc  $u$  qui répond à chaque appliquée  $y$ .

F iii

[3, p. 45] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

## 46 DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &c.

### §. XLV.

On peut non-seulement construire de cette sorte la ligne APN que tracent dans l'air les raïons de lumiere; mais on peut toujours aussi découvrir la quantité de la réfraction astronomique, ou la quantité dont ces raïons se courbent depuis leur entrée dans l'Atmosphère jusqu'à nous. La courbure qu'ils souffrent en chaque point  $p$ , est mesurée par l'angle infiniment petit que font deux tangentes voisines PL,  $pl$ ; & la courbure totale est égale à l'angle que font les tangentes aux deux extrémités de la courbe. Il suit de là que si nous abaissions du centre C de la terre, des perpendiculaires CL,  $C\ell$  sur les deux tangentes PL,  $pl$ ; nous pourrons regarder le petit arc  $xX$  compris entre ces deux perpendiculaires, comme l'élément de la réfraction astronomique, puisqu'il mesurera l'angle  $LC\ell$ , qui est égal à celui que font les deux tangentes : & par la même raison l'arc entier KZ intercepté entre les deux lignes CMK & CR, qui sont perpendiculaires aux tangentes AM & NR, aux deux extrémités de la courbe, pourra être pris pour la courbure que souffre le raïon dans tout son trajet. Or si on se souvient que CL

$= \frac{cz}{a}$ , on aura  $\frac{cdz}{a}$  pour la petite partie LH dont CL surpassé  $C\ell$ ; & on pourra découvrir la valeur de ce petit arc  $Xx$  par cette analogie  $PL = \sqrt{CP^2 - CL^2} = \sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2} \mid LH = \frac{cdz}{a} \parallel CX = a \mid Xx$ . Il vient de cette forte  $\sqrt{\frac{cdz}{a^2} z^2}$ , pour l'expression de ce petit arc: expression qui est générale, & qui convient également à toutes les différentes hypothèses des dilatations de l'air.

[3, p. 46] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

### S E C O N . P A R T I E . C H A P . I .

47

Mais on la réduira, comme on le fçait, à chaque hypothèse particulière, en substituant à la place de  $z$  sa valeur exprimée en  $y$ ; & il ne restera plus ensuite qu'à en

prendre l'intégrale, pour avoir la quantité  $\int \sqrt{\frac{cdz}{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}}$

de la réfraction astronomique.

[3, p. 47] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

En transposant dans nos notations (cf. Table 1), on voit que Bouguer a obtenu l'intégrale de réfraction (qui est la première intégrale de son mémoire) sous la forme

$$\chi_S = \int_{n_s^{-1}}^1 \frac{I_B}{\sqrt{r^2 - (n^{-1})^2 I_B^2}} dn^{-1} \quad (4)$$

(voir les relations (14) de [36]) ; Newton a obtenu une forme voisine dans ses lettres à Flamsteed mais moins rigoureuse, car il lui manque un facteur  $n^{-1}$ . Bouguer a aussi (p. 45) l'expression de l'angle au centre élémentaire associé à un élément de (R) :

$$d\theta = I_B \frac{n^{-1}}{r \sqrt{r^2 - (n^{-1})^2 I_B^2}} dr ; \quad (5)$$

on le vérifie facilement en notant que

$$\frac{r \sin \alpha}{r \sqrt{r^2 \cos^2 \alpha}} dr = (\tan \alpha) \frac{dr}{r}, \quad (6)$$

ce qui revient bien à la formule classique suivante pour les courbes en coordonnées polaires :

$$\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta}. \quad (7)$$

### 3.3. *Le modèle de Bouguer*

Dans le résumé, nous avons annoncé les raisons pour lesquelles Bouguer adopte une loi de proportionnalité entre  $1/n$  et  $r^q$  ; voyons avec ses propres mots comment il justifie ce choix curieux (sans pour autant tenir fermement à l'existence de la « matière réfractive »), et regardons les élégantes conséquences qu'il en tire.

#### §. LXVI.

Il seroit assez facile selon cela, si on connoissoit les diverses dilatations  $z$  de la matière réfractive à différentes hauteurs au-dessus de la terre, de découvrir la nature de la courbe que décrivent les raions de lumière ; & le rapport des réfractions : car on n'auroit toujours qu'à se servir pour la première de ces déterminations de la formule

$\mathbf{u} = \int \frac{cz dy}{y \sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}}$  & pour la seconde de la formule

$\int \frac{cdz}{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}$ . Mais malheureusement on ne connaît point

les dilatations de la matière réfractive, dont on auroit besoin. On a bien quelque connaissance des différentes dilatations de l'air ; mais il est certain que les réfractions n'en suivent pas le rapport. En effet l'air pris à une grande hauteur au-dessus de la terre, est mille fois & dix mille fois plus dilaté qu'ici bas ; & ainsi, si les sinus des angles d'incidence & de réfraction, suivent le rapport simple de ces dilatations, comme l'ont supposé presque toutes les personnes qui ont traité ce sujet, un rayon de lumière qui seroit d'abord horizontal, devroit se rompre si considérablement dans l'Atmosphère, qu'il deviendroit presque vertical, avant de parvenir jusqu'à nous.

#### 48 DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &c.

C'est ce qui nous a obligé de supposer que les réfractions étoient causées dans l'Atmosphère par une matière différente de l'air, & que nous avons appellée *réfractive*. Mais si on ne veut point admettre l'existence de cette matière, nous ne nous en mettons point en peine. Car les sinus des angles d'incidence & de réfraction, qui ne sont point proportionnels aux dilatations de l'air, le sont certainement à quelque puissance ou à quelque fonction de ces dilatations : or on n'a qu'à regarder la courbe BGI, comme exprimant les dilatations de l'air élevées à ces puissances ou à ces fonctions quelles qu'elles soient.

*Déterminer la Solaire pour toutes les Hypothèses dans lesquelles les dilatations z sont proportionnelles aux distances y au centre de la terre, élevées à une puissance quelconque m.*

#### §. XLVII.

Mais enfin, puisque nous ne connaissons point la courbe BGI des dilatations, nous allons supposer que ses ordonnées  $FG = z$  sont égales à une puissance quelconque  $m$  des distances  $y$  au centre de la terre ; c'est-à-dire, que nous supposerons  $z = y^m$ , ou plutôt  $z = a^{1-m} y^m$ , afin d'observer la loi des Homogènes. De cette sorte nous comprendrons dans notre calcul une infinité de différentes hypothèses de dilatations, puisque  $m$  peut représenter une infinité de différentes puissances. Cette supposition donne  $dz = ma^{1-m} y^{m-1} dy$ , & si on introduit cette valeur à la place de  $dz$ , &  $a^{1-m} y^m$  à la place de  $z$ , dans les formules générales  $\frac{c\gamma dy}{y\sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}} & \int \frac{cdz}{\sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}}$ ;

la première qui exprime l'élément *du* des abscisses AE  
ou

## SECON. PARTIE. CHAP. I.

49

eu AO de la Solaire , se changera en . . . . .

$$\frac{ca^1 - my^m dy}{y \sqrt{y^2 - c^2 a^2 - 2m}} = \frac{ca^2 - my^{m-2} dy}{\sqrt{a^2 - c^2 a^2 - 2m} y^{2m-2}} \text{ & on aura}$$

donc par conséquent  $s = \int \frac{ca^2 - my^{m-2} dy}{\sqrt{a^2 - c^2 a^2 - 2m} y^{2m-2}}$ , pour

ces abscisses , ou pour les arcs AE , ou AO qui répondent à chaque appliquée CP ou CN = y. D'un autre côté ,

la seconde formule  $\int \frac{cdz}{\sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}}$ , qui exprime la

quantité de la réfraction astronomique , se changera par

de pareilles substitutions , en  $\int \frac{mc a^1 - my^{m-1} dy}{\sqrt{y^2 - c^2 a^2 - 2m}} =$

$\int \frac{mc a^2 - my^{m-2} dy}{\sqrt{a^2 - c^2 a^2 - 2m} y^{2m-2}}$  & c'est donc là la quantité de la

réfraction. Il nous reste maintenant à trouver les va-

leurs de ces deux intégrales  $\int \frac{ca^2 - my^{m-2} dy}{\sqrt{a^2 - c^2 a^2 - 2m} y^{2m-2}} = n$ ,

&  $\int \frac{mc a^2 - my^{m-1} dy}{\sqrt{a^2 - c^2 a^2 - 2m} y^{2m-2}}$ . Mais c'est assez que nous en

trouvions une , pour que nous aions les deux ; car on voit qu'elles font dans un rapport constant , que la première ou que le progrès horizontal OA du rayon de lumière à mesurer sur la circonférence de la terre , est à la seconde intégrale ou à la réfraction astronomique , comme l'unité est à m : & c'est ce qui est très-remarquable.

[3, p. 49] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Transposée avec nos notations , la propriété obtenue à la fin du §. XLVII est

$$d\chi = -q d\theta \tag{8}$$

« & c'est ce qui est très-remarquable ». On peut retrouver cela plus brièvement , en notant qu'à cause des relations (1) et (7) on a

$$d\chi = \frac{\tan \alpha(n)}{n} dn = \frac{r(\theta)}{n(r(\theta))} \frac{dn}{dr}(r(\theta)) d\theta \tag{9}$$

qui redonne bien (8) quand n est proportionnel à  $r^{-q}$ .

Regardons maintenant la technique d'intégration utilisée par Bouguer.

### §. XLVIII.

On peut trouver très-aisément ces deux intégrales, en suposant la rectification des arcs de cercle. On n'a d'abord qu'à tirer du centre C de la terre (Figure 12.) une

**G**

[3, p. 49] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

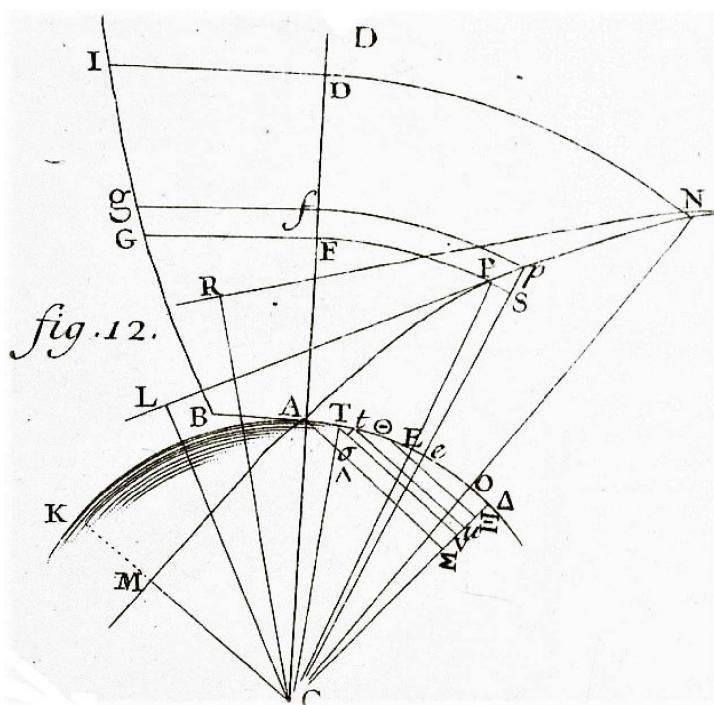
#### 59 DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &c.

ligne  $C\Delta$  parallèle à  $AM$ , qui est tangente à l'extremité A de la Solaire  $NPA$ ; l'arc  $A\Delta$  sera du même nombre de degrés, que l'angle  $CAM$ , qui est le complément de la hauteur apparente de l'Astre; & le sinus droit  $A\Sigma$  sera égal à  $CM = r$ . Si on regarde ensuite quelque appliquée  $CP$  ( $y$ ) de la Solaire, comme connue; on n'aura qu'à faire le sinus droit  $TV = ca^{1-m}y^{m-1}$ , & multiplier l'arc compris entre le point A & le point T par

$\frac{1}{m-1}$  pour avoir l'arc  $AE$ , par l'extremité E duquel on doit faire passer l'appliquée  $CP$ : & multipliant ce même arc  $AT$  par  $\frac{m}{m-1}$ , il viendra la quantité de la réfraction que souffre le rayon de lumière dans le trajet  $PA$ . Pour démontrer cela, je conçois la ligne  $tu$  parallèle & infinitement proche de  $TV$ ; & du point t je tire la petite ligne  $t6$  parallèlement à  $C\Delta$ . Il est clair que  $ca^{1-m}y^{m-1}$  étant la va-

leur de  $TV$ , nous aurons  $\sqrt{a^2 - c^2 a^{2-m} y^{2m-2}} = \sqrt{CT^2 - TV^2}$  pour celle de  $CV$ , & si nous prenons la différentielle de  $ca^{1-m}y^{m-1}$ , il nous viendra  $m-1 \times ca^{1-m}y^{m-2} dy$  pour  $T6$ . Mais comme le grand triangle  $CVT$  est semblable au petit  $T6t$ , nous pouvons faire cette proportion  $CV = \sqrt{a^2 - c^2 a^{2-m} y^{2m-2}} \parallel CT = a \parallel T6 = m-1 \times ca^{1-m}y^{m-2} dy \parallel Tt$ , & nous trouverons de cette sorte que  $Tt = \frac{m-1 \times ca^{2-m}y^{m-2}dy}{\sqrt{a^2 - c^2 a^{2-m}y^{2m-2}}}$ . Or il suit de là que l'arc entier  $AT$ , qui est la somme de tous les petits arcs  $Tt$ , sera la valeur de l'intégrale  $\int \frac{m-1 \times ca^{2-m}y^{m-2}dy}{\sqrt{a^2 - c^2 a^{2-m}y^{2m-2}}}$ : car  $y$  étant supposée égale à  $a$ , comme cela arrive au point

[3, p. 50] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen



[3, Fig. 12 en fin d'ouvrage] similaire à la Fig. 11 mais moins chargée.

Source : Biblioteca Virtual del Patrimonio Bibliografico  
<https://bvpb.mcu.es/es/consulta/registro.do?id=576360>). CC-BY 4.0

**S E C O N D P A R T Y . C H A P T E R 1 7**

A, le sinus  $TV = ca^{1-m}y^{m-1}$  se trouve égal à  $A\Sigma = c$ , & l'arc est par conséquent nul ; mais à mesure que  $y$  augmente, le sinus  $TV$  s'éloigne de  $A\Sigma$ , & l'arc  $AT$  croît d'une nouvelle partie  $Tt$  qui est, comme on le voit, continuellement égale à  $\frac{m-1}{\sqrt{a^2 - c^2 a^2 - 2m}} \cdot \frac{ca^{2-m}y^{m-2}dy}{y^{2m-2}}$ . Mais enfin puisque l'arc  $AT$  est la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{m-1}{\sqrt{a^2 - c^2 a^2 - 2m}} \cdot \frac{ca^{2-m}y^{m-2}dy}{y^{2m-2}},$$

il est évident qu'il ne reste plus qu'à le multiplier par  $\frac{1}{m-1}$  pour avoir l'intégrale

$$\int \frac{ca^{2-m}y^{m-2}dy}{\sqrt{a^2 - c^2 a^2 - 2m}} = n,$$

qui est la valeur de l'abscisse  $AE$ , qui répond à chaque appliquée  $CP$  de la Soleil, & que si on multiplie ce même arc  $AT$  par  $\frac{m}{m-1}$ , on aura l'intégrale  $\int \frac{mc a^{2-m}y^{m-2}dy}{\sqrt{a^2 - c^2 a^2 - 2m}} = \Sigma$  qui exprime la quantité de la réfraction. Rien n'empêchera de faire la même chose pour toutes les autres appliquées  $y$ . Mais il est évident que si  $DN$  est la surface supérieure de l'Atmosphère, ou que si la matière réfractive ne change plus de densité au-dessus de cette surface ; il faudra pren-

dre CN , pour dernière appliquée , puisque le rayon de lumière ne souffrira aucune réfraction au-dessus du point N. Ainsi si on fait le sinus droit  $\Theta Z$  égal à  $ca^{-m}$   $CN^{m-1}$  , ce sera l'arc  $A\Theta$  intercepté entre les sinus  $AZ$  &  $\Theta Z$  qu'il faudra multiplier par  $\frac{1}{m-1}$  pour avoir l'abscisse correspondante  $AO$  ; & qu'il faudra multiplier par  $\frac{m}{m-1}$  pour avoir la réfraction astronomique , ou la courbure totale que reçoit le rayon de lumière , en traversant toute l'épaisseur de l'Atmosphère , depuis N jusqu'en A.

G ij.

[3, p. 51] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

## §2 Des Corrections de la Hauteur ; &c.

### §. X L I X.

Il suit de tout cela qu'il n'importe que l'exposant  $m$  soit un nombre positif ou négatif , entier ou rompu , & que pourvu qu'il ne soit pas irrationnel , on peut toujours déterminer géométriquement la quantité de la réfraction , & tracer géométriquement la Solaire. Car il sera toujours possible de trouver la valeur  $ca^{-m}y^{m-1}$  des sinus  $TV$  &  $\Theta Z$  pour les appliquées  $CP$  &  $CN$  : & l'arc  $AT$  ou  $A\Theta$  étant déterminé , ou pourra toujours découvrir la réfraction , aussi-bien que l'arc  $AE$  ou  $AO$  qui sert d'abscisse à l'appliquée  $CP$  ou  $CN$  : puisque ces arcs sont des multiples ou des soûmultiples de l'arc  $AT$  ou  $A\Theta$  , & que nous avons des méthodes géométriques , pour diviser un arc , ou pour le multiplier , selon quel rapport nous voulons , aussi-tôt que ce rapport est de nombre à nombre. Il faut cependant qu'outre l'irrationalité de l'exposant  $m$  , nous exceptions encore un cas , dans lequel la Solaire se trouve être une courbe mécanique. C'est lorsque les différentes dilatations de la matière réfractive sont en même raison que ses distances au centre de la Terre. Dans ce cas  $z$  est égale ou proportionnelle à  $y$  ;  $m$  désigne l'unité , & la Solaire est une logarithmique spirale. C'est ce

qu'on reconnoît par la formule  $a = \sqrt{\frac{ca^{2-m}y^{m-2}dy}{a^2 - c^2a^{2-2m}y^{2m-2}}}$

qui se réduit à  $a = \sqrt{\frac{c}{a^2 - c^2}} \int \frac{ady}{y}$  , laquelle appartient à la logarithmique spirale. C'est aussi ce qui est conforme à ce qu'on a vu cy-devant , (§. 42.) que pour que les rayons de lumière suivent cette ligne courbe , il faut que les dilatations des différentes couches de l'Atmosphère , soient proportionnelles à leurs distances au centre de la terre.

[3, p. 52] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Ici Bouguer note que si  $n$  est proportionnel à  $r^{-1}$ , alors les rayons sont des spirales logarithmiques ; il avait montré la réciproque au §. XLII [3, p. 43]. Il exclut donc  $q = 1$  de son étude, et avec raison si  $H$  est infini, car dans ce cas  $\chi_S$  n'est plus défini ! Mais il se trompe dans la première phrase de cette page, car  $\chi_S$  n'est pas défini non plus pour des astres de hauteur angulaire réelle trop faible quand  $q > 1$  (voir le sous-paragraphe 3.6 du présent article) ; mais cette situation donne des phénomènes très intéressants (voir le sous-paragraphe 3.6), que Bouguer ne mentionnera qu'en 1753 dans son mémoire [33].

### 3.4. *La table de Bouguer*

Il est intéressant de voir maintenant comment Bouguer, à partir des deux valeurs de référence (indiquées dans le résumé — paragraphe 2) qu'il a choisies pour  $\chi_S$ , lui permettent de construire sa table.

### SECON. PARTIE. CHAP. I. §3

#### *De la construction de la Table des réfractions ; & du choix d'une hypothèse des dilatations de l'air.*

##### §. L.

On n'insistera pas davantage sur la nature de la Soleil, & on se bornera à parler des réfractions. Il est évident que puisqu'elles sont toujours proportionnelles à l'arc  $A\Theta$  intercepté entre le sinus  $A \geq (c)$  du complément de la hauteur apparente, & le sinus  $C\Xi (ca^{1-m}y^{m-1})$  qui a un rapport constant avec le sinus  $A \geq$ , & qui est toujours égal au produit de ce sinus par  $a^{1-m}y^{m-1}$  ou par  $a^{1-m}CN^{m-1}$ ; il est, dis-je, évident qu'il sera toujours facile de les calculer (les réfractions), par le moyen des tables des sinus ; pourvu qu'on connoisse l'exposant  $m$ , & la plus grande appliquée  $CN$ . On pourra aussi en venir à bout par le moyen des séries : car si continuant de nommer  $a$  le semi-diamètre  $CA$  de la Terre &  $C$  le sinus complément  $A \geq$  de la hauteur apparente, nous désignons par  $b$  le sinus de cette même hauteur, & nous supposons

$\frac{x}{b} = \frac{m}{m-1}$  &  $x - g = a^{1-m}CN^{m-1}$ ; nous aurons  $cX$   
 $x - g$  ou  $c - cg$  pour le sinus  $C\Xi$  & la série infinie  
 $\frac{acg}{b} - \frac{ac^3}{2b^3}g^2 + \frac{3ac^5 + ab^2c^3}{6b^5}g^3$ , &c. pour la valeur de l'arc  $A\Theta$ , comme on peut le voir aisément; & il ne restera donc plus qu'à multiplier cette série par  $\frac{x}{b} = \frac{m}{m-1}$  pour avoir  $\frac{ac}{bb}g - \frac{ac^3}{2b^3b}g^2 + \frac{3ac^5 + ab^2c^3}{6b^5b}g^3$ , &c. pour la quantité de la réfraction. Mais il est clair que faute de connoître les quantitez  $g$  &  $b$ , nous ne pouvons point faire usage de cette série. Nous ne connoissons point  $b$ ,

G iiij

### 54 DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &c.

parce que nous ignorons la valeur de  $m$ , ou que nous ne savons pas laquelle de toutes les hypothèses représentées par l'équation  $z = a^m y^m$  est la plus conforme à la nature : & nous ne connaissons pas non plus  $g$ , parce qu'outre que la valeur de  $m$  nous est inconnue, nous ne connaissons point aussi la hauteur de l'Atmosphère, ou la longueur de la plus grande appliquée CN.

### §. L I.

Mais rien n'est plus facile que de découvrir ces deux grandeurs  $h$  &  $g$ , aussi-tôt qu'on a seulement trouvé par des observations exactes, la réfraction astronomique pour deux différentes hauteurs apparentes. Car comparant l'ex-

pression générale  $\frac{ac}{bh} g - \frac{ac^3}{2b^3h} g^2 + \frac{3ac^5 + ab^2c^3}{6b^5h} g^3, \&c.$

avec ces deux réfractions connues par observation ; on aura deux différentes équations, & on sait qu'il n'en faut pas davantage, pour pouvoir déterminer deux inconnues. C'est ce qu'on va tâcher d'exécuter ici ; mais en employant comme cela est absolument nécessaire la méthode des suites & celle de leur retour, parce que, comme il s'agit d'arcs & de sinus, l'opération appartient à la géométrie transcendante. Nous supposons d'abord pour une plus grande facilité que la réfraction horizontale est une des deux que nous connaissons, & nous la désignerons par  $e$  : l'autre réfraction connue, nous la nommerons  $f$ , & nous nommerons  $q$  le sinus de la hauteur apparente &  $p$  le sinus de complément. Si nous introduisons ensuite  $q$  &  $p$  à la place de  $b$  & de  $c$  dans l'expression générale

$\frac{ac}{bh} g - \frac{ac^3}{2b^3h} g^2 + \frac{3ac^5 + ab^2c^3}{6b^5h} g^3 - \&c.$  des réfractions, nous

aurons  $\frac{ap}{qh} g - \frac{ap^3}{2q^3h} g^2 + \frac{3ap^5 + ap^2q^3}{6q^5h} g^3 - \&c.$  pour la réfraction  $f$  qui convient à la hauteur apparente, dont  $q$  est

[3, p. 54] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Les « deux grandeurs  $h$  &  $g$  », mentionnées dans la première phrase du §. LI, sont reliées à l'exposant et à la hauteur  $H$  d'atmosphère du modèle de Bouguer (voir notre Table 1) ; cette phrase est amusante, car à la fin du siècle précédent, Cassini ne trouvait pas si facile de déterminer la hauteur de son modèle d'atmosphère, beaucoup plus simple cependant, car supposée homogène (modèle de Ptolémée) — et il trouvait un résultat deux fois trop petit : quasiment 2 000 toises (voir le sous-paragraphe 2.1 de [36]).

## SECONDE PARTIE CHAP. I.

§.

le sinus &  $p$  le cosinus ; & ainsi nous aurons  $f = \frac{ap}{q} g -$

$\frac{ap^3}{2q^2h} g^2 + \frac{3ap^5 + ap^2q^3}{6q^3h} g^3 - \&c.$  Je change cette équation

en  $h = \frac{ap}{qf} g - \frac{ap^3}{2q^2f} g^2 + \frac{3ap^5 + ap^2q^3}{6qf} g^3 - \&c.$  & je trouve par la méthode qu'on appelle le retour des suites :

$g = \frac{qf}{ap} h + \frac{f^2}{2a^2} h^2 - \frac{f^4}{6a^3p} h^3 - \frac{f^6}{24a^4} h^4 + \&c.$  Voilà

donc une valeur de  $g$  qui nous est fournie par la seconde hauteur apparente & par la réfraction astronomique  $f$  qui lui convient : mais la première hauteur & la première réfraction ; c'est-à-dire, la réfraction horizontale  $e$  peut nous fournir aussi une valeur de  $g$ , & il est évident que pour la trouver tout d'un coup, nous n'avons qu'à mettre  $e$  à la place de  $f$ ; & zero &  $a$  à la place de  $q$  & de  $p$ , parce que lorsqu'un Astre paraît dans l'horizon, le sinus de sa hauteur apparente est nul, & le sinus complément de cette hauteur est égal au sinus total  $a$ . Il viendra de cette sorte  $g = \frac{e^2}{2a^2} h^2 - \frac{e^4}{24a^4} h^4 + \&c.$  & combinant cette seconde valeur de  $g$  avec la première, on fera disparaître  $g$ , & on aura l'équation  $\frac{qf}{ap} h + \frac{f^2}{2a^2} h^2 -$

$\frac{f^3q}{6a^3p} h^3 - \frac{f^4}{24a^4} h^4 + \&c. = \frac{e^2}{2a^2} h^2 - \frac{e^4}{24a^4} h^4 + \frac{e^6}{720a^6} h^6 -$

&c. qui ne contient plus que la seule inconnue  $h$ . Mais cette dernière équation se réduit à  $\frac{qf}{ap} = \frac{e^2 - f^2}{2a^2} h +$

$\frac{f^3q}{6a^3p} h^3 - \frac{e^4 + f^4}{24a^4} h^3 - \frac{f^5q}{120a^5p} h^5 + \&c.$ , & elle donne

par le retour des suites  $h = \frac{2aqf}{p \times e^2 - f^2} - \frac{4af^3q^3}{3p^3 \times e^2 - f^2} -$

[3, p. 55] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Bouguer utilise ici des séries : il semble avoir manqué la solution simple et rigoureuse, que l'on trouve très facilement moyennant un bon changement de variable comme celui de Biot [46] (voir le sous-paragraphe suivant), mais que l'on savait déjà traiter moins aisément dès 1772 [47]. Il élimine l'inconnue  $g$  au profit de  $h$ , qu'il exprime par une série — en utilisant une méthode itérative ? Nous détaillerons à la fin de notre sous-paragraphe 3.5 une façon plus simple d'ajuster  $m$  de Bouguer (notre  $q$ ) et  $h$  (cf. Table 1).

## 56. DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &amp;c.

$$\frac{16af^3q^3 + 6aq^3f^3p^2 \times e^2 - f^2 \times e^4 - f^4}{2p^5 \times e^2 - f^2} -$$

$$+ \frac{300aq^5p^2f^7 \times e^2 - f^2 \times f^4 - e^4 - 400aq^7f^3 + 36aq^5p^2f^9 \times e^2 - f^2}{135p^7 \times e^2 - f^2} -$$

&c. Ainsi on peut maintenant regarder  $h$ , comme connue ; puisque la série précédente qui l'exprime, n'est formée que de grandeurs connues, & que d'ailleurs il est facile de voir que cette série est très-convergente. Enfin il ne reste plus qu'à introduire cette valeur de  $h$  dans

l'équation  $g = \frac{e^2}{2b^2} b^2 - \frac{e^4}{2b^4} b^4 + \frac{e^6}{720b^6} b^6$  &c. pour  
avoir  $g = \frac{2q^2 e^2 f^2}{p^2 X e^2 - f^2} - \frac{8q^4 e^2 f^6 - 2q^4 e^4 f^4}{3p^4 X e^2 - f^2 - 4}$   
 $+ 400q^6 e^2 f^{10} + 160q^6 e^4 f^8 + 8q^6 e^6 f^6 + 120q^4 p^2 e^2 f^4 X e^2 - f^2 X e^4 - f^4$   
 $- 90p^6 X e^2 - f^2 - 6$   
&c. & il viendra donc  $1 - g = 1 - \frac{2q^2 e^2 f^2}{p^2 X e^2 - f^2} +$   
 $\frac{8q^4 e^2 f^6 + 2q^4 e^4 f^4}{3p^4 X e^2 - f^2 - 4}$   
 $- 400q^6 e^2 f^{10} - 160q^6 e^4 f^8 - 8q^6 e^6 f^6 - 120q^4 p^2 e^2 f^4 X e^2 - f^2 X e^4 - f^4$   
+ &c.

### §. L II.

Connoissant ainsi les valeurs de  $b$  & de  $g$ , rien n'empêche de trouver à présent la réfraction astronomique, pour quelle hauteur apparente on voudra. On n'a qu'à introduire les valeurs de  $b$  & de  $g$  dans la formule générale

$\frac{ac}{bb} g - \frac{ac^3}{2b^2 b} g^2 + &c.$  du §. 50. Ou si on veut découvrir la même chose par les tables des sinus, on multipliera le sinus  $A \approx = c$  du complément de la hauteur proposée par la valeur de  $a^{1-m} y^m$  ou de  $CN^{1-m}$ .

[3, p. 56] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

### SECON. PARTIE. CHAP. I.

57

$CN^{1-m}$  que fournit la dernière série du §. 51. en donnant la valeur de  $1 - g$ ; & on aura au produit le sinus  $\Theta \approx = c a^{1-m} CN^{1-m}$ . On cherchera ensuite dans les Tables à quel arc  $\Theta \Delta$  ce sinus répond; & retranchant cet arc de celui  $A \Delta$  du complément de la hauteur apparente, il viendra l'arc  $A \Theta$ , qu'il ne restera plus qu'à multiplier par

$\frac{1}{b} = \frac{m}{m-1}$ , ou qu'à diviser par  $b$ , dont la série

$\frac{2qf}{p X e^2 - f^2} - \frac{4af^3 q^3}{3p^3 X e^2 - f^2}$ , &c. est l'expression; & il viendra au quotient la réfraction qu'on vouloit découvrir. On fera la même chose pour toutes les autres hauteurs apparentes, & on trouvera donc de cette sorte toutes les réfractions, en supposant simplement qu'on en connaît deux par les observations; scavoit l'une ( $e$ ), lorsque l'Astre paroît dans l'horizon; & l'autre ( $f$ ), lorsque l'Astre est élevé d'une hauteur apparente, dont  $q$  est le sinus &  $p$  le sinus de complément, pendant que  $a$  désigne le sinus total.

### §. L III.

Le Livre de la connoissance des Tems marque 31' 20" pour la réfraction horizontale; mais comme les observations donnent presque toujours cette réfraction un peu plus grande, on l'a supposée de 33' complètes. On a pris ensuite la réfraction qui appartient au 26<sup>me</sup> degré de hauteur, & on l'a fixée à 2' 12", en se conformant aux Tables de M. de la Hire. Si après cela on prend 1000000 pour le sinus total, & qu'on cherche combien valent à

proportion les petits arcs de  $33'$  & de  $2' 12''$  de réfraction, on trouvera  $95944$  &  $6400$ , comme on le peut voir tout d'un coup en cherchant dans les Tables les sinus de ces arcs, parce que leurs sinus leur sont sensiblement égaux. Ainsi  $10000000$  étant la valeur de  $a$ ;  $95944$  sera celle de  $e$  &  $6400$  celle de  $f$ ; & on aura de plus  $4383712$  pour le sinus  $g$  de  $26$  degrés, &  $8987940$  pour le sinus  $p$  de complément. Or introduisant ces nombres

H

[3, p. 57] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

C'est dans ce §. LIII que Bouguer indique les valeurs de référence qu'il choisit pour  $\chi_S$ . Il y a une petite erreur dans ses calculs numériques : concernant  $\sin 33'$ , il faut remplacer  $95944$  par  $95992$ . Est-ce à cause d'un écart dû à l'interpolation, ou d'un défaut dans les tables de logarithmes et de fonctions trigonométriques (à 7 décimales) dont il disposait ?

### § DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &c.

$$\text{dans la série } i - g = i - \frac{s q^2 e^2 f^2}{p^2 X e^2 - f^2} + \frac{s q^4 e^2 f^4 + s q^4 e^4 f^4}{3 p^4 X e^2 - f^2 4} - \frac{100 q^6 e^2 f^{10} - 160 q^6 e^4 f^8 - 8 q^6 e^6 f^6 - 120 q^4 p^2 e^2 f^4 X e^2 - f^2 X e^4 - f^4}{50 p^6 X e^2 - f^2 6}$$

+ &c, on trouvera  $\frac{9978668781}{10000000000}$  pour la valeur de  $i - g$  ou de  $a^{m-1} CN^{m-1}$ : & il faut remarquer que cette série est si convergente, qu'il n'est pas nécessaire de pousser l'approximation au-delà du second terme. L'autre sé-

$$\text{rie } h = \frac{s a f}{p X e^2 - f^2 2} - \frac{4 a f^3 q^3}{3 p^3 X e^2 - f^2 3} + \frac{16 a f^5 + 6 a q^3 f^3 p^2 X e^2 - f^2 X e^4 - f^4}{9 p^5 X e^2 - f^2 5} + \text{ &c. qui est éga-}$$

lement convergente, donnera en même-tems  $\frac{11458}{3300}$  pour la valeur de  $h$ , & on aura donc  $\frac{1102}{22458}$  pour celle de

$$\frac{1}{b} \text{ ou de } \frac{m}{m-1}.$$

### §. LIV.

Ainsi c'est la fraction  $\frac{9978668781}{10000000000}$  qui exprime le rapport constant des sinus  $A\Sigma$  &  $\Theta\Sigma$ , entre lesquels l'arc  $A\Sigma$  est intercepté, & c'est  $\frac{1102}{22458}$  qui marque le rapport de cet arc & de la réfraction. C'est-à-dire qu'on doit toujours multiplier le sinus de complément  $A\Sigma$  de chaque hauteur apparente, par  $\frac{9978668781}{10000000000}$  pour avoir le sinus  $\Theta\Sigma$ ; & que lorsque l'arc  $A\Sigma$  est trouvé en degrés, minutes & secondes, il faut le multiplier par  $\frac{1102}{22458}$  pour avoir la réfraction requise. Si on nous propose, par exemple, 10 degrés de hauteur apparente, nous multiplierons le sinus complément  $9848077$  de cette hauteur par  $\frac{9978668781}{10000000000}$ , ou ce qui est la même chose, nous retrancherons du logarithme  $9.9933515$  de ce sinus, le nombre constant  $9274$ , parce que  $-9274$  est le logarithme de  $\frac{9978668781}{10000000000}$ . Il nous viendra  $9.9924241$ , pour le logarithme du sinus  $\Theta\Sigma$

[3, p. 58] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

S E C O N . P A R T I E . C H A P . I .

§ 9

qui répond à  $79^{\circ} 19' 45''$ ; & ainsi l'arc  $A\Theta$  sera de  $40^{\circ} 15''$  ou de  $2415''$ ; & si on le multiplie par le nombre conséquent  $\frac{1100}{12438} = \frac{1}{h} = \frac{m}{n-1}$ , on trouvera  $355''$  ou  $5' 55''$  pour la quantité de la réfraction qu'on vouloit découvrir. C'est de cette sorte que nous avons calculé la Table suivante.

*Nouvelle Table des réfractions Astronomiques.*

| Hau-<br>teurs<br>appa-<br>rentes. | Réfrac-<br>tions. | Hau-<br>teurs<br>appa-<br>rentes. | Réfrac-<br>tions. | Hau-<br>teurs<br>appa-<br>rentes. | Réfrac-<br>tions. |
|-----------------------------------|-------------------|-----------------------------------|-------------------|-----------------------------------|-------------------|
| Deg.                              | Min. Sec.         | D.                                | Min. Sec.         | D.                                | Min. Sec.         |
| 0                                 | 33                | 31                                | 1 47              | 61                                | 35                |
| 1                                 | 25 20             | 32                                | 1 43              | 62                                | 34                |
| 2                                 | 19 47             | 33                                | 1 39              | 63                                | 32                |
| 3                                 | 15 50             | 34                                | 1 35              | 64                                | 30                |
| 4                                 | 13 1              | 35                                | 1 32              | 65                                | 29                |
| 5                                 | 10 58             | 36                                | 1 29              | 66                                | 28                |
| 6                                 | 9 25              |                                   |                   |                                   |                   |
|                                   |                   | 37                                | 1 26              | 67                                | 27                |
| 7                                 | 8 3               | 38                                | 1 23              | 68                                | 26                |
| 8                                 | 7 18              | 39                                | 1 20              | 69                                | 25                |
| 9                                 | 6 3               | 40                                | 1 17              | 70                                | 24                |
| 10                                | 5 55              | 41                                | 1 15              | 71                                | 22                |
| 11                                | 5 24              | 42                                | 1 12              | 72                                | 21                |
| 12                                | 4 57              |                                   |                   |                                   |                   |
|                                   |                   | 43                                | 1 9               | 73                                | 20                |
| 13                                | 4 35              | 44                                | 1 6               | 74                                | 19                |
| 14                                | 4 15              | 45                                | 1 4               | 75                                | 17                |
| 15                                | 3 58              | 46                                | 1 2               | 76                                | 16                |
| 16                                | 3 43              | 47                                | 1 0               | 77                                | 15                |
| 17                                | 3 29              | 48                                | 58                | 78                                | 13                |
| 18                                | 3 17              |                                   |                   |                                   |                   |
|                                   |                   | 49                                | 56                | 79                                | 12                |
| 19                                | 3 6               | 50                                | 54                | 80                                | 11                |
| 20                                | 2 56              | 51                                | 52                | 81                                | 10                |
| 21                                | 2 47              | 52                                | 50                | 82                                | 9                 |
| 22                                | 2 39              | 53                                | 48                | 83                                | 8                 |
| 23                                | 2 32              | 54                                | 46                | 84                                | 7                 |
| 24                                | 2 25              |                                   |                   |                                   |                   |
|                                   |                   | 55                                | 45                | 85                                | 6                 |
| 25                                | 2 18              | 56                                | 43                | 86                                | 4                 |
| 26                                | 2 12              | 57                                | 42                | 87                                | 3                 |
| 27                                | 2 6               | 58                                | 40                | 88                                | 2                 |
| 28                                | 2 1               | 59                                | 38                | 89                                | 1                 |
| 29                                | 1 56              | 60                                | 37                | 90                                | 0                 |
| 30                                | 1 52              |                                   |                   |                                   |                   |

**Hij**

[3, p. 59] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Notons que cette table (qui correspond à  $q \cong 0,1281 \cong 1/7,805$ ) indique les réfractions à la seconde d'angle près, comme on le faisait à partir de 1702. Malheureusement elle donne des valeurs en moyenne 10 % trop élevées, sauf aux faibles hauteurs ; corrélativement, la valeur de référence tirée de la table de La Hire ( $2^{\circ} 12''$ ) est 11 % plus forte que la valeur correspondante donnée par la table d'Ivory ( $\chi_S(26^{\circ}) \cong 1' 59,22''$ ) [48].

**60 DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &c.**

**§. L V.**

Il n'est pas nécessaire de s'arrêter ici à expliquer l'usage de cette Table. Tous les Pilotes un peu instruits dans la théorie de leur art, savent assez que les réfractions sont

communes aux hauteurs mesurées par toutes sortes d'instrumens ; & que puisque ces réfractions font paroître les Astres un peu plus élevéz qu'ils ne sont en effet, on doit toujours retrancher la réfraction de la hauteur apparente, pour avoir la hauteur véritable. On n'insiste pas davantage sur cet article. Mais les Lecteurs seront sans doute bien-aisés de connoître la valeur de  $m$ , afin de sçavoir le degré de l'équation  $z = a^{1-m} y^m$  & de connoître quelle est l'hypothèse qui fert de fondement à notre table.

Nous avons trouvé (§. 15.) que  $\frac{1}{m-1} = \frac{3300}{22458}$  :

mais cette fraction  $\frac{3300}{22458}$  doit être regardée comme *négative*, parce qu'elle marque le rapport de l'arc  $A\odot$  à la réfraction astronomique, & que l'arc  $A\odot$  est *négatif*, parce que les sinus  $TV$  ou  $\odot Z$  diminuent ici à mesure que les appliquées  $AP$ , ou  $AN=y$  augmentent. Ainsi au lieu de

l'équation  $\frac{m}{m-1} = \frac{3300}{22458}$ , nous avons  $\frac{m}{m-1} = -\frac{3300}{22458}$  ;

d'où nous tirons  $22458 m = 3300$  &  $m = \frac{3300}{22458}$  & si nous mettons cette valeur à la place de  $m$  dans l'équation  $z = a^{1-m} y^m$  de la courbe BGI des dilatations, il viendra

$z = a^{\frac{22458}{3300}} \times y^{\frac{3300}{22458}}$  ou  $z^{22458} = a^{3300} y^{3300}$  ; & c'est donc là l'équation qui représente notre hypothèse particulière ; hypothèse qui est préférable à la multitude infinie d'autres renfermées dans l'équation  $z = a^{1-m} y^m$ . Il est vrai que quelque système qu'on embrasse sur cette matière, il arrive presque toujours que les réfractions sont proportionnelles à un arc  $AE$  intercepté entre deux sinus  $Ax, \odot Z$  qui ont entre eux un rapport cons-

[3, p. 60] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

### SECON. PARTIE. CHAP. I.

61

tant. Mais il suffit que ce rapport soit différent, ou que les deux sinus soient pris en quelqu'autre endroit du quarré de cercle, pour que les réfractions suivent une autre progression, & que la Table soit différente ; & enfin notre hypothèse a toujours cet avantage singulier, d'être choisie entre une infinité d'autres. On pouvoit bien avoir fait quatre ou cinq différentes supositions, & examiné ensuite laquelle étoit la meilleure : mais ce n'est qu'en suivant une méthode semblable à celle qu'on vient d'expliquer qu'on pouvoit pousser la discussion infinitement plus loin ; & choisir, non pas entre quatre ou cinq hypothèses, mais entre une infinité.

[3, p. 61] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

### 3.5. Prolongement : la formule dite « de Bradley »

Il est intéressant de rappeler ici qu'une formule synthétique — (19) de [36] — peut se déduire du modèle de Bouguer ainsi que du résultat de Simpson [49, p. 58–59] ; Bouguer, dans son mémoire [3], ne l'avait pas remarqué — c'est Lagrange [47] qui l'a fait le premier, en 1772. En termes

actuels, considérons donc un modèle d'atmosphère tel que  $n(r) = K/r^q$  (avec  $q$  positif différent de 1) tant que  $n$  décroît de  $n_S$  à 1, puis

$$n(r) = 1 \text{ pour } r \geq r_S + H = r_S n_S^{1/q} \quad (10)$$

où  $H$  est la hauteur de ce modèle d'atmosphère ; on a vu dans [36] que Bouguer a cherché, par la suite, des valeurs numériques de  $q$ . À condition de prendre garde aux artefacts dus au point anguleux du profil d'indice en  $r_S + H$ , l'analyse des propriétés de la réfraction avec ce modèle est instructive, car elle aide à comprendre des points délicats de la fin des paragraphes 8 et 9.2 de [38].

L'intégrale de réfraction est calculable dans ce cas (cf. le sous-paragraphe 4.2.3 de [50] dans ce numéro spécial), comme l'a vu Bouguer géométriquement [3, p. 51], puis Simpson en 1743 [49, p. 58–59] — en partant d'un profil de réfractivité affine et en procédant à « plusieurs réductions ou simplifications qui ne paraissent pas toujours bien légitimes », ainsi que le rappellent clairement avec des formules la note de Mathieu dans son édition posthume de Delambre en 1827 [51, p. 777–782], et une note de Bowditch dans sa traduction de la *Mécanique Céleste* de Laplace [52, note 3899 et p. 497–500]. Nous préférons utiliser pour cela le changement de variable de Biot — voir le paragraphe 6 de [38], relation (41) — qui donne plus rapidement une formule simple, car

$$\chi_S = \int_{Z_0}^{Z'} -\frac{d\ln r^{-q}}{d\ln r^{1-q}} d\alpha = \frac{q}{1-q} (Z' - Z_0) \quad \text{où } n_S r_S \sin Z' = (r_S n_S^{1/q}) \sin Z_0, \quad (11)$$

donc dans ce cas on trouve facilement la loi rigoureuse de Bouguer-Simpson :

$$\chi_S = \frac{q}{1-q} \left[ Z' - \arcsin \left( n_S^{-\frac{1-q}{q}} \sin Z' \right) \right]. \quad (12)$$

On peut encore la présenter sous la forme

$$n_S^{-\frac{1-q}{q}} \sin Z' = \sin \left( Z' - \frac{1-q}{q} \chi_S \right), \quad (13)$$

d'où

$$\left( 1 - n_S^{-\frac{1-q}{q}} \right) \sin Z' = \sin Z' - \sin \left( Z' - \frac{1-q}{q} \chi_S \right) = 2 \sin \left( \frac{1-q}{2q} \chi_S \right) \cos \left( Z' - \frac{1-q}{2q} \chi_S \right) \quad (14)$$

$$\left( 1 + n_S^{-\frac{1-q}{q}} \right) \sin Z' = \sin Z' + \sin \left( Z' - \frac{1-q}{q} \chi_S \right) = 2 \sin \left( Z' - \frac{1-q}{2q} \chi_S \right) \cos \left( \frac{1-q}{2q} \chi_S \right) \quad (15)$$

En éliminant  $\sin Z'$  entre ces deux dernières équations (14)–(15) on obtient

$$\tan \left( \frac{1-q}{2q} \chi_S \right) = \left[ \tan \left( Z' - \frac{1-q}{2q} \chi_S \right) \right] \left( 1 - n_S^{-\frac{1-q}{q}} \right) / \left( 1 + n_S^{-\frac{1-q}{q}} \right). \quad (16)$$

La petitesse de  $\eta_S$  et de  $\chi_S$  vis-à-vis de 1 permet d'écrire à l'ordre total 2, indépendamment de la distance zénithale,

$$\tan \left( \frac{1-q}{2q} \chi_S \right) \approx \frac{1-q}{2q} \chi_S \quad (17)$$

et donc finalement

$$\chi_S \approx \eta_S \left( 1 - \frac{\eta_S}{2} \right) \tan(Z' - w\chi_S) \quad (18)$$

qui est la formule de Bradley avec

$$w = \frac{1-q}{2q} \quad (19)$$

au lieu de 3 — voir le paragraphe 4 de [36].

Pour Bouguer, son utilisation des deux valeurs de référence qu'il a choisies pour  $\chi_S$  lui permet de déduire, après d'assez lourds calculs montrés au sous-paragraphe précédent,  $((r_S + H)/r_S)^{q-1} \cong 0,997\,866\,8785$  et  $q/(1-q) \cong 3\,300/22\,458$  [3, p. 57–60], dont il déduit (p. 60)  $q = 3\,300/25\,758$  (soit 1/7,805, alors que Bradley trouvera 1/7) ; on en tire aussi  $w \cong 3,40$  [51, p. 777–782] (Bradley disait 3) et  $H \cong 15,62$  km. Bouguer n'a pas effectué cette dernière application numérique : il n'avait pas encore l'idée de chercher à déduire, à partir des observations de  $\chi_S(Z')$ ,

des informations sur la structure de l'atmosphère (voir [53] dans ce numéro spécial) ; on a vu que, selon lui,  $n$  était proportionnel à la masse volumique de ce qu'il imaginait comme étant une « matière réfractive ». Il aurait pu se montrer intéressé par la détermination de la hauteur maximale de cette « matière réfractive » ; s'il ne l'a pas été, c'est peut-être parce qu'il avait conscience du fait que son modèle n'était pertinent que pour calculer  $\chi_S(Z')$ , et pas pour étudier l'atmosphère. Dans le paragraphe 2 du présent article, nous avons vu aussi pourquoi  $n_S$  est absent des considérations de Bouguer [3] ; en posant anachroniquement  $n(r_S + H) = 1$ , à partir des valeurs numériques de la hauteur relative  $h_\tau := H/r_S$  et de  $q$  nous déduisons  $n_S \approx 1 + 3,138 \times 10^{-4}$ , et Bouguer aurait pu trouver cette valeur numérique pour  $[n(r_S + H)]^{-1}/[n(r_S)]^{-1}$  : par rapport à la valeur moderne connue  $2,821 \times 10^{-4}$  pour  $n_S - 1$  à  $10^\circ\text{C}$  et 1 atm pour la raie d de l'hélium ( $\lambda_0 \approx 588 \text{ nm}$ ) dans l'air sec, c'est surestimé de 11 %, et cela coïncide avec le fait que la table de Bouguer donnait des valeurs trop grandes d'environ 10 %, sauf auprès de l'horizon — par construction.

Toute valeur de référence pas trop proche de l'horizon impose quasiment  $qh_\tau$ . En outre, de l'égalité (10) on tire

$$1/q = \ln(1 + h_\tau)/\ln(1 + \eta_S) \sim h_\tau/\eta_S. \quad (20)$$

Par contre, pour  $\psi' := 90^\circ - Z' \ll 1 \text{ rad}$ , et en considérant que  $\eta_S[1 - (\eta_S/2)] \approx \eta_S$ , on a

$$\chi_S = \eta_S \tan(90^\circ - \psi' - w \chi_S) = \eta_S \cot(\psi' + w \chi_S) \approx \eta_S / (\psi' + w \chi_S) \quad (21)$$

— où nous avons mis = au lieu de  $\approx$  au début car nous n'y avons pas introduit de nouvelle approximation depuis celle indiquée juste après l'expression (20). Cela donne une équation du second degré en  $\chi_S$  dont on ne retient que la racine positive

$$\chi_S = \frac{-\psi' + \sqrt{\psi'^2 + 4w\eta_S}}{2w}; \quad (22)$$

et avec les relations (19)–(20) il vient l'expression suivante de  $\chi_S$  (tant que sa valeur est positive, ce qui exclut le cas où  $h_\tau - \eta_S$  et  $\psi'$  sont tous deux négatifs — or  $h_\tau - \eta_S < 0$  équivaut quasiment à  $q > 1$  à cause de la relation (20)) :

$$\chi_S(\psi') = \frac{\eta_S}{h_\tau - \eta_S} [\sqrt{2(h_\tau - \eta_S) + \psi'^2} - \psi'] = \frac{2\eta_S}{\sqrt{2(h_\tau - \eta_S) + \psi'^2} + \psi'}; \quad (23)$$

donc si on prend aussi la valeur numérique de  $\chi_{Sh}$  comme valeur de référence, cela impose une seconde relation entre les paramètres indépendants ajustables  $q$  et  $h_\tau$ , qui montre aussi qu'il faut  $q < 1$  pour que l'image d'un astre puisse exister sur l'horizon astronomique :

$$\chi_{Sh} := \chi_S(0) = \eta_S \sqrt{\frac{2}{h_\tau - \eta_S}} = q \sqrt{\frac{2h_\tau}{1-q}} = \sqrt{\eta_S \frac{2q}{1-q}} = \sqrt{\frac{\eta_S}{w}}. \quad (24)$$

Comme nous l'avons vu au sous-paragraphe 9.2 de [38], cette expression aide bien à comprendre, à  $h_\tau$  fixé, la non-linéarité de  $\chi_{Sh}$  (et sa forte convexité) par rapport à  $\eta_S$ , même si celui-ci est petit : car  $h_\tau$  est petit aussi, supérieur à  $\eta_S$  mais du même ordre. Cependant, (24) donne  $\chi_{Sh} \approx 30'$  pour la raie d dans les conditions normales de température et de pression en  $S$ , donc 5' en dessous de la valeur normale actuellement admise (voir le paragraphe 4 de [36]).

### 3.6. Cas limite où $H$ est infini

La quadrature avec  $h(r, I_B)$  vue au sous-paragraphe 7.2.2 de [38] nous montre que, pour des morceaux de rayons, la fonction  $\theta(r)$  est une primitive de  $1/\sqrt{h(r, I_B)}$ , i.e. de  $I_B\{n^{-1}/[r\sqrt{r^2 - (n^{-1})^2 I_B^2}]\}$  ; ce résultat est présent dans ce mémoire [3, p. 44–47]. Donc l'angle au centre  $\Delta\theta$  sous-tendant tout le rayon lumineux (R), qui relie l'observateur  $S$  à l'astre  $A$  situé à l'infini, vaut

$$\Delta\theta = \int_{\theta_S}^{\theta_A} d\theta = \int_{r_S}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{h(r, I_B)}}. \quad (25)$$

Si  $H$  est infini, la propriété « très-remarquable » trouvée par Bouguer montre que la réfraction en découle très simplement :

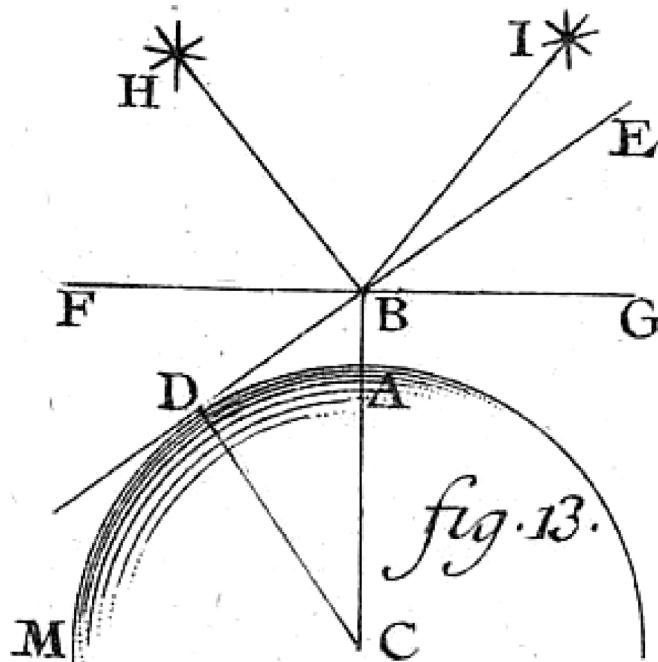
$$\chi_S = q\Delta\theta = q \int_{r_S}^{\infty} \frac{dr}{r\sqrt{[(r_S/r)^{(q-1)} / \sin Z']^2 - 1}}. \quad (26)$$

Cette intégrale n'est pas définie ou diverge si et seulement si  $q \geq 1$ . En effet, si  $q = 1$  l'intégrande est proportionnel à  $1/r$ , le rayon est une spirale logarithmique, de toute façon  $\chi_S$  n'existe pas ; et, pour  $q > 1$ ,  $h(r, I_B)$  présente une annulation simple en  $r = r_S / (\sin Z')^{1/(q-1)}$  qui est le rayon d'une sphère que le rayon lumineux peut éventuellement atteindre et tangenter (il le fait si et seulement si  $\psi' := 90^\circ - Z' > 0$ ), mais au-delà de laquelle il ne peut aller — ce comportement se voit encore plus directement sur le diagramme de Young–Kattawar [54] (voir [55] lié à [38]). Par contre, avec  $q < 1$  (pour Bouguer,  $q \approx 0,1281 \approx 1/7,805$ ) l'intégrale ci-dessus converge, et aussi ne dépend pas de  $n_S$  : la multiplication de la distribution de  $n$  par une constante ne change pas  $\chi_S$  ni  $\Delta\theta$ .

**Remarque.** Pour  $H$  fini et  $q > 1$ , alors si et seulement si  $Z' > \arcsin[(r_S/(r_S + H))^{q-1}]$ , un rayon lumineux arrivant en  $S$  ne peut pas provenir de l'extérieur de l'atmosphère (il ne traverse pas son sommet) : cela se voit avec la valeur de  $r$  donnant l'annulation simple de  $h(r, I_B)$ , et encore plus directement avec le diagramme de Young–Kattawar [55].

### 3.7. Influence de la réfraction terrestre sur la dépression de l'horizon

Dans le chap. II de la seconde partie de son mémoire, en supposant la surface de la mer parfaitement sphérique de rayon  $r_0$ , Bouguer s'intéresse à ce que l'on nomme actuellement la dépression  $\delta$  de l'horizon (définie au paragraphe 2 du présent article) ; il commence par calculer  $\delta$  (qu'il appelle « l'inclinaison de l'horizon sensible ») par de simples relations dans le triangle rectangle BCD de sa Fig. 13 — voir ci-dessous.



[3, Fig. 13 en fin d'ouvrage] Source : Biblioteca Virtual del Patrimonio Bibliográfico (<https://bvpb.mcu.es/es/consulta/registro.do?id=576360>). CC-BY 4.0

Puis il dresse le tableau suivant, avec lequel il nous réserve une surprise...

## SECON. PARTIE. CHAP. II.

65

### *Table des inclinaisons de l'Horison sensible.*

| <i>Elévation au - dessus de la Mer.</i> | <i>Inclinais. de l'horison visuel.</i> | <i>Elévation au - dessus de la Mer.</i> | <i>Inclinais. de l'horison visuel.</i> | <i>Elévation au - dessus de la Mer.</i> | <i>Inclinais. de l'horison visuel.</i> |
|---|--|---|--|---|--|
| Pieds Pouc.                             | Min.                                   | Pieds.                                  | Min.                                   | Pieds.                                  | Min.                                   |
| 0 10                                    | 1                                      | 365                                     | 21                                     | 1395                                    | 41                                     |
| 3 4                                     | 2                                      | 401                                     | 22                                     | 1470                                    | 42                                     |
| 7 5                                     | 3                                      | 439                                     | 23                                     | 1534                                    | 43                                     |
| 13 3                                    | 4                                      | 478                                     | 24                                     | 1607                                    | 44                                     |
| 20 9                                    | 5                                      | 519                                     | 25                                     | 1681                                    | 45                                     |
| 29 11                                   | 6                                      | 561                                     | 26                                     | 1756                                    | 46                                     |
| 39 9                                    | 7                                      | 605                                     | 27                                     | 1833                                    | 47                                     |
| 53 2                                    | 8                                      | 651                                     | 28                                     | 1912                                    | 48                                     |
| 67 3                                    | 9                                      | 698                                     | 29                                     | 1993                                    | 49                                     |
| 83 0                                    | 10                                     | 747                                     | 30                                     | 2074                                    | 50                                     |
| 100 5                                   | 11                                     | 798                                     | 31                                     | 2159                                    | 51                                     |
| 119 5                                   | 12                                     | 850                                     | 32                                     | 2244                                    | 52                                     |
| 140 3                                   | 13                                     | 904                                     | 33                                     | 2331                                    | 53                                     |
| 162 8                                   | 14                                     | 960                                     | 34                                     | 2420                                    | 54                                     |
| 186 8                                   | 15                                     | 1017                                    | 35                                     | 2511                                    | 55                                     |
| 212                                     | 16                                     | 1076                                    | 36                                     | 2603                                    | 56                                     |
| 240                                     | 17                                     | 1136                                    | 37                                     | 2697                                    | 57                                     |
| 269                                     | 18                                     | 1198                                    | 38                                     | 2792                                    | 58                                     |
| 299                                     | 19                                     | 1262                                    | 39                                     | 2889                                    | 59                                     |
| 331                                     | 20                                     | 1328                                    | 40                                     | 2988                                    | 60                                     |

### §. L X.

Comme les plus grands Vaisseaux ne sont pas fort élevés au-dessus de la surface de la Mer, il n'y aura que les premiers nombres de la Table précédente qui pourront servir. Les autres seroient seulement d'usage, si étant à terre sur quelque montagne proche de la Mer, on vouloit observer la hauteur des Astres à la maniere des Marins, en prenant pour horizon l'extremité apparente de la Mer. Mais dans ce cas la Table précédente ne seroit pas assez exacte : car le raion visuel BD se courbe sensi-

I

[3, p. 65] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Noter que le pied français était (entre sa réforme par Colbert en 1668 et son abolition par la Révolution en 1799) le pied-de-roi, correspondant à 324,839 mm ; le pouce est son douzième.

## 66 DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &c.

blement par les réfractions, dans le long trajet qu'il a à faire depuis l'œil jusques vers le point D. Le raïon visuel doit se courber sensiblement, puisqu'il est, comme nous l'avons déjà dit à la fin de la première Partie, une portion de la *solaire* ou de la ligne courbe que tracent les raïons de lumiere, en traversant l'Atmosphère : & il est clair que cette courbure des raïons, doit rendre les inclinaisons de l'horizon un peu plus petites que celles qui sont marquées ci-dessus. Si on étoit, par exemple, élevé au-dessus de la surface de la Mer de 2440 pieds ou de 2460, l'inclinaison de l'horizon visuel seroit selon la Table d'environ 54° 20' : & cependant M. Cassini observa le 12 Mars 1701, au pied de la tour de la *Maffane*, qui est proche de *Collioure*, & qui est élevé de 408  $\frac{1}{2}$  Toises ou de 2451 pieds que l'inclinaison de l'horizon visuel n'étoit que de 50° 20'. La différence étant assez considérable, nous avons cru qu'il étoit à propos de nous servir de la Théorie établie dans le Chapitre précédent, pour tâcher de découvrir les inclinaisons de l'horizon avec plus d'exactitude. C'est même ce qui nous a engagé à ne traiter ce sujet qu'après avoir examiné les réfractions ; sans cela nous eussions suivi un ordre contraire. Ce que nous avons dit des réfractions nous met en effet plus en état de connaître exactement les inclinaisons de l'horizon. Mais cela n'empêche pas que pour avoir la hauteur véritable d'un Astre, on ne doive toujours, à parler dans la rigueur, corriger l'inclinaison de l'horizon avant de corriger la réfraction : Car les réfractions qui sont marquées dans la Table, ne sont pas calculées pour des hauteurs mesurées au-dessus d'un horizon incliné ; mais pour des hauteurs mesurées au-dessus d'un horizon parfaitement de niveau.

[3, p. 66] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Noter la fine remarque formée par la dernière phrase de cette page ! Elle sera reprise par la suite dans les procédures de point nautique — voir le sous-paragraphe 4.3 de [39] dans ce numéro spécial.

## 70 DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &c.

*Nouvelle Table des Inclinaisons de l'Horizon visuel.*

| <i>Eléve-</i><br><i>nons au - dessus</i><br><i>de la Mer.</i> | <i>Incli-</i><br><i>nais. de</i><br><i>l'horizon</i><br><i>sensible.</i> | <i>Eléve-</i><br><i>nons au - dessus</i><br><i>de la Mer.</i> | <i>Incli-</i><br><i>nais. de</i><br><i>l'horizon</i><br><i>sensible.</i> | <i>Eléve-</i><br><i>nons au - dessus</i><br><i>de la Mer.</i> | <i>Incli-</i><br><i>nais. de</i><br><i>l'horizon</i><br><i>sensible.</i> |
|---|--|---|--|---|--|
| Pieds Pouc.   | Min.   | Pieds.  | Min.   | Pieds.  | Min.   |
| 11  | 1  | 420   | 21   | 1601  | 41   |
| 39  | 2  | 459   | 22   | 1680  | 42   |
| 87  | 3  | 504   | 23   | 1761  | 43   |
| 153   | 4  | 548   | 24   | 1844  | 44   |
| 2310  | 5  | 595   | 25   | 1928  | 45   |
| 343   | 6  | 645   | 26   | 2015  | 46   |
| 467   | 7  | 694   | 27   | 2103  | 47   |
| 6011  | 8  | 747   | 28   | 2194  | 48   |
| 770   | 9  | 801   | 29   | 2286  | 49   |
| 952   | 10   | 857   | 30   | 2381  | 50   |
| 1151  | 11   | 915   | 31   | 2477  | 51   |
| 13611   | 12   | 975   | 32   | 2575  | 52   |
| 1609  | 13   | 1037  | 33   | 2674  | 53   |
| 1865  | 14   | 1101  | 34   | 2777  | 54   |
| 214   | 15   | 1166  | 35   | 2881  | 55   |
| 243   | 16   | 1234  | 36   | 2986  | 56   |
| 275   | 17   | 1304  | 37   | 3094  | 57   |
| 308   | 18   | 1375  | 38   | 3203  | 58   |
| 343   | 19   | 1448  | 39   | 3324  | 59   |
| 381   | 20   | 1524  | 40   | 3428  | 60   |

### §. LXIII.

Il paroîtra peut-être que c'est pousser la délicatesse trop loin , de vouloir obliger les Pilotes à ne se servir que de cette seconde Table au lieu de la première. Mais cependant il suffit que l'observateur soit élevé de trente pieds , pour que la différence soit déjà de près d'une demi minute : & si on étoit obligé de monter dans la hune afin de découvrir la Mer par-dessus quelques îles ou quelques rochers , l'erreur pourroit aller à près d'une minute. **Or nous sommes persuadéz qu'on ne doit pres-**

[3, p. 70] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

## S E C O N . P A R T I E . C H A P . I I .      71

**que rien négliger dans une semblable matière : car quelque soin & quelque peine qu'on se donne, il arrive qu'on se trompe encore souvent d'une quantité trop sensible. D'ailleurs il étoit toujours nécessaire d'entreprendre la discussion précédente, au moins pour sçavoir, comme on l'a déjà dit, ce qu'on doit penser de l'exactitude de la Table ordinaire.**

[3, p. 71] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Bouguer a recalculé  $\delta$  en profitant de l'invariant, ce qui donne

$$I_B = n_0 r_0 = n_S r_S \cos \delta \quad \text{et} \quad \delta = \arccos \frac{n_0 r_0}{n_S r_S} \quad (27)$$

pour un profil d'indice  $n(r)$  quelconque et en posant  $n_0 := n(r_0)$  ; mais pour un profil en  $r^{-q}$  cela donne, en introduisant l'élévation  $E$  de l'observateur  $S$ ,

$$\ln(\cos \delta) = \ln \frac{n_0 r_0}{n_S r_S} = (1 - q) \ln \frac{r_0}{r_0 + E} \quad (28)$$

qui coïncide exactement avec les relations obtenues par Bouguer sur sa p. 69 à condition d'y poser

$$Lr := \ln(\sin 90^\circ) = 0, \quad (29)$$

lui permettant ainsi de calculer sa table de la p. 70. Comme

$$\ln(\cos \delta) \approx -\delta^2/2 \quad \text{et} \quad \ln \frac{r_0}{r_0 + E} \approx -\frac{E}{r_0} \quad (30)$$

on retrouve l'expression attendue

$$\delta = \sqrt{1 - q} \sqrt{2E/r_0} = \sqrt{1 - \kappa_S} \sqrt{2E/r_0}. \quad (31)$$

En bas de sa page 71, il trouve l'expression de « la distance à l'horizon ou à l'extremité apparente de la mer »

$$L = r_0 \delta / (1 - q) \quad (32)$$

que nous démontrerons par une autre méthode — relation (12) de [39].

Dans le modèle de Bouguer,  $\kappa_S = q$ . C'est peut-être pour cette raison que Bouguer n'introduit pas spécifiquement le coefficient de réfraction  $\kappa_S$ , alors qu'il en avait l'entièvre possibilité; 29 ans plus tard Lambert introduira  $1/\kappa_S$  auquel il ne donnera pas de nom [9] — voir le paragraphe 2 de [10] dans ce numéro spécial. Comme lui et à partir de la même mesure de  $\delta$  par Jean-Dominique et Jacques Cassini depuis le pied de la Tour de la Massane le 12 mars 1701 [56, p. 141], Bouguer trouve  $1 - q \approx 22\,458/25\,758$  dont nous tirons  $q \approx 0,1281 \approx 1/7,805$  alors que Lambert trouvera  $\kappa_S \approx 1/7,06$ . Ce coefficient  $\kappa_S$  joue un rôle important dans la réduction de mesures utilisées en navigation astronomique. Pour d'autres applications numériques, voir le sous-paragraphe 4.2 de [39].

Bouguer comprend que  $q$  supérieur à 1 produirait la suppression d'une bande de l'image usuelle du ciel au-dessus de l'horizon astronomique car l'observateur serait dans un chenal optique [39, 55] ; et comme dans ce cas on aurait  $n_0 r_0 > n_S r_S$ , l'observateur  $S$  verrait une mer (ou un grand lac [57, p. 541]) concave (voir le paragraphe 3 de [39]), comme l'a vu von Schrötter qui observa en 1908 un cas frappant de dépression négative avec un horizon 27' au-dessus de l'horizon normal [58], ainsi que d'autres marins [59], [60, p. 385], [61, 62], [63, p. 291], [64] faisant état d'une surface d'eau qui semble concave (par effet *hillingar* [65, 66]) : « Through an optical

illusion, dependent on the mirage of the ice horizon, it appeared to us as if we were proceeding on the bottom of a shallow, saucer-shaped cavity. » [67, p. 272]

## Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

## Remerciements

L'auteur exprime sa gratitude au Dr. Andrew Young pour la mise à disposition de sa fabuleuse bibliographie en ligne (citée à la fin du paragraphe 2). Il remercie aussi Lilie Pons (secrétaire éditoriale — Centre Mersenne) et Julien Desmarests (du service des publications de l'Académie des sciences) pour leur précieux travail technique sur les images de textes anciens.

## Références

- [1] D. Fauque, « Du bon usage de l'éloge : Cas de celui de Pierre Bouguer », *Rev. hist. sci.* **54** (2001), p. 351-382.
- [2] P. Bouguer, *De la Mâture des Vaisseaux*, Claude Jombert, Paris, 1727.
- [3] P. Bouguer, *De la Méthode d'Observer Exactement sur Mer la Hauteur des Astres*, Claude Jombert, Paris, 1729.
- [4] P. Bouguer, *De la Méthode d'observer en mer la déclinaison de la boussole*, Claude Jombert, Paris, 1731.
- [5] J. L. Greenberg, « Mathematical physics in eighteenth-century France », *Isis* **77** (1986), p. 59-78.
- [6] J. E. McClellan, « The Académie Royale des Sciences, 1699–1793: A statistical portrait », *Isis* **72** (1981), p. 541-567.
- [7] A. Mayrargue, « De la méthode d'observer exactement sur mer la hauteur des astres », *Rev. hist. sci.* **63** (2010), p. 67-91.
- [8] P. Bouguer, *Essai d'Optique sur la Gradation de la Lumière*, Claude Jombert, Paris, 1729.
- [9] J. H. Lambert, *Les propriétés remarquables de la route de la lumière*, H. Scheurleer F Z. & Compagnie? La Haye, 1758.
- [10] L. Dettwiller, « Les développements de Lambert : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), no S1, p. 453-465.
- [11] P. Bouguer, *Entretiens sur la cause de l'inclinaison des orbites des planètes*, Charles-Antoine Jombert, Paris, 1734.
- [12] É. Badinter, *Les Passions intellectuelles*, t. I, *Désirs de gloire* (1735–1751), Fayard, Paris, 1999.
- [13] F. Trystram, *Le procès des étoiles*, Seghers, Paris, 1979.
- [14] P. Murdin, *Full Meridian of Glory*, Springer, New York, 2009.
- [15] P. Bouguer, *La Figure de la Terre, Déterminée par les Observations de Messieurs Bouguer, & de la Condamine, de l'Académie Royale des Sciences, envoyés par ordre du Roy au Pérou, pour observer aux environs de l'Equateur*, Charles-Antoine Jombert, Paris, 1749.
- [16] G. Bruhat, *Cours de Physique générale — Mécanique*, Masson, Paris, 1955.
- [17] I. Todhunter, *A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth, from the Time of Newton to that of Laplace*, vol. 1, Macmillan, Londres, 1873.
- [18] J. Lequeux, *L'Observatoire de Paris — 350 ans de science*, Gallimard / Observatoire de Paris, Paris, 2012.
- [19] J. Dhombres, « “Mettre la géométrie en crédit” : Découverte, signification et utilisation du métacentre inventé par Pierre Bouguer », in *Éprouver la science : Pierre Bouguer et le premier XVIII<sup>e</sup> siècle, Actes du colloque Nantes-Le Croisic, 6–7 juin 1998*, S & TP n<sup>e</sup> série, vol. 3, 1999, p. 305-363.
- [20] « Sur la mesure du diamètre des plus grandes planètes », *Hist. Acad. R. Sci. année 1748* (1752), p. 87-94.
- [21] P. Bouguer, « De la mesure du diamètre des plus grandes planètes : Description d'un nouvel Instrument qu'on peut nommer Héliomètre, propre à les déterminer ; & Observations sur le Soleil », *Mém. Acad. R. Sci. année 1748* (1752), p. 11-34.
- [22] G. Boistel, « Pierre Bouguer, commissaire pour la marine et expert pour les longitudes : Un opposant au développement de l'horlogerie de marine au XVIII<sup>e</sup> siècle », *Rev. hist. sci.* **63** (2010), p. 121-159.
- [23] P. Bouguer, *Nouveau traité de navigation, contenant la théorie et la pratique du pilotage*, Guérin & Delatour, Paris, 1753.
- [24] P. Bouguer. *De la manœuvre des vaisseaux*, Guérin & Delatour, Paris, 1757.
- [25] G. Maheu, « La vie scientifique au milieu du XVIII<sup>e</sup> siècle : introduction à la publication des lettres de Bouguer à Euler », *Rev. Hist. Sci. Appl.* **19** (1966), p. 206-224.
- [26] J. Gappaillard, « Pierre Bouguer, Lacaille et la mesure du méridien », in *Éprouver la science : Pierre Bouguer et le premier XVIII<sup>e</sup> siècle, Actes du colloque Nantes-Le Croisic, 6–7 juin 1998*, S & TP n<sup>e</sup> série, vol. 3, 1999, p. 233-252.
- [27] P. Bouguer, *Traité d'Optique sur la Gradation de la Lumière — Ouvrage posthume publié par M. l'Abbé de La Caille*, Guérin & Delatour, Paris, 1760.

- [28] *Pierre Bouguer. Un savant breton au XVIII<sup>e</sup> siècle. Actes de la journée d'étude : La vie et l'œuvre de Pierre Bouguer*, Institut culturel de Bretagne, Vannes, 2002.
- [29] D. Fauque, « Introduction : Pierre Bouguer, figure emblématique ou savant singulier? », *Rev. hist. sci.* **63** (2010), p. 5-21.
- [30] R. Lamontagne, *La vie et l'œuvre de Pierre Bouguer*, PUF, Paris, 1961.
- [31] A. de la Borderie, R. Kerviler (éds.), *Oeuvres nouvelles de Des Forges Maillard*, Société des bibliophiles bretons, Nantes, 1888.
- [32] P. Bouguer, « Sur les réfractions astronomiques dans la Zone Torride », *Mém. Acad. R. Sci. année 1739* (1741), p. 407-423.
- [33] P. Bouguer, « Second mémoire sur les réfractions astronomiques, observées dans la Zone Torride ; avec diverses remarques sur la manière d'en construire les Tables », *Mém. Acad. R. Sci. année 1749* (1753), p. 75-112.
- [34] « Sur les réfractions astronomiques », *Hist. Acad. R. Sci. année 1739* (1741), p. 45-48.
- [35] « Sur les réfractions », *Hist. Acad. R. Sci. année 1749* (1753), p. 152-157.
- [36] L. Dettwiller, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 13-62.
- [37] G. Maheu, « Bibliographie de Pierre Bouguer (1698–1758) », *Rev. Hist. Sci. Appl.* **19** (1966), p. 193-205.
- [38] L. Dettwiller, « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 63-102.
- [39] L. Dettwiller, « La discussion par Kummer d'une quadrature sur la réfraction astronomique : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 503-525.
- [40] J.-P. Maraldi, « Expériences du baromètre faites sur diverses montagnes de France », *Mém. Acad. R. Sci. année 1703* (1720), p. 229-237.
- [41] J.-D. Cassini, « Des irregularitez de l'abaissement apparent de l'horizon de la mer », *Mém. Acad. R. Sci. année 1707* (1730), p. 195-197.
- [42] J. Cassini, « Sur les refractions astronomiques », *Hist. Acad. R. Sci. année 1714* (1719), p. 79-87.
- [43] F. Hauksbee, *Physico-Mechanical Experiments on Various Subjects*, R. Brugis, Londres, 1709.
- [44] « Sur les refractions », *Hist. Acad. R. Sci. année 1700* (1761), p. 112-116.
- [45] I. Newton, *Opticks*, Royal Society, Londres, 1704.
- [46] J.-B. Biot, « Sur les refractions astronomiques », *Additions à la Connaissance des Tems* **1839** (1836), p. 3-114.
- [47] J.-L. la Grange, « Sur les refractions astronomiques », in *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres (Berlin)*, Année MDCCLXXII [1872], 1774, p. 259-282.
- [48] J. Ivory, « On the astronomical refractions », *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **113** (1823), p. 409-495.
- [49] T. Simpson, *Mathematical Dissertations on a Variety of Physical and Analytical Subjects*, T. Woodward, Londres, 1743.
- [50] E. Mignard, « Les tables de réfraction astronomique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 133-178.
- [51] J.-B. Delambre, *Histoire de l'Astronomie au Dix-Huitième Siècle* (M. Mathieu, éd.), Bachelier, Paris, 1827.
- [52] N. Bowditch, *Mécanique Céleste. By the Marquis de La Place, translated, with a commentary*, vol. VI, Little and Brown, Boston, 1839.
- [53] A. T. Young, « Relations among atmospheric structure, refraction, and extinction », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 179-212.
- [54] A. T. Young, G. W. Kattawar, « Sunset science. II. A useful diagram », *Appl. Opt.* **37** (1998), p. 3785-3792.
- [55] L. Dettwiller, « Properties of optical ducts, their chromatism and its effects on astronomical refraction », *preprint*, arXiv:2204.02605, 2022.
- [56] J. Cassini, *Traité de la grandeur et de la figure de la Terre*, Pierre de Coup, Amsterdam, 1723.
- [57] F.-A. Forel, *Le Léman — Monographie limnologique*, t. 2, F. Rouge, Lausanne, 1895.
- [58] Frhr. von Schrötter, « Hebung der Kimm und Luftspiegelungen in der Nordsee », *Ann. Hydrogr. Berlin* **36** (1908), p. 490-497.
- [59] W. Wales, « Journal of a voyage, made by order of the Royal Society, to Churchill River, on the North West Coast of Hudson's Bay; of thirteen months residence in that country; and of the voyage back to England; in the years 1768 and 1769 », *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **60** (1770), p. 100-136.
- [60] D. Brandes, « Einige kritische Bemerkungen zu den in den Annalen befindlichen Aufsätzen über die irdische Strahlenbrechung, und Nachricht von der Vollendung seiner Refractions-Beobachtungen », *Gilb. Ann. Phys.* **23** (1806), p. 380-393.
- [61] W. Scoresby, *Journal of a Voyage to the Northern Whale-Fishery*, Constable, Edimbourg, 1823.
- [62] J. Parnell, « On a mirage in the English Channel », *Phil. Mag.* **37** (1869), p. 400-401.
- [63] R. L. Ives, « Recurrent mirages at Puerto Peñasco, Sonora », *J. Franklin Inst.* **252** (1951), p. 285-295.
- [64] D. A. Hunt, A. O. Proudfoot, B. G. Gouldthorpe, « Abnormal refraction, Australian waters », *Mar. Obs.* **30** (1960), p. 134.
- [65] H. L. Sawatzky, W. H. Lehn, « The Arctic mirage and the early North Atlantic », *Science* **192** (1976), p. 1300-1305.
- [66] L. Dettwiller, « Some theorems on “arctic mirages”: hilligar effect and superior mirages », *J. Opt. Soc. Am. A* **36** (2019), p. 1997-2004.

[67] G. F. Wright, W. Upham, *Greenland Icefields and Life in the North Atlantic*, D. Appleton, New York, 1896.