INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus
Physique

Luc Dettwiller

Les développements de Lambert : commentaire historique

Volume 23, Special Issue S1 (2022), p. 453-465

Published online: 21 February 2023
Issue date: 27 October 2023

https://doi.org/10.5802/crphys.116

Part of Special Issue: Astronomie, atmosphères et réfraction
Guest editors: Pierre Léna (Professeur émérite, Observatoire de Paris et Université Paris Cité, membre de l'Académie des sciences) and Luc Dettwiller (Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France)

Les Comptes Rendus. Physique *sont membres du*
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org
e-ISSN : 1878-1535

Comptes Rendus
Physique
2022, Vol. 23, Special Issue S1, p. 453-465
https://doi.org/10.5802/crphys.116

Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

Les développements de Lambert : commentaire historique

Lambert's series expansions: an historical commentary

Luc Dettwiller [a]

[a] Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France

Courriel : dettwiller.luc@gmail.com

Résumé. Dans son livre de 1758, Lambert (1728–1777) introduit l'intégrale de réfraction sous sa forme la plus compacte, et la développe en série entière du sinus ou de la tangente de la distance zénithale (la seconde devant converger plus vite — sous réserve de convergence) ; puis il s'intéresse aux conséquences géodésiques de la courbure des rayons lumineux.

Abstract. In his 1758 book, Lambert (1728–1777) established the most compact expression of the refraction integral, and developed it in a power series of sine or tangent of the zenithal distance. He then examined the geodetic consequences of the curvature of the light rays.

Mots-clés. Lambert (séries de), Intégrale de réfraction, Coefficient de réfraction, Dépression de l'horizon, Distance de l'horizon.

Keywords. Lambert series, Refraction integral, Refraction coefficient, Horizon dip, Horizon distance.

Published online: 21 February 2023, Issue date: 27 October 2023

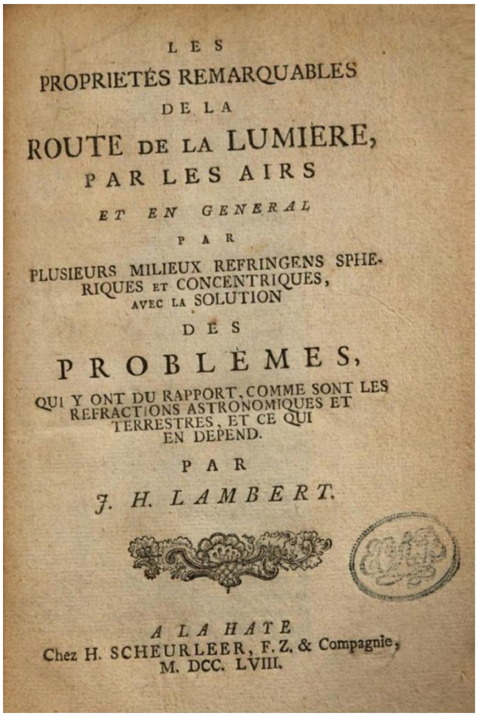
1. Introduction

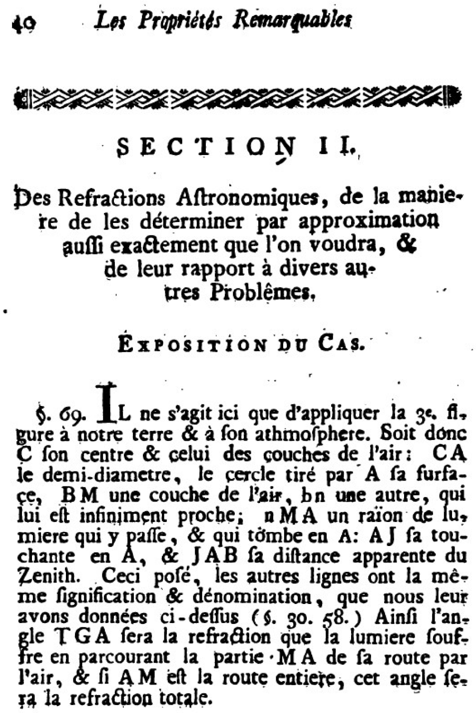
Né à Mulhouse en 1728, mort à Berlin en 1777 où il était académicien des sciences sous le mécénat de Frédéric II de Prusse, Johann Heinrich Lambert a connu une activité scientifique intense et variée touchant à la logique, aux mathématiques, à la physique, l'astronomie, la météorologie et la cartographie ! En physique, il a travaillé sur les propriétés des gaz, mais il est surtout connu pour son traité de photométrie en latin [1], continuateur de celui de Pierre Bouguer [2] ; on y voit apparaître la notion de source lambertienne, qui s'avère n'être qu'une idéalisation (qu'on ne sait matériellement approcher qu'à 5 % près au mieux), hélas inutilisable en ce qui concerne les surfaces des planètes ou des satellites [3, 4] — ceci étant connu dès le XIX^e siècle [5], d'où l'appréciation d'Arthur Searle : « In particular, Lambert's theory, developed in his *Photometria*, had been regarded as almost demonstrably true, while, in fact, it consisted of an ingenious mathematical superstructure on a very insecure foundation. » [6] Deux ans avant la parution de *Photometria*, Lambert publia *Les proprietés remarquables de la route de la lumière*, un ouvrage à la frontière des mathématiques, de l'optique, de la géodésie et de l'astronomie [7]. C'est à lui que nous nous intéressons, pour sa contribution à l'étude théorique de la réfraction astronomique.

Dans son édition de 1758 chez Scheurleer, F. Z. & Compagnie [7] il est disponible sur Google Books : https://books.google.fr/books?id=V7xkAAAAcAAJ&newbks=0&printsec=frontcover&dq=lambert+les+propri%C3%A9t%C3%A9s+de+la+route+de+la+lumi%C3%A8re+dans+les+airs&hl=fr&redir_esc=y et dans celle de 1759 chez van Daalen (La Haye), sur Gallica : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k148910g/#.

Le corps de ces deux éditions est le même, y compris en ce qui concerne (en bas de la page finale) la liste des « Fautes à corriger » (p. 116). Seule apparaît recomposée, pour l'édition de 1759, la page de titre. Les typographes hollandais semblent avoir eu quelques difficultés avec le français : le titre courant de gauche varie, de « Les Propriétés Remarquables » (p. 10–16) à « Les Propriétes Remarquables » (p. 18), « La Propriétes Remarquables » (p. 20) puis « Propriétes Remarquables » (p. 22–26) et retour.

Nous utilisons l'édition de 1758 : J. H. Lambert, *Les proprietés remarquables de la route de la lumière*, H. Scheurleer F. Z. & Compagnie, La Haye, 1758.


LES
PROPRIETÉS REMARQUABLES
DE LA
ROUTE DE LA LUMIERE,
PAR LES AIRS
ET EN GENERAL
PAR
PLUSIEURS MILIEUX REFRINGENS SPHERIQUES ET CONCENTRIQUES,
AVEC LA SOLUTION
DES
PROBLEMES,
QUI Y ONT DU RAPPORT, COMME SONT LES REFRACTIONS ASTRONOMIQUES ET TERRESTRES, ET CE QUI EN DEPEND.
PAR
J. H. LAMBERT.
A LA HAYE
Chez H. SCHEURLEER, F. Z. & Compagnie,
M. DCC. LVIII.


40 Les Propriétés Remarquables

SECTION II.

Des Refractions Aſtronomiques, de la maniere de les déterminer par approximation auſſi exactement que l'on voudra, & de leur rapport à divers autres Problêmes.

EXPOSITION DU CAS.

§. 69. IL ne s'agit ici que d'appliquer la 3e. figure à notre terre & à ſon athmoſphere. Soit donc C ſon centre & celui des couches de l'air : CA le demi-diametre, le cercle tiré par A ſa ſurface, BM une couche de l'air, bn une autre, qui lui eſt infiniment proche ; nMA un raïon de lumiere qui y paſſe, & qui tombe en A : AJ ſa touchante en A, & JAB ſa diſtance apparente du Zenith. Ceci poſé, les autres lignes ont la même ſignification & dénomination, que nous leur avons données ci-deſſus (§. 30. 58.) Ainſi l'angle TGA ſera la refraction que la lumiere ſouffre en parcourant la partie MA de ſa route par l'air, & ſi AM eſt la route entiere, cet angle ſera la refraction totale.

[7] Source : Google Books

2. Résumé et commentaires

Dans son Avant-propos (p. 3–8), Lambert présente l'optique comme étant constituée de deux parties : l'optique géométrique (quoiqu'il n'utilise pas cette appellation), et la photométrie — donc il occulte les interférences (découvertes par Boyle et Hooke en 1664–1665) et la diffraction (par Grimaldi à la même époque). Selon lui, l'optique géométrique a « été [portée] à un si haut point de perfection, qu'on n'y trouve presque plus qu'à glaner. […] » : bel exemple de mentalité fin de siècle, qui concorde avec l'étude menée par Rescher [8, chapitre 2 et figure 1 p. 36] sur l'évolution temporelle du « degré de complétude perçue » concernant les connaissances scientifiques : il est passé par trois maxima successifs très nets, vers 1750 (cf. Diderot, Kant, Lambert), vers 1900 (cf. Kelvin) et vers 1975 (cf. Feynman, Wigner et Stent). Néanmoins, Lambert trouve quand même un dernier centre d'intérêt en optique géométrique, car quelques lignes plus loin, il écrit :

Le ſeul cas, qui ſembloit encore moins examiné, c'eſt celui, où la lumiere paſſe ſucceſſivement par pluſieurs milieux ſphériques & concentriques. J'ai eſſaïé dans ce traité de ſuppléer à ce défaut. On y verra, que ce Cas n'eſt ni ſi compliqué, ni ſi difficile, qu'il paroit du premier abord, & qu'il y a moïen d'aller plus loin qu'on n'a eté. On ſait qu'il exiſte dans l'Athmoſphere, & que les refractions des Aſtres & des objets terreſtres en dépendent. Ce ſeul point ſuffit, pour le rendre intéreſſant & digne de la peine, que les plus grands Géometres ſe ſont donnée, pour le déterminer dans cette vuë.

[7, p. 3–4] Source : Google Books

Tel est son but : faire progresser l'étude théorique des rayons dans un milieu à symétrie sphérique (de centre C), et appliquer les résultats obtenus aux réfractions astronomique et terrestre respectivement — i.e. affectant la vision d'un objet extra-atmosphérique (resp. terrestre). Lambert montre clairement qu'il va faire œuvre de mathématicien plus que de physicien ; il ne traite pas de la relation entre la longueur d'onde (d'ailleurs il n'aurait sans doute pas utilisé cette notion, peu en vogue pour la lumière à l'époque, mais il aurait pu considérer la couleur), l'indice de réfraction de l'air et sa densité, ni de la variation de celle-ci avec la température et la pression dans l'atmosphère : « en l'omettant, mon traité est purement optique & mathématique, c'est à dire, démonstratif. En admettant [d'aborder les lois régissant] les densités, il auroit tenu à des hypotheses Physiques [...] Voici tout ce que j'avois à dire préalablement sur ce petit ouvrage. » [7, p. 4] Il n'indique pas son plan, mais consacre les quatre pages restantes de l'avant-propos à présenter la suite de ses projets, cohérente avec son idée d'avoir achevé le développement de l'optique géométrique (ce à quoi les travaux de Gauss, Seidel et Abbe au XIX^e siècle apporteront un démenti flagrant, et même déjà ceux, longtemps méconnus [9, 10], de Clairaut et d'Alembert dans les années 1760 sur les aberrations) : « L'autre partie de l'Optique, dont j'ai principalement dessein de parler, c'est la *Photométrie.* » Il annonce alors sa future grande publication, dans laquelle il veut donner une vision unifiée de la photométrie, après avoir reconnu quelques mérites à ses prédécesseurs : « La Photométrie n'est pas un païs entierement inculte. Des savans fort célebres y ont travaillé. Mr. Bouguer en a donné un tres bel Essai sur la Gradation de la lumiere. »

Lambert a donc prévenu qu'il abordait le sujet de son présent livre [7] en mathématicien ; alors dès la fin de l'avant-propos, la suite (sauf la dizaine de pages finales) se présente sèchement comme une succession de théorèmes (numérotés), démonstrations, corollaires numérotés pour chaque théorème, remarques, problèmes numérotés et solutions, expériences (rares), etc. C'était courant aux XVII^e et XVIII^e siècles, où survivait l'idée aristotélicienne et scolastique selon laquelle la connaissance véritable du monde ne peut venir que de la logique, relayée par la raison chez Descartes, puis le formalisme de Newton qui voulait surpasser celui de Descartes — mais nous verrons que cette rigueur affichée n'est pas exempte de failles.

Aussi la section I (p. 9–39) de son traité est-elle consacrée uniquement à des théorèmes de géométrie appliqués à « la route de la lumière » ou aux « raïons visuels » et à leur « raïon de courbure » (nos *y* mouillés étaient des *ï*). Un passage essentiel est son « PROBLÊME I. » (p. 34–35), où il fait exprimer (voir le paragraphe 3 du présent article) l'élément différentiel de réfraction que nous notons $\mathrm{d}\chi$; Lambert semble le premier à utiliser ici la fonction tangente, ce qui lui permet une écriture qui deviendra classique, étant plus concise que celle donnée par Bouguer (voir l'expression (3) de l'article [11] dans ce numéro spécial, et [12, p. 46]) :

$$\mathrm{d}\chi = \mathrm{d}n \big/ \sqrt{(n/\sin\alpha)^2 - n^2} = (\tan\alpha)\mathrm{d}n/n, \tag{1}$$

après avoir transcrit depuis les notations de Lambert (voir la table 1) vers celles des articles [13,14] de ce numéro spécial, où n désigne l'indice de réfraction de l'air en un point courant M du rayon lumineux (R) considéré, et α l'angle entre $\boldsymbol{CM}$ et (R).

L'étude explicite de la réfraction astronomique ne commence qu'à la section II (p. 40–63). Lambert part de l'intégrale de $\mathrm{d}\chi$, qui donne la valeur de la réfraction astronomique χ_S vue par un observateur S ; à la p. 45, il montre comment développer cette intégrale en série entière de $\sin Z'$ (où Z' désigne la distance zénithale apparente) puis de $\tan Z'$ — voir le paragraphe 3.

La troisième et dernière section (p. 64–116) s'intéresse aux rayons circulaires, puis à la réfraction terrestre : les rayons lumineux pertinents pour ce sujet sont quasi horizontaux, leur rayon de courbure ne varie qu'au second ordre en fonction de leur petite inclinaison, et Lambert les assimilera à des arcs de cercle.

Il commence par estimer la valeur de ce que l'on appelle maintenant le coefficient de réfraction au niveau de S (i.e. le quotient κ_S de la courbure des rayons horizontaux en S par la courbure méridienne de la Terre — voir le sous-paragraphe 7.1 de [14]), à partir de la dépression de l'horizon marin — i.e. l'angle δ mesurant, pour S ayant une élévation E au-dessus de la mer, la « bassesse apparente de l'horison de la Mer » [15, p. 141] par rapport à l'horizontale. Elle a été mesurée depuis divers lieux élevés lors de la campagne géodésique de Jean-Dominique et Jacques Cassini, qui savaient au moins depuis les années 1690 (voir la fin du sous-paragraphe 2.1 de [13]) que la courbure des rayons lumineux intervient, mais ils ne savaient pas comment la mettre en équations pour calculer δ théoriquement. Ils ont trouvé notamment, le 12 mars 1701, $\delta \cong 50' 20''$ « au pied de la Tour de la Massane » [15, p. 141], à 795 m d'altitude ; Lambert l'appelle « le clocher à Massanne » et, connaissant la valeur du rayon terrestre $r_S - E \cong r_S$ (la campagne géodésique 1669–1670 de l'Abbé Picard avait permis de l'estimer précisément à 6 371,9 km), il en déduit $\kappa_S \cong 1/7{,}06$ (p. 70–71), ce qui est cohérent avec $E \cong 408{,}3$ toises selon Lambert au lieu de 408,5 toises selon les Cassini [7, p. 111]. Cependant il semble ignorer qu'une trentaine d'années auparavant, Bouguer avait déjà utilisé cette mesure des Cassini (pour justifier la nécessité de prendre en compte la réfraction terrestre introduite par lui [12]), et que κ_S s'identifie à l'exposant du modèle de Bouguer estimé par ce dernier à 3 300/25 758 (soit 1/7,81 — voir le sous-paragraphe 3.5 de [11]) ; précisons que Bouguer n'assimile pas les rayons lumineux à des arcs de cercle, et que ses chiffres ne viennent pas de visées terrestres mais astronomiques.

Puis Lambert démontre (cf. « THÉORÊME XXX. », p. 77) que la réfraction terrestre ne peut que *translater* l'image des objets verticalement vers le haut ; mais il omet de rappeler les hypothèses de ce théorème, surtout celle posée 10 pages plus tôt et sur laquelle était déjà fondé son calcul de κ_S : la « déviation » du rayon lumineux, quasi horizontal, par rapport à celle d'un arc de cercle osculateur en un de ses points, est toujours négligeable parce

> que ſi cette déviation devoit ètre ſenſible, il faudroit que la courbure de la trajectoire crût ou décrût avec une viteſſe extrême, ce qui eſt contre toute experience. Ainſi nous ſommes en droit de ſuppoſer que la route de la lumiere dans deux couches aſſez voiſines, eſt circulaire.

[7, p. 67] Source : Google Books

Donc Lambert ignore visiblement le phénomène de mirage ainsi que les multiples autres effets de réfraction sortant du cas standard (voir l'article [16] de ce numéro spécial) ; il fournit ainsi un bel exemple du mécanisme psychologique d'exposition sélective aux faits, probablement par excès de confiance (typiquement scolastique) envers les idées *a priori*.

Ce décalage de l'image vers le haut influe naturellement sur δ et sur la distance L de l'horizon ; Lambert les exprime (« Problême IX. » et « Problême X. », p. 78–81) en fonction de l'élévation y relative au rayon terrestre, et d'un paramètre R qui n'est autre que l'inverse de κ_S, qu'il ne nomme pas spécifiquement. Il observe (p. 82) que, pour une élévation E de S, la dépression (standard) δ de l'horizon est quasiment donnée par $\delta \cong 1{,}0' \sqrt{E/1\,\text{pied}}$ (avec $\kappa_S \cong 0{,}17$). Attention : le pied utilisé ici est celui de France, correspondant à 324,839 mm de 1668 à 1799, et non pas le pied anglophone actuel (304,8 mm). Ses formules, obtenues géométriquement, sont exactement les formules (6) et (12) de l'article [17] de ce numéro spécial où elles sont obtenues analytiquement de façon à les généraliser ; elles sont différentes de celles de Bouguer, qui utilisait une autre modélisation des rayons lumineux, et qui s'intéressait surtout à δ pour perfectionner la navigation astronomique — dont Lambert ne parle pas.

Ce qui intéresse Lambert pour finir, c'est la géodésie. En guise d'entrée en matière, il nous avertit :

Remarque.

§. 120. Mr. J. Caſſini, a obſervé l'abaiſſement apparent de l'horiſon de la mer ſur diverſes hauteurs, qu'il avoit méſurées géométriquement Ces obſervations ſe trouvent dans ſon *Traité ſur la Grandeur & la Figure de la Terre P. I. Ch.* 10. Nous verrons ci-deſſous, que la plûpart de ces hauteurs ſouffrent une correction conſiderable parcequ'elles ſont calculées ſans la refraction. Voici donc les hauteurs corrigées, & l'abaiſſement obſervé.

[7, p. 82] Source : Google Books

Puis il donne les résultats importants qui font intervenir la courbure des rayons lumineux ; il les répartit entre un théorème, 3 corollaires et 4 problèmes, dont voici l'énoncé du dernier (p. 96–99) :

Problême XIV.

§. 135. *L'angle de l'elevation apparente d'une montagne & ſa diſtance horiſontale etant donnés, trouver ſa hauteur.*

[7, p. 96] Source : Google Books

Il est suivi de 11 pages d'applications numériques, qui culminent avec le tableau ci-dessous où on voit l'importance de la correction due à la réfraction.

Noms des Montagnes.	Hauteur ſuivant Mr. Caſſini en toiſes.	Hauteur corrigée en toiſes.	Hauteur du Baromètre.
			″ ‴
Le Canigou.	1441,5	1424,5	20 : $0\frac{1}{2}$
Le Mouſſet.	1253,0	1228,0	20 : $10\frac{2}{3}$
La Matelotte.	335,5	335,4	
La Maſſanne.	408,5	408,3	25 : 4
St. Elme.	101,5	101,5	
Puy de Bugarac.	650,5	628,4	24 : $1\frac{1}{2}$
St. Jaques à Perpignan.	41,5	36,5	
Tautavel.	258,0	245,2	
Magrin.	77,0	157,7	
Puy-Laurent.	97,0	177,2	
Rupeyroux.	407,5	446,3	25 : $1\frac{1}{2}$
Plomb de Cantal.	993,0	982,2	
Puy de Violent.	860,0	846,8	
Rodes.	318,5	361,8	25 : 8
La Baſtide.	431,5	438,6	
La Courlande.	846,0	801,3	23 : 2
La Coſte.	859,0	807,4	23 : 2
Le Mont d'or.	1048,0	1001,3	
Le Lage-Chevalier.	332,0	338,3	
Le Puy de Dome.	817,0	789,1	23 : $2\frac{1}{2}$
Le St. Barthelemi.	1189,2	1225,4	21 : $0\frac{1}{2}$

[7, p. 111] Source : Google Books

Puis le livre s'achève sur une remarque et deux tables concernant l'altimétrie.

Pour des détails complémentaires, voir A. T. Young. (Page consultée le 12 janvier 2022), *Annotated bibliography of mirages, green flashes, atmospheric refraction, etc.*, [En ligne]. Adresse URL : https://aty.sdsu.edu/bibliog/bibliog.html.

3. Présentation illustrée de quelques idées fondamentales

Un point clé du cheminement de Lambert consiste à exprimer l'élément différentiel de réfraction $d\chi$.

Correspondance des notations

L'appellation d'indice de réfraction n'existait pas encore à l'époque : c'était le rapport des sinus de « l'angle d'inclinaison » et de « l'angle brisé », où ces sinus étaient vus comme des rapports de longueurs de côtés de triangles rectangles. Donc plusieurs grandeurs introduites par Lambert sont homogènes à une longueur de référence L constante (voir la Table 1).

Table 1. Notations

Notations de Lambert [7]	Notations de Dettwiller [13, 14] dans ce numéro de *C. R. Phys.*	Indications [et unités usuelles]
v	nL	Indice de réfraction multiplié par une longueur de référence L [m]
dz	$\mathrm{d}\chi = \mathrm{d}s/\mathscr{R}$	Réfraction élémentaire — correspondant au déplacement élémentaire d'un point courant M sur un rayon lumineux (R), de rayon de courbure $\mathscr{R}$ [°, ′, ″]
z	χ_S	Réfraction vue par l'observateur S [°, ′, ″]
ω	α	Angle entre (R) et le rayon vecteur de M, d'origine au centre C de la Terre [°, ′, ″]
r	$nL/\sin\alpha$	Grandeur intervenant notamment dans des intégrales (en haut de [7, p. 46] par exemple) [m]
γ	Z'	Distance zénithale apparente [°, ′, ″]
P	$nL/\sin Z'$	Variable des intégrales du haut de [7, p. 46] [m]
R	$1/\kappa_S$	Inverse du coefficient de réfraction au niveau de l'observateur S
y	E/r_S	Élévation de S divisée par CS

Pour obtenir dχ, une façon de procéder consiste à utiliser le rayon de courbure RM du rayon lumineux en M (voir la *Fig. III* de [7]), que Lambert commence à considérer à partir de son « Théorême XI. » [7, p. 23] Quelques pages plus loin, il propose le « Problême I. » qui est le seul de la première section.

Problême I.

§. 59. *Trouver l'equation différentielle pour les refractions.*

Solution.

Exprimant le raïon CA par l'unité, de ſorte que CA = 1, ſoit la diſtance CM = r l'angle BAG = DAC = γ, l'arc AM = x, Mn = dx

TMC = ω,
ACM = s, MCm = ds
TGA = z, TMt = dz

& le raïon de courbure MR = R.
la perpendiculaire CT = v, ts = dv

On aura DC = ſin. γ. DA = coſ. γ
TC = v = r. ſin. ω, TM = r. coſ. ω
ou TM = $\sqrt{}$ (rr — vv)

Or l'angle TMt etant la refraction différentielle, on aura

dz = dv : $\sqrt{}$ (rr — vv)
ou dz = dv : r. coſ. ω
ou dz = dv. tang. ω : v

Qui ſont les equations, qu'il falloit trouver.

[7, p. 34–35] Source : Google Books

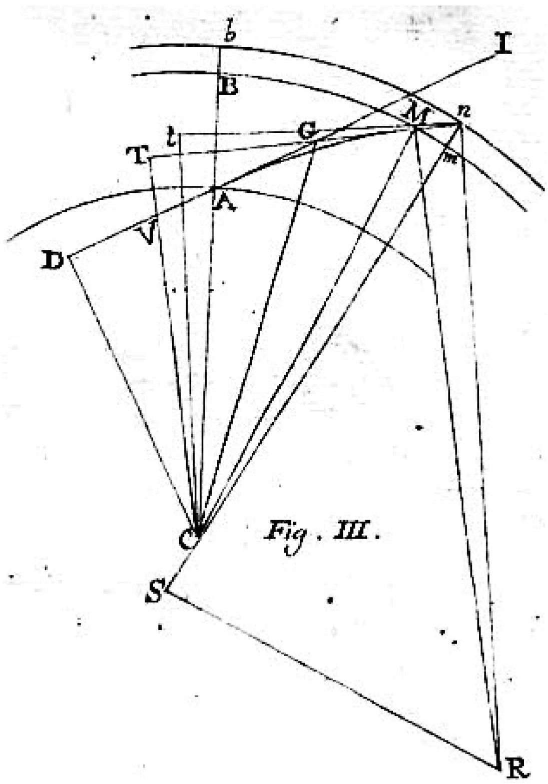


Fig. III en fin d'ouvrage

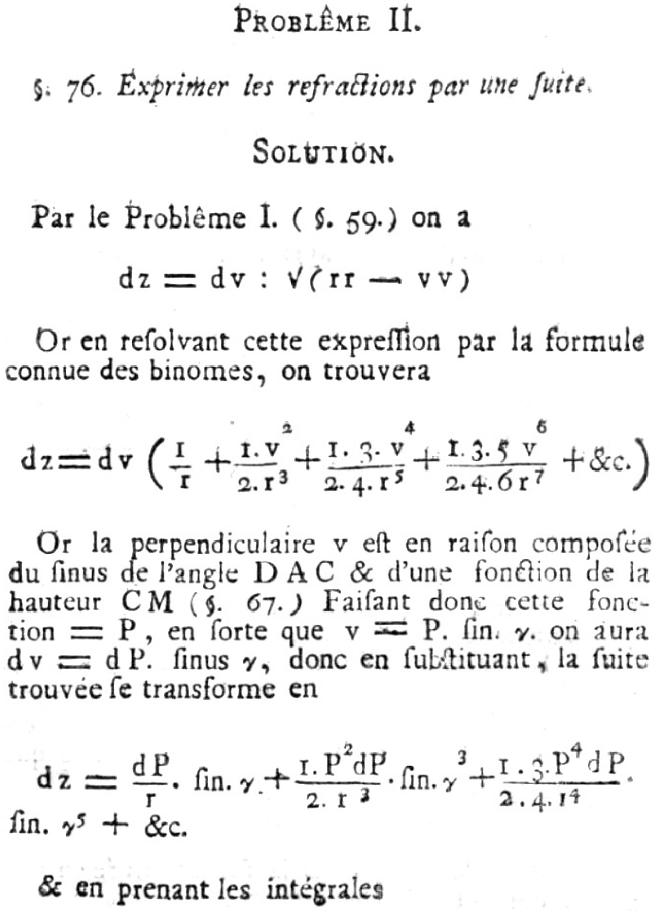
Contrairement à ce que la lecture de Lambert [7] pourrait laisser croire, l'obtention des expressions de (1) ne nécessite pas de supposer le milieu à symétrie sphérique — voir le paragraphe 2 de [14].

Dans la deuxième section, Lambert s'attaque au traitement de l'intégrale de réfraction. Selon Houzeau [18], c'est à lui que l'on doit l'introduction [7, p. 45] de la célèbre technique du développement en série dans ce cadre ; en fait cela avait déjà été expliqué par Euler en 1754 [19] dans un article qui a suscité toutes sortes de controverses [20] — notamment des critiques acerbes de la part de Kramp en 1799 [21] mais qui l'avait mal lu, comme l'a montré Plana en 1828 [22].

Il s'agit ici d'un développement binomial (dont le rayon de convergence est donc 1 [23, p. 212–213]) : celui de $(1+x)^{-1/2}$. Comme on peut le voir ci-dessous, cela commence p. 45, par l'énoncé très aride du « Problème II ». Dans sa solution, Lambert applique d'abord le développement binomial pour exprimer

$$\frac{1}{\sqrt{(n/\sin\alpha)^2 - n^2}} = \frac{\sin\alpha}{n}(1-\sin^2\alpha)^{-1/2}, \tag{2}$$

et il trouve que l'intégration terme à terme de ce développement donne χ_S sous la forme d'une série entière de $\sin Z'$ dont les coefficients ne dépendent que du profil d'indice dans l'atmosphère — cf. *infra.*



PROBLÊME II.

§. 76. *Exprimer les refractions par une ſuite.*

SOLUTION.

Par le Problême I. (§. 59.) on a

$$dz = dv : \surd(rr - vv)$$

Or en réſolvant cette expreſſion par la formule connue des binomes, on trouvera

$$dz = dv\left(\frac{1}{r} + \frac{1.v^2}{2.r^3} + \frac{1.3.v^4}{2.4.r^5} + \frac{1.3.5\,v^6}{2.4.6\,r^7} + \&c.\right)$$

Or la perpendiculaire v eſt en raiſon compoſée du ſinus de l'angle D A C & d'une fonction de la hauteur C M (§. 67.) Faiſant donc cette fonction $=$ P, en ſorte que v $=$ P. ſin. γ. on aura d v $=$ d P. ſinus γ, donc en ſubſtituant, la ſuite trouvée ſe transforme en

$$dz = \frac{dP}{r}.\ \text{ſin.}\,\gamma + \frac{1.P^2dP}{2.r^3}.\text{ſin.}\,\gamma^3 + \frac{1.3.P^4dP}{2.4.r^4}.\ \text{ſin.}\,\gamma^5 + \&c.$$

& en prenant les intégrales

[7, p. 45] Source : Google Books
(les exposants successifs de $\sin\gamma$ sont 1, 3, 5, etc.)

46 *Les Propriétés Remarquables*

$$z = \text{ſin.}\,\gamma.\int\frac{\mathrm{d}P}{r} + \frac{\text{ſin.}\,\gamma^3.}{2}\int\frac{P^2\mathrm{d}P}{r^3} + \frac{1.3.}{2.4.}\,\text{ſin.}\,\gamma^5.\int\frac{P^4\mathrm{d}P}{r^5} + \&c.$$

Or comme les intégrales de tous les termes de cette ſuite dependent ſimplement de la hauteur de l'athmoſphere, & qu'elles ſont indépendantes de l'angle γ, il eſt evident qu'on peut les conſiderer comme des coefficiens, & que par conſequent la conſtitution de l'athmoſphere reſtant la même, les refractions qui répondent à chaque diſtance des aſtres du Zenith, ſeront exprimées par la ſuite

$$z = A\ \text{ſin.}\,\gamma + \tfrac{1}{2}\,B.\ \text{ſin.}\,\gamma^3 + \frac{1.3}{2.4}\,C\ \text{ſin.}\,\gamma^5 + \&c.$$

dont les termes croiſſent ſuivant les puiſſances impaires du ſinus de la diſtance des aſtres du Zenith.

REMARQUE.

§. 77. **Cette ſuite n'eſt pas fort convergente, & il faut pluſieurs termes, pour definir les refractions des hauteurs moins grandes.**

Car la fonction P de même que le raïon r variant fort peu, toutes les intégrales ſeront aſſez peu différentes l'une de l'autre, de ſorte que la convergence des Coefficiens n'eſt gueres plus grande que celle de la ſuite $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1.3.}{2.4.}$ &c.

Afin donc de transformer la ſuite trouvée en une autre, qui ſoit plus convergente, il faut exprimer les refractions par une ſuite dont les termes procedent par les puiſſances impaires des tangentes de l'angle γ. Ce qui peut toujours ſe faire. On trouvera donc

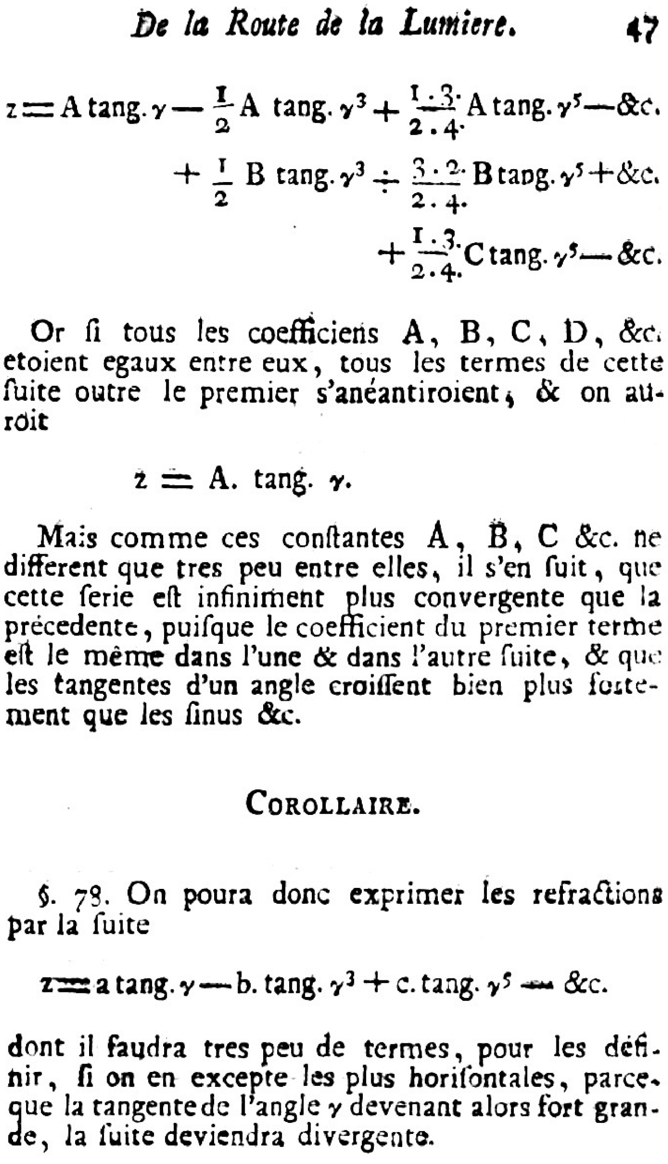
[7, p. 46] Source : Google Books

Le fait que les intégrales du haut de la p. 46 de Lambert ne dépendent que du profil d'indice dans l'atmosphère se comprend à l'aide de l'invariant de Bouguer [12] (que Lambert n'écrit jamais sous forme de formule, et ne cite jamais — voir le sous-paragraphe 4.2 de [14]), car celles-ci s'écrivent (avec nos notations des articles [13, 14])

$$\begin{aligned}\int_1^{n_S}\frac{(nL/\sin Z')^{2p}}{(nL/\sin\alpha)^{2p+1}}\,\mathrm{d}\!\left(\frac{nL}{\sin Z'}\right) &= \int_1^{n_S}\frac{1}{n}\left(\frac{n\,r\sin\alpha}{n\,r\sin Z'}\right)^{2p+1}\mathrm{d}n\\ &= \int_\infty^{r_S}\frac{1}{n}\left(\frac{n_S\,r_S}{n\,r}\right)^{2p+1}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r > 0\quad\forall\,p\in\mathbb{N}\end{aligned}\tag{3}$$

Lambert obtient donc $\chi_S/\sin Z'$ sous la forme d'une série entière de $\sin^2 Z'$, à termes tous positifs si n est une fonction décroissante de r, comme dans le cas standard.

Il est vrai que la décroissance de « la suite 1, 1/2, $(1\cdot3)/(2\cdot4)$, &c. », i.e. celle de terme général $(2p-1)\,!!/(2^p\,p\,!)$ (où $N\,!$ et $N\,!!$ désignent respectivement la factorielle et la double factorielle de N) est lente, car au voisinage de l'infini il est équivalent à $1/\sqrt{\pi p}$, en vertu de la formule de Stirling [24, p. 2868].



De la Route de la Lumiere. 47

$$z = \mathrm{A\,tang.}\,\gamma - \frac{1}{2}\mathrm{A\ tang.}\,\gamma^3 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\mathrm{A\,tang.}\,\gamma^5 - \&c.$$
$$+ \frac{1}{2}\ \mathrm{B\ tang.}\,\gamma^3 \div \frac{3\cdot2}{2\cdot4}\mathrm{B\,tang.}\,\gamma^5 + \&c.$$
$$+ \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\mathrm{C\,tang.}\,\gamma^5 - \&c.$$

Or ſi tous les coefficiens A, B, C, D, &c. etoient egaux entre eux, tous les termes de cette ſuite outre le premier s'anéantiroient, & on auroit

$$z = \mathrm{A.\ tang.}\ \gamma.$$

Mais comme ces conſtantes A, B, C &c. ne different que tres peu entre elles, il s'en ſuit, que cette ſerie eſt infiniment plus convergente que la précedente, puiſque le coefficient du premier terme eſt le même dans l'une & dans l'autre ſuite, & que les tangentes d'un angle croiſſent bien plus fortement que les ſinus &c.

Corollaire.

§. 78. On poura donc exprimer les refractions par la ſuite

$$z = \mathrm{a\,tang.}\,\gamma - \mathrm{b.\ tang.}\,\gamma^3 + \mathrm{c.\,tang.}\,\gamma^5 - \&c.$$

dont il faudra tres peu de termes, pour les définir, ſi on en excepte les plus horiſontales, parceque la tangente de l'angle γ devenant alors fort grande, la ſuite deviendra divergente.

[7, p. 47] Source : Google Books

En haut de sa p. 47, Lambert réutilise la même série binomiale, dont le rayon de convergence est 1, pour écrire

$$\sin Z' = \left(\tan Z'\right)\left(1+\tan^2 Z'\right)^{-1/2} = \left(\tan Z'\right)\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\,\frac{(2p-1)\,!!}{2^p\,p\,!}\tan^{2p} Z'. \tag{4}$$

Par substitution de cette seconde série (4) à $\sin Z'$ dans la série précédente, il obtient donc $\chi_S/\tan Z'$ sous la forme d'une série entière de $\tan^2 Z'$, alternée, et dont les coefficients tendent plus vite vers zéro. Si on ignorait que l'étude des séries n'en était en 1758 qu'à ses balbutiements, on pourrait s'amuser de la faiblesse de la justification de cette accélération de convergence, surtout par contraste avec la rigueur apparente de l'ensemble du livre présenté comme un austère traité de mathématiques ; mais il faut plutôt, au contraire, saluer chez Lambert l'irruption de l'idée féconde, quoiqu'encore peu formalisée, selon laquelle deux séries exprimant la même grandeur (χ_S) n'ont pas forcément le même intérêt ni la même efficacité.

Cependant cette première méthode, pour obtenir χ_S sous la forme d'une série entière de $\tan Z'$, restait très lourde. Ce n'est donc peut-être pas un hasard si Ernst Kummer, un autre mathématicien intéressé par les séries et inventeur d'un procédé d'accélération de leur convergence [25], écrira lui aussi sur les propriétés des rayons lumineux dans un milieu à symétrie sphérique — voir [17] dans ce numéro spécial. La technique des développements de Lambert sera améliorée au siècle suivant : au sous-paragraphe 5.2 de [14], on a vu comment obtenir directement le développement en $\tan Z'$, d'une part sans substitution de développement en série entière dans un autre, et d'autre part de façon que la somme des premiers termes soit tout de suite une bonne approximation de χ_S (sauf pour Z' trop proche de 90°), car on peut s'arranger pour que le terme devant $\tan^2 Z'$ dans la racine carrée soit très petit sur l'essentiel de l'atmosphère.

Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

Remerciements

L'auteur exprime sa reconnaissance au Dr. Andrew Young pour la mise à disposition de sa fabuleuse bibliographie en ligne (citée à la fin du paragraphe 2), ainsi que pour ses réponses très attentionnées et consistantes, à des questions précises. Il remercie aussi le Dr. Siebren van der Werf pour ses commentaires, et pour lui avoir fourni la Fig. III de [7] qui lui manquait cruellement. Enfin, il exprime sa gratitude à Julien Desmarets (du service des publications de l'Académie des sciences) pour son précieux travail technique améliorant la lisibilité des extraits de textes anciens.

Références

[1] J. H. Lambert, *Photometria, sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae*, Eberhard Klett, Augsbourg, 1760.

[2] P. Bouguer, *Essai d'Optique sur la Gradation de la Lumiere*, Claude Jombert, Paris, 1729.

[3] H. N. Russell, « The light variations of asteroids and satellites », *Astrophys. J.* **24** (1906), p. 1-18.

[4] M. Minnaert, « Photometry of the Moon », in *Planets and Satellites* (G. P. Kuiper, B. Middlehurst, éds.), Chicago University Press, Chicago, 1961, p. 213-248.

[5] F. Zöllner, *Photometrische Untersuchungen*, Engelmann, Leipzig, 1865.

[6] A. Searle, « The meteoric theory of the gegenschein », *Observatory* **22** (1899), p. 310-311.

[7] J. H. Lambert, *Les proprietés remarquables de la route de la lumière*, H. Scheurleer F. Z. & Compagnie, La Haye, 1758.

[8] N. Rescher, *Le progrès scientifique – Un essai philosophique sur l'économie de la recherche dans les sciences de la nature*, PUF, Paris, 1993.

[9] H. Boegehold, « Die Leistungen von Clairaut und D'Alembert für die Theorie des Fernrohrobjektivs und die französischen Wettbewerbsversuche gegen England in des letzten Jahrzehnten des 18. Jahrhunderts », *Z. Instrument.* **55** (1935), p. 97-111.

[10] F. Ferlin, « New insights into major theoretical research in optics in the Age of Enlightenment », *Centaurus* **59** (2017), p. 308-319.

[11] L. Dettwiller, « L'invariant de Bouguer et ses conséquences : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), nº S1, p. 415-452.

[12] P. Bouguer, *De la Méthode d'Observer Exactement sur Mer la Hauteur des Astres*, Claude Jombert, Paris, 1729.

[13] L. Dettwiller, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie », *C. R. Phys.* **23** (2022), nº S1, p. 13-62.

[14] L. Dettwiller, « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique », *C. R. Phys.* **23** (2022), nº S1, p. 63-102.

[15] J. Cassini, *Traité de la grandeur et de la figure de la Terre*, Pierre de Coup, Amsterdam, 1723.

[16] L. Dettwiller, « Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre », *C. R. Phys.* **23** (2022), nº S1, p. 103-132.

[17] L. Dettwiller, « La discussion par Kummer d'une quadrature sur la réfraction astronomique : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), nº S1, p. 503-525.

[18] J. C. Houzeau, *Vade-mecum de l'astronome*, F. Hayez, Bruxelles, 1882.

[19] L. Euler, « De la réfraction de la lumiere en passant par l'atmosphére selon les divers degrés tant de la chaleur que de l'elasticité de l'air », *Hist. Acad. Roy. Sci. Belles-Lettres Berlin, Année MDCCLIV* **10** (1756), p. 131-172.

[20] C. Bruhns, *Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwickelung*, Voigt & Günther, Leipzig, 1861.

[21] C. Kramp, *Analyse des Réfractions Astronomiques et Terrestres*, Dannbach, Strasbourg, an VII – et Schwikkert, Leipzig, 1799.

[22] J. Plana, *Observations astronomiques faites en 1822, 1823, 1824, 1825 à l'Observatoire Royal de Turin – précédées d'un mémoire sur les Réfractions astronomiques*, Imprimerie Royale, Turin, 1828.

[23] R. Couty, J. Ezra, *Analyse*, t. 2, 4e éd., A. Colin, Paris, 1976.

[24] E. W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, 2e éd., Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003.

[25] E. E. Kummer, « Eine neue Methode, die numerischen Summen langsam convergirender Reihen zu berechnen », *J. für die Reine und Angew. Math.* **16** (1837), p. 206-214.