INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

# Comptes Rendus

# Physique

Luc Dettwiller

**Le théorème de Biot et le changement de variable de Biot–Auer–Standish : commentaire historique**

Volume 23, Special Issue S1 (2022), p. 483-501

Published online: 21 February 2023
Issue date: 27 October 2023

https://doi.org/10.5802/crphys.117

**Part of Special Issue:** Astronomie, atmosphères et réfraction
**Guest editors:** Pierre Léna (Professeur émérite, Observatoire de Paris et Université Paris Cité, membre de l'Académie des sciences) and Luc Dettwiller (Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France)



CENTRE MERSENNE

*Les* Comptes Rendus. Physique *sont membres du Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte*
www.centre-mersenne.org
e-ISSN : 1878-1535

*Comptes Rendus*
*Physique*
**2022**, Vol. 23, Special Issue S1, p. 483-501
https://doi.org/10.5802/crphys.117

Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

# Le théorème de Biot et le changement de variable de Biot–Auer–Standish : commentaire historique

## *Biot's theorem and Biot–Auer–Standish's change of variable: an historical commentary*

**Luc Dettwiller** [a]

[a] Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France
*Courriel :* dettwiller.luc@gmail.com

**Résumé.** À l'occasion d'un mémoire paru en 1836 sur les réfractions astronomiques, Biot (1774–1862) introduit son changement de variable devenu classique pour calculer numériquement l'intégrale de réfraction — ainsi rendue non-impropre dans le cas d'un astre vu sur l'horizon astronomique. Biot démontre aussi un beau théorème donnant le grandissement angulaire vertical local sur cet horizon. Il commente divers modèles d'atmosphère.

**Abstract.** In a 1836 publication on astronomical refractions, Biot (1774–1862) introduced a change of variable, which would become classical, in order to numerically calculate the refraction integral. This change renders well-behaved the integral, in the case when a celestial body is seen on the astronomical horizon. Biot also proves a beautiful theorem, giving the local vertical angular magnification on such horizon. In addition, he comments on various atmospheric models.

*Published online: 21 February 2023, Issue date: 27 October 2023*

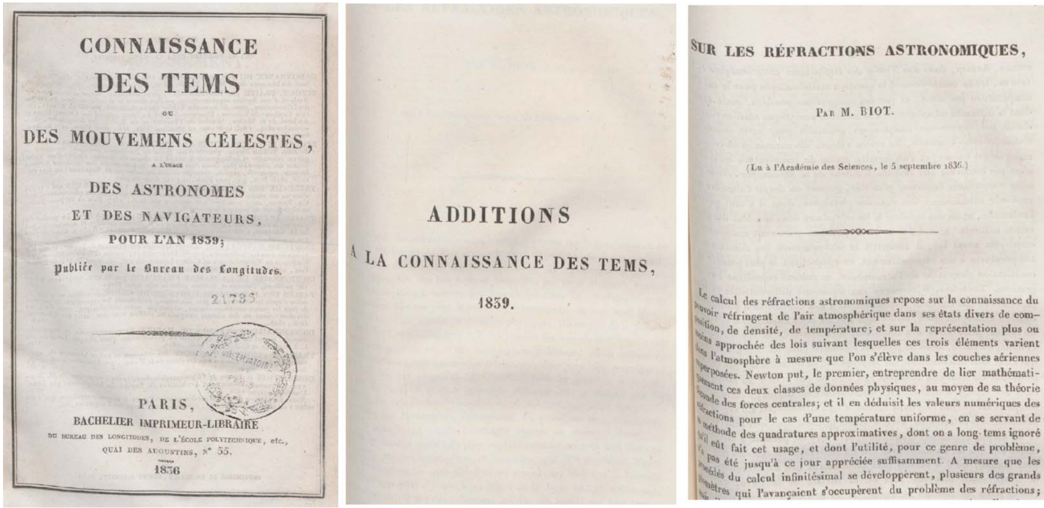
## 1. Introduction

Physicien en déficit de célébrité — par comparaison avec certains de ses illustres collègues de la même époque [1] — malgré sa carrière brillante et multiforme (il est devenu membre associé de la section de mathématiques de l'Institut puis professeur au Collège de France à 26 ans, académicien des sciences à 28 ans, et membre de deux autres académies plus tard), Jean-Baptiste Biot (1774–1862) laisse à la postérité une œuvre imposante et pluridisciplinaire. En 1803 notamment, il fut envoyé en mission pour enquêter sur la chute, du 6 floréal an XI (26 avril 1803), d'environ 3 000 aérolithes sur la petite ville de l'Aigle, dans l'Orne ; son rapport établit clairement l'origine extraterrestre de ces pierres, et clôt la controverse de l'époque sur ce sujet.

Il a mené de 1806 à 1808, avec François Arago (de 12 ans son cadet), une longue campagne géodésique en Espagne, afin de prolonger jusqu'aux Baléares la mesure du méridien (accomplie de 1792 à 1798 par Delambre et Méchain) de Dunkerque à Barcelone, dans le but de définir le mètre. Juste auparavant, en 1804, Biot avait été mis en détachement à l'Observatoire de Paris pour effectuer, à la demande de Laplace, une étude de la réfraction astronomique. Dans ce cadre, il réalisa en 1805 avec Arago (âgé seulement de 19 ans) des mesures de l'indice de réfraction de différents gaz, et notamment de l'air plus ou moins humide, pour savoir si l'humidité influe sur la réfraction astronomique; leur verdict contredit les idées de l'époque : « Il ne nous a pas paru que l'état hygrométrique de l'air eût une influence appréciable sur sa force réfringente » [2]. Peu après, Arago et lui avaient rappelé à Laplace, qu'ils côtoyaient à tour de rôle, l'intérêt de prolonger la mesure du méridien jusqu'aux Baléares : la latitude d'Ibiza étant symétrique de celle de Dunkerque par rapport à 45°, cela réduit les risques d'erreurs quant au calcul de la longueur d'un méridien entier de notre Terre aplatie, car l'extrapolation nécessaire ne fait plus intervenir l'aplatissement terrestre qu'à l'ordre 2. Ce projet plut à Laplace, et le 2 mai 1806, le Bureau des longitudes chargea Biot et Arago de l'accomplir. Lors de cette mission, ils ont rattaché par triangulation l'île d'Ibiza à la côte d'Espagne, grâce à un triangle dont un côté au-dessus de la mer atteint les 160 km : un record, et une prouesse d'observateurs ! Sur un tel trajet, les effets de réfraction peuvent être importants; Biot et Arago les observaient à la lunette, donc ils en voyaient mieux les détails. Qu'on en juge, par l'extrait ci-dessous :

> **nous étions stationnés sur la montagne de Desierto de las Palmas, élevée de 727 mètres sur le bord de la mer, dans le royaume de Valence. Nous observions de nuit, au cercle répétiteur, les réverbères allumés dans l'île d'Yviza, sur la montagne de Campvey, élevée de 420ᵐ et distante de 161008ᵐ (41 $\frac{1}{5}$ lieues). C'étoit là un des côtés de notre grand triangle. Nous vîmes d'abord la lumière de Campvey simple, et semblable à une très-petite étoile, comme elle paroissoit ordinairement, et nous fîmes ainsi trois couples d'observations. Mais au quatrième couple, nous commençâmes à voir à Campvey deux lumières exactement dans la même verticale, et distantes d'une quantité que, sur le fil, nous estimâmes au moins de trois minutes. La vraie lumière, du moins celle que nous jugeâmes telle, étoit à sa place ordinaire. L'autre, que nous crûmes être la lumière factice, étoit plus élevée dans le ciel en réalité; ce qui la mettoit plus bas dans nos lunettes qui renversent. Elle étoit aussi plus grosse que l'autre, plus dilatée et un peu irisée. Nous la prîmes d'abord pour une étoile, bien étonnés d'en rencontrer une précisément dans le vertical des réverbères de Campvey. Mais enfin cette prétendue étoile ne changeant point de place, il fallut bien y reconnoître une image extraordinaire. Bientôt nous ne vîmes pas seulement deux lumières, mais trois, quatre ou davantage.**

[3, p. 13–14] Source : Google Books


CONNAISSANCE
DES TEMS
OU
DES MOUVEMENS CÉLESTES,
A L'USAGE
DES ASTRONOMES
ET DES NAVIGATEURS,
POUR L'AN 1839;
Publiée par le Bureau des Longitudes.
21735
PARIS,
BACHELIER IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, etc.,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.
1836

ADDITIONS
A LA CONNAISSANCE DES TEMS,
1839.

SUR LES RÉFRACTIONS ASTRONOMIQUES,
PAR M. BIOT.
(Lu à l'Académie des Sciences, le 5 septembre 1836.)

Le calcul des réfractions astronomiques repose sur la connaissance du pouvoir réfringent de l'air atmosphérique dans ses états divers de composition, de densité, de température; et sur la représentation plus ou moins approchée des lois suivant lesquelles ces trois éléments varient dans l'atmosphère à mesure que l'on s'élève dans les couches aériennes superposées. Newton put, le premier, entreprendre de lier mathématiquement ces deux classes de données physiques, au moyen de sa théorie féconde des forces centrales; et il en déduisit les valeurs numériques des réfractions pour le cas d'une température uniforme, en se servant de sa méthode des quadratures approximatives, dont on a long-tems ignoré qu'il eût fait cet usage, et dont l'utilité, pour ce genre de problème, n'a pas été jusqu'à ce jour appréciée suffisamment. A mesure que les procédés du calcul infinitésimal se développèrent, plusieurs des grands géomètres qui l'avançaient s'occupèrent du problème des réfractions;

**FIGURE 1.** Fascicule contenant l'article de Biot [19], disponible aussi sur https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6506570n

En 1809, Biot fut nommé professeur d'astronomie à la Faculté des sciences de Paris, nouvellement créée; en 1815, il fut élu membre étranger de la Royal Society. En 1817, le Bureau des Longitudes lui confia la tâche de prolonger la méridienne au nord de l'Écosse, jusqu'à la plus septentrionale des îles Shetland; et en 1824, le même Bureau le chargea de mesurer, le long de l'arc de parallèle allant quasiment de Fiume (sur la côte Adriatique) à Bordeaux, la longueur d'un pendule battant la seconde — et il y détecta des irrégularités très sensibles.

Nul doute que ses multiples observations géodésiques lui ont donné matière à réflexion sur les phénomènes de réfraction, dont il est devenu fin connaisseur. Sur ce sujet, dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences on ne compte pas moins de 6 textes de sa plume pour la période 1836–1838 [4–9], et 8 pour 1854–1855 à cause d'une controverse avec l'astronome Hervé Faye [10–17]; à cela s'ajoutent ses travaux pour le *Journal des Savants* [18] ainsi que pour la *Connaissance des Tems* [19, 20]. Entre ces nombreuses publications, il y a d'inévitables redites; nous choisissons d'en commenter une [19] qui représente une avancée très significative dans la théorie de la réfraction astronomique, et où sont rédigées les démonstrations d'importantes trouvailles — qu'il redonne à des séances de l'académie des sciences [4, 5] mais seulement de manière qualitative. Il s'agit de :

J.-B. Biot, « Sur les réfractions astronomiques », *Additions à la Connaissance des Tems* **1839** (1836), p. 3–114.

Le fascicule (voir Figure 1) contenant cet article est disponible sur : https://cdt.imcce.fr/items/show/188

## 2. Résumé et commentaires

Biot n'est pas le premier à écrire sur la réfraction astronomique dans les *Additions à la Connaissance des Tems* : entre 1762 et 1796 il y a été précédé par Cassini, Bradley et Lacaille. Dans une belle introduction de 7 pages, Biot rappelle notamment (p. 6) que, pour une distance zénithale apparente $Z' < 74°$, une excellente approximation de la réfraction $\chi_S$ au niveau de l'observateur $S$ dépend seulement des conditions de température et de pression en $S$ (conformément au théorème d'Oriani — voir le sous-paragraphe 4.1 de notre exposé des « propriétés remarquables de la réfraction astronomique [...] » [21], dans ce numéro spécial); et il pointe, dans les travaux de

Laplace, l'hypothèse implicite d'uniformité de composition de l'atmosphère, dont il veut se démarquer — car c'est une « uniformité qui ne peut avoir lieu à la rigueur, ne fût-ce qu'en vertu des conditions d'existence de la vapeur aqueuse, et dont, en outre, nous ne pouvons répondre pour les couches aériennes qui nous sont inaccessibles [...] » (p. 4). Cela lui fait appliquer la règle du doute méthodique au théorème d'Oriani : « Mais, puisque l'uniformité de composition des couches atmosphériques que nos tables admettent n'est pas et ne peut pas être rigoureuse, jusqu'à quel point leur diversité possible affectera-t-elle l'indépendance dont il s'agit ? » (p. 6) ; il ne donne pas la réponse dans son texte, mais nous pouvons remarquer que l'on peut esquiver et déplacer le problème soulevé par Biot en définissant la hauteur réduite $H_1$ de l'atmosphère à partir du profil de réfractivité $\eta$ (comme nous l'avons fait au sous-paragraphe 4.1 de [21]) plutôt qu'à partir de celui de masse volumique $\mu$ ... Cinq parties s'ensuivent.

Dans la première (p. 9–33), intitulée « Conditions d'équilibre de l'atmosphère », Biot étudie la pression dans l'atmosphère terrestre, ainsi que sa masse volumique, et l'influence de l'hygrométrie sur ces paramètres.

La 2$^{\text{e}}$ partie (« Détermination des réfractions astronomiques », p. 34–75) est celle qui contient la démonstration de son théorème (voir le sous-paragraphe 7.1 de [21]) que l'on pourrait aussi qualifier, en paraphrasant Poirier (son biographe [1]), de théorème méconnu de l'optique, donnant une expression de $\mathrm{d}\chi_S/\mathrm{d}\psi'(0)$ que Biot appelle le « coefficient varié de la réfraction », $\psi'$ désignant la hauteur (angulaire) apparente et $\chi_S$ la réfraction pour l'observateur $S$. Il mentionne (p. 42) la possibilité du guidage de la lumière dans l'air, et prédit la bande vide de Wegener : « les trajectoires [lumineuses] jouissant de cette propriété seraient rentrantes sur elles-mêmes, et comprises dans l'intérieur de l'atmosphère réfringente ; de sorte que la vision des objets extérieurs ne serait pas généralement possible par une trajectoire horizontale. » ; mais il ne pense pas qu'elle se produise, et il le dit aussi à l'Académie [4] — hélas cette opinion est erronée (voir le document [22] lié à [21], ainsi que [23], et les paragraphes 2.2 et 3 de [24], dans ce numéro spécial). Conformément à ses mesures de 1805 avec Arago sur l'indice de l'air plus ou moins humide et d'autres gaz, il note (p. 71) que les effets de la vapeur d'eau sont trop faibles pour expliquer « des variations accidentelles de $5''$ et $6''$ à 75° de distance zénithale, comme Delambre assure en avoir observées. » — pour des informations quantitatives sur l'effet de l'humidité, voir le paragraphe 3 de [25]. Il remarque numériquement (p. 73) que la structure de la haute atmosphère joue très peu sur la réfraction horizontale, et il explique pourquoi — voir la fin du sous-paragraphe 4.1 de [21].

Dans la 3$^{\text{e}}$ partie (« Calcul des réfractions, par quadratures numériques à toute distance du zénith, et dans une constitution quelconque d'atmosphère », p. 76–94) Biot utilise le changement de variable (voir le paragraphe 6 de [21], et [26]) qu'il vient d'introduire et qui lui a servi à prouver son théorème, pour calculer numériquement l'intégrale de réfraction par la méthode de Simpson (car il utilise « l'expression parabolique » pour un intervalle élémentaire), ce qu'il fait avec 13 points tirés de ses données sur le profil de réfractivité en fonction de l'altitude ; il montre que sa méthode redonne à $1{,}247''$ près la réfraction horizontale calculée par Ivory, et conclut ce calcul par un commentaire intéressant : « Il se peut que cette petite différence vienne de ce que l'interpolation n'aurait pas été tout-à-fait assez serrée dans ses premiers termes ; mais je n'oserais pas non plus répondre qu'elle ne soit pas due à quelques petites erreurs dans l'appréciation des dernières décimales des nombres que ces calculs nécessitent. » (p. 81). Ensuite il applique sa méthode à l'atmosphère isotherme, puis à celle polytropique d'indice 1, et discute la formule de Bradley. Il montre en outre que sa méthode fonctionne aussi pour des objets vus sous l'horizon astronomique.

Dans la 4$^{\text{e}}$ partie (p. 95–107), il prouve en détail que la table des réfractions de Newton a été construite avec une atmosphère isotherme.

Dans la 5$^{\text{e}}$ partie (p. 108–114) il présente, en l'affinant, le modèle d'atmosphère d'Ivory (dont il vante avec tact l'élégance par rapport à celui de Laplace, vu au paragraphe 4 de notre « panorama historique [...] » [27] dans ce numéro spécial). Laplace voulait, par une combinaison linéaire de deux modèles (voir la relation (34) de [27]), neutraliser les défauts opposés de chacun d'eux; mais il faisait intervenir dès le départ une variable $Y$ qui n'a pas de signification physique directe. Le remède décrit dans cette partie consiste à combiner encore deux modèles dont les relations fondamentales font intervenir des variables physiques basiques ($\mu$ et la pression $P$) : le modèle isotherme où $P$ varie proportionnellement à $\mu$ (voir le sous-paragraphe 2.2 de [27]), et le modèle polytropique d'indice 1 où $P$ varie proportionnellement à $\mu^2$ (voir encore le sous-paragraphe 2.2 de [27]). C'est *a priori* meilleur que les modèles de Cassini, Newton, Simpson, Mayer, Bouguer, etc., qui ont deux paramètres libres : d'une part parce que ce nouveau modèle en a trois (la réfractivité au niveau de l'observateur, et les deux coefficients de la combinaison linéaire des lois reliant $P$ à $\mu$), d'autre part parce que les modèles combinés ont aussi des défauts opposés (l'un donne des réfractions trop fortes, et l'autre trop faibles). Ce modèle est élégant; mais Biot y pointe quelques faiblesses, et ne présente pas le calcul de l'intégrale de réfraction correspondante — détaillé par Ivory [28, p. 458–475].

Biot fait souvent référence à Ivory, Delambre, Kramp et, bien sûr, à « l'auteur de la *Mécanique céleste* » — Laplace, pour qui il avait volontairement relu, à partir de 1799, les épreuves du premier volume de son traité, en cours de publication.

Pour plus de citations, voir A. T. Young. (Page consultée le 12 janvier 2022), *Annotated bibliography of mirages, green flashes, atmospheric refraction, etc.*, [En ligne]. Adresse URL : https://aty.sdsu.edu/bibliog/bibliog.html

## 3. Présentation illustrée de quelques démonstrations importantes

Dans le mémoire sur les mesures des pouvoirs réfringents des gaz faites avec Arago en 1806, Biot rappelait, en ce qui concerne le phénomène de réfraction, que « Newton a prouvé qu'il résulte d'une attraction que les corps exercent sur les molécules de lumière » dont la vitesse devient supérieure à celle qu'elles ont dans le vide [2].

Trente ans plus tard, suite aux succès croissants remportés par Augustin Fresnel (1788–1827) avec la théorie ondulatoire de la lumière à partir de 1816, Biot serait-il devenu plus circonspect? Car dans le présent article [19], il ne parle plus de molécule de lumière, mais seulement de « l'élément lumineux » — ou, uniquement en note de bas de page, de « corpuscule lumineux » [19, p. 34]. Cependant, Biot ne se détachera jamais d'un mode d'expression lié à celui de Laplace, dont il avait relu les épreuves de son *Traité de Mécanique Céleste* (voir le paragraphe 4 de [27]) : il reste que « l'élément lumineux » subit une « force centrale variable » ayant pour effet *a priori* de changer la « vitesse de la lumière » [19, p. 34] et de courber la « trajectoire décrite » [19, p. 38] ou le « trajet de l'élément lumineux » [19, p. 41] — Biot parle peu de « rayon lumineux » [19, p. 38]. Les relations fondamentales utilisées par lui rejoignent celles de *l'analogie* cinématique pour les rayons (que nous utilisons aussi dans [21]), où la vitesse de la particule *fictive* de lumière sur une « trajectoire lumineuse » [19, p. 39] dans l'air est proportionnelle à son indice de réfraction $n$ et change le long du rayon en lien avec la « force réfringente » [19, p. 36, 38]. Nous savons que les lois de cette analogie peuvent se déduire de l'électromagnétisme via l'équation de l'eikonale; pour Biot [19], leur validité était à tout le moins un fait d'expérience, sur lequel il se basait sans chercher à le justifier précisément.

Il faut rajouter à ces lois la proportionnalité entre le « pouvoir réfringent » $n^2(r) - 1$ et la « densité » du gaz (p. 34). Mais Biot ne suppose pas uniforme la constante de proportionnalité (positive), puisqu'il veut tenir compte de l'hétérogénéité de composition de l'atmosphère *a priori*; il le dit très explicitement :

> « [...] quant aux dernières couches de l'atmosphère, on ne peut pas savoir si la valeur de [cette constante] s'y continue exactement la même; car, non-seulement

elles nous sont inaccessibles, mais, comme je le prouverai plus tard, leur état propre ne peut pas même nous être indiqué par les réfractions observées ici-bas. » (p. 51).

### 3.1. *Changement de variable de Biot–Auer–Standish*

Un changement de variable astucieux est la première découverte importante présentée dans la 2e partie de son mémoire [19]. Nous allons voir tout de suite (en nous aidant de la Table 1) comment Biot l'introduit.

*Correspondance des notations*

**Table 1.** Notations

| Notations de Biot [19] | Notations de Dettwiller [21,27] dans ce numéro de *C. R. Phys.* | Notations de Auer & Standish [26] | Indications [et unités usuelles] |
|---|---|---|---|
| O | $S$ | | Point où se trouve l'observateur recevant un rayon lumineux (R) en provenance du point $A$ d'un astre |
| $n(r)$ | $n(r)$ | $\mu(r)$ | Indice de réfraction de l'air, dont la distribution est supposée à symétrie sphérique de centre $C$ |
| $n_1$ | $n_S$ | $\mu_o$ | Indice au niveau de l'observateur |
| $v$ | $\theta$ | | Angle des coordonnées polaires (d'origine $C$) pour un point courant $M$ de (R) [°, ′, ″] |
| $v'$ | $\alpha$ | $\psi$ | Angle entre (R) et le rayon vecteur de $M$, d'origine $C$ [°, ′, ″] |
| $V'$ | | | Valeurs de $\alpha$ telles que $Z' = 0$ [°, ′, ″] |
| $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}v + \mathrm{d}v'$ | $\mathrm{d}s/\mathscr{R}$, noté $\mathrm{d}\chi = \mathrm{d}\theta + \mathrm{d}\alpha$ | | Réfraction élémentaire due à un élément de longueur $\mathrm{d}s$ de (R) dont $\mathscr{R}$ est le rayon de courbure [rad] |
| $\theta_1$ | $Z'$ | $\psi_o = z = \varsigma$ | Distance zénithale apparente de $A$ pour $S$ [°, ′, ″] |
| $R_{\theta_1}$ | $\chi_S$ | $R$ | Réfraction astronomique de $A$ pour $S$ [°, ′, ″] |
| $\rho$, $\rho_1$ | $\mu$, $\mu_S$ | | Masse volumique l'air en $M$, en $S$ [$\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$] |
| $n^2(\lambda_0, M) - 1 = 4k(\lambda_0, M)\rho(M)$ $n_1^2 - 1 = 4k_1\rho_1$ | $n(\lambda_0, M) - 1 = C(\lambda_0, M)\mu(M)$ $n_S - 1 = C\mu_S$ | | Lois empiriques sur le « pouvoir réfringent » (colonne 1) ou la réfractivité (colonne 2), en $M$ puis en $S$ |
| $a$ | $r_S$ | $r_o$ | Distance $CS$ entre l'observateur et le centre de la Terre (quasiment le rayon terrestre) [km] |
| $(\delta\theta/\delta\theta_1)_q$ | $(\mathrm{d}\chi_S/\mathrm{d}Z')(90°)$ | | Dérivée de la réfraction par rapport à $Z'$, sur l'horizon astronomique |
| $l$ | $H_1$ | | Hauteur réduite de l'atmosphère |

Au point O, où la trajectoire se termine, $\nu'$ est toujours égal à la distance apparente $\theta_1$. On verra tout-à-l'heure que dans l'état d'équilibre de l'atmosphère terrestre, la faiblesse de l'action réfringente de l'air, relativement à sa densité, fait que, sur la même trajectoire, cet angle diminue graduellement à mesure que le point M s'éloigne du centre, et devient toujours nul à une distance infinie. Mais dans le progrès de son décroissement il y a une distinction physique à faire, selon que l'étendue de l'atmosphère réfringente est supposée limitée ou illimitée; car, dans ce dernier cas, la courbure de la trajectoire se continue aussi indéfiniment, et la dégradation progressive des pouvoirs réfringents se fait mathématiquement sentir à toute distance dans le décroissement de l'angle $\nu'$. Mais, si l'étendue de l'atmosphère réfringente est limitée, l'angle $\nu'$ est assujéti à son influence seulement jusqu'à la dernière valeur que cette étendue lui assigne; après quoi son décroissement ultérieur suit indéfiniment la loi plus simple qui convient à une ligne droite.

Les variations de l'angle $\nu'$ sur une même trajectoire sont réglées par la théorie des forces centrales. En effet, dans tout mouvement opéré par une pareille force, les vitesses, en divers points d'une même trajectoire, sont réciproques aux longueurs des perpendiculaires menées du centre des forces sur les tangentes. Ici, pour le point M, la perpendiculaire CP est $r \sin \nu'$; pour le point O, en nommant $a$ le rayon de la couche où l'observateur se trouve, elle est $CP_1$, ou $a \sin \theta_1$. En outre, d'après la théorie des attractions à petites distances, la vitesse en M est $\sqrt{1 + 4k\rho}$; et en O, $\sqrt{1 + 4k_1\rho_1}$. On aura donc généralement

$$(2) \qquad \frac{r \sin \nu'}{a \sin \theta_1} = \frac{\sqrt{1 + 4k_1\rho_1}}{\sqrt{1 + 4k\rho}} \quad \text{ou} \quad \sin \nu' = \frac{a}{r} \frac{\sqrt{1 + 4k_1\rho_1}}{\sqrt{1 + 4k\rho}} . \sin \theta_1 .$$

Dans cette dernière expression le coefficient de $\sin \theta_1$ est la valeur parti-

[19, p. 41]

culière de $\sin \nu'$ qui convient à la trajectoire horizontale de l'observateur, c'est-à-dire à celle qui arrive au point O sous la distance apparente $\theta_1 = 90°$. Désignant donc spécialement par V' les angles $\nu'$ relatifs à cette trajectoire, pour la distance $a$ du centre, nous aurons, dans une même couche quelconque, ayant pour rayon $r$, les deux équations simultanées :

$$(2) \qquad \sin V' = \frac{a\sqrt{1 + 4k_1\rho_1}}{r\sqrt{1 + 4k\rho}}, \qquad \sin \nu' = \sin V' \sin \theta_1 .$$

Ces valeurs de $\sin V'$ et de $\sin \nu'$ seront toujours positives dans notre atmosphère, parce que la force réfringente centrale y étant attractive, n'engendre que des trajectoires concaves vers le centre, sur lesquelles l'angle $\nu'$ ne peut jamais devenir négatif, ni plus grand que 180°.

Veut-on savoir à quelle distance du centre la trajectoire correspondante à la distance $\theta_1$, devient horizontale ? Il n'y a qu'à supposer $\sin v' = 1$ ; et l'on aura, dans les couches où cela a lieu,

$$r\sqrt{1+4k\varrho} = a\sin\theta_1\sqrt{1+4k_1\varrho_1}.$$

Lorsque la constitution adoptée pour l'atmosphère sera assignée, $k\varrho$ sera donnée en $r$. En le substituant dans cette équation l'on en conclura $r$ qui sera la distance au centre des couches, du point où le phénomène a lieu. Ce résultat s'obtiendra ainsi sans intégration, comme je l'ai annoncé précédemment.

[19, p. 42]

[...]

A cet effet, prenons le changement différentiel de $\sin V'$, pour un accroissement infiniment petit de la hauteur, égal à $+dr$. L'expression générale de $\sin V'$, nous donnera

$$d.(\sin V') = -\frac{\sin V'}{r(1+4k\varrho)}\left[1+4k\varrho+2r\frac{d(k\varrho)}{dr}\right]dr.$$

[19, p. 43]

La concavité des trajectoires vers le centre des couches, rend $\sin V'$ toujours positif. Donc, puisque nous supposons $dr$ positif, le signe de la différentielle $d(\sin V')$, sera contraire au signe de la fonction.... $1+4k\varrho+2r\frac{d(k\varrho)}{dr}$. Cette fonction joue un très grand rôle dans les réfractions.

D'après un théorème que je démontrerai plus tard, dans toutes les atmosphères ou $\frac{d(k\varrho)}{dr}$ est négatif, cette fonction est positive, si la réfraction astronomique est plus grande immédiatement au-dessous de l'horizon qu'à l'horizon même. C'est ce qui a lieu dans notre atmosphère, depuis le niveau de la mer jusqu'aux sommets des plus hautes montagnes où l'on ait pu observer les réfractions. Ainsi, dans tout cet intervalle, l'angle $V'$ décroît à mesure qu'on s'élève.

[19, p. 44]

[...]

Pour y parvenir, il faut établir entre les éléments consécutifs de chaque trajectoire la relation suivante, qui a lieu dans toutes les courbes continues :

$$(3) \qquad \tang v' = r\frac{dv}{dr};$$

et, en la joignant aux deux premières,

$$(1) \quad \theta = v + v', \qquad (2) \quad \sin v' = \sin V' \sin\theta_1,$$

on en déduira toutes les équations différentielles qui réglent le mouvement de la lumière dans une atmosphère composée de couches sphériques, dont les pouvoirs réfringents varient d'une manière quelconque en passant d'une couche à une autre.

Veut-on, par exemple, en déduire la nature des trajectoires décrites? Il n'y a qu'à éliminer $v'$ entre (2) et (3). On a ainsi

$$(4) \qquad dv = \pm \frac{\sin\theta_1 \sin V' dr}{r\sqrt{1-\sin^2 V' \sin^2\theta_1}},$$

c'est-à-dire,

$$dv = \pm \frac{adr \sin\theta_1 \sqrt{1+4k_1\rho_1}}{r^2\sqrt{1+4k\rho - \frac{a^2}{r^2}(1+4k_1\rho_1)\sin^2\theta_1}}.$$

Le signe supérieur du radical s'applique au cas où la distance apparente $\theta_1$ est égale à 90°, ou moindre; parce qu'alors la trajectoire, à partir du point O, s'éloignant du centre, $v$ doit croître en même tems que $r$. Lorsque $\theta_1$ surpasse 90°, la trajectoire commence au contraire par se rapprocher du centre, ce qui exige que l'on donne au radical le signe négatif.

[19, p. 48]

[...]

de former l'expression immédiate de $d\theta$, qui est l'élément différentiel de la réfraction. On l'obtiendra en différentiant (1) et (2). En effet, la première donne

$$d\theta = dv + dv';$$

et la seconde

$$r\cos v'\, dv' + \sin v'\, dr = -\frac{a\sin\theta_1 \sqrt{1+4k_1\rho_1}}{(1+4k\rho)^{\frac{3}{2}}} . 2\frac{(dk\rho)}{dr}.dr;$$

ou, en profitant de l'équation (2)

$$r\cos v'\, dv' + \sin v'\, dr = -\frac{r\sin v'}{1+4k\rho}.2\frac{d(k\rho)}{dr}.dr.$$

Or l'équation (3) donne

$$dr \sin v' = r\, dv \cos v'.$$

Substituant cette valeur, tout devient divisible par $r\cos v'$. Le premier membre se réduit ainsi à $dv' + dv$ ou $d\vartheta$; de sorte que l'on a, en définitif,

$$(5) \qquad d\theta = -\frac{2.\frac{d(k\varrho)}{dr}.rdv}{1+4k\varrho}.$$

Si l'on élimine $dv$ au moyen de sa valeur trouvée plus haut, et qu'on écrive simplement $d(k\varrho)$ pour $\frac{d(k\varrho)}{dr}dr$, il vient

$$(6) \qquad d\vartheta = -\frac{2a\sin\theta_1\sqrt{1+4k_1\varrho_1}\,.\,d(k\varrho)}{(1+4k\varrho)r\sqrt{1+4k\varrho-\frac{a^2}{r^2}(1+4k_1\varrho_1)\sin^2\theta_1}}.$$

D'après le mode de décroissement que nous avons attribué au pouvoir réfringent $4k\varrho$, $d(k\varrho)$ est négatif quand $r$ augmente; et, au contraire, $d\theta$ est alors positif. Il faut donc, dans l'expression de $dv$, attribuer au radical le signe positif, comme je l'ai fait ici.

Les équations (4), (5), (6) sont analogues à celles que l'on trouve dans la *Mécanique céleste*, et elles leur deviennent identiques lorsque l'on suppose le coefficient $k$ constant pour toute l'étendue de l'atmosphère, comme l'a fait M. Laplace, et comme l'ont admis également les géomètres qui se sont occupés après lui des réfractions astronomiques. Puisque nos

[19, p. 49]

[...]

Je vais maintenant former une nouvelle expression de l'élément différentielle de la réfraction, qui nous sera d'un très grand usage dans la suite de ce travail.

Si, dans l'équation (5), on remplace $dv$ par sa valeur $d\vartheta - dv'$, on en tire $d\theta$ en $dv'$, ce qui donne

$$(7) \qquad d\theta = \frac{2r\frac{d.(k\varrho)}{dr}}{1+4k\varrho+2r\frac{d(k\varrho)}{dr}}.dv'.$$

Le coefficient de $dv'$ est ici indépendant de $\theta_1$. Il est donc commun à

[19, p. 51]

toutes les trajectoires dirigées au même observateur, sous toutes les distances zénithales apparentes. Faisons, pour abréger,

$$(7) \qquad \mathrm{V} = \frac{\dfrac{2r\,d(k\varrho)}{dr}}{1 + 4k\varrho + \dfrac{2r\,d(k\varrho)}{dr}};$$

il viendra $$d) = \mathrm{V}dv'.$$

A quoi il faut toujours joindre les équations (2), savoir,

$$(2) \qquad \sin v' = \sin \mathrm{V}' \sin \theta_1, \qquad \sin \mathrm{V}' = \frac{a\sqrt{1 + 4k_1\varrho_1}}{r\sqrt{1 + 4k\varrho}}.$$

[19, p. 52]

Ainsi Biot a-t-il trouvé, en passant à la variable $\alpha$, une différentielle dont l'intégrale, qui donne la réfraction, n'est en général pas impropre quand $Z' = 90°$, et qui se prêtera donc bien plus aisément et plus précisément au calcul numérique de la réfraction horizontale par la méthode de Simpson, qu'il effectuera p. 76–81. Avec nos notations, la première équation (7) de Biot [19, p. 51] s'écrit en effet

$$\mathrm{d}\chi = \frac{r\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{n^2}{2}\right)}{n^2 + r\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{n^2}{2}\right)}\mathrm{d}\alpha = \frac{r\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}}{n + r\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}}\mathrm{d}\alpha = \frac{\mathrm{d}\ln n/\mathrm{d}\ln r}{1 + (\mathrm{d}\ln n/\mathrm{d}\ln r)}\mathrm{d}\alpha \qquad (1)$$

qui donne (au signe près à cause du sens de sommation) l'expression (41) du paragraphe 6 de [21]. Si Biot ajoute qu'« il faut toujours joindre les équations (2) », c'est parce que pour intégrer $\mathrm{d}\chi$ avec la variable angulaire $\alpha$, l'intégrande $(\mathrm{d}\ln n/\mathrm{d}\ln r)/[1 + (\mathrm{d}\ln n/\mathrm{d}\ln r)]$ doit être exprimé en fonction de $\alpha$, alors qu'au départ on l'a en fonction de $r$; il s'agit donc de relier $r$ à $\alpha$ pour le rayon donnant la réfraction $\chi_S(Z')$ calculée, or puisque le profil de $\mu(r)$ est supposé connu les équations (2) de Biot [19, p. 52] donnent une relation entre $\alpha$, $r$ et $Z'$, dont il faut tirer (au moins numériquement) $r(\alpha, Z')$ afin d'en déduire $\chi_S(Z')$ par intégration (numérique) de $\mathrm{d}\chi$ par rapport à $\alpha$.

L'aspect laborieux de cette démonstration par Biot est en grande partie dû à son style d'écriture très prolixe (même pour son époque), rempli de nombreuses digressions — on pourra constater qu'entre les pages 41 et 52 de Biot [19] nous en avons sauté plusieurs ! Mais au moment où il écrivait, tant de choses étaient encore relativement nouvelles, méconnues (par exemple, le peu d'influence de la vapeur d'eau) ou très discutables car inconnues (comme la structure de la haute atmosphère et sa composition, etc.), que l'exposé ne pouvait être court s'il voulait être sérieux et formateur. On appréciera le contraste, sur exactement le même sujet, avec la sobriété et la concision de l'article d'Auer et Standish [26] (accepté une vingtaine d'années après sa soumission initiale !) ; ils proposaient sous forme de polycopié dès 1979 [29], indépendamment de Biot, le même changement de variable que lui, et une implémentation utilisant la méthode itérative de Newton–Raphson pour relier $r$ à $\alpha$ (voir l'extrait ci-dessous). La similarité avec le travail de Biot a été mise en évidence par Andrew Young en 2000 [30], [31, section 4.2].

The Astronomical Journal, 119:2472–2474, 2000 May


## ASTRONOMICAL REFRACTION: COMPUTATIONAL METHOD FOR ALL ZENITH ANGLES

Lawrence H. Auer
Los Alamos National Laboratory, Mail Stop B226, Los Alamos, NM 87545; lha@lanl.gov
and
E. Myles Standish
Jet Propulsion Laboratory, Mail Stop 301-150, 4800 Oak Grove Drive, Pasadena, CA 91109; ems@smyles.jpl.nasa.gov
*Received 2000 January 19; accepted 2000 January 20*

ABSTRACT

It is shown that the problem of computing astronomical refraction for any value of the zenith angle may be reduced to a simple, nonsingular, numerical quadrature when the proper choice is made for the independent variable of integration. The angle between the radius vector and the light ray is such a choice. The implementation of the quadrature method is discussed in its general form and illustrated by means of an application to a piecewise polytropic atmosphere. The flexibility, simplicity, and computational efficiency of the method are evident.
*Key words:* methods: numerical

La démonstration tient en une vingtaine de courtes lignes [26, p. 2472].

The astronomical refraction, $R$, for a spherically symmetric atmosphere is given by the integral

$$R = \int_0^{\ln \mu_o} \tan \psi \, d(\ln \mu) , \qquad (1)$$

subject to the invariant relation

$$\mu r \sin \psi = \mu_o r_o \sin \psi_o , \qquad (2)$$

where $\mu$ is the index of refraction, $r$ is the distance from the center of Earth, and $\psi$ is the angle between the light ray and the radius vector, as shown in Figure 1. The subscript $o$ denotes the values at the observer's station. Thus, $\psi_o$ is the apparent zenith angle, often denoted by $z$ or $\zeta$.

In principle, $R$ could be calculated directly from equation (1) by numerical quadrature, but because of numerical difficulties (for $\psi \approx 90°$), it is preferable to use $\psi$ itself as the variable of integration. Taking the logarithmic derivative of equation (2) and substituting into equation (1), we find

$$R = -\int_0^{\psi_o} \frac{d(\ln \mu)}{d(\ln r\mu)} \, d\psi = -\int_0^{\psi_o} \frac{d(\ln \mu)/d(\ln r)}{1 + d(\ln \mu)/d(\ln r)} \, d\psi , \qquad (3)$$

where the value of the integrand as a function of $\psi$ is given by the solution of equation (2).

The integrand of equation (3) is a well-behaved function. It would become singular only for the unlikely atmospheric model given by the relation $\mu \propto 1/r$. Even so, in such a case, $\psi = \text{const}$, as seen by equation (2), and the integral of equation (1) would be trivial.

L'astucieuse trouvaille de Biot, qui n'a guère suscité d'écho au XIX$^{e}$ faute de calculatrices performantes et était tombée dans l'oubli, a connu une résurrection informatique depuis sa redécouverte indépendante par Auer et Standish ! En 1985 Hohenkerk et Sinclair ont proposé une implémentation numérique plus complète et fourni le code Fortran [32] pour le modèle d'atmosphère du *Royal Greenwich Observatory* reprenant celui de Garfinkel [33] et Saastamoinen [34] (une troposphère polytropique surmontée d'une stratosphère isotherme). Cette procédure a été tellement appréciée qu'elle est devenue la technique standard, recommandée par l'*Explanatory supplement to the Astronomical Almanac* depuis 1992. Malgré cette caution, elle est concurrencée [35] par la méthode de Kivalov et Young, et ne doit pas être considérée comme universelle, car elle ne permet pas de traiter les cas où il y a un chenal optique (voir le document [22] lié à l'article [21]) : l'intégrande diverge pour, entre autres, la valeur de $\alpha$ correspondant au bord supérieur du chenal ; et, comme l'a remarqué Andrew Young il y a une vingtaine d'années, la méthode itérative de Newton–Raphson fait de même au voisinage de ce bord [36]. La procédure d'Auer–Standish–Hohenkerk–Sinclair fonctionne bien pour l'atmosphère standard ainsi que pour le modèle du *Royal Greenwich Observatory*, mais elle nécessite des corrections [36], notamment pour des cas plus difficiles comme ceux où il y a un chenal optique.

### 3.2. *Théorème de Biot*

Nous avons vu au sous-paragraphe 7.1.3 de [21] que le changement de variable de Biot est un bon préliminaire pour démontrer son théorème. C'est pourquoi la démonstration de celui-ci commence à l'alinéa suivant la fin de l'extrait précédent de [19], sans aucun sous-titre, ce qui fait que ce début passe inaperçu. Dans un premier temps, Biot doit préciser son vocabulaire et poser des notations supplémentaires ; laissons-lui la parole.

L'expression $\mathrm{V}dv'$, que nous venons de former, nous montre que l'élément différentiel $d\theta$ renferme deux causes de variabilité tout-à-fait distinctes. Ses valeurs diffèrent sur la même trajectoire à des hauteurs diverses, $\theta_1$ restant constant. Elles diffèrent aussi d'une trajectoire à une autre, à hauteur égale. Alors c'est $\theta_1$ seul qui change, et V reste constant. Pour distinguer ces deux genres de variabilité, je conserverai à la première le nom de différentielle, et je donnerai à la seconde le nom de *variation*, en employant la caractéristique particulière $\delta$ pour exprimer ses effets infiniment petits.

Or, si nous faisons varier ainsi $\theta_1$ d'une quantité infiniment petite $\delta\theta_1$, qui sera constante par rapport à la caractéristique $d$, comme l'est $\theta_1$ lui-même, nous aurons

$$\frac{\delta.\,d\vartheta}{\delta\theta_1} = \mathrm{V}\,\frac{\delta.\,dv'}{\delta\theta_1}, \qquad \text{ou } d\left(\frac{\delta\vartheta}{\delta\theta_1}\right) = \mathrm{V}d.\left(\frac{\delta v'}{\delta\vartheta_1}\right).$$

[19, p. 52]

Mais l'équation (2) étant variée, donne

$$\frac{\delta v'}{\delta\theta_1} = \frac{\sin \mathrm{V}'}{\cos v'}\cos\theta_1.$$

Donc, puisque $\theta_1$ est insensible à la caractéristique $d$,

$$d\left(\frac{\delta v'}{\delta\theta_1}\right) = \cos\theta_1\, d\left(\frac{\sin \mathrm{V}'}{\cos v'}\right);$$

et, par suite,

$$d\left(\frac{\delta\vartheta}{\delta\vartheta_1}\right) = \cos\theta_1.\,\mathrm{V}d\left(\frac{\sin \mathrm{V}'}{\cos v'}\right). \qquad (a)$$

En intégrant les deux membres de cette dernière équation relativement à la caractéristique $d$, $\theta_1$ doit être considéré comme constant. Effectuant donc cette intégration par parties, il vient

$$\frac{\delta\theta}{\delta\theta_1} = \frac{\cos\theta_1.\,\mathrm{V}\sin \mathrm{V}'}{\cos v'} - \cos\theta_1\int\frac{\sin \mathrm{V}'}{\cos v'}.\,d\mathrm{V}.$$

La partie intégrée doit être prise depuis la limite extrême de l'atmosphère réfringente, jusqu'à la station où se trouve l'observateur. A ce dernier point on a toujours $\nu' = \theta_{\iota}$, et $\sin V' = 1$ par la définition même de ces quantités. Quant à la fonction V, elle y prend une certaine valeur spéciale résultante du mode de constitution attribué à l'atmosphère, et que je désignerai par $V_{\iota}$. Ce sera aussi la valeur de la fonction $\dfrac{\cos\theta_{\iota}.V.\sin V'}{\cos\nu'}$ pour le point d'observation, quelle que soit la trajectoire que l'on considère.

(Dans l'équation précédente qui montre une intégration par parties, il faut considérer la variation du premier terme de l'intégration, entre les bornes, comme Biot l'explique juste en dessous) [19, p. 53]

Examinons maintenant l'autre limite. Si l'atmosphère réfringente est supposée indéfinie, $V'$ y devient nul, ainsi que $\nu'$; et comme la fonction V ne devient jamais infinie, et même, dans notre atmosphère, ne fait que décroître à mesure qu'on s'élève, le produit $\dfrac{\cos\theta_{\iota}.V\sin V'}{\cos\nu'}$ s'évanouit à cette seconde limite, quel que soit $\theta_{\iota}$. La valeur définie totale de la partie intégrée est donc alors

$$+\,0 - V_{\iota}, \qquad \text{ou} \qquad - V_{\iota}.$$

Mais si l'atmosphère réfringente n'a qu'une étendue bornée, l'angle $V'$ peut ne pas être nul à sa limite, et y prendre une certaine valeur particulière que je désignerai par ${}_{\iota}V'$. Marquant de même, par un indice antérieur, les valeurs spéciales de V et de $\nu'$ qui y correspondent, la partie

[19, p. 53]

intégrée deviendra alors $\dfrac{\cos\theta_{\iota}\,{}_{\iota}V\sin{}_{\iota}V'}{\cos{}_{\iota}\nu'}$; et la valeur définie de toute l'intégrale effectuée sera

$$\frac{\cos\theta_{\iota}\,{}_{\iota}V\sin{}_{\iota}V'}{\cos{}_{\iota}\nu'} - V_{\iota}.$$

De sorte qu'en la joignant à la partie qui reste à intégrer, on aura

$$(b) \qquad \frac{\delta\theta}{\delta\theta_{\iota}} = \frac{\cos\theta_{\iota}\,{}_{\iota}V\sin{}_{\iota}V'}{\cos{}_{\iota}\nu'} - V_{\iota} - \cos\theta_{\iota}\int\frac{\sin V'}{\cos\nu'}\,dV.$$

Il importe de remarquer que $\cos{}_{\iota}\nu'$ ne peut jamais devenir nul, quel que soit la trajectoire que l'on considère, dans des atmosphères où les points lumineux extérieurs sont visibles par des trajectoires horizontales non-rentrantes; car alors $V'$ ne peut être 90° qu'à la station d'observation, et à plus forte raison aussi ${}_{\iota}\nu'$. Nous savons, en outre, que ${}_{\iota}V$ n'est jamais infini. Conséquemment, le produit $\dfrac{\cos\theta_{\iota}.{}_{\iota}V\sin{}_{\iota}V'}{\cos{}_{\iota}\nu'}$ s'évanouira toujours pour la trajectoire horizontale, relativement à laquelle la distance apparente $\theta_{\iota} = 90°$.

Or, je dis que le produit $\cos\theta_1 \int \frac{\sin V'}{\cos v'}\, dV$ s'évanouira aussi dans la même circonstance. Car, à la vérité, la première valeur de $v'$, qui a lieu à la station d'observation, se trouve être alors 90°, parce qu'elle est toujours égale à $\theta_1$ ; et ainsi $\cos v'$ devient nul en ce point de la trajectoire, ce qui y rend infini le facteur $\frac{\sin V'}{\cos v'}$. Mais cela n'a lieu rigoureusement qu'en ce point unique de la trajectoire; car, pour tout autre, si peu élevé qu'il soit au-dessus de la station, $v'$ devient moindre que 90°. Les éléments $\frac{\sin V'}{\cos v'} dV$ de l'intégrale à effectuer sont donc tous infiniment petits, excepté un seul. Or, pour celui-là même, $v'$ est toujours égal à $\theta_1$; et il ne devient 90° qu'en même tems que lui. Séparons donc cet élément de tous les autres, en marquant d'un indice inférieur la valeur particulière de $dV$ qui s'y rapporte, nous aurons alors généralement

$$\cos\theta_1 \int \frac{\sin V'}{\cos v'}\, dV = (dV)_1 + \cos\theta_1 \int \frac{\sin V'}{\cos v'}\, dV.$$

Le reste de l'intégration est supposé comprendre tous les autres éléments pour lesquels $v'$ est moindre que 90°. Toute cette partie s'évanouira donc rigoureusement sous l'influence du facteur $\cos\theta_1$, lorsque $\theta_1$ sera égal

[19, p. 54]

à 90° ; et il restera seulement l'élément différentiel unique $(dV)_1$, qui, étant infiniment petit par lui-même, sera insensible dans la valeur finie de $\frac{\delta\theta}{\delta\theta_1}$.

Conséquemment, quelle que soit la loi de décroissement des pouvoirs réfringents à mesure qu'on s'élève au-dessus de la couche où l'observateur est placé, que cette loi donne à l'atmosphère une étendue indéfinie, ou la termine à une valeur fixe de $r$, pourvu qu'au niveau de la station, et dans les couches situées au-dessus, il n'en résulte pas des trajectoires horizontales rentrantes, les termes multipliés par $\cos\theta_1$, dans l'expression de $\frac{\delta\theta}{\delta\vartheta_1}$, s'évanouiront toujours lorsque $\theta_1$ sera égal à 90°, ce qui a lieu précisément pour la trajectoire qui arrive horizontale à l'observateur. Désignant donc par l'indice $_q$ la valeur particulière de $\frac{\delta\theta}{\delta\theta_1}$ qui s'y rapporte, on aura simplement

$$\left(\frac{\delta\theta}{\delta\theta_1}\right)_q = -V_1.$$

$V_1$ est la valeur de la fonction $V$ au point où l'observateur se trouve, c'est-à-dire lorsque $r = a$ et $\varrho = \varrho_1$. Désignant aussi par $\left[\frac{d(k\varrho)}{dr}\right]_1$ la valeur particulière de $\frac{d(k\varrho)}{dr}$ qui a lieu en ce point, il viendra

$$(c) \qquad \left(\frac{\delta\theta}{\delta\theta_1}\right)_q = -\frac{2a\left[\frac{d(k\varrho)}{dr}\right]_1}{1+4k_1\varrho_1+2a\left[\frac{d(k\varrho)}{dr}\right]_1}.$$

[19, p. 55]

On voit qu'à partir du milieu de la p. 54, Biot a dû traiter une intégrale impropre, et que les moyens à sa disposition pour cela étaient encore fort peu formalisés.

Rappelons que Biot supposait $n^2(r) - 1$ proportionnel à la masse volumique de l'air; avec nos notations, cette dernière relation ($c$) de Biot [19, p. 55] s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\chi_S}{\mathrm{d}Z'}(90°) = -\frac{r_S\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{n^2}{2}\right)_S}{n_S^2 + r_S\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{n^2}{2}\right)_S}, \tag{2}$$

soit, en introduisant $\kappa_S = -(r_S/n_S)(\mathrm{d}n/\mathrm{d}r)_S$ qui est par définition le coefficient de réfraction en $S$ (voir le sous-paragraphe 7.1.1 de [21]) :

$$\frac{\mathrm{d}\chi_S}{\mathrm{d}\psi'}(0) = -\frac{\mathrm{d}\chi_S}{\mathrm{d}Z'}(90°) = \frac{r_S\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\right)_S}{n_S + r_S\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\right)_S} = \frac{-\kappa_S}{1-\kappa_S}. \tag{3}$$

Biot n'indique pas le lien entre $\kappa_S$ et le gradient thermique en $S$, ni ne donne explicitement $\gamma_{Sh}$, i.e. $\left[\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\psi'(0)\right]^{-1}$, mais le lien avec $\mathrm{d}\chi_S/\mathrm{d}\psi'(0)$ est trivial (voir la relation (53) du sous-paragraphe 7.1.3 de [21]) ; on peut lui en faire crédit, d'autant plus que dans le second tome de son traité d'*Astronomie physique* (1811) il a calculé — quoique de manière trop simpliste — l'aplatissement de la Lune vue sur l'horizon [37, p. 558-560], ce qui témoigne de son intérêt ancien pour ce sujet.

On aura constaté, en suivant la démonstration de Biot, que son résultat ($c$) [19, p. 55] ne suppose pas l'atmosphère bien mélangée ; ayant conscience de la non-uniformité de l'hygrométrie en fonction de l'altitude, et dans le doute quant à l'apparition d'autres constituants de l'air à des altitudes encore non atteintes à son époque, Biot privilégiait la recherche de lois indépendantes de l'uniformité de composition de l'atmosphère. Nous achevons cet article en montrant l'endroit précis où, dans les équations, l'idée d'une composition variable de façon *a priori* inconnue avec l'altitude $z$ complique le problème inverse (i.e. celui de la détermination de la structure de l'atmosphère à partir des mesures de réfraction à différentes distances zénithales), sur lequel, comme nous le verrons, Biot ne se faisait guère d'illusions.

## 3.3. *Biot et le problème inverse*

Biot considérait à tort l'atmosphère bornée, mais il savait à juste titre que l'influence de la structure de ses parties hautes est infime sur la réfraction [19, p. 112] : « [. . .] les valeurs observées des réfractions astronomiques ne peuvent rien nous apprendre de certain sur l'état réel des dernières régions de l'atmosphère, parce que la constitution et le mode de superposition de couches qui les composent n'y exercent pas une influence appréciable pour nous. » — voir aussi [38], dans ce numéro spécial.

De plus, le traitement du problème inverse donnerait d'abord le profil d'indice $n(z)$ en fonction de l'altitude $z$, à $\lambda_0$ fixé. On pourrait en déduire simplement $\mu(z)$ qui lui serait proportionnel, en appliquant la loi empirique de Gladstone–Dale, si l'on savait que sa constante de proportionnalité $C$ (cf. la Table 1, au début du paragraphe 3) est indépendante de $z$. Mais cela suppose un titre molaire en vapeur d'eau indépendant de $z$, ce qui n'est pas vrai : il varie beaucoup sur les deux premiers kilomètres d'altitude — l'air n'est pas bien mélangé. À 20 °C et 1 atm, quand le degré hygrométrique varie de 0 à 100 %, $\mu$ passe de 1,20411 à 1,20401 $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, soit une variation de −0,009 % ; et pour la raie d de l'hélium à $\lambda_0 = 588$ nm, $n-1$ passe de $2{,}724 \times 10^{-4}$ à $2{,}716 \times 10^{-4}$, soit une variation de −0,3 % (voir le paragraphe 3 de [25]), donc $C(\lambda_0, M)$ varie de −0,3 %. En 1836 déjà, Biot avait conscience de ce problème, quand il écrivait que son paramètre $k$ (cf. la Table 1) est pour l'air « un coefficient dépendant de sa nature chimique, lequel, dans une atmosphère sphérique de composition non-uniforme, devra être supposé une fonction de $r$ [...] » [19, p. 34].

> « [...] l'air atmosphérique, même sec, n'est pas un gaz simple, mais un mélange d'oxigène [*sic*], d'azote, et de quelques millièmes d'acide carbonique tel qu'on le trouve naturellement à la surface de la terre. On s'est assuré que les proportions de ce mélange sont, à très peu près, sinon exactement, les mêmes, dans toutes les saisons, dans tous les climats, et à toutes les hauteurs que l'homme a pu atteindre. Cette uniformité parait d'autant plus naturelle qu'elle s'accorde avec la loi physique de la diffusion des gaz [...] Néanmoins, on ne peut savoir si cette parfaite égalité de répartition [...] s'opère aussi complètement dans des espaces libres, sous des conditions de pression et de température aussi excessivement inégales qu'elles le sont depuis le haut jusqu'au bas de l'atmosphère ; et il se pourrait qu'elle dût y rester imparfaite, ou qu'elle exigeât, pour devenir complète, un temps que la durée de l'atmosphère n'aurait pas encore atteint. C'est pourquoi [...] nous [...] admettrons [le coefficient $k$] généralement comme susceptible de varier avec [la] hauteur [...] ; et nous tâcherons de développer surtout les lois des réfractions astronomiques qui seraient indépendantes de pareilles variations [...] » [19, p. 36–37].

## Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

## Remerciements

L'auteur exprime sa reconnaissance au Dr. Andrew Young pour la mise à disposition de sa fabuleuse bibliographie en ligne (citée à la fin du paragraphe 2) et pour ses conseils personnalisés. Il remercie aussi, pour le document ayant permis de produire les images de [19] mises au paragraphe 3, le Dr. Siebren van der Werf et la Bibliothèque de l'Université d'Utrecht qui a scanné l'article [19] entier à la demande de celui-ci. Enfin, il exprime sa gratitude à Lilie Pons (secrétaire éditoriale — Centre Mersenne) pour son précieux travail technique sur les images de textes anciens.

## Références


[1] J.-P. Poirier, *Jean-Baptiste Biot (1774–1862) Un savant méconnu*, Hermann, Paris, 2011.
[2] J.-B. Biot, F. Arago, « Sur les affinités des corps pour la lumière, et particulièrement sur les forces réfringentes des différens gaz », *Mém. Inst.* **7** (1806), p. 39-66.
[3] J.-B. Biot, *Recherches sur les réfractions extraordinaires qui ont lieu près de l'horizon*, Garnery, Paris, 1810.
[4] J.-B. Biot, « Sur les réfractions astronomiques », *C. R. Acad. Sci.* **3** (1836), p. 237-244.
[5] J.-B. Biot, « Note additionnelle à un mémoire sur les réfractions atmosphériques », *C. R. Acad. Sci.* **3** (1836), p. 504.
[6] J.-B. Biot, « Sur la constitution des régions supérieures de l'atmosphère terrestre », *C. R. Acad. Sci.* **3** (1836), p. 597-604.
[7] J.-B. Biot, « Remarques sur quelques points d'une discussion élevée dans la 7e réunion de l'Association Britannique pour l'avancement des sciences, partie Mathématique », *C. R. Acad. Sci.* **6** (1838), p. 71-78.
[8] J.-B. Biot, « Sur la vraie constitution de l'atmosphère terrestre déduit de l'expérience, avec ses applications à la mesure des hauteurs par les observations barométriques, et au calcul des réfractions », *C. R. Acad. Sci.* **6** (1838), p. 390-401.
[9] J.-B. Biot, « Addition au mémoire sur la constitution physique de l'atmosphère terrestre », *C. R. Acad. Sci.* **6** (1838), p. 479-481.
[10] J.-B. Biot, « Note lue par M. Biot, à l'occasion du Compte rendu de la dernière séance », *C. R. Acad. Sci.* **39** (1854), p. 445-448.
[11] J.-B. Biot, « Note sur les articles relatifs aux réfractions atmosphériques, inserés au dernier numéro du Compte rendu », *C. R. Acad. Sci.* **39** (1854), p. 517-519.
[12] J.-B. Biot, « Sur les réfractions atmosphériques », *C. R. Acad. Sci.* **39** (1854), p. 567-580.
[13] J.-B. Biot, « Sur la théorie des réfractions atmosphériques », *C. R. Acad. Sci.* **39** (1854), p. 708-721.
[14] J.-B. Biot, « Sur la théorie des réfractions atmosphériques », *C. R. Acad. Sci.* **39** (1854), p. 817-828.
[15] J.-B. Biot, « Sur la théorie des réfractions atmosphériques », *C. R. Acad. Sci.* **39** (1854), p. 933-949.
[16] J.-B. Biot, « Sur le degré de confiance que l'on doit accorder aux Tables de réfractions actuelles. Détermination des circonstances hors desquelles leur application cesse d'être légitime », *C. R. Acad. Sci.* **40** (1855), p. 83-96.
[17] J.-B. Biot, « Note de M. Biot sur l'ensemble des articles relatifs aux réfractions atmosphériques insérés par lui dans les Comptes rendus précédents », *C. R. Acad. Sci.* **40** (1855), p. 597-604.
[18] J.-B. Biot, « Analyse des Tables de réfraction construites par Newton, avec l'indication des procédés numériques par lesquels il a pu les calculer », *J. Savants* (1836), p. 735-754.
[19] J.-B. Biot, « Sur les réfractions astronomiques », *Additions à la Connaissance des Tems* **1839** (1836), p. 3-114.
[20] J.-B. Biot, « Sur la vraie constitution de l'atmosphère terrestre déduite de l'expérience, avec ses applications à la mesure des hauteurs par les observations barométriques, et au calcul des réfractions », *Additions à la Connaissance des Temps* **1841** (1838), p. 3-112.
[21] L. Dettwiller, « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique », *C. R. Phys.* **23** (2022), nº S1, p. 63-102.
[22] L. Dettwiller, « Properties of optical ducts, their chromatism and its effects on astronomical refraction », 2022, *preprint*, https://arxiv.org/abs/2204.02605.
[23] L. Dettwiller, « La discussion par Kummer d'une quadrature sur la réfraction astronomique : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), nº S1, p. 503-525.
[24] L. Dettwiller, « Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre », *C. R. Phys.* **23** (2022), nº S1, p. 103-132.
[25] L. Dettwiller, « Short review on the refractive index of air as a function of temperature, pressure, humidity and ionization », 2022, *preprint*, https://arxiv.org/abs/2204.02603.
[26] L. Auer, E. M. Standish, « Astronomical refraction: Computational method for all zenith angles », *Astron. J.* **119** (2000), p. 2472-2474.
[27] L. Dettwiller, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie », *C. R. Phys.* **23** (2022), nº S1, p. 13-62.
[28] J. Ivory, « On the astronomical refractions », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* (1823), p. 409-495.
[29] L. H. Auer, E. M. Standish, « Astronomical refraction: Computational method for all zenith angles », Tech. report, Yale University Astronomy Dept., 1979.
[30] A. T. Young, « "J. B. Biot and refraction calculations", American Astronomical Society, 197th AAS Meeting, », *Bull. AAS* **32** (2000), p. 1383.
[31] A. T. Young, « Sunset Science. IV. Low-altitude refraction », *Astron. J.* **127** (2004), p. 3622-3637.
[32] C. Y. Hohenkerk, A. T. Sinclair, « The computation of angular atmospheric refraction at large zenith angles », 1985, Nautical Almanac Office Tech. Note 63, H. M. Nautical Almanac Office, Royal Greenwich Observatory, Londres, p. 1–12.
[33] B. Garfinkel, « Astronomical refraction in a polytropic atmosphere », *Astron. J.* **72** (1967), p. 235-254.
[34] J. Saastamoinen, « Contributions to the theory of atmospheric refraction. Part II. Refraction corrections in satellite geodesy », *Bull. Géod.* **47** (1973), p. 13-34.

[35] S. N. Kivalov, A. T. Young, « Horizontal magnification of finite-sized celestial objects », *Appl. Opt.* **49** (2010), p. 2720-2727.
[36] A. T. Young, communication privée.
[37] J.-B. Biot, *Traité Élémentaire d'Astronomie Physique,* t. 2, Bernard, Paris, 1811.
[38] A. T. Young, « Relations among atmospheric structure, refraction, and extinction », *C. R. Phys.* **23** (2022), nº S1, p. 179-212.