



INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus

Physique

Luc Dettwiller

**La discussion par Kummer d'une quadrature sur la réfraction astronomique :
commentaire historique**

Volume 23, Special Issue S1 (2022), p. 503-525

Published online: 21 February 2023

Issue date: 27 October 2023

<https://doi.org/10.5802/crphys.118>

Part of Special Issue: Astronomie, atmosphères et réfraction

Guest editors: Pierre Léna (Professeur émérite, Observatoire de Paris et Université Paris Cité, membre de l'Académie des sciences) and Luc Dettwiller (Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France)

This article is licensed under the
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION 4.0 INTERNATIONAL LICENSE.
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Les Comptes Rendus. Physique sont membres du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

www.centre-mersenne.org

e-ISSN : 1878-1535



Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

La discussion par Kummer d'une quadrature sur la réfraction astronomique : commentaire historique

*Kummer's discussion of a quadrature on astronomical
refraction: an historical commentary*

Luc Dettwiller^{® a}

^a Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School,
Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France

Courriel: dettwiller.luc@gmail.com

Résumé. Dans un mémoire de 1860, Kummer (1810–1893) discute analytiquement les conséquences de la quadrature régissant les rayons lumineux dans un milieu à symétrie sphérique. Son approche est ici présentée, et sa fécondité illustrée par sa traduction graphique dans le diagramme de Young–Kattawar (1998). Une classification détaillée des phénomènes possibles s'en déduit — dont les effets *hillingar* et *hafgerdingar*, l'apparition d'horizons multiples — dans le cas d'observations au travers d'une couche d'inversion raide. Ces considérations sont appliquées à la discussion des corrections — dont celle de la dépression de l'horizon — qui sont indispensables à une précision correcte en navigation astronomique.

Abstract. In an 1860 memoir, Kummer (1810–1893) discusses analytically the consequences of light rays' quadrature in a spherically symmetrical medium. This fertile approach is illustrated here by showing its graphical translation using the Young–Kattawar diagram (1998). A detailed classification of occurring phenomena is derived for the case of vision through a steep inversion layer: e.g. *hillingar* and *hafgerdingar* effects, multiple horizons. These considerations help discussing the corrections which are essential for an accurate astronomical navigation, including horizon's depression.

Published online: 21 February 2023, Issue date: 27 October 2023

1. Introduction

Nous avons déjà commenté ([1] dans ce numéro spécial) un texte mathématique de Lambert (1758), un des premiers (avec Euler en 1754) qui étudie la réfraction astronomique à l'aide d'un

développement en série, et qui montre pour cela deux séries possibles, en insistant sur le fait que la seconde converge plus vite.

Le mathématicien Ernst Kummer (1810–1893), qui a justement inventé une méthode d'accélération de la convergence d'une série en 1837 [2], publie ensuite aussi sur la réfraction en 1860 — une année avant de fonder le premier séminaire allemand de mathématiques. Docteur en 1831 de l'université de Halle, où il avait commencé des études en théologie, il enseigne d'abord une dizaine d'années au lycée de Leignitz ; ses premiers travaux datent de cette époque (en 1836 il publie un remarquable article d'analyse donnant 24 solutions de l'équation hypergéométrique avec des séries associées), mais l'essentiel de ses travaux ultérieurs porte sur des questions d'algèbre. En 1840 il est nommé Professeur à l'université de Breslau, puis de Berlin en 1855 — année où il devint aussi membre à part entière de l'Académie de Berlin. Avec Kronecker et Weierstrass, eux aussi à Berlin, il dominera les mathématiques allemandes pendant une vingtaine d'années. Son étude sur la réfraction date de cette période, trois ans avant son élection au poste de Secrétaire de cette Académie, qu'il tiendra jusqu'en 1878. Il sera aussi membre de l'Académie des sciences de Paris, et de la *Royal Society* de Londres.

Son texte qui nous intéresse [3] est

E. E. Kummer, « Über atmosphärische Strahlenbrechung », *Monatsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* 5 (1860), p. 405-420,

dont il existe une traduction française par Émile Verdet [4] :

É. Verdet, « Mémoire sur la réfraction atmosphérique par M. Kummer », *Ann. Chim. Phys.*, série 3, 61 (1861), p. 496-507.

(496 .)

MÉMOIRES SUR LA PHYSIQUE PUBLIÉS À L'ÉTRANGER:

EXTRAITS PAR M. VERDET.

Mémoire sur la réfraction atmosphérique ; par M. Kummer (1).

— Lu à l'Académie des Sciences de Berlin, le 12 juillet 1860.

On n'a ordinairement considéré l'influence d'une atmosphère de densité variable sur la marche des rayons lumineux qu'en vue d'éclairer la théorie des réfractions

astronomiques ou géodésiques, et par conséquent on a restreint le problème aux cas qui se présentent habituellement à la surface de notre planète. M. Kummer, en écartant ces restrictions, a obtenu quelques résultats très-intéressants, dont la démonstration n'offre aucune difficulté.

On sait que dans un milieu où l'indice de réfraction n est une fonction continue des coordonnées x, y, z , les équations différentielles de la trajectoire d'un rayon lumineux sont

$$\frac{d \cdot n \frac{dx}{ds}}{ds} = \frac{dn}{dx},$$

$$\frac{d \cdot n \frac{dy}{ds}}{ds} = \frac{dn}{dy},$$

(1) *Monatsberichte der Akademie zu Berlin*; année 1860, p. 405.

[4, p. 496] Source : gallica.bnf.fr / BnF

Comme Lambert avant lui, Kummer se penche sur la réfraction, non pas en tant que physicien, mais en tant que mathématicien : il examine diverses conséquences de la quadrature (vue au sous-paragraphe 7.2.2 de notre exposé des « propriétés remarquables de la réfraction astronomique [...] » [5] dans ce numéro spécial, et détaillée dans le document [6] lié à lui) régissant les rayons lumineux dans un milieu à symétrie sphérique, d'indice de réfraction $n(r)$. L'utilisation de cette quadrature dans ce contexte était nouvelle à l'époque. Kummer considère des atmosphères imaginaires, ne produisant pas d'extinction de la lumière, et beaucoup plus denses que celles de la Terre ; contrairement à Bravais qui avait rédigé une *Notice sur le mirage* sept années auparavant [7], il ne se penche pas sur les observations réelles faites dans des cas voisins. L'intérêt réside dans les conséquences inédites qu'il en tire, et qui affinent mathématiquement celles de Bravais (qu'il ne mentionne pas) quant à la visibilité de l'horizon, qui n'est pas un objet céleste ; ce texte ne traite donc pas de réfraction astronomique, mais plutôt de réfraction atmosphérique, comme le dit bien son titre. Nous le présentons quand même, d'une part car il illustre bien la puissance de la discussion par quadrature, d'autre part car il permet de mieux comprendre certaines propriétés de la dépression de l'horizon — i.e. l'angle δ égal à la hauteur de l'horizon astronomique par rapport à l'horizon (réel, dit aussi « horizon sensible », qui usuellement est plus bas — mais dans le cas contraire $\delta < 0$). Ceci a une grande importance pour la navigation astronomique (une discipline toujours d'actualité pour la marine comme nous l'avons annoncé dans notre « panorama historique [...] » [8] dans ce numéro spécial) ; la première table de δ semble due à Wright en 1599 [9].

Nous commentons la version française de cet article de Kummer ; elle est disponible sur Gallica : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k348044?rk=21459;2>.

2. Résumé et commentaires

Kummer commence par prouver l'invariant de Bouguer I_B [4, p. 497–498], par une démarche très voisine de la nôtre vue au sous-paragraphe 4.2 de [5] ; pour étudier les rayons lumineux

en coordonnées polaires (r, θ) , il arrive ainsi (p. 498) à la quadrature citée ci-dessus — avec les notations de [5] (voir aussi la Table 1),

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = r^2 \left[\frac{f^2(r)}{I_B^2} - 1 \right] := h(r, I_B) \quad \text{où } f(r) := r \times n(r) \quad (1)$$

(le symbole $:=$ indiquant une définition ou une notation). Ensuite, pour un rayon donné (et donc I_B fixé) partant de l'origine sur la surface de la mer ou du sol (supposé parfaitement sphérique et où $r = r_0$), il discute l'intégrale donnant $\theta(r)$ en considérant que la première annulation de h pour $r \geq r_0$ est en $r_0 + b$, et en distinguant le cas où c'est une annulation simple (i.e. d'ordre 1) ou bien une annulation d'ordre 2 ou plus — ce qui fait que le rayon lumineux a un cercle asymptote de rayon $r_0 + b$. Si ce cercle est sur la frontière haute d'un chenal optique (notion définie dans le paragraphe 3 de [6]), alors grâce aux rayons voisins un observateur S devrait voir (dans une atmosphère idéale qui n'absorberait ni ne diffuserait la lumière) une infinité d'anneaux contigus centrés sur le zénith, montrant chacun une image de toute la voûte céleste, et se tassant contre un « niveau d'accumulation » ; si en plus le sol (ou la surface de la mer) est dans le chenal, alors S doit voir aussi une infinité d'images annulaires contiguës de toute la surface terrestre, se tassant contre le même niveau d'accumulation. À cause du caractère idéal de l'atmosphère considérée, cette étude a un intérêt académique mais ne s'applique pas aux situations réelles de l'optique atmosphérique.

Verdet n'a traduit littéralement que l'introduction. Pour la suite, il a réécrit une bonne part du travail de Kummer, afin de le présenter plus clairement et de manière plus compacte.

Pour des détails sur les republications et sur une traduction anglaise, voir

A. T. Young. (Page consultée le 12 janvier 2022), *Annotated bibliography of mirages, green flashes, atmospheric refraction, etc.*, [En ligne]. Adresse URL : <https://aty.sdsu.edu/bibliog/bibliog.html>.

3. Présentation illustrée de l'idée fondamentale

En partant de la quadrature (1), et en introduisant les variables u et v définies dans la Table 1, Kummer s'apprête à discuter la fonction donnant u (proportionnel à l'angle polaire — dont l'origine est au point de départ du rayon au sol) en fonction de la hauteur $v := r - r_0$ au-dessus du sol. Regardons, juste après la Table 1, comment il procède.

Correspondance des notations

TABLE 1. Notations (le symbole $:=$ indique une définition)

Notations de Verdet–Kummer [4]	Notations de Dettwiller [5, 8] dans ce numéro de <i>C. R. Phys.</i>	Indications [et unités usuelles]
R	r_0	Rayon terrestre [km]
$n(r)$	$n(r)$	Indice de réfraction de l'air, dont la distribution est supposée à symétrie sphérique de centre C
r, φ	r, θ	Coordonnées polaires (telles que $r = 0$ en C) pour un point courant M d'un rayon lumineux (R) [m, km], [°, ', "]
ds	ds	Abscisse curviligne élémentaire le long de (R) [m]
C	I_B	Invariant de Bouguer [km]
i	Z'	Distance zénithale apparente du point A d'un astre [°, ', "]
u	$r_0 \theta$	Abscisse géodésique de M [km]
v	$r - r_0$	Altitude de M [m, km]
$k := n_0^2 - 1$	$n^2(r_0) - 1$	Grandeur souvent considérée en optique au xix ^e
V	$f^2(r) - I_B^2$	Grandeur intervenant dans la quadrature de (R) — voir [5, 6]

$$C = R n_0 \sin i,$$

et

$$u = \int_0^\nu \frac{R^2 n_0 \sin i \, d\nu}{(R + \nu) \sqrt{(R + \nu)^2 n^2 - R^2 n_0^2 \sin^2 i}}.$$

On admettra pour discuter cette expression que l'indice de réfraction, toujours plus grand que l'unité, est une fonction continue de la seule hauteur ν , qui tend vers une limite finie lorsque ν devient infini, et dont les deux premières dérivées ne deviennent infinies pour aucune valeur positive de ν .

On supposera d'abord que pour toute valeur de ν l'expression

$$V = (R + \nu)^2 n^2 - R^2 n_0^2 \sin^2 i$$

garde une valeur positive différente de zéro. S'il en est ainsi, on démontre aisément que l'intégrale qui donne la valeur de u , prise entre les limites 0 et ∞ , conserve une valeur finie; en désignant cette valeur par c , l'équation

$$u = c$$

représente une asymptote dont la trajectoire lumineuse s'approche indéfiniment à mesure qu'elle s'écarte de la planète. Réciproquement un point situé à une très-grande

[...]

[4, p. 499] Source : gallica.bnf.fr / BnF

Supposons, au contraire, que V s'annule pour une ou plusieurs valeurs positives de ν , et soit b la plus petite de ces valeurs, a la valeur de u correspondante. On aura

$$a = \int_0^b \frac{R^2 n_0 \sin i \, d\nu}{(R + \nu) \sqrt{V}}.$$

On a d'ailleurs, en vertu du théorème de Taylor, en désignant par $V(\nu)$ la valeur de V qui répond à une valeur particulière de la variable plus petite que b ,

$$V(\nu) = V(b) - (b - \nu) V'(b) + \frac{(b - \nu)^2}{1 \cdot 2} V''(\varepsilon),$$

ν étant compris entre 0 et b . Donc si $V'(b)$ n'est pas nul en même temps que $V(b)$, c'est-à-dire si, lorsque ν passe par la valeur b , V s'annule en changeant de signe, on pourra poser

$$V = (b - \nu) W,$$

W étant une fonction de ν qui demeure finie et différente de zéro pour $\nu = b$. On en conclura, en appliquant les règles relatives aux intégrales définies singulières, que la valeur ci-dessus de a est finie. Au contraire, si $V'(b)$ s'annule en même temps que $V(b)$, on devra poser

$$V = (b - \nu)^2 W,$$

W étant une fonction de ν qui ne devient pas infinie pour $\nu = b$, et on en conclura que la valeur de a est infinie.

Dans le premier cas, a étant fini, la trajectoire du

[4, p. 500] (I doit être changé en ε) Source : gallica.bnf.fr / BnF

(501)

rayon s'élève de l'origine jusqu'au point dont les coordonnées sont a et b ; comme ensuite ν ne peut dépasser la valeur b sans que \sqrt{V} devienne imaginaire, on doit, lorsque cette valeur est atteinte, considérer ν comme décroissant et attribuer le signe — à $d\nu$. On détermine ainsi une seconde partie de la trajectoire, exactement symétrique de la première, qui par conséquent va rencontrer la surface de la planète au point dont l'abscisse est $2a$. Il est évident que cette marche des rayons lumineux constitue précisément le *mirage supérieur* des physiciens.

Dans le second cas, a devenant infini lorsque b tend vers la valeur finie b , la trajectoire lumineuse tourne indéfiniment autour de la planète en s'approchant du cercle asymptote dont le rayon est $R + b$.

[...]

[4, p. 501] (« lorsque b tend » doit être remplacé par « lorsque v tend »).

Source : gallica.bnf.fr / BnF

Ce second cas équivaut à celui où $h(r, I_B)$ présente une annulation d'ordre 2 ou plus en $r = r_0 + b$; il équivaut aussi à celui où le graphe de la fonction f , supposée différentiable sur un voisinage de $r_0 + b := r_m$ et deux fois différentiable en r_m , est tangent — voir la Figure 1 — en r_m à l'horizontale d'ordonnée $I_m := f(r_m)$ avec $I_B = I_m$, comme le montre facilement le calcul de $(\partial h / \partial r)(r_m, I_m)$ en fonction de la dérivée $f'(r_m)$. Dans ce cas-là $\int_{r_0}^{r_m} (dr / \sqrt{h(r, I_m)})$ diverge, comme le montre immédiatement un équivalent de $h(r, I_m)$ au voisinage de r_m .

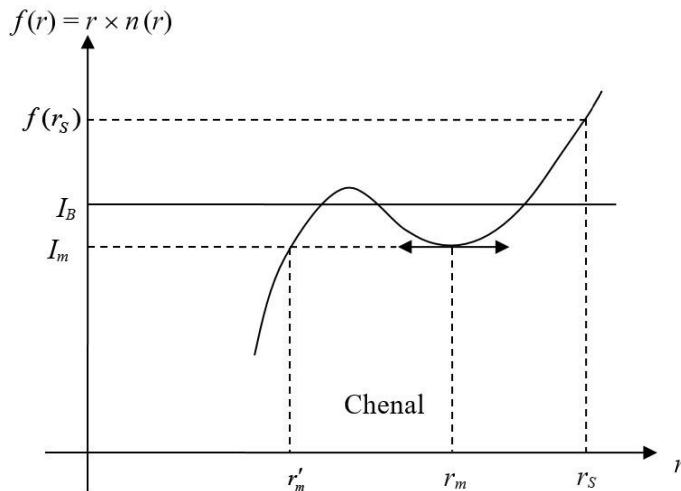


FIGURE 1. Diagramme de Young-Kattawar dans le cas d'un chenal optique (qui correspond ici à $[r'_m, r_m]$). Dans les cas usuels de physique atmosphérique, la partie *décroissante* du graphe correspond *par définition* à la couche d'inversion *raide* de température dans l'air. Dans le second cas de Kummer, $I_B = I_m$.

Pour appliquer ces considérations aux diverses planètes du système solaire, on devra les supposer parfaitement sphériques et négliger la variation de la température de l'atmosphère qui dépend des coordonnées géographiques. On pourra même, dans une première approximation, négliger la variation qui dépend de la hauteur, et représenter en conséquence le rapport de la densité d'une couche atmosphérique de hauteur ν à la densité de la couche superficielle par l'expression connue

$$e^{-\frac{R\nu}{\lambda(R+\nu)}},$$

où λ désigne la hauteur d'une colonne ayant partout la même densité que la couche superficielle, qui exercerait une pression égale à celle de l'atmosphère totale. Il suit de là qu'en appelant k la puissance réfractive de la couche superficielle, on aura

$$n^2 = 1 + ke^{-\frac{R\nu}{\lambda(R+\nu)}},$$

$$= 1 + ke^{-\omega},$$

en faisant, pour abréger, $\omega = \frac{R\nu}{\lambda(R+\nu)}$. On conclut de là

$$u = \int_0^\nu \frac{R^2 \sqrt{1+k} \sin i d\nu}{(R+\nu)\sqrt{V}},$$

$$V = (R+\nu)^2 (1 + ke^{-\omega}) - R^2 (1 + k) \sin i,$$

$$V' = 2(R+\nu)(1 + ke^{-\omega}) - \frac{R^2 k}{\lambda} e^{-\omega},$$

$$V'' = 2 + ke^{-\omega} \left[1 + \left(1 - \frac{R^2}{\lambda(R+\nu)} \right)^2 \right].$$

[...]

[4, p. 502] Source : gallica.bnf.fr / BnF

Si on a au contraire

$$R > \frac{2\lambda(1+k)}{k},$$

V' sera nul pour une valeur positive β de ν , qui se calculera numériquement sans difficulté. Soit I l'angle aigu qui réduit V à zéro, pour $\nu = \beta$, on aura

$$\sin I = \frac{(R+\beta) \sqrt{1 + ke^{-\frac{R\beta}{\lambda(R+\beta)}}}}{R \sqrt{1+k}},$$

[...]

[4, p. 503] Source : gallica.bnf.fr / BnF

Enfin, il est à remarquer qu'un observateur placé en dehors de la surface de la planète doit voir d'abord une image principale circulaire de la surface *totale* de la planète, et tout autour une infinité d'images annulaires. Il voit même dans l'atmosphère de cette planète une infinité d'images de la sphère céleste. Ces deux conséquences sont faciles à apercevoir en examinant avec un peu d'attention les propriétés des trajectoires lumineuses qui viennent d'être exposées. C'est en particulier ainsi que la planète sera vue par un astronome placé sur la Terre.

[...]

[4, p. 505] Source : gallica.bnf.fr / BnF

On peut arriver graphiquement à la conclusion ci-dessus de Kummer avec le diagramme de Young-Kattawar, en considérant les rayons qui arrivent en S (tel que $r_S := CS > r_0$, où C désigne le centre de la Terre) d'abord horizontalement, puis de plus en plus obliques (soit vers le bas, soit vers le haut) ; cela diminue I_B , à partir de sa valeur maximale $f(r_S)$, et on lit sur le diagramme le domaine de r accessible au rayon considéré : c'est celui où $f(r) \geq I_B$ — voir la Figure 1. Dans les conditions idéales décrites par ce diagramme, pour un observateur S idéal doté d'une acuité visuelle infinie dans une atmosphère parfaitement claire, on distingue ainsi, en fonction de sa position par rapport au chenal (supposé unique dans toute cette discussion), plusieurs cas — dont trois se subdivisent.

- Quand $r_S > r_m$, S est au-dessus du chenal (celui-ci correspond à $[r'_m, r_m]$), et S voit une infinité d'anneaux, montrant chacun toute la voûte céleste, de plus en plus tassés, par le dessus, contre un niveau d'accumulation (A) qui s'avérera bilatéral et caractérisé par sa hauteur (angulaire) $\psi'_a = -\arccos(f(r_m)/f(r_S)) < 0$ — donc sous l'horizon astronomique (qui est par définition l'ensemble des directions horizontales pour S).

- Alors si $f(r_0) < f(r_m)$ — i.e. si le sol (ou la surface de l'eau) n'est pas dans le chenal, qui est alors un *elevated duct* dans la terminologie anglo-saxonne — S voit aussi une seconde infinité d'anneaux, montrant chacun *toute* la voûte céleste, de plus en plus tassés contre (A) mais par le dessous, et à la limite en (A) deux fois plus fortement que pour la première infinité — ce facteur 2 venant du rapport entre les équivalences (A6) et (A5) de l'annexe du présent article ; les images formant cette seconde infinité sont *toutes* renversées — ce que confirme la courbe de transfert de la Fig. 6 de [6], i.e. le graphe donnant la hauteur angulaire vraie d'un astre en fonction de sa hauteur angulaire apparente. L'horizon est sous (A), sa dépression est $\delta = \arccos(f(r_0)/f(r_S)) > -\psi'_a > 0$. Un coucher de Soleil dans des conditions approchant de celles de ce cas théorique a été filmé depuis de Pic du Midi, assez haut pour se trouver fréquemment au-dessus d'une couche d'inversion *raide* de température [10] où *par définition* le coefficient de réfraction $\kappa(r)$ — i.e., le quotient de la courbure des rayons horizontaux (comptée positivement vers le bas, et à la distance r) par $1/r$ — *est supérieur à 1*.

- Mais si $f(r_0) \geq f(r_m)$ — i.e. si le sol est dans le chenal — la seconde infinité d'images n'est pas de la voûte céleste mais de toute la surface terrestre, et les images sont droites. (A) est l'horizon, sa dépression est $\delta = -\psi'_a = \arccos(f(r_m)/f(r_S)) > 0$. Par rapport à l'expression de δ du cas précédent, $f(r_0)$ est remplacé par $f(r_m)$; dès 1853 Bravais avait compris ce fait, car il écrit que « dans le cas examiné, et pour un œil situé au-dessus de la couche [K] ».

de niveau r_m], l'espace aérien [entre les niveaux r_0 et r_m] est pour l'observateur comme s'il n'existe pas, c'est-à-dire comme si le sol ou la mer s'élevaient jusqu'en » r_m [7, p. 262]. Mais contrairement à Kummer, Bravais n'a pas prédit l'existence de (A) (liée au fait que la fonction f est supposée deux fois différentiable avec $f'(r_m) = 0$) donc pas non plus celle de rayons critiques — i.e. tels que $I_B = I_m := f(r_m)$ — ayant un cercle asymptote, ce qui entraîne l'inexistence de rayons formant pour S l'image de l'horizon. Cependant ces derniers existeraient si le minimum de f en r_m était idéalement anguleux ; alors ils ne seraient en général pas tangents au sol (ou à la surface de l'eau, ce que Biot avait déjà compris en 1809 lors de ses mesures systématiques de la dépression de l'horizon [11], menées à Dunkerque avec l'aide de Claude-Louis Mathieu — 1783–1875) car ils feraient avec sa surface horizontale l'angle $\sigma := \arccos(f(r_m)/f(r_0))$: ils seraient tangents à la frontière haute (K) du chenal, tout en la traversant en partie. Sur la mer, l'altitude de (K) va de 3 à 30 m [12], donc des cas voisins de cette situation peuvent être observés dans la pratique par les marins ; on comprend pourquoi ils appellent *horizon layer* ou *Kimmfläche* cette frontière haute du chenal [12] — mais Bravais l'appelle la « couche de densité fictive minimum ».

De toute façon, par rapport à la situation où il n'y aurait pas de couche d'inversion sous l'observateur, mais dT/dr quasi uniforme entre l'observateur et le sol, l'horizon est relevé — qu'il soit sous (A) ou contre (A). « Dans plusieurs [...] cas [...] où la mer était plus froide que l'air, M. Biot a trouvé une dépression dans le sens habituel, mais d'une valeur absolue bien plus faible que la dépression ordinaire. » [7, p. 263] — voir les formules mentionnées au sous-paragraphe 4.2 du présent article, comme celles de Koss ou de Conrad. « Woltmann a observé que les phénomènes d'élévation des objets avaient toujours lieu sur l'Elbe, lorsque la température des eaux était inférieure de 2° Fahrenheit (1°,1 centigr.) à la température de l'air, et qu'ils se produisaient aussi pendant le dégel du fleuve. » [7, p. 264]

- Quand $r_S = r_m$, S est sur la frontière haute du chenal, alors à l'horizon astronomique il ne voit que l'image de l'air qui est à la même élévation que lui (comme l'avait déjà compris Bouguer au moins dès 1753 [13]), mais pas l'image d'un objet céleste (i.e. extra-atmosphérique) ni du sol. Aussi $\psi'_a = 0$: (A) est confondu avec l'horizon astronomique. À part cela, la discussion sur la double infinité d'images accumulées des deux côtés, contre (A) bilatéral, est inchangée ; donc $\delta = \arccos(f(r_0)/f(r_S)) > 0$ dans le premier sous-cas, $\delta = -\psi'_a = 0$ dans le second — qui a quasiment été observé par Biot auprès de Dunkerque le 19 mars 1809 : son œil étant à une élévation E de 1,45 m au-dessus du sol, il mesurait avec son cercle répétiteur une dépression $\delta \cong -0' 2''$ [7, p. 263] au lieu de $1,75' \sqrt{1,45} \cong 2' 6''$ attendus dans le cas usuel (voir le sous-paragraphe 4.2).

- Quand S est à l'intérieur du chenal, il voit une bande (B) vide d'images d'objets célestes (cf. le paragraphe 4 de [6]), qui contient toujours l'horizon astronomique. Le bord supérieur de (B) se trouve à la hauteur angulaire $-\psi'_a > 0$; il est toujours, par en dessus (i.e. sur son côté haut), niveau d'accumulation d'une infinité d'anneaux montrant chacun une image entière de la voûte céleste. À 20 MHz en radioastronomie, la disparition sous $-\psi'_a$ des échos lunaires peut s'expliquer ainsi, le chenal étant créé par l'ionosphère qui a un effet très sensible, sur l'indice de réfraction vers 20 MHz, pour l'air ionisé [14].

➤ Si le sol n'est pas dans le chenal, son image n'est quasiment pas déformée. (B) est appelé « bande vide de Wegener », elle est symétrique par rapport à l'horizon astronomique (qui passe donc en son milieu), et elle ne contient que des images de l'air du chenal [15] ; souvent sa luminance est plus faible que celle du reste du ciel (voir la vidéo de Mila Zinkova montrant un coucher de Soleil dans des conditions approchant celles de ce sous-cas [16]). Il y a au total deux niveaux d'accumulation, car le bord inférieur de (B) — qui

se trouve à la hauteur angulaire $\psi'_a < 0$ — est, mais par en dessous (i.e. sur son côté bas), niveau d'accumulation (unilatéral) d'une infinité d'anneaux montrant chacun une image entière de *toute* la voûte céleste, et *toutes* ces images sont renversées. On a encore $\delta = \arccos(f(r_0)/f(r_S)) > -\psi'_a > 0$: dans ce sous-cas, l'horizon est sous le bord inférieur de (B).

- Si le sol est dans le chenal, il n'y a plus qu'un seul niveau d'accumulation (et il s'avérera bilatéral) : le bord supérieur de (B).

- Soit $f(r_0) \geq f(r_S) > f(r_m)$ — ce qui n'est possible que si S est dans la portion *raide* de la couche d'inversion (portion qui existe puisque cette couche donne un chenal) — alors (B) est entièrement occupé par des images du sol, et contre le bord supérieur de (B) une infinité d'anneaux, montrant chacun *toute* la surface terrestre, vient s'accumuler par en dessous, toutes ces images *complètes* étant droites. Dans la pratique, S ne verra pas les images de toute la surface terrestre, mais de parties du sol usuellement invisibles car trop éloignées (on dit qu'il y a *surgissement* de ces parties qui sont d'habitude « au-delà de l'horizon ») ; et il verra que l'horizon est au-dessus de l'horizon astronomique ($\delta = \psi'_a < 0$). Les rayons formant pour S l'image de l'horizon, s'ils existaient (i.e. si le minimum de f en r_m était anguleux), seraient alors les rayons critiques et ne seraient pas tangents au sol horizontal (car $\sigma \neq 0$, comme l'avait déjà compris Biot en 1809) mais à la *Kimmfläche* (K) du côté du chenal ; Bravais décrit ainsi ces rayons lumineux : ils « perceront la couche [(K)], et ce point [de contact avec (K)] divisera la trajectoire [lumineuse] en deux branches, l'une inférieure à la couche [(K)], concave vers le sol, l'autre supérieure et moins concave que [(K)] ou même convexe. » [7, p. 262] Un des mérites de Kummer [3, 4] est de faire comprendre qu'avec le minimum de f en r_m non pas anguleux mais avec f deux fois différentiable et telle que $f'(r_m) = 0$, les rayons critiques ne se divisent pas au contact de (K) — ils n'ont plus de contact avec (K) — cependant ils possèdent un cercle asymptote de rayon r_m .

- Si le sol (ou la surface de la mer) est aussi dans la portion *raide* de la couche d'inversion qui est alors une *surface-based strong inversion*, cette situation est très propice à l'effet *hillingar* (appelé aussi « *mirage arctique* » quoiqu'il n'y ait pas d'image renversée [17, 18]) : l'image du sol (ou de la mer ou d'un grand lac) est peu déformée mais paraît concave, avec un net surgissement. Malgré les écarts à l'idéalité qui empêchent bien sûr de voir ainsi l'intégralité de la surface terrestre (et, qui plus est, une infinité de fois), cette discussion académique est une première approche permettant d'expliquer le constat de von Schrötter qui observa en 1908 un cas frappant de dépression négative (avec un horizon 27' au-dessus de l'horizon normal [19]), ainsi que les rapports [20], [21, p. 385], [22, 23], [24, p. 291], [25], [26, p. 272] faisant état d'un océan (ou du Lac Léman [27, p. 541]) qui semble non pas plat, mais creux comme une soucoupe : « Woltmann et M. Biot font remarquer que l'on peut reconnaître cet état particulier de l'atmosphère à ce signe que la mer paraît comme une surface concave, qu'en même temps l'horizon se voit par-dessus la coque des navires, [...] et que les objets très-distants paraissent s'élever en l'air comme des nuages. Lorsqu'on allait s'asseoir sur le rivage, dit M. Biot, on semblait être dans un fond autour duquel, suivant une pente douce, s'élevait la mer fortement azurée, surtout au large, et terminée par un horizon si net, si bien tranché, si exempt de vagues que le fil horizontal [du réticule de la lunette du cercle répétiteur] n'y pouvait pas rendre sensible la plus petite ondulation. » [C'est compréhensible avec $\sigma \neq 0$.] [...] Heim a décrit un effet de ce genre ob-

servé dans les montagnes de la Thuringe : il a vu tout d'un coup trois hauts sommets paraître par-dessus une chaîne intermédiaire qui aurait dû en masquer la vue, et ces sommets paraissaient si nets qu'il pouvait distinguer, avec une simple lorgnette, les touffes de gazon à une distance de 4 milles d'Allemagne (30 000 m) » [7, p. 257].

- Si le sol (ou la surface de la mer) n'est pas dans la portion de la couche d'inversion raide de température (cas de *surface-based duct, elevated strong inversion* — ou *lifted strong inversion* pour les météorologues), alors il est possible que d'une certaine portion du sol S voie concrètement trois images contigües : de bas en haut, successivement, droite, renversée puis droite, avec un étirement local qui est infini à leur jonction ; c'est une explication (restrictive car avec un modèle d'atmosphère à symétrie sphérique) de l'effet *hafgerdingar* [28–30], où sur la mer on a l'impression de voir une « barrière de mer » qui rehausse l'horizon — cf. la Fig. 11 de [31] dans ce numéro spécial). Cet effet est plus ou moins semblable [31] à la *Fata Brumosa* [28] sur un lac — pour Forel, le Léman où il avait l'impression de voir des « brouillards [qui] ont exactement la teinte du lac, tellement qu'en certains cas ils semblent des vagues gigantesques soulevant la surface [...] de dix ou vingt mètres [soit] 2 ou 4 minutes de degré. » [27, p. 551–553] La *Fata Morgana* ([27, p. 544–551], [32]) est similaire à ces deux effets, sauf qu'elle concerne des objets plus contrastés, dont les images très étirées des taches claires et sombres forment une « zone striée » — voir le paragraphe 3 de notre article sur les « Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre » [33] dans ce numéro spécial.
- o Soit $f(r_S) > f(r_0) \geq f(r_m)$ — autre cas de *surface-based duct, elevated strong inversion* — alors l'image de l'air occupe une partie centrale de la bande (B), dont les bords ont pour hauteur angulaire $\pm \arccos(f(r_0)/f(r_S))$ — le résultat ressemblerait alors partiellement à celui de la photo de la Figure 2. L'image du sol (ou de la mer) *au-dessus* de l'horizon astronomique est, de bas en haut, d'abord renversée usuellement (c'est un mirage supérieur), puis vient une infinité d'images droites consécutives de toute la surface terrestre qui s'accumulent contre le bord supérieur de (B) par en dessous. Cela produit une impression d'horizon multiple, dont il existe une belle photographie ancienne publiée [34].

Voir (théoriquement !) la surface terrestre une infinité de fois est typique des cas où le sol et S sont à l'intérieur du chenal ; cela suppose non seulement que l'air est absolument non absorbant et non diffusant, mais encore que son profil de réfractivité en fonction de l'altitude est le même en tout lieu de la planète supposée parfaitement sphérique, ce qui est très irréaliste.

• Quand S est sur la frontière basse du chenal, alors à l'horizon astronomique — auquel se réduit (B) — il ne voit que l'image de l'air qui est à l'intérieur du chenal, mais pas l'image d'un objet céleste ni du sol. Il n'y a plus d'horizon multiple, mais un horizon ordinaire, de dépression $\delta = \arccos(f(r_0)/f(r_m)) > 0$. Aussi $\psi'_a = 0$; il n'y a qu'un seul niveau d'accumulation, il est confondu avec l'horizon astronomique, et bilatéral : une double infinité d'images de toute la voûte céleste s'accumule sur lui, par en dessus et par en dessous.

• Quand S est sous le chenal — qui est donc un *elevated duct* — alors la vision qu'a S du sol et de l'horizon est ordinaire, $\delta = \arccos(f(r_0)/f(r_S)) > 0$; il n'existe plus de niveau d'accumulation. Par contre l'image de la voûte céleste peut être très distordue : si S reste assez proche de la frontière basse du chenal, il voit d'une certaine portion de la voûte céleste trois images, successivement droite, renversée (forcément sous l'horizon astronomique en vertu du théorème de Biot–Sang–Meyer–Fraser–White — voir le sous-paragraphe 7.2 de [5]) puis droite — avec un



FIGURE 2. Horizon multiple dû à un chenal optique. De bas en haut, image principale de la mer et du ciel, puis image renversée du ciel et de la mer (formant la bande bleu sombre qui semble flotter dans l'air), et enfin image droite du ciel. Comme la largeur angulaire de la bande bleu sombre décroît de gauche à droite, on peut penser qu'il y a une différence dans les caractéristiques de la couche d'inversion raide entre le côté gauche et le côté droit de la photo : l'atmosphère réelle n'a pas la symétrie sphérique. © Photo : Luc Dettwiller.

grandissement angulaire local vertical qui est infini à leur jonction ; des distorsions similaires avec triple image se présentent dans le cas du pseudo-mirage, quand S est au-dessus d'une couche d'inversion ordinaire (i.e. qui n'est pas non raide).

Il est évident que les conclusions des calculs précédents ne s'appliquent en toute rigueur qu'au cas d'une atmosphère absolument transparente. Dans la réalité on ne verra un peu distinctement à la surface de Jupiter qu'une partie de la première image de la planète et de la première image du ciel. Tout au plus le Soleil demeurera-t-il constamment visible. Quant aux images ultérieures, elles seront sans doute tellement affaiblies, que leur ensemble donnera simplement naissance à une bande bleue s'étendant des deux côtés de l'horizon apparent à une distance plus ou moins grande.

[4, p. 507] Source : gallica.bnf.fr / BnF

4. Conséquences utiles

4.1. Asymptotes des courbes de transfert pour un observateur dans un chenal optique ou au-dessus

La présence d'asymptotes des courbes de transfert résulte directement (voir l'annexe du présent article) de la divergence signalée par Kummer–Verdet à la p. 505 de [4]. Elle est possible pour un

observateur S dans un chenal optique ou au-dessus, car dans ce cas $f(r_S) > f(r_m)$, donc on peut avoir $I_B = I_m$, et les asymptotes ont pour abscisse ψ'_a tel que

$$\cos \psi'_a = f(r_m)/f(r_S). \quad (2)$$

4.2. Dépression et distance de l'horizon

La dépression de l'horizon joue un rôle très important en navigation astronomique, comme nous le verrons au sous-paragraphe 4.3 ; c'est d'ailleurs une des causes majeures d'erreur dans le point nautique. Elle était appelée aussi « bassesse apparente de l'horizon de la Mer » (1723), ou « inclinaison de l'horizon sensible » (1729), « dépression apparente de la surface de la mer » (1758), « déjection de l'horizon » (1768) ... En considérant qu'il n'y a pas de *Kimmfläche* et donc que le rayon joignant S à l'horizon tangente la mer, puis en introduisant la moyenne $\langle G \rangle$ de diverses grandeurs $G(r)$ sur l'intervalle mer-observateur $[r_0, r_S]$ de largeur E (qui est l'élévation de S au-dessus de la mer), et en se servant de l'invariant de Bouguer, on peut exprimer δ grâce à

$$\begin{aligned} f(r_S)\delta^2/2 &\cong n_S r_S (1 - \cos \delta) = n_S r_S - n_0 r_0 = \int_{r_0}^{r_S} \left(\frac{dn}{dr} \right) dr \\ &= \int_{r_S-E}^{r_S} [1 - \kappa(r)] n(r) dr = \langle (1 - \kappa) n \rangle E \end{aligned} \quad (3)$$

où on a utilisé l'avant-dernière expression de l'Eq. (43) de [5] ; on généralise ainsi une expression classique qui devient

$$\delta = \sqrt{2 \frac{\langle (1 - \kappa) n \rangle}{n_S} \frac{E}{r_S}} \cong \sqrt{(1 - \langle \kappa \rangle) \frac{2E}{r_S}} \quad (4)$$

puisque $n(r)$ est toujours très proche de 1 — au début de l'expression (4) nous avons mis $=$ au lieu de \cong car nous n'y avons pas introduit de nouvelle approximation depuis celle de l'expression (3). Nous retrouvons ainsi la possibilité, déjà signalée par Young et Kattawar [35, Section 5], d'exprimer δ en fonction de $\langle \kappa \rangle$. En négligeant la petite variation (avec la température et la pression) du dénominateur de l'expression finale de la formule (56) de [5], et en désignant par ΔT la variation de la température T de l'air sur l'intervalle $[r_0, r_S]$, on trouve

$$\delta \cong \sqrt{\left[1 - \frac{34 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1} + (\Delta T/E)}{150 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}} \right] \frac{2E}{r_S}} \cong 1,70' \times \sqrt{\frac{E}{1 \text{ m}} - 8,6 \frac{\Delta T}{1 \text{ K}}} \quad (5)$$

donc l'augmentation de ΔT de 1 °C a le même effet sur δ qu'une diminution de E de 8,6 m : à faible élévation E au-dessus de l'eau, comme celle d'un pont de navire par exemple, l'estimation de ΔT devra donc être précise — il ne faudra pas confondre la température de l'air touchant le sommet des vagues avec celle de l'eau, comme celle qui est requise dans les formules empiriques de Koss [36] ou de Conrad [37]. Celles-ci sont peu fiables, car même en disposant de thermomètres gradués au dixième de degré, il est bien difficile d'estimer au degré près T aux altitudes requises pour ces formules de Koss ou de Conrad, d'une part à cause des vagues (une partie non négligeable de la variation de température dans la structure de la couche limite marine [38] ayant lieu sur la hauteur de la crête des vagues), d'autre part à cause de la perturbation thermique dans l'air due au bateau lui-même. Rappelons que dans la troposphère standard US1976 $\Delta T/E = -0,0065 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$, et que dans une couche d'inversion le gradient critique au-delà duquel il y a formation d'un chenal optique correspond à $\Delta T/E \cong 0,116 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1} \cong 1 \text{ K} / 8,6 \text{ m}$ (voir le sous-paragraphe 7.1.4 de [5]). À bord d'un avion en vol, déjà avec E valant quelques centaines de mètres l'effet de l'incertitude sur ΔT devient peu gênant, mais l'horizon est beaucoup plus éloigné donc est très souvent caché par des nuages bas (ce qui arrive aussi sur un navire), et quand E atteint plusieurs kilomètres la diffusion due aux aérosols empêche de discerner précisément

l'horizon même par temps très clair [39] ; d'où l'utilisation d'un horizon artificiel, soit à bulle et monté sur un sextant (ce qui est assez peu précis, mais recommandé aux navigateurs polaires quand la glace peut fausser leur appréciation de l'horizon — [40, p. 269]), soit à réflexion (plus précis mais inutilisable sur un bateau).

Si $\kappa(r)$ est quasi uniforme entre la mer et l'observateur, on retrouve l'expression bien connue ([41], [42, p. 201–203])

$$\delta \cong \sqrt{1 - \kappa_S} \sqrt{2E/r_S} = \sqrt{2E/r_a}, \quad (6)$$

où $\kappa_S := \kappa(r_S)$ tandis que $r_a^{-1} := (1 - \kappa_S)r_S^{-1}$ est la courbure apparente d'un méridien (passant par S) par rapport à un rayon lumineux passant horizontalement par S (et parallèlement au méridien). Cette formule (6) coïncide avec celle trouvée géométriquement par Lambert en 1758 [41, p. 80–81] ; elle nous permet de vérifier la valeur $\kappa_S \cong 1/7,06$ déduite par Lambert (*ibid.* p. 70–71 — voir aussi le paragraphe 2 de [1] dans ce numéro spécial) à partir de mesures prises par Jean-Dominique et Jacques Cassini en 1701 [43], ainsi que de la légère correction d'altitude effectuée par Lambert lui-même [41, p. 111] — ce qui suppose un processus itératif.

Mais c'est Bouguer qui, une trentaine d'années plus tôt, fut le premier prendre en compte la réfraction dans l'étude quantitative de la dépression de l'horizon (voir le sous-paragraphe 3.7 de [44] dans ce numéro spécial) : elle occupe le dernier quart de la publication de son essai ayant remporté le prix 1729 de l'Académie des sciences [45, p. 62–72] — i.e. le chap. 2 de la 2^{de} partie. Numériquement, $\delta \cong 1,75' \sqrt{E/1 \text{ m}}$ pour $\kappa_S \cong 1/5,7$ (valeur donnée par le *Nautical Almanac* et correspondant à $50^\circ \text{ F} = 10^\circ \text{ C}$ et $1\,010 \text{ hPa}$ en S , avec un gradient thermique de $-6,5^\circ \text{ C} \cdot \text{km}^{-1}$, ce qui donne $r_a \cong 7\,727 \text{ km}$ à comparer à $r_S \cong 6\,371 \text{ km}$) contre $\delta \cong 1,93' \sqrt{E/1 \text{ m}}$ si on omet le coefficient de réfraction ; dans ces deux cas respectivement, cela donne $\delta \cong 5,5'$ contre $\delta \cong 6,1'$ pour une élévation $E = 10 \text{ m}$ au-dessus des flots. Au sujet de l'importance de la différence entre ces deux estimations numériques, Bouguer se montre à la fois diplomate et convaincant :

« Il paroîtra peut-être que c'est pousser la délicatesse trop loin, de vouloir obliger les Pilotes à ne se servir que de cette seconde Table au lieu de la premiere [qui ne tient pas compte de la refraction]. Mais cependant il suffit que l'observateur soit élevé de trente pieds, pour que la différence soit déjà de près d'une demie minute : & si on étoit obligé de monter dans la hune afin de découvrir la mer par-dessus quelques isles ou quelques rochers, l'erreur commise pourroit aller à près d'une minute. Or nous sommes persuadé qu'on ne doit presque rien négliger dans une semblable matière : car quelque soin & quelque peine qu'on se donne, il arrive qu'on se trompe encore souvent d'une quantité trop sensible. » [45, p. 70–71]

Les marins corrigent E en lui retranchant la moitié de la hauteur des vagues estimée à l'horizon [46], ou une fraction plus savante [47]. Ils savent aussi qu'en présence d'un mirage inférieur $\delta > \sqrt{2E/r_S}$ car $\langle \kappa \rangle < 0$ (voir le sous-paragraphe 7.2.3 de [5]) : « Les observations faites par MM. de Humboldt, Biot [...] prouvent évidemment la connexion du mirage [inférieur] avec l'augmentation de la dépression apparente de l'horizon. » [7, p. 239]

Toutes ces difficultés concernant le calcul de δ peuvent lui faire préférer une mesure directe, grâce à un dépressiomètre de marine. Il en existe divers modèles, mais ils requièrent souvent la vision de l'horizon dans deux azimuts différent de 180° , ce qui est concrètement impossible à bord de grands navires où la vue de plus de la moitié de l'horizon est bouchée par les superstructures.

Un autre point intéressant pour la navigation est l'étude de la distance géodésique L entre S et l'horizon, i.e. la longueur de la projection au sol de chaque rayon lumineux joignant S à son horizon ([41], [42, p. 201–203]). En négligeant l'aplatissement terrestre, et en l'absence

de *Kimmfläche*, elle se calcule facilement grâce à la quadrature (1) qui donne ici une intégrale impropre :

$$L = r_0 \int_{r_0}^{r_s} \frac{dr}{\sqrt{h(r, I_0)}} \quad (7)$$

où $I_0 := n_0 r_0$ car c'est l'invariant de Bouguer des rayons joignant S à son horizon, s'il n'y a toujours pas de *Kimmfläche*.

Si n est uniforme,

$$h(r, I_0) = \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) r^2 \quad (8)$$

alors le changement de variable $u := r_0/r$ permet de retrouver le résultat qui est géométriquement évident :

$$\begin{aligned} L &= r_0 \int_{r_0}^{r_s} \frac{1}{r} \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right)^{-1/2} dr = -r_0 \int_1^{r_0/r_s} (1-u^2)^{-1/2} du \\ &= r_0 [\arccos u]_1^{r_0/r_s} = r_0 \arccos \frac{r_s - E}{r_s}. \end{aligned} \quad (9)$$

Comme $E \ll r_s$, cela donne

$$L \approx r_s \sqrt{2E/r_s} = \sqrt{2r_s E}. \quad (10)$$

Si n n'est pas uniforme, mais présente une variation quasi affine sur $[r_0, r_0 + E]$, on repart de l'expression générale

$$L = r_0 \int_{r_0}^{r_s} \frac{1}{r} \left(\frac{n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2}{n_0^2 r_0^2} \right)^{-1/2} dr \quad (11)$$

et on réutilise la méthode approximative de développement du radical déjà vue au sous-paragraphe 5.1 de [5] ; en admettant aussi que $1/r \approx 1/r_0$ (la variation du préfacteur $1/r$ ayant beaucoup moins d'effet que celle de l'autre terme de l'intégrande car celui-ci diverge en r_0), on obtient

$$\begin{aligned} L &\approx r_0 \int_{r_0}^{r_s} \frac{1}{r_0} \left\{ 2 \left[\frac{1}{n_0} (r - r_0) \frac{dn}{dr}(r_0) + \frac{1}{r_0} (r - r_0) \right] \right\}^{-1/2} dr \\ &= \int_{r_0}^{r_0+E} \left\{ 2 \left[\frac{-\kappa(r_0) + 1}{r_0} (r - r_0) \right] \right\}^{-1/2} dr \\ &= \left[2 \frac{1 - \kappa(r_0)}{r_0} \right]^{-1/2} [2\sqrt{r - r_0}]_{r_0}^{r_0+E} = \sqrt{\frac{2Er_0}{1 - \kappa(r_0)}} \approx \sqrt{\frac{2Er_s}{1 - \kappa_s}} = \sqrt{2Er_a} \end{aligned} \quad (12)$$

soit $3,93 \text{ km} \sqrt{E/1 \text{ m}}$ pour $\kappa_s \approx 1/5,7$.

Si on additionne les valeurs de L obtenues en prenant pour E la hauteur d'un phare puis celle de S , on obtient la « portée géographique » du phare pour S — et dans les tables de portées géographiques la hauteur de S est souvent prise conventionnellement égale à 15 pieds. La portée réelle peut être très différente de celle déduite des formules ci-dessus [46, p. 54–56], car si κ n'est pas quasi uniforme sur $[r_0, r_0 + E]$, la valeur de L peut devenir très différente de celle que donnerait l'expression (12) où on remplacerait κ_s par $\langle \kappa \rangle$, puisque l'intégrale impropre de (11) pourrait être rendue divergente par la variation de κ avec r . Pour les cas réels, l'estimation de L par la formule (12) est donc encore beaucoup plus hasardeuse que celle de δ .

Schématiquement la présence, au contact de l'eau, d'une couche limite plus chaude que l'air ambiant et où $d^2 T / dr^2 > 0$, augmente δ (il y a le reflet du ciel juste au-dessus de l'horizon), et cela diminue L , comme sur la photo de la Fig. 2 du sous-paragraphe 7.2 de [5] où on voit un mirage inférieur (voir aussi le sous-paragraphe 2.1 de [33]) ; à l'opposé, la présence d'une couche limite plus froide diminue δ et augmente L . Les marins faisaient grand cas des valeurs anormales de δ [20, 48, 49], notamment quand leur navire, voguant sur une eau froide, est dans une couche

d'inversion *raide*, où $\kappa(r)$ se trouve supérieur à 1 *par définition*, et dans ce cas la formule (6) n'est plus applicable ; le diagramme de Young–Kattawar présente alors l'allure montrée sur la Figure 1. La dépression de l'horizon fait encore l'objet de recherches actives, en lien avec les variations diurnes et annuelles de la structure thermique de la couche limite sur la mer qui l'affectent [50].

4.3. Corrections pour le point astronomique

Revenons au point astronomique [51, 52]. Un procédé efficace pour l'effectuer consiste à tracer, sur une carte marine, deux « droites de hauteur » du centre W du Soleil à deux instants différents et connus, ce qui nécessite pour chacun de ces instants la détermination de $\psi(W)$ — i.e. la hauteur (angulaire vraie) de W — à partir de la mesure (au sextant) de la distance angulaire entre l'horizon et le point B le plus bas du limbe solaire [51] ; c'est la méthode de Marcq Saint-Hilaire, institutionnalisée dans la marine française dès le milieu du xix^e siècle. Une autre méthode est celle découverte par le capitaine Sumner en 1837, utilisant des « droites de position » et nécessitant aussi la connaissance de $\psi(W)$; les méthodes antérieures étaient moins performantes. Rappelons que pour le point nautique, une erreur de 1' en latitude correspond à un écart de position Nord-Sud de 1 mille nautique, soit 1 852 m — ce qui peut être dramatique pour un navire au voisinage de récifs ou de hauts fonds !

Le calcul d'une droite de hauteur étant hors de notre propos, nous ne présentons ici que la détermination de $\psi(W)$ à l'aide d'observations faites par un instrument qui, à l'instar du sextant, utilise aussi la visée de l'horizon marin. Grâce à lui, on détermine à la minute d'angle près la hauteur apparente du point bas B du limbe solaire par rapport à l'horizon *marin*. Diverses corrections doivent être appliquées [51, 52] à cette mesure pour en déduire $\psi(W)$: d'une part, à cause de l'élévation de l'instrument, la dépression δ de l'horizon, qui doit elle-même être corrigée des effets de la réfraction « terrestre » (voir le sous-paragraphe précédent) ; d'autre part, indépendamment de l'élévation de l'instrument, plusieurs effets de réfraction « astronomique ». Cela nécessite plusieurs étapes.

- À la mesure brute, on commence par lui retrancher δ , et cela donne $\psi'(B)$ — i.e. la hauteur apparente de B .

Depuis 1599, des tables de δ en fonction de l'élévation [9] ont été dressées à l'intention des marins (voir le sous-paragraphe 3.7 de [44]). En 1797 Huddart montre comment une valeur expérimentale de δ peut être déduite de l'observation des distances angulaires entre le Soleil à midi et les horizons nord et sud [53]. Vu l'importance du problème de réfraction terrestre impliqué dans la connaissance précise de δ pour le point astronomique, divers instruments ont été mis au point pour faciliter la mesure de δ en utilisant ce principe.

Au sous-paragraphe 4.2 nous avons vu des formules semi-empiriques permettant de calculer de δ dans les cas simples, mais la nature s'en écarte fréquemment et de manière importante. Une des premières mentions de cette variabilité est due au Père jésuite Antoine François Laval, professeur d'hydrographie à Marseille, en 1707 [54] : à une élévation de 144 m, il a vu δ varier entre les valeurs extrêmes 11' 46" et 14' 30", sans lien clair avec la température ou la pression au niveau de l'observateur. Jean-Dominique Cassini s'y intéresse [55], et ajoute :

« Nous avons déjà remarqué par diverses autres observations, qu'une partie de la surface de la mer contiguë à l'horizon sensible, se confond à la vûë avec le Ciel, & que pour lors la circonference apparente de l'horizon sensible tombe dans la mer exposée à notre vûë. »

Il s'agit sans doute du classique mirage inférieur sur la mer (voir la Fig. 1 de [33]) dont ceci est une des premières mentions publiées.

« Comme nous avions communiqué cette reflexion au P. Laval sans qu'il ait eu aucune occasion de distinguer par quelque signe sensible cette différence, l'on voit combien il est difficile de la distinguer, & à quelle erreur est exposée la méthode de chercher la grandeur du diamètre de la Terre par l'observation de la tangente de la mer sans cette circonspection. [...] la variation des hauteurs apparentes de la mer n'a aucun rapport régulier avec la variation qui s'observe en même temps dans le Thermomètre & dans le Baromètre ; ce qui semble confirmer ce que nous avons remarqué plusieurs fois, que la partie de l'air qui cause la réfraction est d'une nature différente de la partie à laquelle on attribue la pesanteur qui équilibre la hauteur des liquides dans le vuide. » [55, p. 196–197]

Et en 1827 Arago renchérissait :

« [...] l'observateur le plus exercé et muni des meilleurs instrumens, peut se tromper en plus ou en moins d'une minute, sans que les circonstances météorologiques puissent lui fournir ni les moyens de calculer l'erreur, ni même lui faire présumer dans quel sens elle a eu lieu. » [56]

Les erreurs sur δ sont souvent attribuées, par les marins, à des erreurs sur l'estimation de la réfraction. Shufeldt rapporte avoir constaté une erreur de position de 0,85 mille si δ est calculé à partir des mesures de température, mais de 0,115 mille seulement si δ est mesuré avec l'appareil de Gavrisheff [57].

- Si le Soleil est vu assez haut au-dessus de l'horizon, on calcule $\psi'(W) \cong \psi'(B) + (32'/2)$. Mais si le Soleil est vu sur l'horizon, on tient compte de l'accourcissement en calculant $\psi'(W) \cong \psi'(B) + (26'/2)$, car il est bien connu que la pseudo-image du Soleil sur l'horizon astronomique est comprimée surtout dans le sens vertical : son diamètre apparent horizontal reste quasiment 32' alors que son diamètre vertical devient 26' dans le cas standard (phénomène d'accourcissement), conformément au théorème de Biot (voir le sous-paragraphe 7.1 de [5]). Delambre décrit ainsi ce phénomène [58] :

« le disque du soleil déformé par la réfraction, est sensiblement elliptique ; et c'est ainsi que je l'ai vu très-souvent, surtout lorsque d'une tour ou d'une montagne élevée je le voyais se lever à l'horizon de la mer ou s'y coucher. Souvent même la demi-ellipse inférieure m'a semblé plus aplatie que la supérieure. Quelquefois la supérieure seule paraissait elliptique et l'inférieure était singulièrement défigurée, ce qui indiquait des réfractions très-irrégulières pour les différents points du bord inférieur ; mais cet effet cesse dès que le soleil est sorti des vapeurs de l'horizon. » (voir notre Figure 3).

Cette idée de l'influence visible de la vapeur d'eau sur la réfraction est très ancienne mais erronée (voir les paragraphes 1–3 et 5 de [8], ainsi que le document [59] qui lui est lié) ; elle a perduré bien après le démenti expérimental apporté en 1806 par Biot et Arago [60]. Dans le cas de fortes déformations comme celles montrées par la Figure 3, il faut s'attendre à plusieurs minutes de différence entre le diamètre apparent vertical de l'image du Soleil sur l'horizon, et sa valeur standard 26'.

- Ensuite on utilise les tables de réfraction astronomique χ_S pour calculer $\psi(W) = \psi'(W) - \chi_S(\psi'(W))$; noter que pour avoir une estimation juste de $\chi_S(\psi'(W))$ il fallait bien effectuer auparavant les corrections précédentes, comme l'a finement noté Bouguer dès 1729 [45, p. 66] — voir le sous-paragraphe 3.7 de [44]. Dans le *Nautical Almanac* χ_S est tabulé pour $T_S = 50^\circ\text{F}$ et $P_S = 1\,010 \text{ hPa}$, mais pour tenir compte des variations de T_S et P_S , il y a des tables de correction [40, p. 562 et 709 Tables 27–28] dont le principe est hélas contestable — voir le paragraphe 8 de [5]. Pour le domaine d'observation sous l'horizon astronomique (où on voit usuellement l'horizon marin et les astres qui s'y couchent) ou peu au-dessus de lui, $\chi_S(\psi')$ n'est



FIGURE 3. Soleil levant vu depuis le Pic du Midi. Les inversions de température vues sous l'horizon astronomique provoquent, contrairement à celles vues au-dessus (voir le théorème de Biot–Sang–Meyer–Fraser–White au sous-paragraphe 7.2 de [5]) et sans que la vapeur d'eau soit en cause, la formation de fragments d'images renversées. Leur multiplicité témoigne de la complexité du profil thermique réel de l'atmosphère, ayant des longueurs caractéristiques allant du décamètre à quelques centimètres très souvent. © Photo : Patrick Muller.

pas paramétré que par la longueur d'onde et la température T_S et la pression P_S en S , mais très sensiblement par tout le profil de réfractivité de l'air assez proche de S , ce qui pose un problème majeur quand le point nautique utilise un astre dans ce domaine d'observation. Autre complication inhérente à ce domaine : si la table nautique donnant $\chi_S(\psi'(W))$ pour l'observation sans filtre coloré a été établie par calcul, il faudrait qu'elle tienne compte de l'augmentation de longueur d'onde effective due au rougissement apparent du Soleil quand $\psi'(W)$ décroît, ce qui diminue la réfractivité de l'air à cause de sa dispersion chromatique ; pour le Soleil sur l'horizon le changement correspondant de χ_S est de l'ordre de $0,1'$, qui est la précision visée par les tables nautiques [40, p. 562 et 709 Tables 27–28]. Si la table est établie observationnellement par des mesures sans filtre, cet effet devrait automatiquement être pris en compte ; mais dans la pratique la réfraction horizontale est très difficile à mesurer précisément — en effet, Arago disait (en 1838) :

« Les astronomes qui ont essayé, même une seule fois dans leur vie, de déterminer la valeur des réfractions horizontales, savent combien peu il est permis de compter sur les résultats. C'est ordinairement le bord du soleil qui sert de point de mire ; mais près de l'horizon, ce bord paraît si fortement dentelé, si vivement irisé, si déchiqueté ; ces diverses irrégularités sont d'ailleurs tellement changeantes que l'observateur ne sait où diriger le fil du réticule, à quel point, à quelle hauteur arrêter sa lunette sur le limbe gradué de l'instrument qu'il emploie. » [61, p. 211]

- Enfin, on applique à $\psi(W)$ une correction de parallaxe, afin de ramener cette valeur à celle qu'elle aurait si l'observateur était au centre C de la Terre ; cette correction de parallaxe vaut au maximum $0,15'$ pour le Soleil, et $0,3'$ pour les planètes les plus proches de la Terre (Vénus et Mars), donc elle est négligeable si la précision des mesures n'est pas meilleure que $1'$.

Bien sûr, tout ce que nous avons dit sur l'observation du Soleil s'applique aussi à la Lune, qui en plus a quasiment le même diamètre apparent que lui ; par contre, la correction de parallaxe lunaire est très importante : elle va de $0,86^\circ$ à $1,03^\circ$, et se trouve tabulée pour chaque heure dans les pages journalières *Ephémérides nautiques*, éditées par le Bureau des longitudes.

Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

Remerciements

L'auteur exprime sa reconnaissance au Dr. Andrew Young pour la mise à disposition de sa fabuleuse bibliographie en ligne (citée à la fin du paragraphe 2) et pour ses conseils personnalisés. Il remercie aussi le Dr. Siebren van der Werf pour ses précisions sur les méthodes de navigation astronomique. Enfin, il exprime sa gratitude à Julien Desmarests (du service des publications de l'Académie des sciences) pour son précieux travail technique améliorant la lisibilité des extraits de textes anciens.

Annexe A.

Dans cette annexe, pour le cas où le diagramme de Young–Kattawar a la forme donnée sur la Figure A1, et où r_S est strictement supérieur à l'abscisse r_m du minimum local sur le diagramme, nous voulons préciser la divergence de ψ en fonction de ψ' (cf. *infra*) quand celui-ci tend vers $\psi'_a := -\arccos(I_m/(n_S r_S))$ où I_m est la valeur du minimum local.

Pour cela, rappelons que l'angle de réfraction astronomique du point A d'un astre vu de l'observateur S est $\chi_S = \psi' - \psi$, où ψ désigne la hauteur angulaire vraie, et ψ' la hauteur apparente de A en S . L'invariant de Bouguer du rayon joignant A à S est

$$I_B = n_S r_S \cos \psi' > 0. \quad (\text{A1})$$

Il nous permet de définir $r_1(I_B) \leq r_m$ et $r_3(I_B) \geq r_m$ dans les domaines où f est croissante — voir la Figure A1.

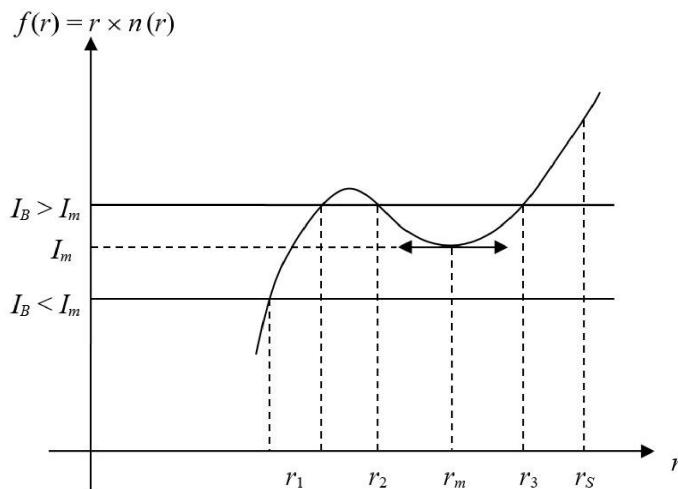


FIGURE A1. Diagramme de Young–Kattawar.

L'observateur est au-dessus d'un chenal, puisque $r_S > r_m$. Posons

$$A(I_B) := \begin{cases} \int_{r_1(I_B)}^{r_S} \frac{dr}{\sqrt{h(r, I_B)}} & \text{pour } I_B \leq I_m \\ \int_{r_3(I_B)}^{r_S} \frac{dr}{\sqrt{h(r, I_B)}} & \text{pour } I_B \geq I_m. \end{cases} \quad (\text{A2})$$

Pour les points vus sur l'horizon astronomique ou au-dessus ($\psi' \geq 0$) on a

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \int_{r_S}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{h(r, I_B)}},$$

(où l'intégrale converge car $\sqrt{h(r, I_B)} \sim r^2/I_B$ pour r au voisinage de l'infini), et la réfraction $\chi_S = \psi' - \psi$ peut s'exprimer par

$$\chi_S(\psi') = \int_{r_S}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{h(r, I_B)}} - \frac{\pi}{2} + \psi'. \quad (\text{A3})$$

Quant à l'angle de réfraction pour les astres vus sous l'horizon astronomique ($\psi' < 0$), on a

$$\chi_S(\psi') = 2A(I_B) + 2\psi' + \chi_S(-\psi') \quad (\text{A4})$$

où $\chi_S(-\psi')$ est fini, en accord avec le résultat précédent. Lorsque ψ' tend vers ψ'_a par valeurs supérieures, I_B tend vers I_m par valeurs supérieures aussi, et $A(I_B)$ diverge ; alors au voisinage de ψ'_a (mais avec $\psi'_a < \psi' < 0$) on a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned} \psi &\sim -2A(I_B) \\ &\sim -2 \int_{r_3(I_B)}^{r_S} \frac{dr}{\sqrt{\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r_m, I_m) \frac{(r-r_m)^2}{2} + \frac{\partial h}{\partial I_B}(r_m, I_m) n_S r_S (\cos \psi' - \cos \psi'_a)}} \\ &\sim -2 \sqrt{\frac{2}{\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r_m, I_m)}} \ln \frac{1}{\sqrt{\cos \psi' - \cos \psi'_a}} \\ &\sim \sqrt{\frac{2}{\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r_m, I_m)}} \ln(\psi' - \psi'_a). \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

Et pour $\psi' < \psi'_a < 0$ on a, au voisinage de ψ'_a , la chaîne d'équivalences

$$\psi \sim -2A(I_B) \sim 2 \sqrt{\frac{2}{\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r_m, I_m)}} \ln(\psi'_a - \psi') \quad (\text{A6})$$

avec un facteur 2 devant la racine car, pour calculer $A(I_B)$, il faut intégrer maintenant de part et d'autre de r_m puisque $I_B < I_m$.

Ces deux équivalents prouvent au passage l'existence, pour la courbe de transfert, d'une asymptote bilatérale d'abscisse ψ'_a .

Références

- [1] L. Dettwiller, « Les développements de Lambert : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 453-465.
- [2] E. E. Kummer, « Eine neue Methode, die numerischen Summen langsam convergirender Reihen zu berechnen », *J. für die Reine und Angew. Math.* **16** (1837), p. 206-214.
- [3] E. E. Kummer, « Über atmosphärische Strahlenbrechung », *Monatsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* **5** (1860), p. 405-420.
- [4] É. Verdet, « Mémoire sur la réfraction atmosphérique par M. Kummer », *Ann. Chim. Phys.* **61** (1861), p. 496-507.
- [5] L. Dettwiller, « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 63-102.

- [6] L. Dettwiller, « Properties of optical ducts, their chromatism and its effects on astronomical refraction », 2022, *preprint*, <https://arxiv.org/abs/2204.02605>.
- [7] A. Bravais, « Notice sur le mirage », *Annuaire Météorologique de la France pour 1852* **4** (1853), p. 227-280.
- [8] L. Dettwiller, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : Une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 13-62.
- [9] E. Wright, *Certaine Errors in Navigation, Arising either of the Ordinarie Erroneous Making or Vsing of the Sea Chart, Compasse, Crosse Staffe, and Tables of Declination of the Sunne, and Fixed Starres Detected and Corrected*, Valentine Sims, Londres, 1599.
- [10] J. L. Dauvergne, « Coucher de Soleil en temps réel au Pic du Midi », <https://www.youtube.com/watch?v=GwIphtocoQ> (consulté le 15 mars 2022).
- [11] J.-B. Biot, « Recherches sur les réfractions extraordinaires qui ont lieu près de l'horizon », in *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France, Année 1809*, Garnery, Paris, 1810, p. 1-266.
- [12] L. Hasse, « Über den Zusammenhang der Kimmtiefe mit meteorologischen Größen », *Dtsch. Hydrogr. Z.* **13** (1960), p. 181-197.
- [13] P. Bouguer, « Second mémoire sur les réfractions astronomiques, observées dans la Zone Torride ; avec diverses remarques sur la manière d'en construire les tables », *Mém. Acad. R. Sci.* **1749** (1753), p. 75-112.
- [14] A. Chvojková, F. Link, « Échos lunaires sur 20 MHz et structure de l'ionosphère », *Bull. Astron. Inst. Czech.* **5** (1954), p. 99-103.
- [15] A. Wegener, « Elementare Theorie der atmosphärischen Spiegelungen », *Ann. Phys.* **57** (1918), p. 203-230.
- [16] M. Zinkova, « Rare sunset mirage, mirage of the sea surface in the duct, October 8, 2016 », <https://www.youtube.com/watch?v=38rXMLcTIB4> (consulté le 15 mars 2022).
- [17] H. L. Sawatzky, W. H. Lehn, « The Arctic mirage and the early North Atlantic », *Science* **192** (1976), p. 1300-1305.
- [18] L. Dettwiller, « Some theorems on “arctic mirages”: hilligar effect and superior mirages », *J. Opt. Soc. Am. A* **36** (2019), p. 1997-2004.
- [19] Frhr. von Schrötter, « Hebung der Kimm und Luftspiegelungen in der Nordsee », *Ann. Hydrogr. Berlin* **36** (1908), p. 490-497.
- [20] W. Wales, « Journal of a voyage, made by order of the Royal Society, to Churchill River, on the North West Coast of Hudson's Bay; of thirteen months residence in that country; and of the voyage back to England; in the years 1768 and 1769 », *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **60** (1770), p. 100-136.
- [21] D. Brandes, « Einige kritische Bemerkungen zu den in den Annalen befindlichen Aufsätzen über die irdische Strahlenbrechung, und Nachricht von der Vollendung seiner Refractions-Beobachtungen », *Gilb. Ann. Physik* **23** (1806), p. 380-393.
- [22] W. Scoresby, *Journal of a Voyage to the Northern Whale-Fishery*, Constable, Edimbourg, 1823.
- [23] J. Parnell, « On a mirage in the English Channel », *Phil. Mag.* **37** (1869), p. 400-401.
- [24] R. L. Ives, « Recurrent mirages at Puerto Peñasco, Sonora », *J. Franklin Inst.* **252** (1951), p. 285-295.
- [25] D. A. Hunt, A. O. Proudfoot, B. G. Gouldthorpe, « Abnormal refraction, Australian waters », *Mar. Obs.* **30** (1960), p. 134.
- [26] G. F. Wright, W. Upham, *Greenland Icefields and Life in the North Atlantic*, D. Appleton, New York, 1896.
- [27] F.-A. Forel, *Le Léman — Monographie limnologique*, t. 2, F. Rouge, Lausanne, 1895.
- [28] S. van der Werf, « Hafgerdingar and giant waves », *Appl. Opt.* **56** (2017), p. G51-G58.
- [29] M. Zinkova, « Fata Morgana in coastal California », *Weather* **64** (2009), p. 287.
- [30] W. H. Lehn, I. I. Schroeder, « Hafgerdingar: a mystery from the King's mirror explained », *Polar Rec.* **39** (2003), p. 211-217.
- [31] S. van der Werf, « Novaya Zemlya effect and Fata Morgana — Raytracing in a spherically non-symmetric atmosphere », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 365-389.
- [32] A. T. Young, E. Frappa, « Mirages at Lake Geneva: the Fata Morgana », *Appl. Opt.* **56** (2017), p. G59-G68.
- [33] L. Dettwiller, « Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 103-132.
- [34] G. G. Pegler, « Mirage, Cape Town, South Africa », *Mar. Obs.* **19** (1949), p. 10-12.
- [35] A. T. Young, G. W. Kattawar, « Sunset science. II. A useful diagram », *Appl. Opt.* **37** (1998), p. 3785-3792.
- [36] K. Koss, E. Graf Thun-Hohenstein, « Kimmiefen-Beobachtungen zu Verudella », *Denkschr. der kaiserl. Akad. Wiss. (Wien), math.-naturwiss. Cl.* **70** (1901), p. 347-428.
- [37] P. de Vanssay de Blavous, « On refraction and refraction tables », *Hydrogr. Rev.* **21** (1944), p. 17-36.
- [38] A. Sjöblom, A.-S. Smedman, « Vertical structure in the marine atmospheric boundary layer and its implication for the inertial dissipation method », *Boundary-Layer Meteorol.* **109** (2003), p. 1-25.
- [39] C. F. Bohren, A. B. Fraser, « At what altitude does the horizon cease to be visible? », *Am. J. Phys.* **54** (1986), p. 222-227.
- [40] National Imagery and Mapping Agency, *American Practical Navigator – Bowditch 2002 Bicentennial Edition*, NIMA, Bethesda (Maryland), 2002.
- [41] J. H. Lambert, *Les Propriétés Remarquables de la Route de la Lumière*, H. Scheurleer F. Z. & Compagnie, La Haye, 1758.
- [42] S. Newcomb, *A Compendium of Spherical Astronomy*, Macmillan, New York, 1906.
- [43] J. Cassini, *Traité de la Grandeur et de la Figure de la Terre*, Pierre de Coup, Amsterdam, 1723.

- [44] L. Dettwiller, « L'invariant de Bouguer et ses conséquences : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n°S1, p. 415-452.
- [45] P. Bouguer, *De la Méthode d'Observer Exactement sur Mer la Hauteur des Astres*, Claude Jombert, Paris, 1729.
- [46] L. Hasse, « Temperature-difference corrections for the dip of the horizon », *J. Inst. Nav. (London)* **17** (1964), p. 50-56.
- [47] S. van der Werf, I. Shokaryev, « Wave height and horizon dip », *Navigation* **62** (2015), p. 161-169.
- [48] G. Reinicke, « Durch Luftspiegelung veränderte Kimmtiefe », *Ann. Hydrograph. Marit. Met.* **31** (1903), p. 511-512.
- [49] H. Ramforth, « Abnormal visibility at sea », *Mar. Weather Log* **17** (1973), p. 300-301.
- [50] M. E. Tschudin, « Refraction near the horizon — an empirical approach. Part 1: terrestrial refraction of the dip », *Appl. Opt.* **55** (2016), p. 3104-3115.
- [51] P. Brassier, *Navigation Astronomique*, nouv. éd., Vuibert, Paris, 1999.
- [52] UK Hydrographic, *Nautical Almanac 2020*, Paradise Cay Publications, Arcata (Californie), 2019.
- [53] J. Huddart, « Observations on horizontal refractions which affect the appearance of terrestrial objects, and the dip, or depression of the horizon of the sea », *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **87** (1797), p. 29-42.
- [54] « Sur les refractions », *Hist. Acad. R. Sci. année 1707* (1734), p. 111-114, [republ. amstelodamoise de l'édition originale parisienne, *Hist. Acad. R. Sci. année 1707* (1730), p. 89-91].
- [55] J.-D. Cassini, « Des irregularitez de l'abbaissement apparent de l'horizon de la mer », *Mém. Acad. R. Sci. année 1707* (1730), p. 195-197.
- [56] F. Arago, « Sur les dépressions de l'horizon de la mer », in *Connaissance des Temps pour l'an 1827*, Bureau des Longitudes, Paris, 1827, p. 316-323.
- [57] H. H. Shufeldt, « Precision celestial navigation », *J. Inst. Nav. (London)* **15** (1962), p. 301-324.
- [58] J.-B. Delambre, *Astronomie Théorique et Pratique*, t. 1, Courcier, Paris, 1814.
- [59] L. Dettwiller, « Short review on the refractive index of air as a function of temperature, pressure, humidity and ionization », 2022, *preprint*, <https://arxiv.org/abs/2204.02603>.
- [60] J.-B. Biot, F. Arago, « Mémoire sur les affinités des corps pour la lumière, et particulièrement sur les forces réfringentes des différens gaz », *Mém. Inst.* **7** (1806), p. 39-66.
- [61] F. Arago, « Instructions concernant la Météorologie et la Physique du globe », *C. R. Acad. Sci.* **7** (1838), p. 206-224.