INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus
Physique

Luc Dettwiller

Les développements de Radau et leur divergence: commentaire historique

Volume 23, Special Issue S1 (2022), p. 527-536

Published online: 21 February 2023
Issue date: 27 October 2023

https://doi.org/10.5802/crphys.119

Part of Special Issue: Astronomie, atmosphères et réfraction
Guest editors: Pierre Léna (Professeur émérite, Observatoire de Paris et Université Paris Cité, membre de l'Académie des sciences) and Luc Dettwiller (Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France)

CENTRE MERSENNE

Les Comptes Rendus. Physique *sont membres du*
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org
e-ISSN : 1878-1535

Comptes Rendus
Physique
2022, Vol. 23, Special Issue S1, p. 527-536
https://doi.org/10.5802/crphys.119

Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

Les développements de Radau et leur divergence : commentaire historique

Radau's series expansions and their divergence: an historical commentary

Luc Dettwiller [a]

[a] Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France
Courriel : dettwiller.luc@gmail.com

Résumé. Dans un article primé de 1882, Radau (1835–1911) fait le point sur diverses expressions de la réfraction, dont celle en série entière de la tangente de la distance zénithale apparente. Nous nous focalisons sur l'expression intégrale de ses coefficients, sur l'approximation fondamentale utilisée pour les calculer, et sur l'introduction ultérieure (1906), dans ce but, de multiples familles de hauteurs caractéristiques de l'atmosphère. Nous commentons la divergence, due à l'approximation fondamentale, de la série obtenue dans le cas de l'atmosphère isotherme (donc illimitée).

Abstract. In an award-winning 1882 article, Radau (1835–1911) takes stock of various expressions of refraction, including the power series of the tangent of the apparent zenith distance. We focus on the integral expression of its coefficients, on the fundamental approximation used to calculate them, and on the subsequent introduction (1906) for this purpose of multiple families of characteristic heights of the atmosphere. We comment on the divergence, due to the fundamental approximation, of the series obtained in the case of the isothermal atmosphere (therefore unlimited).

Published online: 21 February 2023, Issue date: 27 October 2023

1. Introduction

Originaire de Prusse orientale, Rodolphe Radau (1835–1911) commence sa carrière professionnelle en 1855, comme astronome à Königsberg (auparavant Regiomonti, et maintenant Kaliningrad). Il accompagne en 1858 à Paris le *gentleman scientist* Antoine d'Abbadie [1] qui l'embauche pour effectuer la réduction de ses observations de géodésie recueillies au cours de son expédition en Abyssinie ; on sait (voir [2] dans ce numéro spécial) que les corrections de réfraction jouent un grand rôle aussi en géodésie. Radau devient rédacteur de la *Revue des deux Mondes* ; mais il poursuit en même temps ses travaux en astronomie et en géodésie (où il invente une transformation, encore utilisée de nos jours dans des études théoriques, pour traiter la question de la figure hydrostatique de la Terre). Il est naturalisé français en 1873, et collabore avec Tisserand sur des questions de mécanique céleste.

Dans les *Annales de l'Observatoire de Paris*, il produit deux articles de synthèse [3, 4] sur la réfraction astronomique, en 1882 puis 1889 ; ils sont disponibles sur NASA/ADS :

https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/1882AnPar..16B...1R/ADS_PDF

https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/1889AnPar..19G...1R/ADS_PDF

Ils seront tous deux primés par l'Académie des sciences, où il sera élu en 1897. Entre ces deux publications, il devient membre du comité de rédaction du *Bulletin astronomique* lors de sa création en 1884.

Nous présentons surtout le premier de ces deux articles : R. Radau, « Recherches sur la théorie des réfractions astronomiques », *Annales de l'Observatoire de Paris* **16** (1882), B.1–B.114.

RECHERCHES

SUR LA

THÉORIE DES RÉFRACTIONS ASTRONOMIQUES;

PAR M. R. RADAU.

En comparant entre elles les Tables de réfractions en usage parmi les astronomes, on constate qu'elles sont sensiblement d'accord pour les distances zénithales qui n'excèdent pas 80°, c'est-à-dire pour toute la région du ciel où se font habituellement les observations; et, malgré la dissemblance des théories qui ont servi de base à ces Tables, les petites différences qui subsistent encore ne sont guère dues qu'à la diversité des valeurs adoptées pour la constante qui dépend de l'indice de réfraction de l'air. C'est que, fort heureusement, dans ces limites, la loi suivant laquelle on fait décroître la densité des couches atmosphériques a très peu d'influence sur le résultat. Il n'en est plus de même pour les réfractions qui s'opèrent plus près de l'horizon. Les valeurs de la réfraction horizontale moyenne qui se déduisent des diverses théories diffèrent de plusieurs minutes, et les mêmes écarts se présentent lorsque l'on compare ces théories aux observations faites dans le voisinage de l'horizon.

[3, B.1] Source : NASA / ADS

2. Résumé et commentaires

Cet article de synthèse compare diverses théories, fondées sur des modèles d'atmosphère différents, en commençant par celui de Cassini — qui donne la relation (2) de notre « panorama historique [...] » [5] dans ce numéro spécial, où intervient la hauteur réduite de l'atmosphère, i.e. « la hauteur d'une colonne d'air de densité [μ_S] qui ferait équilibre à la pression actuelle [P_S]. » [3, p. B.10]

Il introduit (p. B.12–14) le principe et l'écueil des développements en série pour calculer l'intégrale donnant la réfraction χ_S pour l'observateur S dans le cas d'une atmosphère à symétrie sphérique, de profil de masse volumique $\mu(r)$ quelconque.

Il ne s'en sert pas tout de suite : il fait un détour par l'intégration donnant χ_S sans développement en série, dans le cas où l'on adopte une relation empirique comme celle de Kramp-Bessel (B.21–23) puis celle de Laplace (B.24–25), en se servant d'une fonction transcendante due à Kramp et qui se ramène simplement à la fonction d'erreur.

Puis il présente les différents modèles d'atmosphère susceptibles d'être traités avec ces développements en série (B.27–39) : celui de Kramp-Bessel, celui d'Ivory, de Kowalski, de Gyldén, ainsi que les modèles polytropiques d'indice k (Schmidt–Bauernfeind) pour lesquels il donne quelques résultats numériques avec k allant de 4 à 6 (B.30–32).

Il expose diverses techniques d'intégration, en commençant par des théorèmes généraux (B.40) dont celui de Lagrange, puis il les applique à certains modèles ; celui d'Ivory (B.42–44), de Schmidt–Bauernfeind (B.46–55), de Gyldén (B.55–56) — à propos duquel il mentionne les effets diurnes et saisonniers (B.57) ainsi que les chenaux optiques (B.58–60) — et de nouveau d'Ivory par une autre méthode (B.60–62), puis de Kowalski (B.62–63).

Les principaux modèles sont comparés en B.64. Radau note que ceux qui ont le plus petit gradient thermique vertical $|(\mathrm{d}T/\mathrm{d}r)_S|$ au niveau de l'observateur (avec $\mathrm{d}T/\mathrm{d}r < 0$) donnent la plus grande réfraction horizontale χ_{Sh} (B.63), et vice-versa. Cela se devine en partant de la loi de Simpson [5, paragraphe 4] puis en utilisant le théorème de Biot : celui-ci donne (si on note Z' la distance zénithale apparente d'un astre) $(\mathrm{d}\chi_S/\mathrm{d}Z')(90°) = \kappa_S/(1-\kappa_S)$ qui est d'autant plus grand que le coefficient de réfraction κ_S (voir le paragraphe 7.1 de notre exposé des « propriétés remarquables de la réfraction astronomique [...] » [6] dans ce numéro spécial) est grand (sachant que $\kappa_S < 0,3$ car $\mathrm{d}T/\mathrm{d}r < 0$), donc $|(\mathrm{d}T/\mathrm{d}r)_S|$ petit.

Pour finir, il s'intéresse aux modèles d'atmosphère qui n'ont pas la symétrie sphérique (B.99 ss). Les écarts de réfraction proche de l'horizon, comme ceux observés par Delambre (qui écrit : « dans des circonstances qui étaient les mêmes en apparence, la réfraction variait de 15 à $20''$ sans qu'on pût en soupçonner la cause ; mais les variations sont encore bien plus sensibles à l'horizon », et qui mentionne $45''$ pour $Z' = 89°$ [7]), sont des écarts grands, attribués par Radau à des changements d'inclinaison des isopycnes (i.e. des surfaces d'égale masse volumique μ) de l'ordre de la minute d'angle (B.112). Pourtant, son calcul avec une inclinaison d'isopycne de $1'$ ne lui donne une variation de réfraction que de $10''$ sur l'horizon astronomique (B.111) au lieu des $45''$ attendues ; et les estimations (par visée d'une étoile au zénith) de l'inclinaison des isopycnes, publiées auparavant, montrent qu'elle ne dépasse pas quelques minutes [8]. Radau n'a pas compris que de telles variations de réfraction pour Z' proche de 90° proviennent plutôt de changements dans le profil de température, surtout au voisinage de S.

L'article de 1889 [4] prolonge le précédent, sans apporter de radicale nouveauté.

Visiblement Newcomb s'est inspiré de Radau (qu'il prolonge) pour écrire son traité de 1906 [9].

Pour d'autres détails, voir

A. T. Young. (Page consultée le 12 janvier 2022), *Annotated bibliography of mirages, green flashes, atmospheric refraction, etc.*, [En ligne]. Adresse URL : https://aty.sdsu.edu/bibliog/bibliog.html.

3. Présentation illustrée de quelques idées fondamentales

3.1. *Une méthode systématique de développement en série entière de* $\chi_S(\tan Z')$

Dans [6] nous avons montré une approche emblématique de celles du XIX^e^ siècle, qui se trouve contenue dans l'article [3] que nous présentons ici ; elle commence (voir l'extrait ci-dessous, dont les notations sont expliquées dans la Table 1 qui le suit) par

$$\chi_S = n_S\, r_S(\tan Z')\int_1^{n_S} n^{-2} r^{-1}[1+F(n,Z')]^{-1/2}\mathrm{d}n = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p a_p \tan^{2p+1} Z' \tag{1}$$

où l'on a posé, en tenant compte de la relation entre r et n à Z' fixé,

$$F(n,Z') := \left(1-\frac{n_S^2}{n^2}\frac{r_S^2}{r^2}\right)\tan^2 Z' \tag{2}$$

(le symbole := indiquant une définition ou une notation), et

$$a_p = r_S\frac{(2p-1)!!}{p!\,2^p}\int_1^{n_S} n_S\, n^{-2} r^{-1}\left(1-\frac{n_S^2 r_S^2}{n^2 r^2}\right)^p \mathrm{d}n \tag{3}$$

où $N!$ et $N!!$ désignent respectivement la factorielle et la double factorielle de N. Attention : notre formule (3) n'est pas celle invoquée ci-dessous par Radau, et qui correspond à notre première formule (1).

La formule (3) peut s'écrire

$$\mathbf{r} = \int^{\mu_0}\frac{d\mu}{\mu^2}\frac{r_0}{r}\frac{\operatorname{tang} z}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 z\left[1-\left(\frac{\mu_0 r_0}{\mu r}\right)^2\right]}}.$$

Or nous avons

$$\frac{r_0}{r} = 1-s,\quad \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^2 = 1-2\alpha\omega,\quad \mu_0\frac{d\mu}{\mu^2} = \frac{\alpha\, d\eta}{(1-2\alpha\omega)^{\frac{3}{2}}},$$

par conséquent

$$\mathbf{r} = \alpha\operatorname{tang} z\int_0^1\frac{1-s}{(1-2\alpha\omega)^{\frac{3}{2}}}\left(1+\frac{2s-2\alpha\omega-s^2}{1-2\alpha\omega}\operatorname{tang}^2 z\right)^{-\frac{1}{2}} d\eta.$$

[3, B.12] Source : NASA / ADS

$$\mathbf{r} = \mathrm{A}_0\operatorname{tang} z - \mathrm{A}_1\operatorname{tang}^3 z + \mathrm{A}_2\operatorname{tang}^5 z - \ldots,$$

[3, B.13] Source : NASA / ADS

Correspondance des notations

Table 1. Notations (le symbole := indique une définition)

Notations de Radau [3]	Notations de Dettwiller [5,6] dans ce numéro de *C. R. Phys.*	Notations de Newcomb [9]	Indications [et unités usuelles]
$\mathbf{r}$	χ_S	R	Réfraction astronomique pour l'observateur S [°, ′, ″]
$\mathbf{R}$	χ_{Sh}		Réfraction horizontale, i.e. pour un astre vu sur l'horizon astronomique [°, ′, ″]
$\mu(r)$	$n(r)$	$\mu(r)$	Indice de réfraction de l'air, dont la distribution est supposée à symétrie sphérique de centre C
μ_0	n_S	μ_1	Indice au niveau de l'observateur S
r_0	r_S	a	CS (quasiment le rayon terrestre) [km]
z	Z'	z	Distance zénithale apparente d'un astre A [°, ′, ″]
α	quasiment η_S		$\eta_S := n_S - 1$
Densité η relative à S	μ/μ_S	ρ/ρ_1	Rapport de la masse volumique de l'air à sa valeur en S
ω	$1-(\mu/\mu_S)$	w	
h	$z := r - r_S$	h	Altitude par rapport à S [m, km]
y	quasiment z/H_1	x	H_1 : hauteur réduite de l'atmosphère
u	quasiment $Y := \eta - \eta_S + (z/r_S)$		Grandeur utilisée pour l'approximation fondamentale

3.1.1. *Estimation de a_0*

On approxime par 1 le préfacteur $n_S\, n^{-2}$ dans notre formule (3) ; et, avec la loi empirique de Gladstone–Dale pour l'air supposé bien mélangé [6, sous-paragraphe 4.1], il vient, en introduisant l'altitude $z := r - r_S$ d'origine en S,

$$a_0 \cong \int_1^{n_S} \frac{r_S}{r}\,\mathrm{d}n = \int_0^{\eta_S} \left(1+\frac{z}{r_S}\right)^{-1} \mathrm{d}\eta \tag{4}$$

où $\eta := n-1$ désigne la réfractivité, et η_S sa valeur en S. Ceci est supérieur mais — puisque $z \ll r_S$ tant que la masse volumique $\mu(r)$ n'est pas négligeable — à peu près égal à

$$\int_0^{\eta_S} \left(1-\frac{z}{r_S}\right) \mathrm{d}\eta = \eta_S(1-h_1) \tag{5}$$

où on a introduit la « hauteur réduite relative »

$$h_1 := \frac{1}{\eta_S}\int_0^{\eta_S} \frac{z}{r_S}\,\mathrm{d}\eta. \tag{6}$$

Finalement,

$$a_0 = (n_S - 1)(1-h_1) \tag{7}$$

(nous avons mis = au lieu de ≅ car nous n'avons pas introduit de nouvelle approximation en plus de celles indiquées précédemment). Ce résultat confirme le premier terme de la formule de Laplace — équation (14) de [6].

3.1.2. *Estimation des coefficients a_p pour $p \geq 1$*

Pour traiter maintenant le cas où $p \geq 1$, on est obligés de considérer $1-(n_S^2/n^2)(r_S^2/r^2)$. La technique de calcul traditionnelle et les notations déjà utilisées au sous-paragraphe 5.1 de [6] permettent de montrer facilement que, sur la hauteur utile de l'atmosphère,

$$1-\frac{n_S^2 r_S^2}{n^2 r^2} \cong 2\left(\frac{z}{r_S}+\eta-\eta_S\right) := 2Y \tag{8}$$

(ce qui est une approximation fondamentale et majorante) ; puis en y approximant toujours par r_S^{-1} (ce qui majore encore un peu mais sans introduire de divergence à l'infini) le préfacteur $n_S\, n^{-2} r^{-1}$ dans notre relation (3), on obtient

$$a_p \cong \frac{(2p-1)!!}{p!}\int_0^{\eta_S} Y^p \,\mathrm{d}\eta. \tag{9}$$

Avec un modèle qui est le cas particulier où $\beta = 0$ — dans l'équation (34) de [5], caractérisant la dernière atmosphère considérée par Laplace dans son *Traité de Mécanique Céleste* [10, livre 10, article 1], [11, p. 497–521] —, donc un modèle voisin de celui à profil (de masse volumique) exponentiel, Radau obtient une expression voisine de la série (50) de [5], mais avec une autre hauteur d'échelle relative que h_1 [3, B.14] : elle est caractérisée par θ, et elle intervient dans la loi exponentielle décroissante qui, dans le modèle considéré, exprime η en fonction de Y (et non pas de z) — voir l'extrait ci-dessous. Nous pouvons facilement la relier à h_1, vu que

$$\theta = \frac{1}{\eta_S}\int_0^\infty \eta_S \,\mathrm{e}^{-Y/\theta}\,\mathrm{d}Y = \frac{1}{\eta_S}\int_0^\infty \eta\,\mathrm{d}Y = \frac{1}{\eta_S}\left(\int_0^\infty \eta\frac{\mathrm{d}z}{r_S}+\int_{\eta_S}^0 \eta\,\mathrm{d}\eta\right) = h_1 - \frac{\eta_S}{2}. \tag{10}$$

Pour $n = 1$, nous avons $\int_0^1 u\, d\eta = \theta$, en vertu de (14); le coefficient A_1 est donc, à très peu près, égal à $A\theta$. En posant $\eta = e^{-\frac{u}{\theta}}$, hypothèse qui satisfait à l'équation (14), on trouve de même que A_n a pour valeur approchée

$$1.3\ldots(2n-1)\,A\theta^n.$$

Il s'ensuit que la série

$$\mathbf{r} = A_0 \operatorname{tang} z\,(1-\theta \operatorname{tang}^2 z + 3\theta^2 \operatorname{tang}^4 z - 15\,\theta^3 \operatorname{tang}^6 z + \ldots)$$

fournit une valeur très approchée de la réfraction. C'est aussi ce qu'on trouve en développant la formule (8) :

[3, B.14] Source : NASA / ADS

À l'époque, en l'absence d'outils de calcul numérique puissants, ainsi que d'informations précises sur la structure de l'atmosphère entière, il était tentant de proposer des modèles qui soient commodes analytiquement, en donnant η en fonction de Y plutôt que de z, puisque les expressions approximatives classiques sont nettement plus simples en fonction de Y — voir la fin du paragraphe 4 de [5], ainsi que l'approximation fondamentale présentée ci-dessus et réutilisée au paragraphe 8 de [6]. Laplace a fait grand usage de cet artifice, dont nous verrons (au sous-paragraphe 3.2 du présent article) que Radau le critique un peu plus loin dans son mémoire [3] : car il est plus naturel de partir du profil de η en fonction de z pour calculer les coefficients a_p.

Il serait trop long de vouloir reproduire ici dans le détail les calculs tortueux traditionnellement menés dans ce but, avec diverses approximations supplémentaires cependant ; la plupart des fois, ils se heurtent à un problème de convergence.

Contentons-nous alors d'en expliquer le principe général : on repart de l'approximation fondamentale incluse dans l'expression (9) du présent article, pour laquelle on développe $[(z/r_S)+\eta-\eta_S]^p$, ce qui donne une somme de monômes proportionnels à $z^m\eta^q$ (avec m et q dans $\{0,1,2,\dots,p\}$) ; pour exprimer a_p à l'aide de (9), on se ramène alors à l'utilisation de hauteurs caractéristiques relatives $h_{m,q}$ telles que

$$\begin{aligned}\eta_S^{q+1}h_{m,q}^m := \int_0^{\eta_S}\left(\frac{z}{r_S}\right)^m\eta^q\,\mathrm{d}\eta &= -\int_0^\infty\left(\frac{z}{r_S}\right)^m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\eta^{q+1}}{q+1}\mathrm{d}z\\ &= -\left[\left(\frac{z}{r_S}\right)^m\frac{\eta(z)^{q+1}}{q+1}\right]_0^\infty+\int_0^\infty m\left(\frac{z}{r_S}\right)^{m-1}\frac{\eta(z)^{q+1}}{q+1}\frac{\mathrm{d}z}{r_S}=\frac{m}{q+1}\int_0^\infty\left(\frac{z}{r_S}\right)^{m-1}\eta^{q+1}\frac{\mathrm{d}z}{r_S}\end{aligned}\tag{11}$$

où l'intégration par parties a permis de passer de l'exposant m à l'exposant $m-1$. Cette intégrale, proportionnelle à $\rho_1^{q+1}I_{m,q}$ de Newcomb [9] — voir l'extrait ci-dessous — reste à estimer pour chaque profil de réfractivité. Dans le cas polytropique (étudié par Ivory, Bauernfeind, etc. — voir le sous-paragraphe 6.3 de [5]) Newcomb reconnaît à ce stade une intégrale eulérienne de première espèce (« intégrale bêta » — [12, p. 209]) ; elle se traite en remarquant qu'une primitive de $\eta(z)^{q+1}$ est proportionnelle à une autre puissance de $\eta(z)$, et donc qu'en itérant cette intégration par parties encore $m-1$ fois on arrive à une intégrale triviale. Notons que $h_{m,q}^m$ est le moment réduit et relatif, d'ordre m, de $-(\mathrm{d}/\mathrm{d}z)(\eta^{q+1}/(q+1))$.

214 ASTRONOMICAL REFRACTION [§ 114.

Thus we have

$$x^n w^i dw = -x^n\frac{d\rho}{\rho_1}+ix^n\frac{\rho d\rho}{\rho_1{}^2}-\frac{i(i-1)}{1.2}x^n\frac{\rho^2 d\rho}{\rho_1{}^3}+\dots$$

These terms are to be integrated for w between the limits 1 and 0. The integrals to be found now become of the general form

$$\int_0^{\rho_1}x^n\rho^\kappa d\rho\equiv\rho_1{}^{\kappa+1}I_{n,\kappa}. \quad\dots\dots\dots\dots(27)$$

[9, p. 214]

Dans le cas de l'atmosphère bien mélangée et satisfaisant la loi de Gladstone–Dale, supposée en plus constituée d'un mélange idéal de gaz parfaits de température absolue T uniforme, avec une distribution verticale de pression P hydrostatique dans le champ de pesanteur radial et de norme g considérée uniforme, on a un profil de réfractivité exponentiellement décroissant

$$\eta(z)=\eta_S\,\mathrm{e}^{-z/H_T},\quad\text{avec } H_T=\frac{RT}{M_a g}\tag{12}$$

qui est l'échelle de hauteur de cette atmosphère dite isotherme (où R désigne la constante des gaz parfaits, et M_a la masse molaire de l'air). Alors $h_{p,0}$ se déduit (comme cela fut déjà remarqué par Kramp [13]) de

$$(r_S\,h_{p,0})^p=-\int_0^\infty z^p[\eta'(z)/\eta_S]\,\mathrm{d}z=\int_0^\infty z^p\,\mathrm{e}^{-z/H_T}\,\mathrm{d}z/H_T=p!\,H_T^p\quad\forall p\in\mathbb{N}\tag{13}$$

(qui est une intégrale eulérienne de seconde espèce, donc liée à la « fonction gamma » — [12, p. 1137–1142]) alors $h_{1,0} = H_T/r_S$ dans ce cas ; et puisque $[\exp(-z/H_T)]^{q+1} = \exp(-[(q+1)/H_T]z)$, du calcul précédent on déduit alors facilement $h_{m,q}$ par

$$h^m_{m,q} = \frac{m}{q+1}\int_0^\infty \left(\frac{z}{r_S}\right)^{m-1} \exp\left(-\frac{q+1}{H_T}z\right)\frac{\mathrm{d}z}{r_S} = \frac{m!\,h^m_{1,0}}{(q+1)^m}. \tag{14}$$

Bien sûr, si dans le profil (12) de η on change H_T en une autre hauteur H_1, comme l'ont aussi fait Bessel et Kramp selon Radau [3, B.27], il suffit de faire de même dans les expressions (13)–(14) donnant $h_{p,0}$ et $h_{m,q}$. Plus généralement, avec un profil de η quelconque la famille des $h_{m,q}$ ne dépend que de la forme de celui-ci, pas de la constante multiplicative η_S — vu la définition (11).

Cela nous donne du recul sur l'approximation pédagogique effectuée au sous-paragraphe 5.2.1 de [6] : admettre $Y \cong z/r_S$ implique de négliger tous les $h_{m,q}$ tels que $q \neq 0$, pour ne conserver que les $h_p := h_{p,0}$. On trouve alors, pour une atmosphère isotherme,

$$a_p \cong \frac{(2p-1)!!}{p!}\int_0^{\eta_S}\left(\frac{z}{r_S}\right)^p \mathrm{d}\eta = \frac{(2p-1)!!}{p!}(n_S-1)h^p_{p,0} \underset{\infty}{\sim} \frac{n_S-1}{\sqrt{\pi p}}(2h_{p,0})^p \tag{15}$$

— où l'équivalent est obtenu grâce à la formule de Stirling [13, p. 2868].

On obtient finalement, avec cette approximation pédagogique,

$$a_p = (2p-1)!!\,\eta_S\,h_1^p \tag{16}$$

qui donne, pour le coefficient du terme en $\tan^3 Z'$,

$$-a_1 = -\frac{(2-1)!!}{1!}(n_S-1)h_{1,0} = -\eta_S\,h_1. \tag{17}$$

On constate qu'on ne retrouve pas exactement le coefficient du terme en $\tan^3 Z'$ de la formule de Laplace (équation (30) de [5]) : $-\eta_S[h_1 - (\eta_S/2)] = -\eta_S\theta$; cette différence vient surtout de l'approximation pédagogique, dont l'effet revient ici à négliger $\eta_S/2 \cong 0{,}08h_1$.

3.1.3. *Divergence*

La pointe de ce sous-paragraphe 3.1 consiste à remarquer que l'ensemble des résultats obtenus, pour tout profil de η exponentiel décroissant, donne

$$\chi_S = (n_S-1)\left[(1-h_1) + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p(2p-1)!!\,(h_1\tan^2 Z')^p\right]\tan Z' \tag{18}$$

qui est une série violemment divergente, avec notre approximation pédagogique, mais pas à cause d'elle ! Ce problème de divergence est signalé une rare fois par Radau — voir l'extrait ci-dessous.

> On voit déjà, cependant, que la série $r = A_0 \operatorname{tang} z - A_1 \operatorname{tang}^3 z + \ldots$ ne peut guère être employée avec avantage au delà de 80°, car, en faisant $\operatorname{tang} z = 10$ ($z = 84°,3$), elle diverge à partir du terme $A_5 \operatorname{tang}^{11} z$, qui a pour valeur approchée 10″.

[3, B.14–15] Source : NASA / ADS

Radau ne dit jamais explicitement dans cet article (ni aux pages G.36–G.38 de son article ultérieur de 1889 [4], où il s'inquiète de la convergence) que la série approchée obtenue finalement pour $\chi_S(\tan Z')$ est semi-convergente (voir le sous-paragraphe 6.3 de [5]), ni que $\lim_{p\to\infty} a_p \tan^{2p+1} Z' = \infty$ aussi petits que soient H_1 et même $\tan Z'$ (non nuls) ! Dans [6] nous avons expliqué que ce paradoxe ne vient pas de l'interversion du développement en série et de l'intégrale — voir les relations (1)–(3) — mais de l'approximation majorante fondamentale consistant à assimiler $1 - [n_S^2 r_S^2/(n^2 r^2)]$ à $2Y$ — cf. (8) — dans l'intégrale de l'expression de a_p, ce qui a un effet désastreux pour p grand dans le cas d'une atmosphère illimitée même avec un profil de η à décroissance aussi rapide qu'une exponentielle. Comme cette approximation fondamentale est bien antérieure à Radau, sa conséquence néfaste se retrouve aussi chez d'autres du XIX^{e} siècle (voir le sous-paragraphe 6.3 de [5]). La divergence vient du terme z/r_S introduit avec Y qui diverge à l'infini (contrairement à $\eta - \eta_S$ et à $1 - [n_S^2 r_S^2/(n^2 r^2)]$) ; ceci, pour un profil de réfractivité comme $\eta(z) = \eta_S\, \mathrm{e}^{-z/H_1}$, ruine la convergence pour tout Z' non nul, en introduisant les moments réduits $h_{m,q}^{m}$ qui croissent trop vite avec m (à cause de $m!$) [14, p. 107] — voir les expressions (13) et (14), en notant que $\lim_{p\to\infty}[(2p-1)!!/(p!\,2^p)](2h_1)^p = \lim_{p\to\infty}(1/\sqrt{\pi p})(2h_1)^p = 0$, alors que le remplacement de h_1 par h_p (conformément à (15)) donne une limite non plus nulle mais infinie avec tout profil de réfractivité exponentiel : la suite des $(2h_p)^p$ est décroissante pour $p < r_S/(2H_1)$ puis croissante vers l'infini pour $p > r_S/(2H_1)$. Mais pour une atmosphère limitée (comme celle d'un modèle polytropique) et de hauteur totale inférieure à $r_S/2$, la suite des $(2h_p)^p$ est décroissante tendant vers 0 ; alors $\lim_{p\to\infty}[(2p-1)!!/p!]h_p^p = \lim_{p\to\infty}(1/\sqrt{\pi p})(2h_p)^p = 0$, donc pour Z' assez petit tel que la suite des $[(2p-1)!!/(p!\,2^p)](2h_p \tan^2 Z')^p$ soit aussi décroissante tendant vers 0, la série approchée obtenue avec notre approximation pédagogique converge car elle est alternée [15, p. 200–201].

3.2. *Utilisation d'autres formulations des modèles*

Quant à l'usage des modèles exprimant η en fonction de Y plutôt que de z, Radau précise ce qui suit :

> Les relations de la forme $\eta = f(u)$ permettent d'établir l'expression de la réfraction d'une manière très directe ; c'est pourquoi j'ai voulu examiner le parti qu'on en peut tirer. Malheureusement elles ont l'inconvénient de déguiser, en quelque sorte, la loi des densités (ou celle des températures) sur laquelle repose l'hypothèse qu'elles expriment. Aussi a-t-on presque toujours préféré définir la constitution hypothétique de l'atmosphère par une relation simple entre la densité et l'altitude (Kramp, Bessel), ou la température et l'altitude (Schmidt, Bauernfeind, Gyldén), ou la densité et la température (Ivory, Kowalski).

[3, B.27] Source : NASA / ADS

Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

Remerciements

L'auteur exprime sa gratitude au Dr. Andrew Young pour la mise à disposition de sa fabuleuse bibliographie en ligne (citée à la fin du paragraphe 2) et pour ses conseils personnalisés d'utilisation. Il remercie aussi Julien Desmarets (du service des publications de l'Académie des sciences) pour son précieux travail technique améliorant la lisibilité des extraits de textes anciens.

Références

[1] J.-P. Poirier, *Antoine d'Abbadie Voyageur et physicien du globe au* XIX^{e} *siècle*, Hermann, Paris, 2009.
[2] L. Dettwiller, « Les développements de Lambert : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 453-465.

[3] R. Radau, « Recherches sur la théorie des réfractions astronomiques », *Ann. Obs. Paris* **16** (1882), p. B.1-B.114.
[4] R. Radau, « Essai sur les réfractions astronomiques », *Ann. Obs. Paris* **19** (1889), p. G.1-G.90.
[5] L. Dettwiller, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie », *C. R. Phys.* **23** (2022), nº S1, p. 13-62.
[6] L. Dettwiller, « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique », *C. R. Phys.* **23** (2022), nº S1, p. 63-102.
[7] J.-B. Delambre, *Astronomie Théorique et Pratique*, t. 1, Courcier, Paris, 1814.
[8] S. P. Glazenap, *Refraktsionnii Uklon*, F. S. Sushchinskii, Saint-Pétersbourg, 1881.
[9] S. Newcomb, *A Compendium of Spherical Astronomy*, Macmillan, New York, 1906.
[10] P. S. Laplace, *Traité de Mécanique Céleste*, t. 4, J. B. M. Duprat, Paris, 1805.
[11] N. Bowditch, *Mécanique Céleste. By the Marquis de La Place, translated, with a commentary*, vol. VI, Little and Brown, Boston, 1839.
[12] E. W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, 2^{e} éd., Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003.
[13] C. Kramp, *Analyse des Réfractions Astronomiques et Terrestres*, Dannbach, Strasbourg, an VII – et Schwikkert, Leipzig, 1799.
[14] A. T. Young, « Understanding astronomical refraction », *Observatory* **126** (2006), p. 82-115.
[15] R. Couty, J. Ezra, *Analyse*, t. 2, 4^{e} éd., A. Colin, Paris, 1976.