



INSTITUT DE FRANCE  
Académie des sciences

# *Comptes Rendus*

---

# *Physique*

François Mignard

## **Les tables de réfraction astronomique**

Volume 23, Special Issue S1 (2022), p. 133-178

Published online: 25 May 2023

Issue date: 27 October 2023

<https://doi.org/10.5802/crphys.123>

**Part of Special Issue:** Astronomie, atmosphères et réfraction

**Guest editors:** Pierre Léna (Professeur émérite, Observatoire de Paris et Université Paris Cité, membre de l'Académie des sciences) and Luc Dettwiler (Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France)

This article is licensed under the  
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION 4.0 INTERNATIONAL LICENSE.  
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



*Les Comptes Rendus. Physique* sont membres du  
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

[www.centre-mersenne.org](http://www.centre-mersenne.org)

e-ISSN : 1878-1535



# Les tables de réfraction astronomique

## *Tables of astronomical refraction*

François Mignard\*, a

<sup>a</sup> Université Côte d'Azur, Observatoire de la Côte d'Azur, CNRS, Laboratoire Lagrange,  
Bd de l'Observatoire, CS 34229, 06304 Nice Cedex 4, France

Courriel: [francois.mignard@oca.eu](mailto:francois.mignard@oca.eu) (F. Mignard)

**Résumé.** Histoire de la découverte de la réfraction astronomique et des méthodes mises en œuvre pour en tenir compte dans les mesures de position des astres. On reprend le fil historique depuis Tycho Brahe pour la construction de tables empiriques dans un premier temps, puis de modèles mathématiques utilisant les lois de l'optique et de la physique des gaz. Établissement des équations fondamentales et présentation de quelques solutions analytiques, comparées aux calculs actuels. Discussion des modèles numériques actuels et des modèles d'atmosphères dérivés de l'atmosphère standard. Les expressions théoriques sont développées pas à pas pour permettre le codage informatique.

**Abstract.** The paper investigates the refraction as it concerns position astronomy and the attempts of generations of astronomers since Tycho Brahe to estimate its size as a function of the apparent zenith distance of the sources. A few historical models are introduced and their value discussed by comparison to modern tables. The fundamental equation of the light-rays is established starting from the Fermat principle, together with a sample of analytical approximations of its solution down to the end of the XIXth century. Finally the two numerical approaches used today are presented with some details alongside the standard model of the Earth atmosphere. Theoretical expressions are developed step by step to allow the coding into a computer program.

**Mots-clés.** réfraction, astronomie, astrométrie, tracé de rayon, optique atmosphérique, histoire de l'optique.

**Keywords.** refraction, astronomy, astrometry, ray tracing, atmospheric optics, history of optics.

Published online: 25 May 2023, Issue date: 27 October 2023

## 1. Introduction

Avec l'avènement de l'astrométrie spatiale dans les années 1980, l'importance des mesures de positions absolues de grande précision depuis le sol terrestre a considérablement diminué, ce qui n'est pas le cas pour les mesures relatives dans des petits champs, bien au contraire. L'usage des instruments méridiens a disparu des observatoires et le suivi de la rotation de la Terre est assuré par des techniques très différentes de celles de l'astronomie classique. Les marins ont abandonné la navigation astronomique et ne se soucient plus de la réfraction et de la

---

\* Auteur correspondant.

visibilité de l'horizon, mais il y a encore des passionnés de la navigation à l'ancienne et même une compétition (Golden Globe Race) de navigation au large avec les moyens traditionnels. Les catalogues stellaires fondamentaux, ou ceux des sources extragalactiques, se construisent dans l'espace pour les mesures optiques, ou au sol pour le domaine des ondes radio où la troposphère et l'ionosphère jouent un rôle important. Même si des mesures astrométriques au sol demeurent indispensables pour les objets du système solaire par exemple, ce sont des mesures différentielles qui se rapportent aux sources fondamentales dont les positions sont obtenues par ailleurs. Ainsi, le traitement de la réfraction astronomique n'a plus aujourd'hui le rôle central qu'il a pu avoir dans le passé. En revanche l'intervention de l'atmosphère dans la formation des images a largement pris sa place en raison de la résolution angulaire potentielle des instruments astronomiques depuis la fin du xix<sup>e</sup> siècle.

Les grands traités d'astronomie de position de bon niveau contiennent tous un chapitre, souvent étendu et difficile à lire, sur la réfraction astronomique et les développements mathématiques (conséquents) nécessaires à l'établissement des tables. Citons les traités majeurs en langue anglaise de Brünnow, Chauvenet, Newcomb et Ball [1–4] qui ont formé des générations d'astronomes praticiens. À noter que ces quatre auteurs sont au départ des mathématiciens de formation qui ont enseigné les mathématiques au niveau supérieur avant de s'orienter vers l'astronomie fondamentale. Ils ne sont donc pas rebutés par des développements analytiques couvrant plusieurs pages, et même des dizaines de pages. En langue française, la contribution de P. Puiseux [5] dans l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques* (adaptation française de *die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen* et non une traduction) met bien en évidence toutes les hypothèses simplificatrices et explore dans le détail plusieurs modèles physiques pour l'atmosphère. Elle est l'oeuvre d'un physicien plus que d'un mathématicien et sa lecture est plus aisée. À un niveau plus abordable, l'ouvrage de A. Danjon [6] reste la référence la plus complète, moins développée que les traités anglo-saxons mais suffisante pour arriver à l'intégrale de la réfraction et à la signification physique des deux premiers coefficients du développement en  $\tan z_0$ , avec  $z_0$  pour la distance zénithale apparente. Cet ouvrage contient tout ce qu'il faut pour comprendre les propriétés essentielles de la réfraction et le fait que, du zénith à environ 70° de distance zénithale, les détails de la structure atmosphérique importent peu. Les vrais problèmes commencent à cette hauteur et deviennent pratiquement insolubles à l'horizon.

Mais ces mathématiques avancées masquent les aspects physiques essentiels qui sont à la base d'une compréhension profonde du phénomène et dissimulent sous le formalisme les limites du modèle que toute modélisation, aussi raffinée soit-elle, aura bien du mal à franchir. Pour une présentation à l'inverse très physique des difficultés rencontrées pour estimer la réfraction au voisinage de l'horizon, la lecture de [7] et de [8] est fortement conseillée avant d'aborder les solutions plus mathématiques.

Cet article est organisé en quatre sections traitant tout d'abord de la réfraction astronomique avant la loi de Snell-Descartes (section 2), puis l'application de cette loi dans le modèle de Cassini qui est étudié dans le détail (section 3). Dans la section 4 on établit la relation fondamentale de la réfraction atmosphérique à partir des principes de base, avec une présentation succincte des solutions analytiques. Enfin la section 5 aborde la question des solutions numériques employées aujourd'hui et donne tous les éléments permettant de les programmer avec un modèle d'atmosphère standard.

Un certain nombre de paragraphes historiques de cet article se prêtent bien à une première lecture du sujet avant de se plonger dans les chapitres beaucoup plus détaillés et particulièrement documentés de L. Dettwiller dans ce volume [9, 10] pour les questions générales et les autres chapitres du même auteur pour des points techniques très précis. Les redondances éventuelles

ne nuisent pas à la lecture et permettent de mieux suivre le fil de la pensée de l'auteur sans une rupture de texte par un renvoi.

### Notations

Les notations, leurs définitions et les unités sont rassemblées dans la table 5 à la fin de ce document.

## 2. La réfraction astronomique avant l'optique moderne

### 2.1. Ptolémée

Certains phénomènes résultant de la réfraction de la lumière étaient bien connus avant Ptolémée, mais pour la partie qui nous concerne ici, il est le premier à en voir de façon remarquablement claire les conséquences astronomiques et probablement également le premier à en faire l'étude expérimentale du point de vue de l'optique. Notons cependant que Cléomède (*ca. 1<sup>er</sup> siècle avant notre ère*) rapporte dans *De motu circulari corporum caelastium*<sup>1</sup> l'observation d'une éclipse de Lune avant le coucher du Soleil, ce qu'il ne peut expliquer qu'avec l'hypothèse que les rayons lumineux du Soleil ne traversent pas l'atmosphère terrestre en ligne droite. Les travaux de Ptolémée sur la réfraction sont rapportés dans le Livre V de l'*Optique* et contiennent une table de l'angle de réfraction pour un dioptre air-eau. Cet ouvrage a été perdu dans la langue originale et n'est parvenu à nous que dans une traduction latine d'une version arabe également perdue. Le Livre I (qui devait traiter de la vision) et la fin du Livre V nous sont inconnus [11].

L'*Optique* a été rédigé après l'*Almageste*, ce dernier ne contenant aucune mention du phénomène et donc rien de ses effets sur la position des astres<sup>2</sup>. Ptolémée affirme que, tout comme il y a réfraction des rayons au passage de l'air dans l'eau, ou de l'air dans le verre, il doit s'en produire au passage de l'air dans l'éther. Une extrapolation hardie sans aucun doute et qui suppose déjà une étendue limitée à l'enveloppe atmosphérique avec la densité de l'éther bien inférieure à celle de l'air. Selon [13, p. 828] Ptolémée en tire la conclusion que « les étoiles doivent apparaître surélevées, et cela d'autant plus qu'elles sont plus proches de l'horizon; à tel point même que des étoiles apparemment très voisines de l'horizon pourraient être effectivement déjà couchées ou pas encore levées ». On ne peut le dire aujourd'hui plus clairement et cet extrait témoigne de la compréhension profonde du phénomène de réfraction par l'astronome alexandrin. Ptolémée ne donne aucune indication quantitative mais mentionne qui si l'on avait la connaissance du lieu où se trouve la limite entre l'air et l'éther, alors il serait possible d'établir des tables exactes de la valeur de cette réfraction. Une anticipation remarquable, qui va rester sans conséquence pour l'astronomie pratique pendant de nombreux siècles, tant le sujet est difficile et les données manquantes.

### 2.2. Tycho Brahé

Pour les observations astronomiques, Tycho Brahé (1546–1601) est sans conteste le premier astronome qui se soit préoccupé d'une correction quantitative de la réfraction sur les mesures

<sup>1</sup>Ouvrage principalement connu comme étant la source la plus ancienne rapportant la mesure du diamètre de la Terre par Eratosthène.

<sup>2</sup>Au Livre I, section 3, il est juste fait allusion au grandissement des astres proches de l'horizon ou de la séparation angulaire entre les étoiles, phénomène qui n'est pas dû à la réfraction. Enfin dans le Livre VIII-6 Ptolémée mentionne qu'il y des effets dans les instants des lever et couchers des astres qui proviennent de l'atmosphère, rendant le calcul des ces phénomènes incertain [12].

de position. Cela s'inscrit dans une attitude tournée vers l'exactitude des mesures, une précision associée à la réalisation d'instruments nouveaux pour l'astronomie de position et à la nécessité de répéter ses observations. À ce titre, il est un acteur majeur de la révolution scientifique qui se prépare et un des fondateurs de l'astronomie telle que nous continuons à la pratiquer, aux côtés de Copernic, Kepler, Galilée et Newton, pour s'en tenir à la sélection de J. Bertrand dans son ouvrage *Les fondateurs de l'astronomie moderne*. Si B. Walther (1430–1504) de Nuremberg a reconnu avant Tycho l'importance que pouvait avoir la réfraction sur la précision des mesures de position, c'est bien ce dernier qui a construit la première table de la réfraction à partir des observations.

Initialement, Tycho Brahé a observé les hauteurs apparentes d'étoiles circumpolaires lors des culminations inférieure et supérieure, ainsi que la hauteur du Soleil au moment des solstices. Ayant trouvé une incohérence de  $4'$  [14, Art. 2166] dans la détermination de la latitude d'Uraniborg déduite des étoiles et du Soleil, il l'attribue à l'existence d'un effet de réfraction atmosphérique. C'est là la première mise en évidence sérieuse de cet effet par des mesures astronomiques. Ensuite, il suit régulièrement la hauteur du Soleil au cours de la journée, en particulier au voisinage du solstice d'hiver, lorsque la déclinaison est peu variable et le Soleil bas sur l'horizon de l'île de Hven. Il compare la hauteur apparente à la hauteur calculée à partir de son azimuth au lever ou au coucher du Soleil, et la différence entre les deux hauteurs lui donne une estimation de la réfraction.

Tycho Brahé est un astronome praticien, il ne cherche pas un modèle physique de la réfraction, mais les lois qui la gouvernent afin de corriger ses observations. Une bonne table, bien arrangée et sûre, vaut mieux que des formules approximatives. De l'ensemble de ces mesures, il conclut que le phénomène n'est pas identique pour le Soleil et les étoiles, et construit deux tables de réfraction. Celle du Soleil donne une réfraction nulle pour une hauteur apparente  $h_0 > 45^\circ$ , alors que cette limite est de  $20^\circ$  pour les étoiles. La réfraction à l'horizon est de  $34'$ , une précision tout à fait remarquable.

Pour une question si nouvelle et sans fondement théorique, il n'y avait pas lieu de s'émouvoir de cette différence entre les étoiles et le Soleil. La différence entre ces astres est tellement évidente que c'est une grande conquête de l'astronomie d'avoir établi leur identité physique derrière les apparences contraires. De plus, Tycho Brahé ne doutait pas que relativement aux étoiles le Soleil fût très proche de nous et que les hauteurs mesurées étaient affectées par la parallaxe solaire. Il utilisera tout au long de sa vie la valeur de  $3'$  héritée de Ptolémée pour la parallaxe équatoriale (ou parallaxe horizontale), au lieu d'une valeur réelle légèrement inférieure à  $9''$ . Cet effet se combinait avec la réfraction dans le cas du Soleil mais pas pour les étoiles, et Tycho Brahé avec sa large parallaxe solaire sur-corrigéait l'effet [15], mais avait de bonnes raisons de traiter les astres différemment.

Les deux tables de Tycho Brahé sont reproduites sur la figure 1, avec celle du Soleil à gauche. Pour le Soleil, la table part de l'horizon pour arriver à une réfraction nulle (négligeable serait plus correct probablement) à la hauteur de  $45^\circ$ , (valeur vraie =  $1'$ ). Pour les étoiles, la réfraction n'est notable pour Tycho Brahé que jusqu'à  $20^\circ$  de hauteur (la valeur vraie à  $h_0 = 20^\circ$  est  $2.6'$ ). Par comparaison à la courbe en continu correspondant aux valeurs calculées aujourd'hui, on voit sur la figure 2 que la table stellaire de Tycho Brahé est en meilleur accord et est même raisonnablement correcte bien que déduite d'observations dont la précision est au mieux de  $0.5'$ . Enfin, la différence entre les deux tables de Tycho Brahé, qui devrait être au maximum égale à la valeur adoptée pour la parallaxe solaire de  $3'$ , est en fait constamment de  $4.5'$  (sauf à l'horizon), et ne résulte donc pas de l'observation directement, mais d'un choix pour ajuster l'une des deux réfractions sur l'autre [16]. La parallaxe ne suffit donc pas pour rendre compte de l'erreur importante dans la table de réfraction du Soleil.

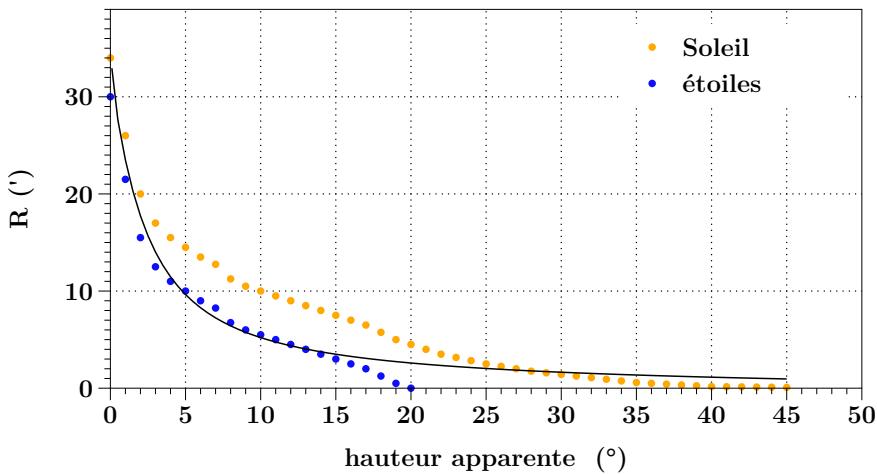
**TABVLA  
REFRACTI-  
ONVM SOLARIVM.**

Alt.	Refract.	Alt.	Refract.
○	Ratio.	○	Ratio.
1	1. 11.	23	3 10
2	34 0	24	2 50
3	26 0	25	2 30
4	20 0	26	2 15
5	17 0	27	2 0
6	15 30	28	1 45
7	14 30	29	1 35
8	13 30	30	1 25
9	12 45	31	1 15
10	11 15	32	1 5
11	10 30	33	0 55
12	10 0	34	0 45
13	9 30	35	0 35
14	9 0	36	0 30
15	8 30	37	0 25
16	8 0	38	0 20
17	7 30	39	0 15
18	7 0	40	0 10
19	6 30	41	0 9
20	6 0	42	0 8
21	5 30	43	0 7
22	5 0	44	0 6
23	4 30	45	0 5

**TABVLA  
Refractio-  
num Fixa-  
rum Stel-  
larum.**

Alt.	Refract.	
G.	M.	S.
0	30	0
1	21	30
2	15	30
3	12	30
4	11	0
5	10	0
6	9	0
7	8	15
8	6	45
9	6	0
10	5	30
11	5	0
12	4	30
13	4	0
14	3	30
15	3	0
16	2	30
17	2	0
18	1	15
19	0	30
20	0	0

FIGURE 1. Tables de réfraction de Tycho Brahé. Gauche : table solaire; droite : table stellaire.  
Source : *Astronomiae instauratae progymnasmata* p. 79 et p. 280.



**FIGURE 2.** Valeurs de la réfraction mesurées par Tycho Brahé (*Astronomiae instauratae progymnasmata*) comparées aux théories modernes. Les valeurs de Tycho (disques pleins) et les valeurs vraies (ligne continue).

### 2.3. Kepler

Kepler était non seulement un astronome de génie par sa créativité, mais aussi un opticien hors pair, qui maîtrisait la dioptrique et la formation des images. Il rencontre Tycho Brahé dans l'observatoire de ce dernier à Benátky nad Jizerou, dans les environs de Prague, en 1600, répondant à une invitation à le rejoindre à la cour de l'empereur Rudolph II, en tant qu'assistant dans ses fonctions d'Astronome Impérial. Chacun sait que l'histoire des sciences aurait été différente sans ce contact entre deux hommes aussi exceptionnels et aussi complémentaires. La mort de Tycho Brahé en 1601 fait de Kepler l'héritier des archives et des observations de Tycho, dont il fera le meilleur usage pour établir les lois du mouvement des planètes.

Concernant la réfraction, il va étudier les tables de Tycho Brahé, qu'il accepte globalement. Mais toutefois, il soutient que la réfraction, tout en s'atténuant fortement, doit continuer jusqu'au zénith et ne réellement s'annuler que pour cette direction. Plus mathématicien que Tycho Brahé, il va chercher à en déterminer une loi en admettant qu'il n'y ait qu'une seule réfraction à la frontière de l'atmosphère. Nous sommes donc très près du modèle de Ptolémée et de Cassini discuté plus bas dans la section 3. Sa table de réfraction n'est guère différente de celle de Tycho Brahé pour les régions où la réfraction doit être prise en compte.

## 3. La réfraction astronomique après Snell

La loi de la réfraction à l'interface de deux milieux homogènes telle que nous la connaissons aujourd'hui est définitivement établie au début du xvii<sup>e</sup> siècle par W. Snell, amplifiée par Descartes et englobée dans un principe plus général énoncé par Fermat. Snell en trouve la formulation mathématique alors qu'il construisait une table des sinus en 1621, mais rien ne fut publié de son vivant. Descartes découvrit également cette loi, tout à fait indépendamment en 1637 et la publia dans sa *Dioptrique* en annexe du *Discours de la Méthode*. Cette loi, complétée par un modèle physique de l'atmosphère, est suffisante pour obtenir l'équation du trajet d'un rayon lumineux pendant sa traversée de l'atmosphère et pour en déduire la valeur de l'angle de réfraction pour chaque hauteur apparente.

Le chemin théorique menant à des réfractions calculées pour toutes les hauteurs utiles semble, avec le recul du temps, d'une grande simplicité et bien assuré. Mais dans les faits, avant d'en arriver là, il a fallu établir par l'observation que la question se ramenait à cette pure question d'optique atmosphérique. Les mesures faites à Paris, Greenwich, Le Cap, Cayenne, par les meilleurs observateurs montraient des variations avec la latitude, avec la saison, et bien entendu, avec la température et, plus on se rapprochait de l'horizon, plus l'incohérence des résultats était manifeste. La réfraction ne se présente jamais à l'observateur dans toute sa pureté mais comme une des multiples corrections à appliquer aux mesures : une petite erreur sur la latitude se traduit sur la hauteur de l'étoile Polaire par une variation semblable à celle occasionnée par la réfraction. Toute l'ingéniosité de ces grands praticiens sera mise en œuvre pour l'isoler et se convaincre qu'elle suit somme toute une loi assez simple. Les hésitations et errements des astronomes ont disparu du fil historique en dépit du temps passé par nombre d'entre eux comme en témoignent les pages que consacre J. Lalande à cette question majeure pour les progrès de l'astronomie de position [14, Art. 2170–2190].

### 3.1. *Jean Dominique Cassini*

J.-D. Cassini (1625–1712) est le premier à mettre en œuvre ce programme en utilisant ces nouveaux outils et cela alors qu'il était encore à Bologne en 1662 et travaillait à la construction des tables du Soleil. Il considère une atmosphère homogène d'une certaine épaisseur  $H$  et d'indice de réfraction  $n$  constant. Le rayon lumineux ne subit donc qu'une seule réfraction à l'interface extérieure au point  $M$  de la figure 3.

Il y a deux paramètres libres qui sont l'épaisseur de l'atmosphère  $H$  et l'indice de réfraction (même si ce n'est pas formulé de cette manière par J.-D. Cassini). Ces deux constantes sont contraintes par les deux valeurs mesurées de la réfraction horizontale (soit pour une distance zénithale  $z_0 = 90^\circ$ ) et à  $z_0 = 80^\circ$ . J.-B. Delambre, dans *l'Histoire de l'Astronomie Moderne* et dans *l'Histoire de l'Astronomie au XVIII<sup>e</sup> siècle*, insiste à deux reprises sur le fait qu'on ne sait pas comment J.-D. Cassini a obtenu ces deux valeurs de la réfraction. Le mémoire étudié par J.-B. Delambre est extrêmement succinct et ne permet pas de comprendre les hypothèses et les calculs de J.-D. Cassini. En revanche nous avons un mémoire très détaillé dans [17], dont l'auteur est nommé comme *Cassini*, mais on comprend dans le texte qu'il s'agit de son fils Jacques. Il est fait mention à la première personne d'observations de levers et couchers de soleil en 1713, donc après le décès de Cassini père. Même si les observations sont antérieures de quelques années, il s'agit de mesures en plein hiver à Paris et il est douteux qu'à l'âge de 85 ans passés, à peu près aveugle, il se soit ainsi exposé aux éléments.

Dans ce mémoire J. Cassini dit clairement qu'il prend ces deux valeurs de référence dans *La Connaissance des temps* (CDT). Reste à savoir quelle table se trouvait alors dans la CDT à cette date, sachant que le mémoire est présenté en 1714 et peut correspondre à un travail bien plus ancien. Dans ce qui ressemble à une construction familiale et s'étend sur plusieurs décennies, il est difficile de démêler les contributions de chacun, tant en ce qui concerne les idées que les développements plus mathématiques nécessaires à la construction d'une table.

Le modèle de base de J.-D. Cassini est remarquable, d'une part par sa simplicité, ne faisant usage que de la géométrie très élémentaire et d'une seule couche atmosphérique et, d'autre part par sa précision, puisqu'il donne de bons résultats, erreur  $< 0.1''$  jusqu'à  $70^\circ$  de distance zénithale. Il constitue un bel exemple de modélisation mathématique en sciences et de sa confrontation au réel, accessible à un niveau élémentaire dans les études scientifiques.

Par des considérations géométriques simples et avec la loi de la réfraction, on obtient immédiatement les relations géométriques, (voir la figure 3 et la table 5 pour les notations applicables

à l'ensemble du texte),

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= z - z_0 \\ R_a &= R_{\oplus} + H \\ R_a \sin(\zeta - \mathcal{R}) &= R_{\oplus} \sin z_0\end{aligned}$$

puis la contrainte optique,

$$\sin \zeta = n \sin(\zeta - \mathcal{R})$$

dont on déduit avec l'épaisseur réduite,

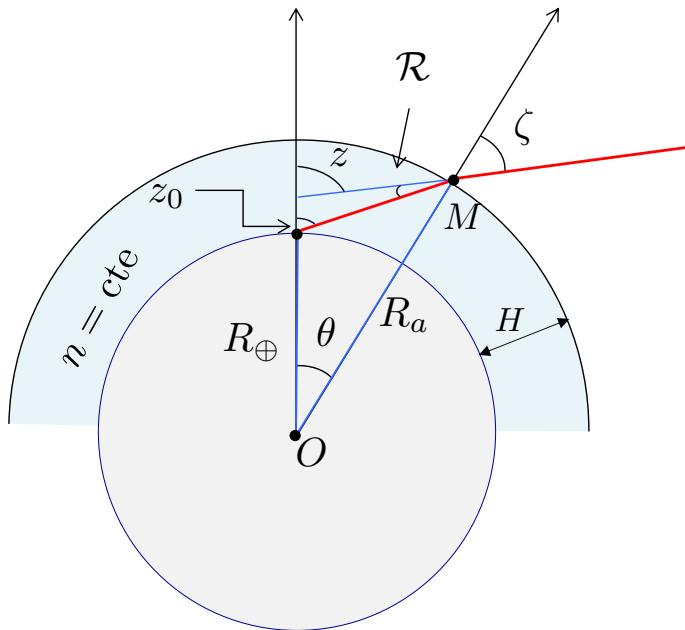
$$\frac{H}{R_{\oplus}} = x$$

les deux relations,

$$\begin{aligned}\sin \zeta &= \frac{n \sin z_0}{1 + x} \\ \sin(\zeta - \mathcal{R}) &= \frac{\sin z_0}{1 + x}\end{aligned}$$

qui conduisent à une forme exacte de l'angle de réfraction  $\mathcal{R}$ ,

$$\mathcal{R}(z_0) = \sin^{-1} \left[ \frac{n \sin z_0}{1 + x} \right] - \sin^{-1} \left[ \frac{\sin z_0}{1 + x} \right] \quad (1)$$



**FIGURE 3.** Modèle de la réfraction astronomique selon J.-D. Cassini (1625–1712). L'angle de réfraction  $\mathcal{R}$  est égal à la différence  $z - z_0$  entre la distance zénithale vraie  $z$  et la distance zénithale apparente  $z_0$  pour l'observateur qui, sauf quand son altitude est mentionnée, est supposé se trouver au niveau du sol. L'atmosphère comprend une seule couche homogène dont l'épaisseur et la réfractivité sont contraintes par deux valeurs observées de la réfraction au voisinage de l'horizon.

ou de façon équivalente à la forme trouvée aussi récemment qu'en 1905 par A. Bemporad [18, p. 199]

$$\tan \frac{\mathcal{R}}{2} = \frac{1}{(n+1) \sin z_0} \left[ \sqrt{(1+x)^2 - \sin^2 z_0} - \sqrt{(1+x)^2 - n^2 \sin^2 z_0} \right] \quad (2)$$

qui est cependant indéfinie au zénith, mais donne bien  $\mathcal{R} = 0$  après régularisation. On trouve encore cette forme implicite donnée dans [19, p. 72],

$$\sin \mathcal{R} = \frac{\sin z_0}{1+x} (n^2 - 2n \cos \mathcal{R} + 1)^{1/2}. \quad (3)$$

Les différentes formules sont équivalentes (ce qui n'est pas évident au premier abord mais aisément vérifiable numériquement) et exactes, c'est-à-dire sans approximation pour le modèle considéré. La formulation de l'équation (1) n'est pas forcément la meilleure pour le calcul numérique puisqu'elle apparaît sous la forme de deux termes positifs grands devant leur différence, impliquant de calculer chaque terme avec un nombre de décimales élevé par rapport à la précision recherchée sur le résultat. Avec  $n-1 \ll 1$  et également  $x \ll 1$ , on peut régulariser l'expression (1) avec

$$\sin^{-1}(x_0 + \epsilon) = \sin^{-1}(x_0) + \frac{\epsilon}{\sqrt{1-x_0^2}} + \frac{x_0}{(1-x_0^2)^{3/2}} \frac{\epsilon^2}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

et en écrivant

$$\frac{n \sin z_0}{1+x} = \frac{\sin z_0}{1+x} + \frac{(n-1) \sin z_0}{1+x}$$

pour faire apparaître le petit paramètre  $n-1$ . On trouve alors,

$$\mathcal{R}(z_0) \approx (n-1)(1-x) \tan z_0 + (n-1) \left( \frac{n-1}{2} - x \right) \tan^3 z_0 \quad (4)$$

soit les deux premiers termes du développement en puissances impaires de  $\tan z_0$  qui va jouer un rôle important dans la théorie de la réfraction. Bien entendu rien de tout cela ne figure dans les documents de Cassini, mais il est intéressant de donner ces développements pour une présentation actualisée. Le développement en  $\tan z_0$  diverge vers l'horizon, mais avec (1) on obtient directement avec  $n-1 < x \ll 1$ ,

$$\mathcal{R}(90^\circ) \approx \frac{n-1}{\sqrt{2x}}$$

qui est en fait une piètre approximation avec le quotient de deux petites quantités et des conditions fortes sur la hiérarchie des petites quantités. Avec la forme (3) on trouve une bien meilleure expression, pratiquement exacte,

$$\mathcal{R}(90^\circ) \approx \frac{n-1}{\sqrt{(1+x)^2 - n}}$$

Pour obtenir  $x$  et  $n$ , Cassini prend,  $\mathcal{R}(90^\circ) = 32'20''$  et  $\mathcal{R}(80^\circ) = 5'28''$  et cela conduit à la table de la figure 4 publiée dans la *Connaissance des temps*. Le détail du calcul numérique est donné, quoique de façon un peu confuse, dans [16, Sect. 9] et il conduit à  $H \approx 3900$ m.

La comparaison à un modèle plus complet utilisant l'atmosphère standard et un tracé de rayon est donnée sur la figure 5. On a utilisé la valeur de l'indice de réfraction au sol et contraint uniquement la réfraction horizontale pour le modèle de Cassini, ce qui correspond au choix d'une hauteur d'atmosphère  $H = 3626$ m. En dépit de sa simplicité, ce premier modèle théorique de la réfraction atmosphérique ne diffère pas d'un modèle moderne plus exact de plus d'une seconde d'arc jusqu'à la distance zénithale de  $70^\circ$ . Ce fait *a priori* surprenant est en accord avec le théorème d'Oriani stipulant que la réfraction pour ces distances zénithales dépend uniquement des conditions au sol et non du détail de la distribution de densité avec l'altitude. Mais par la suite, lorsque l'on descend vers l'horizon, la dégradation est extrêmement rapide et le modèle devient totalement inopérant.

**Tafel der Refractionen von Cassini.**

Höhe	Refract.								
0°	32° 20''	19°	2° 49''	37°	1° 18''	55°	0° 41''	73°	0° 18''
1	27 56	20	2 39	38	1 15	56	0 40	74	0 17
2	21 4	21	2 31	39	1 12	57	0 38	75	0 16
3	16 6	22	2 25	40	1 10	58	0 37	76	0 14
4	12 48	23	2 18	41	1 7	59	0 35	77	0 13
5	10 32	24	2 12	42	1 5	60	0 34	78	0 12
6	8 55	25	2 6	43	1 3	61	0 33	79	0 11
7	7 44	26	2 0	44	1 1	62	0 31	80	0 10
8	6 47	27	1 55	45	0 59	63	0 30	81	0 9
9	6 4	28	1 51	46	0 58	64	0 28	82	0 8
10	5 28	29	1 46	47	0 56	65	0 27	83	0 7
11	4 58	30	1 42	48	0 54	66	0 26	84	0 6
12	4 32	31	1 38	49	0 52	67	0 25	85	0 5
13	4 12	32	1 34	50	0 50	68	0 24	86	0 4
14	3 54	33	1 30	51	0 49	69	0 22	87	0 3
15	3 38	34	1 27	52	0 47	70	0 21	88	0 2
16	3 24	35	1 23	53	0 45	71	0 20	89	0 1
17	3 11	36	1 20	54	0 43	72	0 19	90	0 0
18	3 0								

FIGURE 4. Table de la réfraction atmosphérique selon J.-D. Cassini. Les valeurs seront utilisées dans *La Connaissance des temps*. La table est extraite de [16, p. 39].

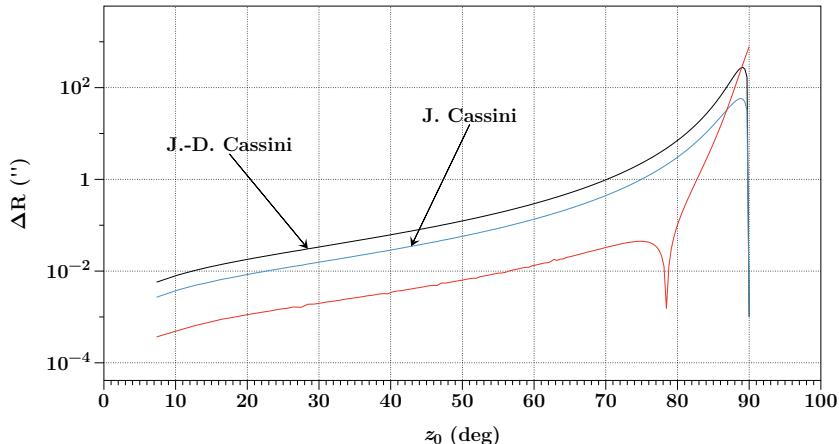


FIGURE 5. Comparaison du modèle de réfraction de Cassini à un modèle basé sur l'atmosphère standard. On a adopté  $n_0 - 1 = 0.00027714$  et contraint uniquement la réfraction horizontale à sa valeur du modèle standard, donnant  $H = 3.626\text{ km}$  pour le modèle à rayons rectilignes (J.-D. Cassini) et  $H = 12.452\text{ km}$  pour le modèle en arcs de cercle (J. Cassini). Le modèle rectiligne reste meilleur que  $1''$  pour  $z_0 < 70^\circ$  et  $z_0 < 75^\circ$  pour le modèle à courbure constante. La courbe en rouge est calculée pour le modèle de J.-D. Cassini mais avec  $H = 8.2\text{ km}$  sans contraindre la réfraction à l'horizon. La valeur absolue de l'erreur est tracée pour supprimer les valeurs négatives et produit le point singulier à  $z_0 \approx 78^\circ$  en raison du changement de signe; il devrait être en  $\Delta\mathcal{R} = 0$ , mais l'échantillonnage et l'échelle logarithmique limitent la précision du rendu. Le modèle est excellent ( $\Delta\mathcal{R} < 1''$ ) jusqu'à  $z_0 < 83^\circ$ .

La raison de cet écart croissant et important à faible hauteur entre le modèle complet et la version de Cassini est la contrainte imposée d'une valeur fixée de la réfraction dans l'horizon. C'est cette contrainte qui conduit à l'épaisseur d'une atmosphère fictive de densité uniforme de moins de 4 km au lieu d'une valeur qui devrait être proche de 8 km. Si l'on relâche cette contrainte et que l'on utilise la valeur physique de l'atmosphère équivalente  $H = 8.2$  km, alors la représentation par l'équation (1) ou (2) est remarquable jusqu'à  $z_0 = 80^\circ$ , avec une exactitude meilleure que  $0.07''$  sur l'intervalle et même  $0.04''$  jusqu'à  $z_0 = 70^\circ$ . C'est probablement une des meilleures formules approximatives parmi les très nombreuses propositions faites pour ce domaine de hauteur. La valeur absolue de l'erreur  $\Delta\mathcal{R}$  en secondes d'arc est donnée par la courbe rouge de la figure 5.

*TABLE des Refractions suivant l'Ancienne & la Nouvelle Hypothèse jusqu'à la hauteur de trente Degrés.*

Hauteur sur l'Ho- rizon. <i>Degrés.</i>	Refrac- tion sui- vant l'Hypo- thèse rectili- gique.		Refrac- tion sui- vant l'Hypo- thèse nouvel- le.		Refrac- tion sui- vant l'Hypo- thèse rectili- gique.		Refrac- tion sui- vant l'Hypo- thèse rectili- gique.		Refrac- tion sui- vant l'Hypo- thèse rectili- gique.		Refrac- tion sui- vant l'Hypo- thèse rectili- gique.			
	<i>M.</i>	<i>S.</i>	<i>M.</i>	<i>S.</i>	<i>D.</i>	<i>M.</i>	<i>M.</i>	<i>S.</i>	<i>M.</i>	<i>S.</i>	<i>M.</i>	<i>S.</i>		
0	32	20	32	20	1	0	27	56	24	19	0	32	20	
1	27	56	24	19		10	26	45	23	13	1	32	20	
2	21	6	18	40		20	25	37	21	12	2	32	19	
3	16	8	14	46		30	24	22	21	14	3	32	18	
4	12	49	12	2		40	23	14	20	21	4	32	18	
5	10	33	10	6		50	22	8	19	18	5	32	18	
6	8	55	8	38								32	18	
7	7	44	7	32		10	21	6	18	40	6	32	16	
8	6	48	6	40		20	16	8	17	56	7	32	15	
9	6	4	5	57		30	19	13	17	13	8	32	14	
10	5	28	5	23		40	18	22	16	31	9	32	12	
11	4	58	4	55		50	17	34	15	55	10	32	10	
12	4	53	4	31			16	49	15	19		32	9	
13	4	12	4	10		10	16	8	14	46		32	7	
14	3	54	3	52		20	15	29	14	15		32	4	
15	3	36	3	36		30	14	53	12	45	14	32	2	
16	3	24	3	22		40	13	47	12	50	15	32	0	
17	3	11	3	10		50	13	17	12	25	16	31	57	
18	3	0	2	39		40	12	49	12	2	17	31	54	
19	2	49	2	49		10	12	23	11	40	18	31	50	
20	2	39	2	39		20	11	58	11	19	19	31	47	
21	2	31	2	32		30	11	35	10	59	20	31	44	
22	2	15	2	25		40	11	13	10	40	21	31	40	
23	2	18	2	18		50	10	52	10	22	22	31	36	
24	2	12	2	12		50	10	33	10	6	23	31	33	
25	2	6	2	6		10	10	15	9	50	25	31	29	
26	2	0	2	0								31	25	
27	1	55	1	55		10	9	58	9	34	26	31	22	
28	1	51	1	51		20	9	42	9	19	27	31	16	
29	1	46	1	46		30	9	25	9	5	28	31	11	
30	1	42	1	42		40	9	10	8	51	29	31	7	
						6	0	8	35	8	38	30	31	3
												28	1	

**FIGURE 6.** Table de la réfraction astronomique calculée selon la théorie de J.-D. Cassini, complétée par J. Cassini, avec les contraintes à  $z_0 = 80^\circ$  et  $90^\circ$ . Source : *Mémoire de l'Académie Royale des Sciences* (1714), p. 33-54.

### 3.2. Jacques Cassini

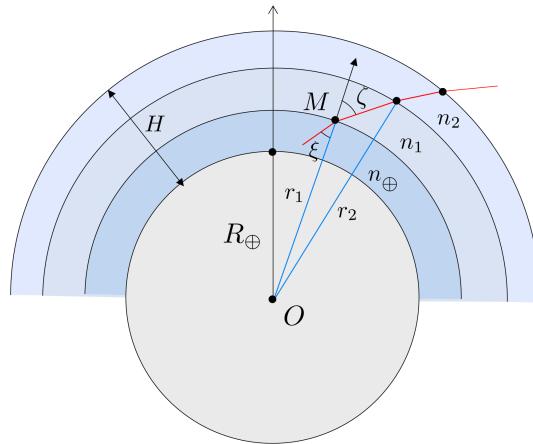
Le mémoire mentionné plus haut de J. Cassini (1677–1756) va plus loin que ce simple modèle à une couche. Il est conscient que le trajet rectiligne de la lumière à partir de la couche la plus externe de l'atmosphère n'est pas réaliste et que l'effet est progressif allant en augmentant lorsque l'on se rapproche de la surface terrestre. De plus, l'épaisseur de l'atmosphère trouvée ne peut approcher la réalité, bien en dessous des sommets des Alpes. J. Cassini développe deux modèles alternatifs, bien plus proches de la réalité et, à ma connaissance, qui ne semblent pas avoir attiré l'attention des historiens. Il suppose tout d'abord un modèle en couches sphériques tel que les déviations soient constantes pour chaque traversée de couches d'égale épaisseur. La ligne brisée est alors un arc de polygone (figure 7) et il admet que la ligne tend vers un cercle pour des couches infiniment minces. La ligne droite de J.-D. Cassini est donc remplacée par un arc de cercle et donc une géométrie illustrée sur la figure 8 un peu plus compliquée, mais sans réelle difficulté, et cela conduit à l'équation de la réfraction (5) au premier ordre en  $x = H/R_\oplus$  avec  $n_\oplus$  pour l'indice de réfraction de la couche au niveau du sol,

$$\frac{2x}{(n_\oplus - 1)^2 \sin^2 z_0} \sin^2 \frac{\mathcal{R}}{2} + \frac{2}{(n_\oplus - 1) \sin z_0} \sin \frac{\mathcal{R}}{2} \cos \left( z_0 + \frac{\mathcal{R}}{2} \right) - 1 = 0 \quad (5)$$

dont la racine positive donne  $\sin(\mathcal{R}/2)$ . La réfraction étant un petit angle et  $1 - \cos(\mathcal{R}/2) < 10^{-5}$ , on peut développer le second terme en cosinus et obtenir une équation du second degré en  $\sin(\mathcal{R}/2)$ . En tenant compte de la hiérarchie des petits termes on trouve finalement l'approximation,

$$\mathcal{R}(z_0) \approx (n_\oplus - 1) \left( 1 - \frac{x}{2} \right) \tan z_0 + \frac{(n_\oplus - 1)^2 - (n_\oplus - 1)x}{2} \tan^3 z_0 \quad (6)$$

qui est identique à (24), avec  $H = 2\mathcal{R}$ .



**FIGURE 7.** Modèle de la réfraction astronomique selon J. Cassini (1677–1756), avec des couches d'égales épaisseurs et d'indice constant. Le rayon suit une ligne polygonale, dont les côtés ne sont pas nécessairement égaux.

Pour obtenir (5) dans une atmosphère d'épaisseur  $H$ , on a considéré des rayons lumineux de courbure  $1/\kappa$  constante déterminée par

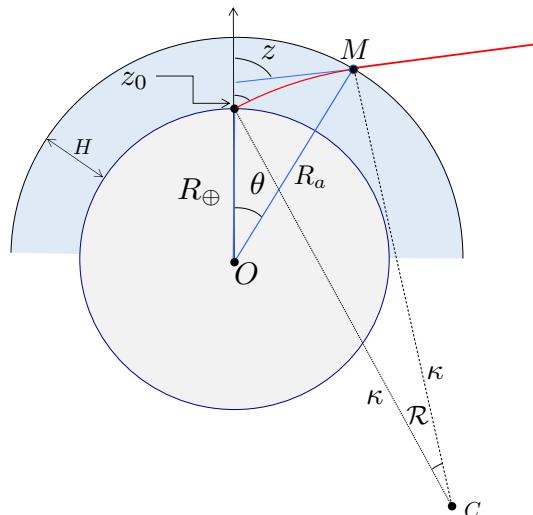
$$\frac{n_\oplus}{\kappa} = -\sin z_0 \frac{dn}{dh} = \sin z_0 \frac{n_\oplus - 1}{H}$$

sachant qu'il est difficile de comprendre les détails du modèle chez J. Cassini, qui ne donne que les grandes lignes et des résultats numériques. Avec les mêmes conditions aux limites, J. Cassini parvient à une épaisseur de l'atmosphère plus raisonnable de 13.4km, qu'il juge cependant encore peu conforme aux idées de son temps.

L. Dettwiller (com. pers.) partant de la même géométrie a obtenu une solution exacte de la réfraction, sans passer par l'équation du second degré et l'approximation au premier ordre en  $H/R_\oplus$  :

$$\mathcal{R} = \cos^{-1} \left[ \frac{\kappa - R_{\oplus} \sin z_0 - \frac{H}{\kappa} \left( R_{\oplus} + \frac{H}{2} \right)}{\left( \kappa^2 + R_{\oplus}^2 - 2\kappa R_{\oplus} \sin z_0 \right)^{1/2}} \right] - \cos^{-1} \left[ \frac{\kappa - R_{\oplus} \sin z_0}{\left( \kappa^2 + R_{\oplus}^2 - 2\kappa R_{\oplus} \sin z_0 \right)^{1/2}} \right] \quad (7)$$

Au plan numérique, et pour les paramètres de J. Cassini, les deux expressions (5) et (7) conduisent à des valeurs de la réfraction ne différant jamais de plus de  $1''$  entre la verticale et l'horizon. En omettant le terme en  $H^2$  dans (7), puisque (5) est du premier ordre, l'écart maximum devient  $0.002''$  à l'horizon, ce qui fournit une belle validation croisée des expressions obtenues tout à fait indépendamment l'une de l'autre.



**FIGURE 8.** Modèle de la réfraction astronomique selon J. Cassini (1677–1756), à partir d'un rayon lumineux de courbure constante durant sa traversée de l'atmosphère. L'angle de réfraction  $\mathcal{R}$  est égal à la différence  $z - z_0$  entre la distance zénithale vraie  $z$  et la distance zénithale apparente  $z_0$ , et est aussi égal à l'angle entre les deux rayons extrêmes issus du centre de courbure  $C$ .

Le second modèle substitue au cercle un arc parabolique, et sans surprise pour des arcs aussi petits, il n'y a pas de différence notable entre les deux. Compte tenu de la simplicité du modèle et de sa qualité aux hauteurs des astres qui concernent les astronomes, on comprend que les tables de *La Connaissance des temps* utilisèrent ce modèle pendant plusieurs décennies, de 1685 à 1765 plus précisément, comme cela est indiqué dans ce travail de P. Descamps disponible en ligne : <https://cdt.imcce.fr/exhibits/show/les-tables-des-r--fractions-as>. Les tables sont données initialement avec un pas de  $1^\circ$  et une précision de  $1'$  pour la réfraction et ce n'est qu'à partir de 1702 que l'on trouve une table d'aspect moderne, avec la réfraction donnée à la seconde de degré. Les valeurs à l'horizon et à  $z_0 = 80^\circ$  sont bien celles des conditions aux limites de Cassini.

On a tracé sur la figure 5 la différence entre ce modèle et une intégration moderne. On constate l'amélioration sensible par rapport au modèle rectiligne, avec une exactitude meilleure que la seconde d'arc jusqu'à  $z_0 = 75^\circ$ . Au-delà de  $80^\circ$ , le modèle n'a plus aucune validité.

J. Cassini a publié en même temps une table comparative des deux solutions reproduite figure 6, avec trois résolutions angulaires différentes au voisinage du rayon horizontal : un pas de  $1^\circ$ , puis de  $10'$  et enfin de  $1'$ .

### 3.3. I. Newton

La contribution de I. Newton (1642–1727) est intéressante à plus d'un titre. Tout d'abord par la notoriété de l'auteur, car on l'imagine mal passant des jours entiers à calculer une table pour l'astronomie pratique. Ensuite, il est bien connu que tout phénomène naturel qui est passé entre ses mains est la garantie d'un examen approfondi, si ce n'est définitif. Au minimum il fallait que I. Newton y vît un enjeu de *Philosophie Naturelle*. Enfin, de par le fait qu'il n'a rien publié et qu'il faut se contenter d'une mention par E. Halley accompagnée d'une table (figure 9) dont il nous dit qu'il l'a reçue du *Grand Homme*. À ce jour il faut faire confiance aux reconstructions de L. Euler, P. S. de Laplace, J.-B. Biot et de celles des historiens, pour se faire une idée ce qu'a pu être l'approche de I. Newton. Voir à ce sujet deux études très récentes [21, 22]. En terme pratique pour les astronomes, qui recherchent une table ou une formule aussi exacte que possible, la table de Newton n'a pas eu d'impact et n'a jamais été à la base des publications des éphémérides en Angleterre ou en France. En revanche, la méthode essentiellement numérique de I. Newton ouvre un chemin qui sera suivi par J.-B. Biot et par les astronomes contemporains. On peut aussi penser que I. Newton n'a pas été convaincu par ses essais et n'a pas voulu donner suite, ce qui en soit est une indication supplémentaire que ce problème est vraiment difficile.

Newton suppose qu'un rayon lumineux est composé de corpuscules dont la vitesse  $v$  est proportionnelle à l'indice de réfraction du milieu qu'elles traversent. À l'interface plane entre deux milieux, la composante de la vitesse le long de la tangente à l'interface est conservée. Cela conduit à la loi de Snell–Descartes pour la théorie corpusculaire. Avec sa parfaite maîtrise des équations du mouvement des planètes, I. Newton écrit l'équation correspondante pour la trajectoire des corpuscules, dont l'intégration donnerait la tangente en tout point, donc la réfraction par comparaison des tangentes au sol et hors de l'atmosphère.

Il prend pour la masse volumique de l'air une décroissance exponentielle avec la hauteur, c'est-à-dire un modèle physique proche de celui d'une atmosphère isotherme, voire identique. Ce modèle va connaître une grande fortune comme approche analytique permettant d'aller assez loin dans la solution. P. S. de Laplace et d'autres vont montrer que cette décroissance est trop rapide et l'idée d'une atmosphère à température constante est contredite de manière évidente par des mesures en altitude, bien avant l'aérostation.

## 4. Théories modernes de la réfraction

Fondamentalement, dès la connaissance de la loi de Snell–Descartes et la maîtrise du calcul différentiel, les équations de la trajectoire du rayon lumineux ou l'intégrale donnant la réfraction peuvent être écrites. Ce qui sera fait dès 1715 par B. Taylor dans *Methodus Incrementorum* (Prop. XXVII, Prob. XXII, figure 10).<sup>3</sup> Retrouvé de façon très naturelle par de nombreux auteurs, ce résultat se trouve aujourd'hui dans tous les ouvrages traitant de cette question. Nous ne ferons pas exception en établissant ces formules plus bas par plusieurs méthodes. La solution de cette

<sup>3</sup>C'est dans cet ouvrage que se trouve le fameux développement de Taylor d'une fonction dérivable, qui entre les mains de J. L. Lagrange et de ses successeurs deviendra un outil théorique de premier plan pour l'analyse.

( 172 )

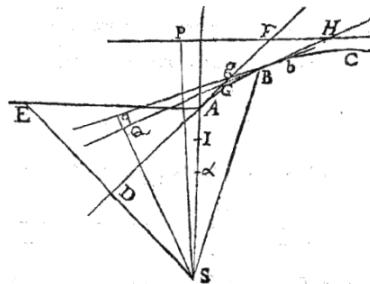
*Tabula Refractionum Siderum ad Altitudines  
apparentes.*

Alt. Appar. deg. m.	Refra- ctio. m. sec.	Alt. Appar. deg.	Refra- ctio. m. sec.	Alt. Appar. deg.	Refra- ctio. m. sec.
0 0	33 45	16	3 4	46	0 52
0 15	30 24	17	2 53	47	0 50
0 30	27 35	18	2 43	48	0 48
0 45	25 11	19	2 34	49	0 47
1 0	23 7	20	2 26	50	0 45
1 15	21 20	21	2 18	51	0 44
1 30	19 46	22	2 11	52	0 42
1 45	18 22	23	2 5	53	0 40
2 0	17 8	24	1 59	54	0 39
2 30	15 2	25	1 54	55	0 38
3 0	13 20	26	1 49	56	0 36
3 30	11 57	27	1 44	57	0 35
4 0	10 48	28	1 40	58	0 34
4 30	9 50	29	1 36	59	0 32
5 0	9 2	30	1 32	60	0 31
5 30	8 21	31	1 28	61	0 30
6 0	7 45	32	1 25	62	0 28
6 30	7 14	33	1 22	63	0 27
7 0	6 47	34	1 19	64	0 26
7 30	6 22	35	1 16	65	0 25
8 0	6 0	36	1 13	66	0 24
8 30	5 40	37	1 11	67	0 23
9 0	5 22	38	1 8	68	0 22
9 30	5 6	39	1 6	69	0 21
10 0	4 52	40	1 4	70	0 20
11 0	4 27	41	1 2	71	0 19
12 0	4 5	42	1 0	72	0 18
13 0	3 47	43	0 58	73	0 17
14 0	3 31	44	0 56	74	0 16
15 0	3 17	45	0 54	75	0 15

FIGURE 9. Table de la réfraction astronomique selon I. Newton. La table a été communiquée par E. Halley dans [20].

**PROP. XXVII. PROB. XXII.**

*To find the refraction of the light rays passing through the atmosphere of the earth.*



Let S be the centre of the earth, ABC the radius of a curved light ray, that touches the lines AG; BG in A and B, and these tangents mutually cross each other in G, and the perpendiculars  $sD$  and  $SQ$  are sent to the tangents, and  $SA$  and  $SB$  are drawn; and at A the normal of  $SA$ ,  $AE$  is drawn crossing  $SD$  in E, and A is a given fixed point on the ray, and B is a variable point. Let  $SA = a$ ,  $SD = b$ ,  $SE = t$  ( $= \frac{ad}{b}$ ),  $SB = x$ ,  $d$  is the density at A,  $y$  the density at B.

**FIGURE 10.** Première apparition de l'équation fondamentale de la réfraction atmosphérique dans le *Methodus Incrementorum* de Brook Taylor en 1715. La proposition est donnée comme un exemple d'application de sa méthode des différences finies.

équation ou le calcul de la valeur de l'intégrale de réfraction sont une autre histoire. Ce n'est plus simplement une question de mathématique, mais principalement de physique de l'atmosphère, puisqu'il faut introduire la loi de la variation de l'indice de réfraction de l'air avec l'altitude.

## 4.1. Équations fondamentales

#### 4.1.1. Première méthode

Soit maintenant un modèle plus réaliste avec une atmosphère à symétrie sphérique, dans laquelle toutes les propriétés physiques, dont l'indice de réfraction, ne dépendent que de la distance  $r$  au centre de la Terre, assimilée à une sphère. En utilisant l'altitude  $h$ , on aura également  $h = r - R_{\oplus}$ .<sup>4</sup> La géométrie du rayon lumineux est représentée sur la figure 11, avec le point courant  $M$  dans l'atmosphère et la distance zénithale locale apparente  $\zeta$ , direction du vecteur tangent au rayon lumineux rapportée à l'axe tournant  $OM$ . La distance zénithale apparente pour l'observateur est  $z_0$  et la distance zénithale vraie  $\mathcal{Z}_{\infty}$ , valeur de  $\mathcal{Z}$  pour  $\zeta_{\infty}$ . Comme auparavant, on a  $\mathcal{R} = \mathcal{Z}_{\infty} - z_0$  et l'infini se comprend comme étant la sortie de l'atmosphère, lorsque la trajectoire est rectiligne.

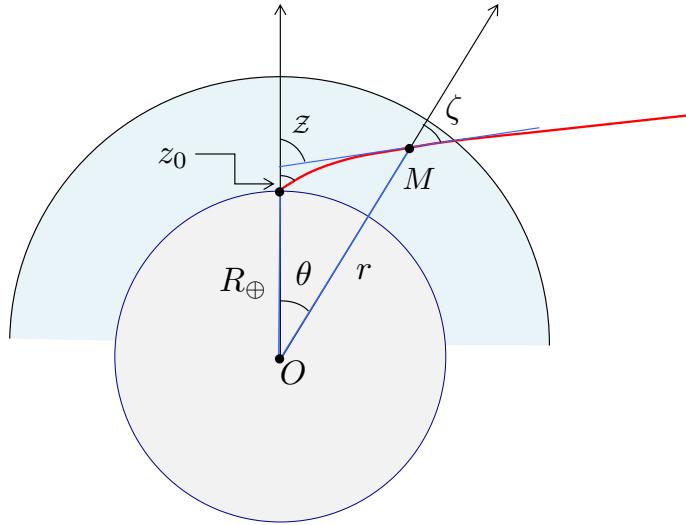
L'équation différentielle générale de la propagation d'un rayon lumineux a la forme [23] :

$$\frac{d(nT)}{ds} = \nabla n(\mathbf{r}) \quad (8)$$

où  $\mathbf{T}$  désigne le vecteur tangent unitaire le long du rayon lumineux et  $\mathbf{r}$  le vecteur position du point courant rapporté au centre de la Terre. La symétrie sphérique entraîne :

$$\frac{d(nr \times T)}{ds} = 0$$

<sup>4</sup>Le contexte (et la notation) permet toujours de distinguer l'altitude  $h$  (en m, km) de la hauteur angulaire  $h = 90^\circ - z$ , mais autant que possible dans ce texte on utilise la distance zénithale chaque fois que cela est possible.



**FIGURE 11.** Notations du modèle général de réfraction avec atmosphère à symétrie sphérique.  $z_0$  est la distance zénithale réfractée,  $Z$  l'angle de la direction du vecteur tangent au rayon lumineux au point courant  $M$  rapportée à la verticale de l'observateur, alors que  $\zeta$  est la distance zénithale locale le long du rayon lumineux. On a  $\mathcal{R} = z - z_0$ , avec  $z = Z_\infty$  la valeur de  $Z$  hors de l'atmosphère, égale à la distance zénithale vraie.

et donc l'existence d'une intégrale première,

$$n\mathbf{r} \times \mathbf{T} = \text{cte}$$

qui s'exprime par,

$$nr \sin \zeta = C \quad (9)$$

Ceci est la généralisation au cas sphérique de l'invariant  $n \sin i = Cte$  de l'approximation des plans parallèles. L'intégrale première de l'équation des rayons lumineux à symétrie sphérique est aussi l'équivalent de la conservation du moment angulaire et de l'intégrale des aires pour la dynamique à forces centrales.

On a alors les relations géométriques qui relient les différentes grandeurs de la figure 11,

$$Z = \theta + \zeta \quad (10a)$$

$$r' = \frac{dr}{d\theta} \quad (10b)$$

$$\tan \zeta = \frac{r}{r'} \quad (10c)$$

$$\mathcal{R} = z - z_0 \quad (10d)$$

$$z = Z_\infty \quad (10e)$$

$$z_0 = \zeta_0 \quad (10f)$$

En notant que, lors d'un déplacement élémentaire du point  $M$ , le changement infinitésimal d'orientation de la tangente donné par  $dZ$  est aussi la contribution à la réfraction pour ce déplacement, nous pouvons écrire :

$$d\mathcal{R} = dZ = d\theta + d\zeta$$

puis :

$$d\mathcal{R} = \frac{\tan \zeta}{r} dr + d\zeta$$

Ensuite avec (9),

$$d(nr \sin \zeta) = 0$$

on a :

$$\tan \zeta \frac{dn}{n} + \tan \zeta \frac{dr}{r} + d\zeta = 0$$

ce qui conduit immédiatement à,

$$\mathcal{R} = -\frac{\tan \zeta}{n} dn \quad (11)$$

pour l'équation différentielle donnant la variation de la réfraction. Finalement, la quadrature,

$$\mathcal{R} = \int_1^{n_0} \frac{\tan \zeta}{n} dn \quad (12)$$

(où  $n_0$  désigne l'indice au niveau de l'observateur) conduit à l'intégrale de la réfraction (la disparition du signe moins provient du choix des bornes de l'intégrale). Il faut des relations supplémentaires pour aller plus loin, et lier  $\zeta$  et  $n$ , et plus exactement deux relations paramétriques qui relient  $\zeta$  et  $r$  et également  $n(r)$ . On a une intégrale impropre lorsque  $\zeta \rightarrow \pi/2$ , ce qui se produit pour un observateur qui observe à l'horizon.

#### 4.1.2. Deuxième méthode

Ce résultat est suffisamment important pour justifier une autre démonstration, cette fois-ci très géométrique. La réfraction élémentaire lors d'une propagation infinitésimale  $ds$  le long du rayon, n'est rien d'autre que la variation d'orientation  $d\mathcal{R}$  de la tangente durant ce trajet. Donc  $d\mathcal{R} = |dT|$ . Mais,

$$\left| \frac{dT}{ds} \right| = \frac{1}{\kappa} \quad (13)$$

où  $\kappa$  est le rayon de courbure du rayon lumineux au point considéré. Ainsi, entre les points extrêmes du rayon lumineux  $\mathcal{Z}$ ,

$$\mathcal{R} = \int_{\mathcal{Z}} \frac{ds}{\kappa} \quad (14)$$

Maintenant l'équation différentielle du rayon lumineux (8) projetée sur la normale au rayon donne pour un milieu à symétrie sphérique avec  $n = n(r)$ ,

$$\frac{n}{\kappa} = \nabla n \cdot \mathbf{N} = -\frac{dn}{dr} \sin \zeta \quad (15)$$

puisque  $\zeta$  est l'angle entre le rayon vecteur et la tangente au rayon. On a également  $dr/ds = \cos \zeta$  et finalement,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \int_{\mathcal{Z}} \frac{ds}{\kappa} \\ &= \int_{\mathcal{Z}} -\frac{dn}{dr} \frac{\sin \zeta}{n} ds \\ &= \int_1^{n_0} \tan \zeta \frac{dn}{n} \end{aligned}$$

identique à (12) pour un chemin sur le rayon lumineux entre l'infini et l'observateur.

En passant, nous avons trouvé la courbure du rayon lumineux avec l'équation (15), qui donne au sol pour une distance zénithale  $z_0$  et en prenant  $n_0 \sim 1$ ,

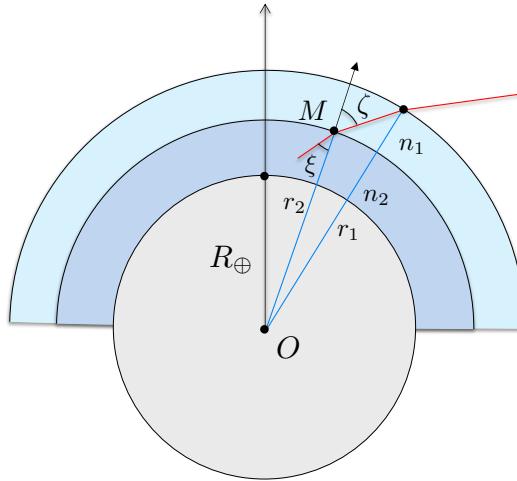
$$\frac{1}{\kappa} = -\frac{dn}{dh} \sin z_0 \quad (16)$$

indiquant que la courbure est maximum pour les rayons dans l'horizon et nulle pour un rayon vertical. Au sol nous avons  $n - 1 = 0.000277$  et en gros  $n - 1 \sim 0$  à  $h \sim 8\text{km}$  soit  $\Delta n / \Delta h \sim -3.5 \times 10^{-5} \text{ km}^{-1}$ . C'est un bon ordre de grandeur puisque la valeur standard à  $h = 0$  est  $dn / dh = -2.67 \times 10^{-5} \text{ km}^{-1}$ , conduisant à  $\kappa \sim 37500 \text{ km}$  pour  $z_0 = 90^\circ$  et,

$$k = \frac{R_\oplus}{\kappa} = 0.17 \quad (17)$$

indiquant que la courbure du rayon lumineux horizontal dans les conditions standards est environ six fois plus faible que celle de la Terre.

À noter que l'intégrale de la réfraction (12) n'est pas adaptée pour étudier le cas le plus simple du modèle de Cassini, puisque toute la variation de l'indice  $n$  est concentrée à une distance particulière.



**FIGURE 12.** Modèle discret à couches sphériques utilisé dans la sous-sous-section 4.1.3.

#### 4.1.3. Méthode discrète

Une approche plus aisée encore, prise dans [2], considère des couches d'épaisseur finie que l'on fait tendre vers zéro. La géométrie est celle de la figure 12 avec une réfraction à la séparation de deux couches d'indice de réfraction  $n_1$  et  $n_2$ . Au point  $M$  on a la relation,

$$n_1 \sin \zeta = n_2 \sin \xi$$

et en utilisant l'identité trigonométrique,

$$\tan \frac{p \pm q}{2} = \frac{\sin p \pm \sin q}{\cos p + \cos q}$$

on obtient,

$$\tan \frac{\zeta - \xi}{2} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \tan \frac{\zeta + \xi}{2}$$

Dans cette expression  $\zeta - \xi$  est la réfraction à la traversée du dioptre. En faisant tendre l'épaisseur vers zéro on transforme cette expression finie en une expression différentielle,

$$\frac{d\mathcal{R}}{2} = \frac{dn}{2n} \tan \zeta$$

qui est identique à (11) (au signe près car  $dn$  est pris de l'extérieur vers l'intérieur).

La comparaison des trois approches pour établir la même équation du phénomène physique est très instructive sur les moyens à mettre en œuvre. Dans les trois cas il faut coupler la loi élémentaire de la réfraction à des considérations géométriques, mais le niveau des connaissances préalables n'est pas identique dans les trois cas. La dernière démonstration de W. Chauvenet est certainement la plus simple et traduit le fait qu'il enseignait à des cadets de la marine peu rompus au calcul différentiel, mais après des semaines de cours de navigation astronomique, ils n'ignoraient rien de la richesse des identités trigonométriques.

## 4.2. Solutions analytiques

### 4.2.1. Transformations de l'équation fondamentale

On introduit la relation optique qui relie  $\zeta$  et  $n(r)$  avec (9), ce qui conduit à une intégrale explicite, dès que l'on connaît le modèle  $n(r)$  :

$$\mathcal{R} = \int_1^{n_0} \frac{dn}{n \left( \frac{n^2 r^2}{C^2} - 1 \right)^{1/2}} \quad (18)$$

où  $C = n_0 R_{\oplus} \sin z_0$ . Ainsi,

$$\mathcal{R} = \int_1^{n_0} \frac{n_0 R_{\oplus} \sin z_0}{\left( n^2 r^2 - n_0^2 R_{\oplus}^2 \sin^2 z_0 \right)^{1/2}} \frac{dn}{n} \quad (19)$$

qui est la forme la plus courante de l'intégrale de la réfraction. Le résultat est exact pour une atmosphère en couches sphériques concentriques et, une fois connue la loi  $n(r)$ , un calcul numérique conduit à la valeur de la réfraction, même si cela n'a pas été la voie majoritairement suivie dans le passé.

La forme intégrale apparaît naturellement avec l'indice de réfraction  $n$  comme variable d'intégration, mais P. S. de Laplace et d'autres ont préféré introduire dès le début la masse volumique  $\rho$  de l'air avec la relation admise à l'époque,

$$n^2 - 1 = 2\nu\rho \quad (20)$$

où  $\nu$  est une constante, et également exprimer l'altitude au travers de

$$\frac{R_{\oplus}}{r} = 1 - s$$

avec  $s \in [0, 1]$ . En fait,  $s$  est toujours une petite quantité pour une hauteur efficace de l'atmosphère ne dépassant pas 100 km. Avec  $n_0^2 - 1 = 2\nu\rho_0$  pour (20) au niveau de l'observateur, on transforme (19) en,

$$\mathcal{R} = \int_0^{\rho_0} \frac{(1-s) \sin z_0}{\left[ 1 - \frac{2\nu\rho_0}{1+2\nu\rho_0} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) \right] \left[ \cos^2 z_0 - \frac{2\nu\rho_0}{1+2\nu\rho_0} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) + (2s - s^2) \sin^2 z_0 \right]^{1/2}} \frac{\nu\rho_0}{1+2\nu\rho_0} \frac{d\rho}{\rho_0} \quad (21)$$

expression impressionnante mais dans laquelle les petits paramètres  $(s, \nu\rho, \nu\rho_0)$  sont bien isolés. Sous cette forme, cette expression est le point de départ de la théorie de P. S. de Laplace ([24, Mec. Cel, vol. IV, lib. X, §5, eq. 8286] de l'édition de N. Bowditch). Il n'y a toujours pas d'approximation dans cette dernière expression, mais juste une réécriture de l'intégrale de réfraction.

### 4.2.2. Solution élémentaire approximative

Toutes les méthodes analytiques partent des expressions (18) – (21) et les développent selon les petits paramètres, après avoir introduit une loi liant  $n$  et  $r$  ou  $\rho$  et  $s$ . Par exemple, partant de l'équation (19), une première approximation donne  $r = R_{\oplus} + h$ , avec  $h/R_{\oplus} \ll 1$ , puisque  $h < 10$  km

pour l'essentiel du phénomène. Ceci permet d'effectuer un développement au premier ordre du petit paramètre :

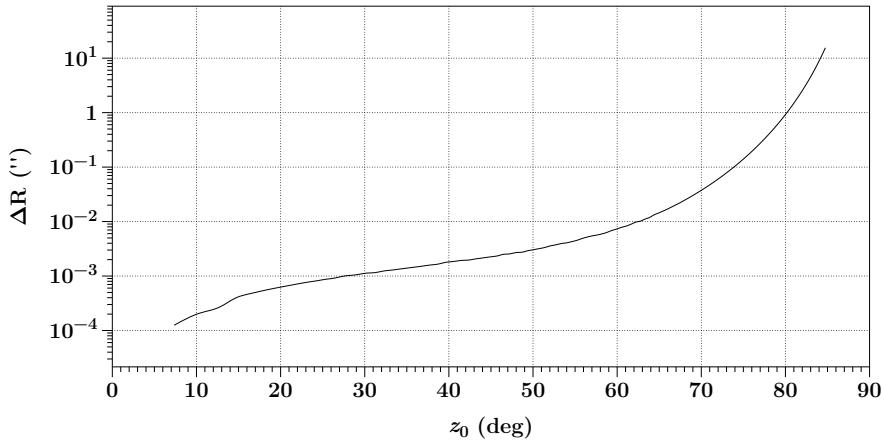
$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1 \quad (22)$$

avec :

$$\mathcal{R}_0 = n_0 \sin z_0 \int_1^{n_0} \frac{1}{(n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0)^{1/2}} \frac{dn}{n}$$

et:

$$\mathcal{R}_1 = -\frac{n_0 \sin z_0}{R_\oplus} \int_1^{n_0} \frac{hn}{(n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0)^{3/2}} dn$$



**FIGURE 13.** Erreur dans la valeur de la réfraction calculée avec le développement (25) rapportée à une intégration numérique avec le modèle standard de l'atmosphère.

La validité du développement est assurée si  $h/R_\oplus \ll 1$  et  $\sin z_0 \ll n_0^{-1}$ , soit  $z_0 \leq 80^\circ$ , c'est-à-dire lorsque l'on ne s'approche pas trop de l'horizon. La première intégrale donnerait la réfraction si  $h/R_\oplus = 0$ , donc pour le cas de l'atmosphère à plans parallèles ou plus simplement si la Terre était plate. En toute première approximation on peut poser  $n \sim n_0 \sim 1$  tant que le dénominateur n'approche pas 0 et obtenir l'expression élémentaire,

$$\mathcal{R} = (n_0 - 1) \tan z_0$$

qui est le résultat classique pour une atmosphère à plans parallèles. Mais on peut aller plus loin avec  $\mathcal{R}_0$  puisque l'intégrale se ramène par le changement de variable  $u = n_0/n$  à,

$$\mathcal{R}_0 = \sin^{-1} (n_0 \sin z_0) - z_0$$

qui se développe en puissance de la petite quantité  $n_0 - 1$ ,

$$\mathcal{R}_0 \approx (n_0 - 1) \tan z_0 + \frac{(n_0 - 1)^2}{2} \tan^3 z_0 \quad (23)$$

Quant à  $\mathcal{R}_1$  déjà facteur du petit paramètre  $h/R_\oplus$ , on peut se contenter de l'approximation du premier ordre, en posant  $n \approx n_0 \approx 1$  dans l'intégrande, et ramener l'intégrale à

$$\mathcal{R}_1 \approx -\frac{n_0 \sin z_0}{R_\oplus} \frac{1}{\cos^3 z_0} \int_1^{n_0} h dn$$

et, avec la proportionnalité,  $n - 1 = \nu\rho$  entre la réfractivité et la masse volumique de l'air (loi empirique de Gladstone–Dale), l'intégrale se transforme en,

$$\int_0^{\rho_0} h d\rho = -[h\rho(h)]_0^{h_{\max}} + \int_0^{h_{\max}} \rho dh$$

Le terme central est nul et l'intégrale de droite est  $\rho_0 \mathcal{H}$  où  $\mathcal{H} \approx 8\text{ km}$  est la hauteur équivalente d'une atmosphère homogène qui exerce la pression standard au niveau de la mer. Il nous reste,

$$\mathcal{R}_1 \approx -\nu\rho_0 \frac{\mathcal{H}}{R_{\oplus}} \frac{\sin z_0}{\cos^3 z_0} = -(n_0 - 1) \frac{\mathcal{H}}{R_{\oplus}} (\tan z_0 + \tan^3 z_0)$$

qui se combine avec (23) pour donner,

$$\mathcal{R} \approx (n_0 - 1) \left(1 - \frac{\mathcal{H}}{R_{\oplus}}\right) \tan z_0 - (n_0 - 1) \left(\frac{\mathcal{H}}{R_{\oplus}} - \frac{(n_0 - 1)}{2}\right) \tan^3 z_0 \quad (24)$$

expression parfois appelée formule de Laplace et que l'on peut rapprocher de développements semblables obtenus avec la théorie de Cassini (cf. P. S. de Laplace[24, *Mec. Cel*, vol. IV, lib. X, §8, eqs. 8474-8474c] de l'édition de N. Bowditch).

Avec les valeurs standards à  $t = 15^\circ\text{C}$  et  $P = 1013.25\text{ hPa}$ , on a

$$\begin{aligned} n_0 - 1 &= 0.00027714 \quad \text{à } \lambda = 0.590 \mu\text{m} \\ \mathcal{H} &= 8.43 \text{ km} \\ \frac{\mathcal{H}}{R_{\oplus}} &= 0.00132 \end{aligned}$$

ce qui donne,

$$\mathcal{R} \approx 57.084'' \tan z_0 - 0.0676'' \tan^3 z_0 \quad (25)$$

bien que la procédure employée pour utiliser cette formule ait été plutôt de déterminer les deux coefficients devant  $\tan z_0$  et  $\tan^3 z_0$  à partir des observations.

À ce degré d'approximation, et donc pour des distances zénithales  $< 80^\circ$ , la réfraction astronomique dépend principalement des conditions atmosphériques au point d'observation et non du détail de la densité de l'air en fonction de l'altitude, ou de façon équivalente du profil vertical de la pression et de la température. La qualité de cette approximation est remarquable comme on peut en juger sur la figure 13 donnant pour des conditions identiques la différence avec une intégration numérique utilisant l'atmosphère standard. La formule limitée à  $\tan^3 z_0$  est suffisante pour pratiquement tous les besoins jusqu'à  $z_0 \sim 75^\circ$ . On trouvera dans [25, sect. 9.4], différentes formules ajustées jusqu'au terme en  $\tan^5 z_0$  assurant encore un meilleur accord avec le modèle numérique jusqu'à  $z_0 \sim 80^\circ$ .

#### 4.2.3. Formule de Bradley

On pose pour la loi de variation de l'indice de réfraction avec l'altitude,

$$n^{\alpha+1} r = Cte = n_0^{\alpha+1} R_{\oplus}$$

avec  $\alpha$  une constante positive. C'est aussi une manière de représenter par une expression simple la décroissance de la densité de l'atmosphère en fonction de l'altitude. Cette représentation est associée au mathématicien anglais T. Simpson (1710–1761) dans un ouvrage de 1743, mais sous cette forme elle est bien due à P. Bouguer (1698–1758) dans son mémoire de 1729 primé par l'Académie. Le traitement analytique de l'équation de la réfraction avec cette hypothèse est élémentaire et se trouve en particulier dans [2, Sect. 109].

En combinant,

$$\frac{d(nr)}{nr} = \frac{dn}{n} + \frac{dr}{r}$$

Scheinb. Höhe.	Refraction.	Scheinb. Höhe.	Refraction.	Scheinb. Höhe.	Refraction.	Scheinb. Höhe.	Refraction.
0°	0° 0' 0"	35	0° 39' 6"	70° 0'	2° 35' 5"	83° 0'	7° 21' 1"
1	0 1.0	36	0 41.1	70 30	2 39.8	83 20	7 41.1
2	0 2.0	37	0 42.6	71 0	2 44.3	83 40	8 2.9
3	0 3.0	38	0 44.2	71 30	2 49.0	84 0	8 26.6
4	0 4.0	39	0 45.9	72 0	2 53.9	84 20	8 52.7
5	0 5.0	40	0 47.6	72 30	2 59.2	84 40	9 21.3
6	0 6.0	41	0 49.4	73 0	3 4.7	85 0	9 53.0
7	0 7.0	42	0 51.2	73 30	3 10.6	85 20	10 27.9
8	0 8.0	43	0 53.1	74 0	3 16.9	85 40	11 0.8
9	0 9.0	44	0 55.0	74 30	3 23.4	86 0	11 50.2
10	0 10.0	45	0 57.0	75 0	3 30.3	86 10	12 13.7
11	0 11.0	46	0 59.0	75 20	3 35.2	20	12 38.7
12	0 12.0	47	1 1.1	75 40	3 40.3	30	13 5.2
13	0 13.0	48	1 3.3	76 0	3 45.6	40	13 33.4
14	0 14.0	49	1 5.5	76 20	3 51.2	50	14 3.2
15	0 15.1	50	1 7.9	76 40	3 57.0	87 0	14 35.1
16	0 16.2	51	1 10.4	77 0	4 3.1	10	15 8.9
17	0 17.3	52	1 13.0	77 20	4 9.5	20	15 44.7
18	0 18.4	53	1 15.7	77 40	4 16.3	30	16 23.2
19	0 19.5	54	1 18.5	78 0	4 23.4	40	17 4.4
20	0 20.6	55	1 21.4	78 20	4 30.8	87 50	17 48.1
21	0 21.7	56	1 24.4	78 40	4 38.8	88 0	18 34.8
22	0 22.9	57	1 27.6	79 0	4 47.1	10	19 24.6
23	0 24.1	58	1 31.0	79 20	4 55.9	20	20 17.8
24	0 25.3	59	1 34.6	79 40	5 5.2	30	21 14.6
25	0 26.5	60	1 38.4	80 0	5 15.1	88 40	22 15.3
26	0 27.8	61	1 42.5	80 20	5 25.6	50	23 19.8
27	0 29.1	62	1 46.9	80 40	5 36.7	89 0	24 28.7
28	0 30.4	63	1 51.4	81 0	5 48.7	10	25 42.1
29	0 31.7	64	1 56.4	81 20	6 1.4	20	27 0.1
30	0 33.0	65	2 1.7	81 40	6 15.1	89 30	28 22.9
31	0 34.2	66	2 7.5	82 0	6 29.8	40	29 50.5
32	0 35.5	67	2 13.6	82 20	6 45.6	50	31 22.8
33	0 36.8	68	2 20.3	82 40	7 2.7	90 0	33 0.0
34	0 38.2	69	2 27.5	83 0	7 21.1		

**FIGURE 14.** Table de la réfraction atmosphérique selon J. Bradley. Les valeurs seront utilisées dans *La Connaissance des temps* de 1767–1808. La table est extraite de [16, p. 56]. (Sheinb. Höhe = scheinbare Höhe : hauteur apparente... qui est ici une distance zénithale)

et

$$n^{\alpha+1}r = \text{Cte} \Rightarrow (\alpha+1) \frac{dn}{n} + \frac{dr}{r} = 0 \quad (26)$$

on a

$$\frac{dn}{n} = -\frac{1}{\alpha} \frac{d(nr)}{nr}$$

que l'on reporte dans (19) avec

$$\mathcal{R} = -\frac{1}{\alpha} \int_{n_0^\alpha / \sin z_0}^{1 / \sin z_0} \frac{1}{(U^2 - 1)^{1/2}} \frac{dU}{U} \quad (27)$$

on l'on a posé,

$$U = \frac{nr}{n_0 R_\oplus \sin z_0}$$

L'intégrale (27) donne directement,

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\alpha} \left[ z_0 - \sin^{-1} \left( \frac{\sin z_0}{n_0^\alpha} \right) \right] \quad (28)$$

expression d'une grande simplicité appelée formule de Simpson. Elle sera plutôt utilisée sous une forme implicite pour la réfraction, avec

$$n_0^\alpha \sin(z_0 - \alpha \mathcal{R}) = \sin z_0$$

soit

$$\frac{n_0^\alpha - 1}{n_0^\alpha + 1} = \frac{\sin z_0 - \sin(z_0 - \alpha \mathcal{R})}{\sin z_0 + \sin(z_0 - \alpha \mathcal{R})}$$

puis

$$\tan \frac{\alpha}{2} \mathcal{R} = \frac{n_0^\alpha - 1}{n_0^\alpha + 1} \tan \left( z_0 - \frac{\alpha}{2} \mathcal{R} \right) \quad (29)$$

ou encore avec l'approximation des petits angles et  $n_0 - 1 \ll 1$ ,

$$\mathcal{R} \approx (n_0 - 1) \tan \left( z_0 - \frac{\alpha}{2} \mathcal{R} \right) \quad (30)$$

qui est la formule de Bradley, largement utilisée à partir de 1750 et durant une bonne partie du siècle suivant. Elle dépend de deux constantes, qui seront déterminées par les observations. Cependant avec (26), on a déjà,

$$\frac{dn}{dr} = -\frac{1}{\alpha + 1} \frac{n}{r}$$

donnant au niveau de la mer,

$$\left( \frac{dn}{dr} \right)_{r=R_\oplus} \approx -\frac{1}{(\alpha + 1) R_\oplus}$$

soit avec (15)–(17)  $\alpha \sim 5$ . On peut également exprimer (30), sous la forme du développement en puissance de  $\tan z_0$ . On obtient sans difficulté,

$$\mathcal{R} \approx (n_0 - 1) \left( 1 - \frac{n_0 - 1}{2} \alpha \right) \tan z_0 - \frac{\alpha(n_0 - 1)^2}{2} \tan^3 z_0$$

J. Bradley (1693-1762) a ajusté les deux paramètres sur ses observations de réfraction et obtenu  $\alpha = 6$ , alors que la confrontation à la formule de P. S. de Laplace (24) conduit plutôt à  $\alpha \approx 8$ . La figure 14 est une reproduction de la table de Bradley donnée dans [16]. On retrouve exactement ces valeurs avec (30) en adoptant  $n_0 - 1 = 0.00027663$ .

La formule de Bradley sous la forme  $\mathcal{R} = 57'' \tan(z_0 - 3\mathcal{R})$  a longtemps été utilisée, directement ou sous forme de table, par les astronomes et elle a l'avantage de ne pas diverger à l'approche de l'horizon où elle donne une réfraction horizontale  $33'$ . J. Lalande, encore en 1792 dans son *Astronomie*, donne la règle sous la forme [14, Art. 2202],

*La réfraction est comme la tangente de la distance apparente au zénith diminuée de trois fois la réfraction*

et surtout [14, Art. 2205],

*La réfraction est la septième partie de l'angle au centre de la Terre, dans lequel est renfermé tout l'espace que le rayon a parcouru dans l'atmosphère,*

donnant ainsi le rayon de courbure du rayon lumineux horizontal de l'ordre de sept fois le rayon de la Terre, valeur tout à fait correcte comme on l'a vu avec l'équation (17).

La formule de Bradley avait été établie pour une hauteur barométrique de 29.6 pouces (752 mm) et une température de 50 °F (10 °C). On ne possède que peu d'éléments expliquant la procédure de J. Bradley, mais M. Mathieu rapporte dans une note consacrée à la réfraction insérée dans [26, p. 784] que N. Maskelyne possédait un manuscrit de J. Bradley avec les différentes observations. Ce sont encore les valeurs de J. Bradley que J. F. Herschel mentionne pratiquement un siècle plus tard dans son *Outlines of Astronomy* [27], d'où est extraite cette remarque très célèbre,

*The exact estimation of the amount of atmospheric refraction is a very difficult subject of physical inquiry, one on which geometers are not yet entirely agreed.*  
 (J.F. Herschel, *Outline of Astronomy*, 1849, sect. 41).

et que l'on retrouve sous une forme voisine chez S. Newcomb au début du siècle suivant,

*There is probably no branch of practical astronomy on which so much has been written as on this and which is still in so unsatisfactory a state.*  
 (S. Newcomb, *A compendium in spherical astronomy*, 1906, sect. 118, p. 223).

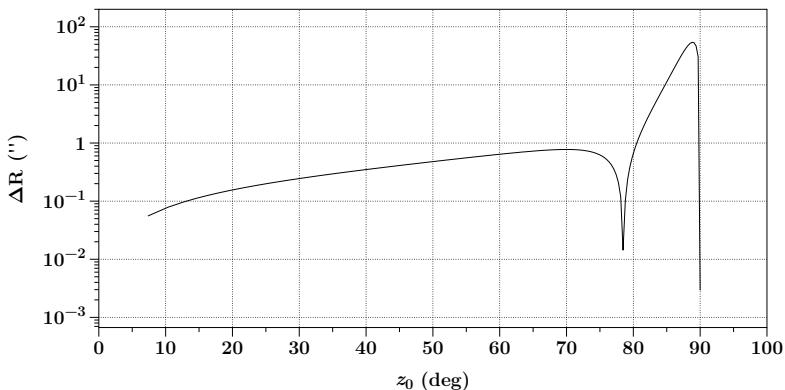
La comparaison à une intégration numérique utilisant l'atmosphère standard et en ajustant  $n_0 - 1$  pour avoir la même valeur que la table de Bradley à l'horizon conduit à la figure 15. On voit que la formule est excellente jusqu'à  $z_0 \sim 80^\circ$ , mais défaillante aux plus grandes distances zénithales, sauf à l'horizon, par construction. La courbe obtenue dépend très étroitement du choix opéré pour rendre compatibles deux calculs de réfraction construits sur deux modèles d'atmosphère différents.

On remarque qu'avec (28) ou (30) on peut obtenir une formule analytique pour la réfraction à l'horizon avec

$$\mathcal{R}(z_0 = 90^\circ) \approx \sqrt{\frac{2(n_0 - 1)}{\alpha}} \approx 33.0' \quad (31)$$

qui est bien la valeur lue dans la table de Bradley. On se reportera à [2, Sects. 110-111] pour une discussion approfondie du modèle d'atmosphère équivalent à une réfraction suivant la loi de Bradley.

La formule de Bradley (30) ne dépend que de deux constantes qui peuvent être ajustées à deux contraintes (par exemple deux valeurs particulières de la réfraction) sans se soucier de leur signification physique. C'est bien ce qui a été fait au XVIII<sup>e</sup> siècle par Piazzi, Groombridge, Brinkley et d'autres, sans nécessairement viser une bonne représentation de la réfraction horizontale, de peu d'utilité pour l'astronome praticien. Une méthode numérique d'ajustement de ces deux constantes a été développée par A. Bemporad [18, p. 209-210], mais ne présente plus d'intérêt aujourd'hui.



**FIGURE 15.** Erreur (en valeur absolue) dans le calcul de la réfraction en utilisant la formule de J. Bradley comparée à un calcul moderne. On a contraint l'égalité des deux réfractions à l'horizon et le changement de signe vers  $z_0 \approx 78^\circ$  est à l'origine de la singularité.

#### 4.2.4. Introduction à la solution de Newcomb

Les développements analytiques ont été très nombreux entre 1750 et 1900, occupant des centaines de pages de calculs, et ne peuvent trouver leur place dans ce texte de présentation. Je vais aller juste un peu plus loin pour la solution de S. Newcomb, technique très abordable et figurant dans un livre d'enseignement. Cette solution analytique est une des dernières qui ait donné lieu à la construction d'une table ayant fait référence, avant que les méthodes numériques ne remplaceent définitivement cette approche.

Newcomb part de (19) mis sous la forme,

$$\mathcal{R} = \int_1^{n_0} \frac{\sin z_0}{\left( \frac{n^2 r^2}{n_0^2 R_\oplus^2} - \sin^2 z_0 \right)^{1/2}} \frac{dn}{n} \quad (32)$$

puis fait apparaître l'échelle de hauteur de l'atmosphère homogène,

$$\mathcal{H} = \frac{RT_0}{M_{\text{air}} g} \approx 8.4 \text{ km à } 15^\circ\text{C}$$

et l'altitude réduite  $x$  avec

$$x = \frac{h}{\mathcal{H}}$$

et

$$\frac{r}{R_\oplus} = 1 + \frac{\mathcal{H}}{R_\oplus} x$$

Ensuite S. Newcomb introduit comme Laplace avant lui, la relation (20) liant l'indice de réfraction à la masse volumique de l'air

$$n^2(\rho) - 1 = 2\nu\rho$$

puis avec les notations complémentaires,

$$w = 1 - \frac{\rho}{\rho_0} \in [0, 1]$$

on peut écrire,

$$\frac{n^2}{n_0^2} = 1 - \frac{2\nu\rho_0}{1 + 2\nu\rho_0} w$$

et en combinant ces relations géométriques et optiques il pose,

$$\frac{n^2}{n_0^2} \frac{r^2}{R_\oplus^2} = 1 + 2u$$

soit,

$$1 + 2u = \left( 1 - \frac{2\nu\rho_0}{1 + 2\nu\rho_0} w \right) \left( 1 + \frac{\mathcal{H}}{R_\oplus} x \right)^2$$

Finalement avec l'approximation  $dn/n \approx dn/n_0$ , l'intégrale de la réfraction se ramène à l'une ou l'autre forme,

$$\mathcal{R}(z_0) = \frac{\nu\rho_0}{1 + \nu\rho_0} \tan z_0 \int_0^1 \frac{dw}{(1 + 2u \sec^2 z_0)^{1/2}} \quad (33)$$

$$\mathcal{R}(z_0) = \frac{\nu\rho_0}{1 + \nu\rho_0} \sin z_0 \int_0^1 \frac{dw}{(2u + \cos^2 z_0)^{1/2}} \quad (34)$$

mathématiquement équivalentes mais avec la première forme adaptée aux directions pas trop proches de l'horizon et la seconde pour ce voisinage.

À ce stade aucune approximation importante n'a été effectuée et l'intégration nécessite la loi reliant la variable  $w$  (la densité de l'air) à  $x$  (l'altitude). S. Newcomb montre que  $x < 5$ , avec une altitude efficace de l'atmosphère inférieure à 40 km, et donc que  $\mathcal{H}/R_\oplus x < 0.01$ . De plus

Table of Refractions for 50° F. Temp. and 30 in. Pressure.

App. Z.D.	Mean Refrac- tion.	Change for		App. Z.D.	Mean Refrac- tion.	Change for	
		10° F. Temp.	1 in. Bar.			10° F. Temp.	1 in. Bar.
0	0.00	0.00	0.00	45	0 58.2	- 1.1	+ 2.0
1	1.02	-0.02	+0.03	46	1 0.2	- 1.2	+ 2.1
2	2.03	-0.04	+0.07	47	1 2.4	- 1.3	+ 2.1
3	3.05	-0.06	+0.10	48	1 4.6	- 1.3	+ 2.2
4	4.07	-0.08	+0.14	49	1 6.9	- 1.3	+ 2.2
5	5.09	-0.10	+0.17	50	1 9.3	- 1.4	+ 2.3
6	6.12	-0.12	+0.21	51	1 11.8	- 1.4	+ 2.4
7	7.15	-0.14	+0.24	52	1 14.4	- 1.5	+ 2.5
8	8.18	-0.16	+0.28	53	1 17.1	- 1.5	+ 2.6
9	9.22	-0.18	+0.31	54	1 20.0	- 1.6	+ 2.7
10	10.27	-0.21	+0.34	55	1 23.0	- 1.6	+ 2.8
11	11.32	-0.23	+0.38	56	1 26.1	- 1.7	+ 2.9
12	12.38	-0.25	+0.42	57	1 29.4	- 1.7	+ 3.0
13	13.44	-0.26	+0.45	58	1 32.9	- 1.8	+ 3.2
14	14.52	-0.29	+0.49	59	1 36.6	- 1.9	+ 3.3
15	15.60	-0.31	+0.53	60	1 40.5	- 2.0	+ 3.4
16	16.70	-0.33	+0.56	61	1 44.6	- 2.1	+ 3.6
17	17.80	-0.35	+0.60	62	1 49.1	- 2.2	+ 3.7
18	18.92	-0.37	+0.64	63	1 53.8	- 2.2	+ 3.9
19	20.04	-0.39	+0.68	64	1 58.8	- 2.3	+ 4.0
20	21.19	-0.42	+0.72	65	2 4.2	2.4	+ 4.2
21	22.35	-0.44	+0.76	66	2 10.0	- 2.5	+ 4.4
22	23.52	-0.46	+0.80	67	2 16.3	- 2.6	+ 4.6
23	24.71	-0.48	+0.84	68	2 23.1	- 2.8	+ 4.9
24	25.92	-0.51	+0.88	69	2 30.5	- 2.9	+ 5.1
25	27.15	-0.54	+0.92	70	2 38.6	- 3.1	+ 5.4
26	28.39	-0.56	+0.97	71	2 47.5	- 3.3	+ 5.7
27	29.66	-0.58	+1.01	72	2 57.3	- 3.5	+ 6.0
28	30.95	-0.60	+1.05	73	3 8.2	- 3.7	+ 6.4
29	32.26	-0.63	+1.10	74	3 20.3	- 4.0	+ 6.8
30	33.60	-0.65	+1.15	75	3 33.9	- 4.3	+ 7.3
31	34.97	-0.69	+1.19	76	3 49.4	- 4.6	+ 7.8
32	36.37	-0.72	+1.23	77	4 7.0	- 5.0	+ 8.3
33	37.79	-0.74	+1.28	78	4 27.4	- 5.5	+ 9.0
34	39.26	-0.77	+1.33	79	4 51.1	- 6.0	+ 9.9
35	40.75	-0.80	+1.38	80	5 19.0	- 6.5	+ 10.9
36	42.28	-0.83	+1.43	81	5 52.5	- 7.3	+ 12.0
37	43.84	-0.86	+1.48	82	6 33.2	- 8.2	+ 13.4
38	45.46	-0.89	+1.54	83	7 23.7	- 9.3	+ 15.3
39	47.12	-0.92	+1.60	84	8 27.7	- 10.8	+ 17.5
40	48.82	-0.96	+1.66	85	9 51.4	- 12.9	+ 20.4
41	50.57	-0.99	+1.72	86	11 44.3	- 16.0	+ 24.3
42	52.37	-1.02	+1.78	87	14 22.6	- 20.6	+ 30.0
43	54.24	-1.07	+1.84	88	18 16.1	- 28.3	+ 38.6
44	56.17	-1.10	+1.91	89	24 20.6	- 41.7	+ 52.4
45	58.16	-1.14	+1.97	90	34 32.1	- 68.6	+ 76.5

FIGURE 16. Table de la réfraction atmosphérique selon S. Newcomb, incluant les variations de température et de pression. La table est extraite de [3, p. 433] et doit être comparée au calcul moderne des tables 1–2.

$\nu\rho_0 \approx n_0 - 1 < 0.0003$  et avec  $w < 1$  on voit que  $u$  est un terme de très faible amplitude et que l'on peut assimiler à,

$$u \approx \frac{\mathcal{H}}{R_\oplus} x - \frac{\nu\rho_0}{1 + 2\nu\rho_0} w \quad (35)$$

Tant que  $z_0 < 81^\circ$  alors  $2u \sec^2 z_0 < 1$  et le dénominateur de (33) peut être développé en séries,

$$(1 + 2u \sec^2 z_0)^{-1/2} \approx 1 - u \sec^2 z_0 + \frac{3}{2} u^2 \sec^4 z_0 - \frac{5}{2} u^6 \sec^6 z_0 + \dots$$

qui ne laisseront que des intégrales de la forme,

$$\int_0^1 u^k dw$$

avec  $u(w)$  donné par (35) et donc après développement binomial, des termes génériques du type,

$$\mathcal{J}_{mn} = \int_0^1 x^m w^n dw$$

On voit très rapidement que le premier terme en  $u$  va conduire à la densité intégrée sur l'épaisseur de l'atmosphère,

$$\int_0^{\mathcal{H}} \rho dh$$

et donc, que le coefficient du terme en  $\tan^3 z_0$  est indépendant de la loi de variation de la densité avec l'altitude, conformément au *théorème* d'Orani–Laplace.

S. Newcomb envisage ensuite différentes lois de décroissance de la densité, à commencer par l'hypothèse de I. Newton de l'atmosphère isotherme

$$\rho = \rho_0 e^{-x}$$

puis celle de J. Ivory (1765-1842) correspondant en fait à une diminution de la température à taux uniforme avec l'altitude, que nous allons retrouver avec l'atmosphère standard dans la section suivante. Dans ce cas, la densité prend la forme,

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{x}{\beta}\right)^{\beta-1}$$

où  $\beta$  est un coefficient sans dimension de l'ordre de 5 (voir plus bas ce même coefficient dans les équations (46), (47)). S. Newcomb ramène les intégrales à des formes eulériennes permettant de conduire le calcul de la réfraction avec un développement en puissances de  $\sec^2 z_0$  en fonction des quelques constantes physiques du modèle. Il détermine également les effets d'un changement des conditions de référence pour la température et la pression. Cela donne finalement la table de la figure 16, donnant la valeur de la réfraction jusqu'à l'horizon pour un observateur au niveau de la mer, et les coefficients à appliquer pour une différence de température ou de pression. La table n'étant pas numérisée, je donne dans la table 1 la comparaison sous la forme d'une table calculée pour les mêmes conditions de température et de pression et arrangée très semblablement à celle de S. Newcomb pour faciliter la comparaison. Le modèle utilisé est celui des couches de l'atmosphère standard avec, dans la troposphère,  $dT/dh = -6.5$  K/km. On voit que l'accord est parfait à mieux que  $0.1''$  jusqu'à  $z_0 \sim 85^\circ$  et que la différence ne devient sensible qu'à l'horizon avec  $30''$  de différence pour la réfraction horizontale. Mais un simple changement, relativement bénin, du taux de décroissance de la température dans la troposphère en prenant  $dT/dh = -5.5$  K/km, conduit à la table 2, et à un accord quasi parfait sur toute l'étendue de la table. On remarquera que même avec cette modification les deux tables sont strictement identiques jusqu'à  $z_0 = 79^\circ$ .

Il n'est pas possible de connaître avec toute la précision voulue le modèle équivalent employé par S. Newcomb jusqu'à l'horizon, mais cette expérience montre qu'il est vain de comparer les tables dans le voisinage extrême de l'horizon. Une variation raisonnable d'un ou deux paramètres physiques peut modifier la réfraction à l'horizon de une à deux minutes d'arc sans qu'il soit possible d'affirmer qu'une solution est meilleure que l'autre. Elles sont juste un peu différentes, et probablement tout aussi inexactes. Les astronomes ont remarqué depuis longtemps que la réfraction aux faibles hauteurs pouvait subir des changements notables d'un jour à l'autre alors que les conditions atmosphériques locales étaient restées à peu près identiques. On ne peut maîtriser les conditions atmosphériques rencontrées par le rayon horizontal durant les  $\sim 1\ 000$

km de son parcours dans l'air, et même si c'était le cas, il restera toujours les derniers mètres au-dessus du sol dont l'effet peut avoir une influence majeure sur la réfraction.

Enfin, pour la partie principale de la table, il ne faut pas trop s'étonner de l'accord et lui attribuer plus de mérite qu'il ne convient, puisque reprenant l'hypothèse de J. Ivory, le calcul de S. Newcomb correspond à une atmosphère avec une température décroissante à taux constant avec l'altitude. C'est précisément le cas de la troposphère de l'atmosphère standard utilisée pour le calcul numérique où se déroule l'essentiel de la réfraction. Donc la comparaison montre surtout un accord entre une intégration numérique et un calcul analytique reposant sur des hypothèses physiques très voisines. En somme si je valide S. Newcomb par ce calcul, à l'inverse la confiance que je place dans son expertise permet de valider mon implémentation.

Avec la table de S. Newcomb, et en France celle de R. Radau (1835–1911) à la même époque, on est parvenu à une solution satisfaisante qui rendait compte au mieux de la réfraction pour l'astronome praticien qui n'avait jamais besoin de la valeur horizontale. Le problème n'est plus le calcul de la table à partir d'un modèle et quelques contraintes venant de l'observation, mais bien la signification de ces nombres par rapport au phénomène réel et sa grande variabilité près de l'horizon en fonction du lieu, de l'heure et de la stratification en température des basses couches de l'atmosphère. Pour l'astrométrie de haute précision, le problème de la qualité de la mesure résultant de la réfraction ne peut se résoudre par de nouvelles tables, aussi élaborées soient-elles. Le problème est ailleurs maintenant et, tant que l'on observera du sol, il sera impossible de s'affranchir parfaitement de l'atmosphère et de tous ses effets sur les images. La réfraction est le problème de l'astrométriste, la qualité des images (au sens large car cela concerne les spectres par exemple) est le problème de tout astronome qui incorpore l'atmosphère comme une des composantes de son système optique.

**TABLE 1.** Réfraction pour les conditions standards de S. Newcomb ( $P = 30$  inches = 1 015.9 hPa,  $t = 50$  °F = 10 °C) et  $\lambda = 0.590\text{ }\mu\text{m}$ , calculée par une méthode numérique utilisant le modèle en couches de l'atmosphère standard avec  $dT/dh = -6.5$  K/km. Table à comparer à la figure 16.

$z_0$ deg	$\mathcal{R}$ "	$z_0 \leq 45^\circ$ variation		$z_0$ deg	$\mathcal{R}$ ' "	$z_0 \geq 45^\circ$ variation	
		10 °F "	1 inch "			10 °F "	1 inch "
0	0.00	-0.00	0.00	45	00 58.2	-1.1	1.9
1	1.02	-0.02	0.03	46	01 00.2	-1.2	2.0
2	2.03	-0.04	0.07	47	01 02.4	-1.2	2.1
3	3.05	-0.06	0.10	48	01 04.6	-1.3	2.2
4	4.07	-0.08	0.14	49	01 06.9	-1.3	2.2
5	5.10	-0.10	0.17	50	01 09.3	-1.3	2.3
6	6.12	-0.12	0.20	51	01 11.8	-1.4	2.4
7	7.15	-0.14	0.24	52	01 14.4	-1.4	2.5
8	8.19	-0.16	0.27	53	01 17.1	-1.5	2.6
9	9.23	-0.18	0.31	54	01 20.0	-1.6	2.7
10	10.27	-0.20	0.34	55	01 23.0	-1.6	2.8
11	11.32	-0.22	0.38	56	01 26.1	-1.7	2.9
12	12.38	-0.24	0.41	57	01 29.5	-1.7	3.0
13	13.45	-0.26	0.45	58	01 33.0	-1.8	3.1
14	14.52	-0.28	0.48	59	01 36.6	-1.9	3.2
15	15.61	-0.30	0.52	60	01 40.6	-2.0	3.4
16	16.70	-0.33	0.56	61	01 44.7	-2.0	3.5
17	17.81	-0.35	0.59	62	01 49.1	-2.1	3.6
18	18.93	-0.37	0.63	63	01 53.8	-2.2	3.8
19	20.06	-0.39	0.67	64	01 58.9	-2.3	4.0
20	21.20	-0.41	0.71	65	02 04.3	-2.4	4.1
21	22.36	-0.43	0.75	66	02 10.1	-2.5	4.3
22	23.53	-0.46	0.78	67	02 16.4	-2.7	4.6
23	24.72	-0.48	0.82	68	02 23.2	-2.8	4.8
24	25.93	-0.50	0.86	69	02 30.6	-3.0	5.0
25	27.16	-0.53	0.91	70	02 38.7	-3.1	5.3
26	28.40	-0.55	0.95	71	02 47.6	-3.3	5.6
27	29.67	-0.58	0.99	72	02 57.4	-3.5	5.9
28	30.96	-0.60	1.03	73	03 08.3	-3.7	6.3
29	32.28	-0.63	1.08	74	03 20.4	-4.0	6.7
30	33.62	-0.65	1.12	75	03 34.0	-4.2	7.2
31	34.99	-0.68	1.17	76	03 49.5	-4.6	7.7
32	36.38	-0.71	1.21	77	04 07.1	-4.9	8.3
33	37.81	-0.73	1.26	78	04 27.5	-5.4	8.9
34	39.27	-0.76	1.31	79	04 51.2	-5.9	9.7
35	40.77	-0.79	1.36	80	05 19.1	-6.5	10.7
36	42.30	-0.82	1.41	81	05 52.6	-7.2	11.8
37	43.87	-0.85	1.46	82	06 33.3	-8.1	13.2
38	45.48	-0.88	1.52	83	07 23.8	-9.3	14.9
39	47.14	-0.92	1.57	84	08 27.9	-10.9	17.1
40	48.84	-0.95	1.63	85	09 51.4	-13.0	20.0
41	50.50	-0.98	1.68	86	11 43.9	-16.0	23.9
42	52.38	-1.02	1.75	87	14 21.4	-20.6	29.4
43	54.28	-1.05	1.81	88	18 12.1	-28.1	37.8
44	56.19	-1.09	1.87	89	24 09.2	-41.2	51.1
45	58.19	-1.13	1.94	90	33 59.7	-66.9	74.3

**TABLE 2.** Réfraction pour les conditions standards de S. Newcomb ( $P = 30$  inches = 1 015.9 hPa,  $t = 50$  °F = 10 °C) et  $\lambda = 0.590\text{ }\mu\text{m}$ , calculée par une méthode numérique utilisant le modèle en couches de l'atmosphère standard avec  $dT/dh = -5.5\text{ K/km}$ . Table à comparer à la figure 16.

$z_0$ deg	$\mathcal{R}$ "	$z_0 \leq 45^\circ$ variation		$z_0$ deg	$\mathcal{R}$ ' "	$z_0 \geq 45^\circ$ variation	
		10 °F "	1 inch "			10 °F "	1 inch "
0	0.00	-0.00	0.00	45	00 58.2	-1.1	1.9
1	1.02	-0.02	0.03	46	01 00.2	-1.2	2.0
2	2.03	-0.04	0.07	47	01 02.4	-1.2	2.1
3	3.05	-0.06	0.10	48	01 04.6	-1.3	2.2
4	4.07	-0.08	0.14	49	01 06.9	-1.3	2.2
5	5.10	-0.10	0.17	50	01 09.3	-1.3	2.3
6	6.12	-0.12	0.20	51	01 11.8	-1.4	2.4
7	7.15	-0.14	0.24	52	01 14.4	-1.4	2.5
8	8.19	-0.16	0.27	53	01 17.1	-1.5	2.6
9	9.23	-0.18	0.31	54	01 20.0	-1.6	2.7
10	10.27	-0.20	0.34	55	01 23.0	-1.6	2.8
11	11.32	-0.22	0.38	56	01 26.1	-1.7	2.9
12	12.38	-0.24	0.41	57	01 29.5	-1.7	3.0
13	13.45	-0.26	0.45	58	01 33.0	-1.8	3.1
14	14.52	-0.28	0.48	59	01 36.6	-1.9	3.2
15	15.61	-0.30	0.52	60	01 40.6	-2.0	3.4
16	16.70	-0.33	0.56	61	01 44.7	-2.0	3.5
17	17.81	-0.35	0.59	62	01 49.1	-2.1	3.6
18	18.93	-0.37	0.63	63	01 53.8	-2.2	3.8
19	20.06	-0.39	0.67	64	01 58.9	-2.3	4.0
20	21.20	-0.41	0.71	65	02 04.3	-2.4	4.1
21	22.36	-0.43	0.75	66	02 10.1	-2.5	4.3
22	23.53	-0.46	0.78	67	02 16.4	-2.7	4.6
23	24.72	-0.48	0.82	68	02 23.2	-2.8	4.8
24	25.93	-0.50	0.86	69	02 30.6	-3.0	5.0
25	27.16	-0.53	0.91	70	02 38.7	-3.1	5.3
26	28.40	-0.55	0.95	71	02 47.6	-3.3	5.6
27	29.67	-0.58	0.99	72	02 57.4	-3.5	5.9
28	30.96	-0.60	1.03	73	03 08.3	-3.7	6.3
29	32.28	-0.63	1.08	74	03 20.4	-4.0	6.7
30	33.62	-0.65	1.12	75	03 34.0	-4.2	7.2
31	34.99	-0.68	1.17	76	03 49.5	-4.6	7.7
32	36.38	-0.71	1.21	77	04 07.1	-4.9	8.3
33	37.81	-0.73	1.26	78	04 27.5	-5.4	8.9
34	39.27	-0.76	1.31	79	04 51.2	-5.9	9.7
35	40.77	-0.79	1.36	80	05 19.2	-6.5	10.7
36	42.30	-0.82	1.41	81	05 52.6	-7.2	11.8
37	43.87	-0.85	1.46	82	06 33.4	-8.1	13.2
38	45.48	-0.88	1.52	83	07 23.9	-9.3	14.9
39	47.14	-0.92	1.57	84	08 28.1	-10.9	17.1
40	48.84	-0.95	1.63	85	09 51.8	-13.0	20.0
41	50.52	-0.98	1.68	86	11 44.7	-16.0	23.9
42	52.38	-1.02	1.75	87	14 23.0	-20.6	29.5
43	54.27	-1.05	1.81	88	18 16.1	-28.2	37.9
44	56.19	-1.09	1.87	89	24 19.8	-41.6	51.5
45	58.19	-1.13	1.94	90	34 30.4	-68.2	75.7

## TROISIÈME PARTIE.

*Calcul des réfractions, par quadratures numériques à toute distance du zénith, et dans une constitution quelconque d'atmosphère.*

**FIGURE 17.** Biot, 1836, début de la section 3 relative à la quadrature numérique.

## 5. Solutions numériques

### 5.1. Présentation

On a déjà mentionné que cette approche avait été initiée par I. Newton avant d'être systématisée et largement développée par J.-B. Biot dans les années 1830. Dans les faits cela resta une entreprise isolée et délaissée par les astronomes au profit de (très/trop) longs développements analytiques, sans toujours parvenir à une théorie valable jusqu'à l'horizon. Ce n'est que dans les années 1980 que L. H. Auer et E. M. Standish [28] ont redécouvert (selon toute vraisemblance sans avoir connaissance des travaux de J.-B. Biot) cette approche et montré qu'elle était extrêmement efficace et adaptée aux moyens modernes de calcul. Un article similaire de C. Y. Hohenkerk et A. T. Sinclair [29] en propose une implémentation plus complète et fournit le code Fortran. Pour les calculs complets du trajet des rayons lumineux, applicables également en cas de dépression de l'horizon, une solution par résolution de l'équation différentielle complète est présentée ci-dessous, très facile d'emploi avec les outils standards de programmation. Pour compléter cette mise en perspective historique, l'auteur de ces lignes avait mis en œuvre cette dernière approche numérique en 2005, pour des études de trajets de rayons lumineux et des calculs de réfraction à distance finie dans l'ignorance totale des travaux de ses précurseurs, découverts par la suite.

Après le survol de quelques méthodes analytiques permettant d'approcher la solution exacte de l'intégrale de la réfraction sous la forme (12) ou (19), on aborde dans cette section l'approche purement numérique. En fait, on la trouve déjà en toute rigueur dans la solution de I. Newton de la section 3.3, mais c'est une solution isolée historiquement qui n'a pas eu d'impact immédiat. Le véritable précurseur en la matière est J.-B. Biot dans une série de publications dont la synthèse se trouve dans l'addition à *La Connaissance des temps* de 1839 [30] (cf. figure 17) dans laquelle il mentionne bien que la lecture d'I. Newton est à l'origine de son propre travail sur le sujet. Les intégrales classiques de la réfraction sont impropre et inadaptées à un calcul numérique jusque dans l'horizon. Ce terme d'horizon signifie maintenant l'horizon optique c'est-à-dire incluant la dépression de l'horizon pour un observateur à l'altitude  $h_0$  au-dessus du niveau de la mer, pour lequel la distance zénithale de l'horizon est supérieure à  $90^\circ$ . La direction de l'horizon et celle du rayon horizontal sont alors des directions distinctes, sauf pour un observateur au niveau de la mer. Le problème des intégrales impropre a bien été perçu par J.-B. Biot comme la difficulté à contourner comme on peut le voir sur la figure 18. Il va mettre en œuvre une transformation permettant la quadrature numérique jusqu'à l'horizon, reprise récemment (voir dans ce volume [9] et surtout [31]).

## 5

aucun indice quelconque des procédés employés pour l'établir. Je me suis ainsi assuré que Newton s'était formé des expressions différentielles de la réfraction astronomique équivalentes à celles que nous employons aujourd'hui, et qu'il en avait déduit théoriquement sa table pour le cas d'une température uniforme; non pas sans doute à l'aide des grandes et difficiles méthodes d'intégration par lesquelles on résout aujourd'hui ce problème analytiquement; mais par le simple emploi des quadratures paraboliques approximatives, exposées dans le troisième livre *Des Principes*, et dont il dit lui-même qu'il a fait cet usage dans les lettres que je viens de citer. Or, comme nos expressions actuelles de l'élément différentiel de la réfraction se préterait difficilement à un pareil procédé sous la forme que nous leur donnons habituellement, j'ai pensé qu'il devait y avoir telle manière de les présenter qui les rendrait plus simples et plus propres à être calculées ainsi. J'y suis en effet parvenu, non pas

**FIGURE 18.** J.-B. Biot, 1836, inspiration venant de sa lecture de I. Newton et remarque sur la singularité des intégrales et les changements qu'il y a apportés.

### 5.2. *Évaluation numérique de l'intégrale de la réfraction*

L'intégrale de la réfraction sous la forme (12) ou (19) est singulière pour un rayon lumineux horizontal au niveau de l'observateur, mais fondamentalement, le rayon lumineux ne présente aucune singularité, même avec une dépression de l'horizon pour un observateur en haut d'une montagne ou d'une colline. Ce n'est donc pas une singularité essentielle et elle peut être éliminée par un bon choix de la variable d'intégration. L. H. Auer et E. M. Standish [28] ont transformé l'intégration sur  $n$  en une intégration sur l'angle  $\zeta$ , la distance zénithale locale, qui varie de façon monotone le long du rayon lumineux. Il n'y a plus la singularité au passage par  $\zeta = \pi/2$ , qui provenait du fait que  $r$  était stationnaire à cet endroit. Par ce changement de variable, l'intégrale impropre devient une intégrale régulière sur toute la longueur du rayon lumineux.

L.H. Auer et E.M. Standish ont effectué le changement de variable sur l'intégrale elle-même, mais il est plus simple et plus instructif de repartir des premiers principes. On part de (10a) pour établir l'équation fondamentale en fonction de  $\zeta$ , en supposant connue la loi  $n(r)$ . On a, comme auparavant, la condition purement géométrique :

$$d\mathcal{R} = \frac{\tan \zeta}{r} dr + d\zeta \quad (36)$$

que l'on combine avec la condition optique,

$$d(nr \sin \zeta) = 0$$

prise sous la forme,

$$\frac{d(nr)}{nr} + \frac{d\zeta}{\tan \zeta} = 0$$

qui permet d'éliminer le  $\tan \zeta$  de l'équation (36) et d'aboutir alors directement à la forme de l'intégrale régulière de la réfraction,

$$\mathcal{R} = - \int_0^{z_0} \frac{r \frac{dn}{dr}}{n + r \frac{dn}{dr}} d\zeta \quad (37)$$

La variable d'intégration étant  $\zeta$ , et la donnée physique  $n(r)$ , il faut pouvoir relier  $r$  et  $\zeta$ , c'est-à-dire avoir la description de la trajectoire par sa tangente. L'intégrale première

$$nr \sin \zeta = n_0 R_{\oplus} \sin z_0$$

fournit implicitement ce dernier maillon.  $R_{\oplus}$  doit être remplacé par  $R_{\oplus} + h_0$  pour une observation à l'altitude  $h_0$ . Il faut donc résoudre cette équation en parallèle de l'intégration de l'équation (37) pour avoir  $r$  pour chaque valeur de  $\zeta$ . Cela se fait par une méthode de point fixe à convergence rapide, en utilisant également  $n(r)$ . C.Y. Hohenkerk et A.T. Sinclair [29] recommandent la méthode de Newton-Raphson bien adaptée ici et à convergence quadratique. L'équation se ramène à la recherche d'un zéro en  $r$  à  $\zeta$  fixé de l'équation,

$$F(r) = nr \sin \zeta - n_0 R_{\oplus} \sin z_0 \quad (38)$$

à partir d'une approximation  $r_0$  et d'une relation connue et accessible analytiquement ou numériquement donnant  $n(r)$ . On a alors la récurrence,

$$r_{i+1} = r_i - \frac{F(r_i)}{F'(r_i)}$$

Les bornes de l'intégrale dans l'équation 37 sont la distance zénithale apparente du lieu d'observation ( $z_0$ ) et en théorie  $\zeta = 0$  à l'infini. Bien entendu, la valeur finale est déterminée par la borne supérieure de  $r$  et donc la valeur correspondante de  $\zeta$  dans la résolution de l'équation (38). À noter qu'avec la variable  $\zeta$  il n'y a plus de difficulté sur la partie de la trajectoire avec  $\zeta > 90^\circ$ , et l'intégrale couvre la situation d'un observateur en altitude visant dans une direction sous le plan horizontal.

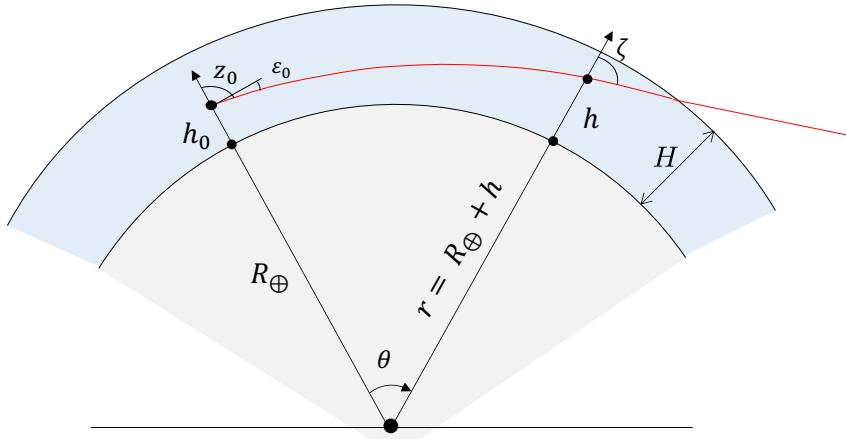
L'approximation de départ peut être, par exemple, le rayon rectiligne dans le vide, qui fournit déjà une bonne approximation du lien entre  $r$  et  $\zeta$ . En pratique, cela s'effectue au moyen d'un programme informatique et, au final, de l'appel d'une fonction `refraction` avec les conditions initiales  $z_0$ ,  $h_0$ , les paramètres météorologiques, et, éventuellement, la longueur d'onde pour des besoins de très haute précision.

On doit noter également la solution de B. Garfinkel [32], auteur d'une théorie purement analytique, relativement simple dans son principe puisqu'elle prend un modèle polytropique à une couche de la troposphère, mais techniquement d'une complexité considérable par le nombre de développements et de notations intermédiaires. Pour vérifier certains des résultats analytiques, il effectue des comparaisons à une intégration numérique directe de l'équation (19) à peine modifiée, sans donner de détails, laissant penser qu'il n'a rencontré aucune difficulté pour calculer la réfraction jusqu'à l'horizon, y compris pour des situations impliquant une dépression de plusieurs degrés. Il possédait clairement une approche numérique efficace, mais on restera pour toujours dans l'ignorance des transformations qu'il a mises en œuvre. C'est une situation assez curieuse qui témoigne d'une pratique scientifique révolue dans laquelle un problème n'est vraiment résolu que si on lui apporte une solution sous la forme de formules, quitte à ce que l'évaluation numérique implique de la programmation dont l'exactitude est bien difficile à établir et passe par des vérifications numériques bien plus simples que la solution elle-même. Il faut cependant créditer l'auteur d'une solution analytique dont les développements restent valables dans l'horizon, même pour un observateur en altitude. Je pense que c'est la seule

solution analytique réalisant cette performance, mais c'est aussi la dernière solution analytique complète de la réfraction astronomique.

### 5.3. Équation différentielle de la trajectoire

On peut éviter cette difficulté de la quadrature couplée à la résolution d'une équation non linéaire, en intégrant directement l'équation qui donne le trajet du rayon lumineux. Une fois ce trajet connu du point d'observation à la sortie de l'atmosphère, il suffit de comparer les tangentes aux points extrêmes pour avoir la valeur de la réfraction. Bien entendu, la trajectoire n'est pas absolument nécessaire pour la réfraction astronomique, et la méthode semble rechercher plus qu'il ne faut, mais la trajectoire est parfois bien utile pour des études d'optique atmosphérique, pour la réfraction terrestre ou pour produire des figures à but pédagogique par exemple. Au final la méthode présente moins de difficulté que l'intégrale avec une équation implicite à résoudre en parallèle à chaque pas de l'intégration et, éventuellement, la distinction des segments de trajectoire sous l'observateur et au-dessus de l'observateur lorsque son altitude n'est pas nulle. Enfin les astronomes sont souvent plus familiers des techniques d'intégration numérique des équations différentielles que des quadratures numériques, et le contrôle du calcul numérique de précision passe par l'expérience et non par l'emploi sans discernement d'une boîte noire.



**FIGURE 19.** Trajet d'un rayon lumineux pour un observateur à l'altitude  $h_0$  pour une distance zénithale apparente  $z_0$ . L'angle  $\epsilon_0$  est la dépression du rayon sous le plan horizontal et  $H$  l'épaisseur de l'atmosphère. Le point courant a pour coordonnées  $(\theta, r)$  ou  $(\theta, h)$  et  $\zeta$  est la distance zénithale locale.

On part à nouveau de l'intégrale première de l'équation différentielle (8) et des notations de la figure 19 :

$$nr \sin \zeta = C \quad (39)$$

et :

$$\tan \zeta = \frac{r}{r'}$$

avec  $r' = dr/d\theta$ . On a alors l'équation différentielle du rayon lumineux :

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm r \left[ \frac{n^2 r^2}{C^2} - 1 \right]^{1/2} \quad (40)$$

qui se compose de deux branches en raison du signe. Cela correspond à la singularité lors du passage à  $\zeta = 90^\circ$ . L'intégration de l'équation (40) doit prendre en compte ces deux branches. Cependant, en dérivant cette équation par rapport à  $\theta$ , on obtient une équation différentielle du second ordre, dans laquelle le choix du signe de l'équation (40) a disparu :

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = r \left[ \frac{2n^2 r^2}{C^2} + \frac{n r^3}{C^2} \frac{dn}{dr} - 1 \right] \quad (41)$$

Cela peut sembler être une complication, mais les outils numériques de résolution d'équations différentielles sont largement disponibles, et il est parfois plus simple de résoudre une équation différentielle que de passer par une quadrature numérique. Enfin, l'intégrale première n'a pas disparu dans l'opération, puisque la constante  $C$  figure explicitement dans l'équation (41) et doit être initialisée avec

$$C = n_0 (R_\oplus + h_0) \sin z_0$$

Avec le changement de variable :

$$\begin{aligned} r &= R_\oplus + h \\ x &= R_\oplus \theta \end{aligned}$$

on obtient l'équation de la trajectoire décrite par l'angle polaire  $\theta$  et l'altitude  $h$ , et non par la distance au centre de la Terre (voir figure 19) :

$$\frac{d^2h}{dx^2} = \frac{(R_\oplus + h)}{R_\oplus^2} \left[ \frac{2n^2 (R_\oplus + h)^2}{C^2} + \frac{n (R_\oplus + h)^3}{C^2} \frac{dn}{dh} - 1 \right] \quad (42)$$

La relation qui relie l'angle  $\zeta$  à la dérivée en chaque point a la forme :

$$\zeta = \tan^{-1} \left( \frac{R_\oplus + h}{dh/d\theta} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{1 + h/R_\oplus}{dh/dx} \right) \quad (43)$$

et enfin, la déviation du rayon lumineux entre les deux points extrêmes est donnée par :

$$\mathcal{R} = (\theta + \zeta)_{h \approx 100 \text{ km}} - z_0 \quad (44)$$

où la sortie de l'atmosphère en altitude est déterminée par le modèle utilisé et est de l'ordre de 100 km. Lors de l'intégration des rayons proches de l'horizon, il faut contrôler que la trajectoire reste toujours au-dessus du niveau de la mer et donc que  $h > 0$ . La variable  $x$  est très proche de l'abscisse curviligne le long du rayon, et pour des rayons proches de l'horizon, il faut intégrer sur plusieurs centaines de kilomètres, voire 1000 km ou 1500 km pour atteindre  $h \approx 100$  km et la sortie de l'atmosphère. L'équation (43) donne également la condition initiale  $(dh/d\theta)_{\theta=0}$  pour démarrer l'intégration en prenant  $\zeta = z_0$ .

Le rayon rasant, donc correspondant à l'horizon optique, nécessaire par exemple pour les calculs de levers et couchers des astres, est donné par la condition initiale  $\epsilon_0$  à l'altitude  $h_0$  par application de l'invariant (39)

$$\cos \epsilon_0 = \frac{n_\oplus R_\oplus}{n_0 (R_\oplus + h_0)}$$

qui exprime que le rayon à son point le plus bas est tangent à la surface de la Terre où l'indice de réfraction vaut  $n_\oplus$ . Comme  $\epsilon_0$  est généralement un petit angle, cette expression n'est pas la meilleure sur le plan numérique et il vaut mieux prendre l'angle moitié avec

$$\sin \frac{\epsilon_0}{2} = \left( \frac{n_0 - n_\oplus + n_0 h_0 / R_\oplus}{2 n_0 (1 + h_0 / R_\oplus)} \right)^{1/2}$$

et

$$\epsilon_0 \approx \sqrt{\frac{2h_0}{R_\oplus} \left( 1 + R_\oplus \frac{dn}{dh} \right)} = \sqrt{\frac{2h_0}{R_\oplus} \left( 1 - \frac{R_\oplus}{\kappa} \right)}$$

où  $\kappa$  est le rayon de courbure du rayon lumineux au voisinage de l'horizon donné par l'équation (16). La dépression est donc moins forte que celle que l'on calculerait avec un trajet rectiligne le long de la tangente à la sphère de rayon  $R_{\oplus}$ .

Lors de l'intégration, il vaut mieux adopter une variable régularisante  $\tilde{x} = x \sin z_0$ , avec un pas régulier sur la longueur de l'arc. Cette longueur peut être approchée par la longueur  $\mathcal{L}$  du segment de droite joignant le point initial à l'altitude  $h_0$  à la sortie de l'atmosphère en  $h = H \simeq 100$  km, avec :

$$\mathcal{L} = -(R_{\oplus} + h_0) \cos z_0 + [(R_{\oplus} + H)^2 - (R_{\oplus} + h_0)^2 \sin^2 z_0]^{1/2}$$

son exactitude n'étant pas critique et ne servant qu'à borner l'intervalle d'intégration. Cette expression est valable, y compris pour  $z_0 > 90^\circ$  ou pour une position initiale en dehors de l'atmosphère, par exemple à bord d'un satellite en orbite terrestre ([33]).

## 5.4. Modèles d'atmosphère

### 5.4.1. Un monde à découvrir

On a passé en revue au cours des sections précédentes toutes les étapes qui ont jalonné la maîtrise de la réfraction astronomique. Nous sommes passés des premiers résultats de Tycho Brahé aux modèles mathématiques d'une complexité à peine croyable de 1850 à nos jours, terrain de jeu de talentueux mathématiciens où la virtuosité avait peu à peu pris le pas sur l'ingéniosité. Dans une première époque, ce sont les lois de l'optique qu'il a fallu découvrir, puis appliquer à ce problème, sans savoir avec certitude si le phénomène en relevait totalement et quels facteurs pouvaient entacher les mesures, par exemple la parallaxe solaire de façon certaine, mais aussi la saison ou la latitude de manière moins évidente. L'équation fondamentale sous la forme de l'intégrale de la réfraction est établie à peu près simultanément par B. Taylor, P. Bouguer, entre autres. La messe était dite et cette équation, inchangée dans sa forme, demeure toujours le point de départ de tout exposé un peu avancé sur le sujet. Ensuite, le problème n'est plus l'optique, mais celui des propriétés du milieu traversé par le rayon lumineux et constitue le facteur limitant à la précision des théories comme le dit si justement J.-B. Biot [30, p. 3],

*la connaissance du pouvoir réfringent de l'air atmosphérique dans ses états divers de composition, densité, de température, et sur la représentation plus ou moins approchée des lois suivant lesquelles ces trois éléments varient dans l'atmosphère à mesure que l'on s'élève dans les couches aériennes superposées.*

E. Torricelli et l'invention du baromètre, la montée au Puy-de-Dôme de F. Périer sur la demande de B. Pascal, sont les prémisses de la connaissance de l'atmosphère. Suivront les ascensions sur les plus hauts sommets, à commencer par le Mont Blanc en 1786 sous l'impulsion du physicien suisse H. B. de Saussure qui voulait y faire des mesures météorologiques, puis celle du Chimborazo, déjà entamée par P. Bouguer, presque réussie par A. de Humboldt et A. Bonpland en 1802, pour en rester aux ascensions à but scientifique. La décroissance de la pression, celle très régulière de la température, devenaient des faits scientifiques. Mais ces mesures, aussi remarquables fussent-elles, étaient isolées et ne disaient pas grand-chose sur la hauteur de l'atmosphère. P. S. de Laplace au début du xix<sup>e</sup> siècle se cale sur la mesure unique de J. Gay-Lussac lors de son ascension en ballon à près de 7 000 m du 16 septembre 1804, au péril de sa vie.

### 5.4.2. Air sec

Jusqu'à l'exploration de la haute atmosphère par les ballons, puis les fusées au xx<sup>e</sup> siècle, les modèles étaient relativement peu contraints et relevaient de l'extrapolation du connu des basses couches, contrôlée par les lois élémentaires de la physique des gaz et de l'équilibre dynamique.

La décroissance régulière de la température dans la troposphère était un fait connu à la fin du xix<sup>e</sup> siècle et S. Newcomb cite la valeur de  $-6.5^{\circ}\text{C}$  par km comme taux de variation. Différents modèles normalisés de l'atmosphère ont été publiés, en particulier pour les besoins du transport aérien ou comme référence pour la météorologie mondiale.

Ainsi le modèle standard de l'atmosphère (*ISA : International Standard Atmosphere*) comporte des couches successives, certaines isothermes, d'autres avec un gradient constant de température avec l'altitude. En appliquant les lois de l'hydrostatique et des gaz parfaits à chacune des couches, on obtient les équations suivantes reliant la pression  $P$ , la température  $T$  et l'altitude  $h$ , avec

$$\frac{dP}{dh} = -\rho g$$

pour l'équilibre mécanique, et

$$P = \frac{\rho RT}{M_{\text{air}}}$$

pour l'équation d'état de l'air considéré comme un mélange de gaz parfaits. En éliminant  $\rho$  entre les deux équations nous avons,

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dh} = -\frac{M_{\text{air}}g}{RT(h)}$$

avec la température  $T$  donnée sous la forme  $T(h)$  en fonction de la couche. Avec  $g$  constant avec l'altitude, la solution générale est donnée par,

$$\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{M_{\text{air}}g}{RT_0} \int_{h_0}^h \frac{T_0}{T(h)} dh \quad (45)$$

soit

$$\begin{cases} \frac{P}{P_0} = \exp \left[ -\frac{M_{\text{air}}gh}{RT_0} \right] & \text{pour les couches isothermes} \\ \frac{P}{P_0} = \left[ \frac{T(h)}{T_0} \right]^\beta & \text{pour les couches à gradient thermique constant} \end{cases} \quad (46)$$

avec

$$\beta = \frac{M_{\text{air}}g}{R\gamma} \quad (47)$$

et

$$T(h) = T_{\text{bot}} - \gamma(h - h_{\text{bot}}) \quad (48)$$

où  $T_{\text{bot}}$  est la température en bas de la couche à l'altitude  $h_{\text{bot}}$ . (La convention adoptée est donc  $\gamma > 0$  dans la troposphère avec une température décroissante). Dans la troposphère standard on a alors  $\beta \approx 5.3$ . On doit propager la pression dans chaque couche avec (46), en prenant  $P_0$ ,  $T_0$  au bas de la couche ( $k + 1$ ) égaux aux valeurs de  $P$ ,  $T$  au sommet de la couche  $k$  qui la précède. Le bas de la couche  $k = 1$  est au niveau du sol avec les conditions de température et de pression locales. Strictement, l'atmosphère standard *ISA* utilise  $P_0 = 1013.25 \text{ hPa}$  et  $T_0 = 288.15 \text{ K}$ , mais on généralise le modèle pour des conditions initiales locales différentes, tout en conservant une stratification identique. Il est utile également de prendre  $\gamma = -dT/dh$  dans la troposphère comme un paramètre du modèle de calcul de la réfraction pour tester son influence et s'écartier des conditions contraignantes de l'*ISA*. Enfin

$$\begin{aligned} \rho(h) &= \frac{M_{\text{air}}}{R} \frac{P}{T} \\ &= \rho_0 \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T} \end{aligned}$$

donne avec (46) la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude. Cela donne en particulier pour la troposphère,

$$\rho(h) = \rho_0 \left[ \frac{T(h)}{T_0} \right]^{\beta-1}$$

**TABLE 3.** Paramètres de définition de l'atmosphère standard, avec les valeurs de température et de pression pour les conditions normales au sol ( $t = 15^\circ\text{C}$ ,  $P = 1013.25 \text{ hPa}$ ). Les altitudes  $h_g$  sont géopotentielles, avec  $h_g = h(1 - h/R_\oplus)$ .

	couche	$h_g$	$h$	$dt/dh$	$t$	$P$
		km	km	$\text{K km}^{-1}$	$^\circ\text{C}$	Pa
0	troposphère	0.0	0.0	-6.5	+15.0	101325
1	tropopause	11.000	11.019	0.0	-56.5	22632
2	stratosphère	20.000	20.063	+1.0	-56.5	5474.9
3	stratosphère	32.000	32.162	+2.8	-44.5	868.02
4	stratopause	47.000	47.350	0.0	-2.5	110.91
5	mésosphère	51.000	51.413	-2.8	-2.5	66.939
6	mésosphère	71.000	71.802	-2.0	-58.5	3.9564
7	mésopause	84.852	86.000	0.0	-86.2	0.3734

Le lien avec l'indice de réfraction se fait par,

$$n(h) - 1 = (n_0 - 1) \frac{\rho(h)}{\rho_0}$$

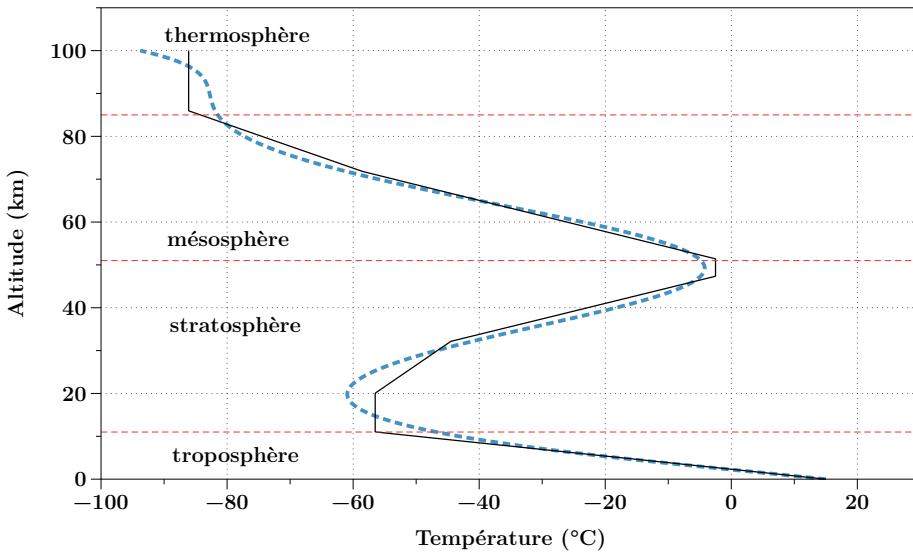
Quant à l'indice de réfraction  $n_0$ , c'est aussi une fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ , et il a fait l'objet de nombreuses mesures en laboratoire dont la précision pour les besoins métrologiques en spectroscopie dépasse très largement les besoins des modèles de réfraction. On trouve ci-dessous la formule de P. E. Ciddor [34] utilisée pour toutes les applications numériques de cet article :

$$10^8 [n_0(\lambda) - 1] = \frac{v_1}{w_1 - 1/\lambda^2} + \frac{v_2}{w_2 - 1/\lambda^2}$$

et

$$\begin{aligned} v_1 &= 5\,792\,105 \text{ } \mu\text{m}^{-2}, & w_1 &= 238.018\,5 \text{ } \mu\text{m}^{-2} \\ v_2 &= 167\,917 \text{ } \mu\text{m}^{-2}, & w_2 &= 57.362\,0 \text{ } \mu\text{m}^{-2} \end{aligned}$$

Le modèle est complet dans le sens où il fournit une valeur de l'indice de réfraction, et éventuellement de sa dérivée pour chaque altitude, à partir du choix de la longueur d'onde et des paramètres atmosphériques au niveau du sol. Mais il ne faut pas se faire d'illusions : la qualité du modèle comme décrivant la réalité ne dépasse pas celle de l'atmosphère standard comme approximation de l'atmosphère réelle. Cela reste un modèle moyen, voire idéal, de l'atmosphère, mais sans prétention à en représenter les variations saisonnières, les profils qui, dans la réalité, ne sont pas identiques selon les latitudes, selon que l'on est au-dessus d'un océan, d'un désert de sable, de montagne ou des zones couvertes de glace. Changer la température au sol pour décrire le profil vertical de température en tout lieu est une étape, mais sûrement insuffisante si l'on ne change pas la géométrie des couches ou les gradients thermiques, en particulier dans la troposphère.



**FIGURE 20.** Ligne continue : modèle standard de l’atmosphère terrestre pour les conditions normales en  $h = 0$ . Selon les couches, le modèle est soit isotherme, soit à gradient thermique constant. Ligne en pointillés bleus : version lissée avec pour  $T_0/T$  un polynôme sans discontinuités de la fonction et de sa dérivée première.

L’emploi des méthodes numériques, que ce soit par des quadratures ou par la résolution d’une équation différentielle, implique des schémas fondés sur des différences finies avec des pas discrets pour évaluer les fonctions et leurs dérivées. Le modèle en couche est, par construction, continu aux traversées des couches pour la pression, la température, etc, mais avec des discontinuités dès les dérivées premières. C’est une situation à risque pour un schéma numérique, avec des configurations sans dommage apparent et d’autres où les discontinuités peuvent conduire à des instabilités, des divergences bien visibles dans les résultats mais également à des résultats inexacts au terme d’un calcul au déroulement tout à fait normal.

Pour pallier ce risque, j’ai lissé le modèle de l’atmosphère standard avec une représentation polynomiale du profil de température qui évite les discontinuités à la traversée des couches. Au sens strict, il n’y a plus de couche mais des tranches d’atmosphère presque isothermes et d’autres à gradients thermiques presque constants avec des transitions douces bien que rapides (*smooth but steep*). Le lissage en température a été réalisé par un ajustement de  $T_0/T(h)$  sur un polynôme de degré six et en utilisant une pondération en fonction de l’altitude visant d’une part, à donner plus de poids à la troposphère, et d’autre part, à contraindre la dérivée de la température à basse altitude à être égale au gradient thermique de l’atmosphère standard. Avec ce choix, l’intégrale (45) faisant intervenir  $T_0/T(h)$  s’effectue analytiquement en intégrant le polynôme du profil et donne  $\ln P(h)$  directement sous forme polynomiale.

On a alors précisément,

$$\frac{T_0}{T(h)} = \sum_{k=0}^6 a_k x^k \quad (49)$$

avec

$$a_0 = 0.94794377928$$

$$a_1 = 0.21394$$

$$a_2 = 0.11380901063$$

$$a_3 = -0.11289515947$$

$$a_4 = 0.027368767272$$

$$a_5 = -0.0026404572768$$

$$a_6 = 0.00009030786$$

et  $x = h/10$  avec  $h$  en km. L'intégrale de l'équation (45) prend la forme,

$$\int \frac{T_0}{T(h)} dh = \sum_{k=0}^6 \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \quad (50)$$

ce qui donne  $P(h)$ , puis  $\rho(h)$  et finalement  $n(h) - 1$ . La version lissée du modèle pour les conditions normales est rajoutée sur la figure 20 du modèle standard de l'atmosphère et sur la figure 21 du gradient de réfractivité mettant en évidence la disparition des discontinuités.

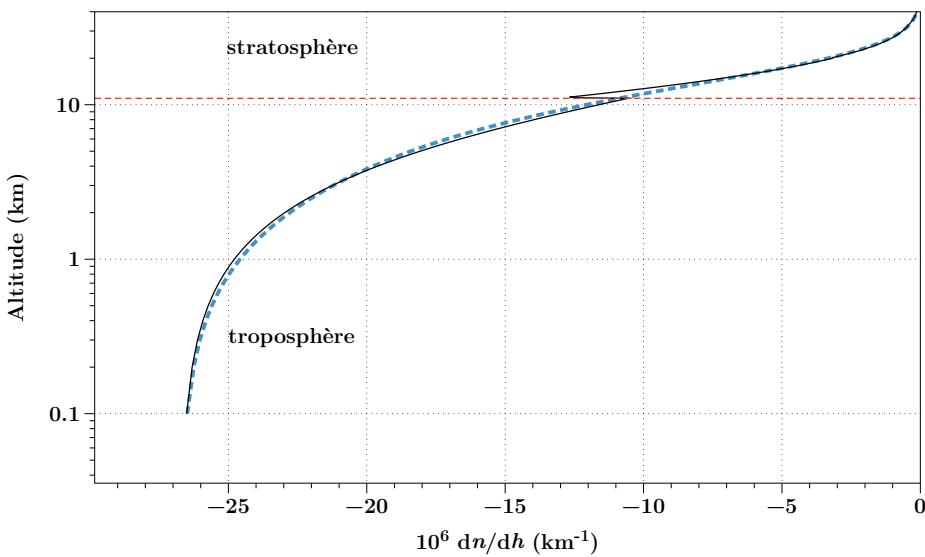
Si l'on voit le modèle standard comme une référence commune d'une atmosphère moyenne et qui s'écarte significativement de l'atmosphère vraie pour un instant et un lieu particulier, alors la version lissée est tout aussi valable comme référence de calcul, ni plus exacte, ni moins, et les avantages qu'elle offre sur le plan numérique justifient son emploi pour les calculs d'optique atmosphérique. Dans le cas de la réfraction, les différences entre les deux modèles sont  $< 0.01''$  jusqu'à  $z_0 = 75^\circ$ , puis atteignent  $0.1''$  à  $z_0 = 85^\circ$ , et  $1''$  à l'horizon, autant dire qu'il n'y a pas de différence significative compte tenu des différences bien réelles entre l'atmosphère vraie et le modèle de référence.

La table 4 donne une idée de la sensibilité de la réfraction à l'horizon en fonction de changements mineurs de quelques paramètres influant sur les propriétés de l'atmosphère. Cela donne une idée des besoins pour les paramètres météorologiques, mais aussi des incertitudes venant du modèle d'atmosphère lui-même. On voit l'importance du choix du gradient thermique et au-delà de cette valeur, c'est l'existence d'un gradient uniforme sur toute la troposphère qui est encore plus critique. Le dernier paramètre se rapporte à l'altitude de la tropopause, zone de transition entre la troposphère et la stratosphère (soit 11 km dans le modèle standard) dont on voit que la position n'est pas critique.

La variation d'altitude de l'observateur est un paramètre plus complexe puisque l'horizon optique se déplace (la dépression augmente) avec l'élévation de l'observateur, donc les changements dans la direction du rayon ne proviennent pas que de la réfraction. Mais il est important d'avoir à l'esprit qu'à très basse altitude, l'excès de réfraction entre l'œil de l'observateur et le point où le rayon lumineux est tangent au niveau de la mer est significatif et doit être introduit pour un calcul très précis de l'heure du lever du Soleil à l'horizon. Il faut donc connaître cette altitude avec exactitude puisque l'effet est sensible à une erreur de quelques mètres. Cette précision est moins critique sur une colline ou un sommet de plus d'une centaine de mètres.

**TABLE 4.** Sensibilité  $\delta\mathcal{R}$  de la valeur de la réfraction à l'horizon pour des variations élémentaires des paramètres atmosphériques et pour deux altitudes d'observation. Une erreur de  $10''$  sur la réfraction donne environ 1 s sur l'instant du lever ou du coucher du Soleil pour les latitudes moyennes, valeur à mettre en rapport avec l'observation rapportée à la figure 22.

Paramètre	variation	$\delta\mathcal{R}$	
		$h_0 = 5$ m	$h_0 = 500$ m
$T$	1 °C	$-11''$	$-15''$
$P$	10 hPa	$+20''$	$+27''$
$h_0$	10 m	$50''$	$6''$
$\lambda$	0.1 $\mu\text{m}$	$-9''$	$-12''$
RH	50 %	$-5''$	$-8''$
$dT/dh$	0.5 °C/km	$+15''$	$+24''$
alt. tropo	1 km	$0.7''$	$0.7''$



**FIGURE 21.** Valeurs du gradient  $dn/dh$  en fonction de l'altitude. La discontinuité dans le modèle en couches (ligne continue) a disparu avec la version lissée (pointillés bleus) par un polynôme.

#### 5.4.3. *Prise en compte de l'humidité*

Le modèle décrit jusqu'à maintenant se rapporte à l'air sec, sans vapeur d'eau, ce qui n'est pas tout à fait conforme à la réalité dans la basse troposphère. Dans les conditions normales de température (15 °C) et une humidité relative (RH) de 50 %, il y a environ 7 g de vapeur d'eau par m<sup>3</sup> d'air au niveau du sol et l'indice de réfraction de l'air humide n'est pas identique à celui de l'air sec. Mais on ne peut traiter la vapeur d'eau de la même façon que le mélange de l'oxygène et de l'azote, car elle est en équilibre avec un réservoir en phase liquide qui absorbe ou libère de la vapeur selon la température et le régime des vents. Pour tenir compte de la vapeur d'eau dans la réfraction il faut reprendre le calcul liant la pression, la température et la densité de l'air en tenant compte du contenu en vapeur d'eau et déterminer le profil de densité, et donc de réfractivité, en tenant compte de l'humidité. Au final, c'est une correction mineure sur la réfraction comme on peut le voir dans la table 4, mais que les mesures astronomiques de grande précision doivent prendre en compte. Je donne le principe du calcul sans rentrer dans tous les détails de l'implémentation.

Soit  $P_w$  la pression partielle de vapeur d'eau, et  $\rho_w$  la densité de la vapeur d'eau dans l'air pour cette pression. Le calcul est fait dans la troposphère et donc  $T = T_0 - \gamma(h - h_0)$  ( $\gamma = 6.5 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$ ). La pression totale est donnée par la somme des pressions partielles de l'air sec et de la vapeur d'eau,

$$P = P_d + P_w$$

puis, pour chaque composante gazeuse,

$$P_d = \frac{\rho_d RT}{M_d}$$

$$P_w = \frac{\rho_w RT}{M_w}$$



**FIGURE 22.** Exemple d'un lever de Soleil (bord supérieur) observé par l'auteur à 220 m d'altitude avec visibilité de l'horizon sur la mer. Le calcul astronomique avec le modèle de réfraction numérique prévoit un lever à 07 : 00 : 27 ± 2 s UTC et la valeur mesurée par extrapolation des positions du bord supérieur donne 07 : 00 : 25 ± 1 s. Elle est ici en plein accord avec la date de la première lumière (instant du premier cliché à 07 : 00 : 25), mais ce n'est généralement pas le cas, avec fréquemment des différences de plusieurs secondes.

avec  $M_d = 28.963$  g/mol et,  $M_w = 18.015$  g/mol. L'équation d'équilibre hydrostatique nous donne,

$$\frac{dP}{dh} = -\rho g = -(\rho_d + \rho_w)g$$

et finalement,

$$\frac{dP}{dT} = \beta \frac{P}{T} - \beta \left[ 1 - \frac{M_w}{M_d} \right] \frac{P_w}{T} \quad (51)$$

avec comme précédemment,

$$\beta = \frac{M_d g}{\gamma R} \simeq 5.3$$

Quant à la pression de vapeur courante, c'est une fraction  $f$  de la pression de vapeur saturante à la température  $T$  donnée par une expression connue en fonction de la température,

$$P_w = f P_{ws}(T) \quad (52)$$

équation dans laquelle  $f$  est un nombre  $\in [0, 1]$ , mais en général donné sous la forme de l'humidité relative RH en pourcentage et que l'on peut prendre constant dans la troposphère.

On dispose alors d'un outillage complet pour avoir un programme informatique donnant  $n(h)$  pour des conditions météorologiques au sol et une longueur d'onde que l'on peut ajuster. La figure 22 donne une illustration assez remarquable du pouvoir prédictif, pour une atmosphère calme, avec la comparaison d'un instant de lever de Soleil (bord supérieur) observé au-dessus de la mer, à la valeur calculée en utilisant le modèle numérique de réfraction. Si, dans le cas

choisi, l'accord est de quelques secondes, la règle est que pour une observation en légère altitude ( $\geq 100$  m), il est fréquent de trouver une exactitude meilleure que 5 s, sous nos latitudes. Au niveau de la mer, l'altitude exacte de l'observateur devient très difficile à définir et l'instant du phénomène très sensible à ce paramètre. Une précision autour de 10 s est plutôt la norme. Bien entendu les réfractions anormales peuvent toujours apparaître et décaler la première lumière de 10 s, voire beaucoup plus. Pour éviter de dépendre de cet instant précis, le moment du lever est reconstruit à partir d'images successives pendant une dizaine de minutes. On élimine ainsi les couches les plus basses, 2 à 3 minutes d'arc (environ 10 m à une distance de 10 km), là où l'atmosphère n'est probablement pas conforme au modèle, mais en général la variabilité venant de la réfraction est sans rapport avec les 4 min rapportées dans l'étude de Schaefer et Liller [35] en 1990.

## 6. Conclusion

Limité aux questions de réfraction astronomique pour l'astronomie de position, on peut considérer que, de la découverte du phénomène à sa prise en compte aussi exacte que possible, le parcours est achevé. Son histoire proprement dite est partiellement écrite et ce volume y ajoute de nombreux éléments nouveaux tirés des sources primaires. Il y a peu de chances que de nouvelles théories analytiques aussi élaborées que celles entrevues dans ces pages voient le jour, elles ne répondraient d'ailleurs à aucun besoin et elles ont montré leurs limites. La méthode numérique est également figée dans son principe. En revanche, on peut espérer des améliorations sensibles dans la façon de modéliser l'atmosphère, qui est bien simpliste avec une troposphère bien trop régulière sur plus de 10 km. La méthode numérique ouvre des perspectives d'une grande richesse en introduisant des couches peu élevées pour prendre en compte les inversions de température, les rayons à courbure inversée et la duplication des images. Mais nous sortons du cadre purement astronomique pour rentrer dans celui de la véritable optique atmosphérique, qui n'était pas dans le périmètre choisi pour cette présentation. Même restreint à ce cadre, il y a bien des manques dans ce texte, largement comblés par les présentations historiques critiques citées en référence et présentes dans différentes contributions de ce volume.

### Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

### Remerciements

Luc Dettwiler a bien voulu relire la première version de ce texte et je le remercie pour l'ensemble de ses remarques et suggestions toujours pertinentes, tant sur le fond que sur la forme.

**TABLE 5.** Notations utilisées dans ce document

Symbol	Grandeur	Unités
$\zeta$	distance zénithale locale	°
$\vartheta$	angle polaire de la tangente locale au rayon lumineux	°
$z$	distance zénithale vraie d'un astre	°
$z_0$	distance zénithale apparente au sol ou à $h_0$ (incluant la réfraction)	°
$\eta, \eta_0$	hauteur angulaire : $\pi/2 - z, \pi/2 - z_0$	°
$H$	épaisseur de l'atmosphère dans les modèles de Cassini	m, km
$h$	altitude courante au-dessus du niveau de la mer	m, km
$h_0$	altitude de l'observateur au-dessus du niveau de la mer	m, km
$s$	altitude réduite chez Laplace $s = 1 - R_\oplus / r = h/r$	-
$\epsilon_0$	dépression de l'horizon sous le plan horizontal ( $> 0$ )	°, '
$r$	distance au centre de la Terre	km
$R_\oplus$	rayon moyen de la Terre (6 371 km)	km
$n$	indice de réfraction de l'air	-
$n_\oplus$	indice de réfraction de l'air au sol	-
$n_0$	indice de réfraction de l'air au niveau de l'observateur	-
$\lambda$	longueur d'onde dans le vide	μm
$\mathcal{R}$	réfraction atmosphérique ( $\mathcal{R}(z), \mathcal{R}(z_0)$ )	°, ', "
$\kappa$	rayon de courbure des rayons lumineux	km
$T, T_0$	température absolue	K
$P$	pression atmosphérique	Pa, hPa
$g$	accélération de la pesanteur	m·s <sup>-2</sup>
$\mathcal{H}$	épaisseur de l'atmosphère homogène ( $\approx 8.5$ km)	km
$R$	constante des gaz parfaits ( $8.3145 \text{ J mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )	J·mol <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup>
$\rho$	masse volumique de l'air	kg·m <sup>-3</sup>
$\rho_0$	masse volumique de l'air au niveau de la mer	kg·m <sup>-3</sup>
$M_{\text{air}}$	masse molaire de l'air sec ( $0.02897 \text{ kg·mol}^{-1}$ )	kg·mol <sup>-1</sup>
$\gamma$	gradient de température dans la troposphère ( $-dT/dh$ )	K·km <sup>-1</sup>

## Références

- [1] F. Brünnow, *Spherical astronomy*, Asher, Londres, 1865.
- [2] W. Chauvenet, *Manual of spherical and practical astronomy*, Vol. I, J.B. Lippincott Company, Philadelphie, 1889.
- [3] S. Newcomb, *A compendium of spherical astronomy*, The Macmillan Company, New York, 1906.
- [4] R. Ball, *A treatise on spherical astronomy*, Cambridge University Press, New York, 1908.
- [5] P. Puiseux, A. Bemporad, « Réfraction et Extinction », in *Encyclopédie des sciences mathématiques* (J. Mock, H. Andoyer, éds.), Gauthier-Villars, 1913, p. 14-58.
- [6] A. Danjon, *Astronomie générale. Astronomie sphérique et éléments de mécanique céleste*, Librairie scientifique et technique, Albert Blanchard, Paris, 1980.
- [7] A. T. Young, « Understanding astronomical refraction », *The Observatory* **126** (2006), p. 82-115.
- [8] A. T. Young, « Sunset Science. IV. Low-Altitude Refraction », *Astron. J.* **127** (2004), n° 6, p. 3622-3637.
- [9] L. Dettwiller, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 13-62.
- [10] L. Dettwiller, « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 63-102.
- [11] W. H. Lehn, S. van der Werf, « Atmospheric refraction : a history », *Appl. Opt.* **44** (2005), n° 27, p. 5624-5636.
- [12] G. J. Toomer, *Ptolemy's Almagest*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998.

- [13] P. Brunet, A. Mieli, *Histoire des Sciences dans l'Antiquité*, Payot, Paris, 1935.
- [14] J. Lalande, *Astronomie*, Johnson Reprint Corporation, New York, 1966.
- [15] K. P. Moesgaard, « Refraction in TYCHO Brahe's Small Universe », in *Mapping the Sky : Past Heritage and Future Directions* (S. Debarbat, éd.), vol. 133, Kluwer Academic Pub., 1988, p. 87-93.
- [16] C. Bruhns, *Die Astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwicklung*, Voigt and Günther, Leipzig, 1861.
- [17] J. D. Cassini, « Des réfractions astronomiques », *Mémoire de l'Académie Royale des Sciences* (1714), p. 33-54.
- [18] A. Bemporad, « Sulla Teoria della Refrazione Astronomica », *Memorie della Società Degli Spettroscopisti Italiani* **34** (1905), p. 191-212.
- [19] W. M. Smart, *Textbook on Spherical Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge, Londres, New York, 1977.
- [20] E. Halley, « Some Remarks on the Allowances to be Made in Astronomical Observations for the Refraction of the Air. By Dr. Edm. Halley, R. S. S. Astronomer Royal. With an Accurate Table of Refractions », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series I* **31** (1720), p. 169-172.
- [21] W. H. Lehn, « Isaac Newton and the astronomical refraction », *Appl. Opt.* **47** (2008), n° 34, p. H95-H105.
- [22] M. Nauenberg, « Newton's theory of the atmospheric refraction of light », *Am. J. Phys.* **85** (2017), n° 12, p. 921-925.
- [23] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, New York, 1975.
- [24] P. S. de Laplace, N. Bowditch, *Celestial mechanics*, Chelsea Publishing Company, 1966.
- [25] J. Berthier, P. Descamps, F. Mignard, *Introduction aux éphémérides et phénomènes astronomiques*, EDP Sciences, 2021.
- [26] J. B. J. Delambre, *Histoire de l'astronomie au XVIII<sup>e</sup> siècle*, Bachelier (Succ. Veuve Courcier), Paris, 1827.
- [27] J. F. Herschel, *Outlines of Astronomy*, Longman and Taylor, Londres, 1849.
- [28] L. H. Auer, E. M. Standish, « Astronomical Refraction : Computational Method for All Zenith Angles », *Astron. J.* **119** (2000), n° 5, p. 2472-2474.
- [29] C. Y. Hohenkerk, A. T. Sinclair, « The Computation of Angular Atmospheric Refraction at Large Zenith Angles », *NAO technical note* **63** (1985), p. 1-12.
- [30] J.-B. Biot, « Sur les réfractions astronomiques », in *Additions à la Connaissance des Temps* 1939, vol. 1839, 1836, p. 3-114.
- [31] L. Dettwiller, « Le théorème de Biot et le changement de variable de Biot–Auer–Standish : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 483-501.
- [32] B. Garfinkel, « Astronomical refraction in a polytropic atmosphere », *Astron. J.* **72** (1967), p. 235-254.
- [33] F. Mignard, « Images du Soleil et de la Lune, depuis le sol ou la Station spatiale internationale », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 391-414.
- [34] P. E. Ciddor, « Refractive index of air : new equations for the visible and near infrared », *Appl. Opt.* (1996), n° 35, p. 1566-1573.
- [35] B. E. Schaefer, W. Liller, « Refraction near the Horizon », *Publ. Astron. Soc. Pac.* **102** (1990), p. 796.