



ACADÉMIE  
DES SCIENCES  
INSTITUT DE FRANCE

# *Comptes Rendus*

---

## *Physique*

Isabelle Bouchoule et Jérôme Dubail

**Une approche hydrodynamique pour décrire les gaz de bosons unidimensionnels**

Volume 27 (2026), p. 253-273

En ligne depuis le 21 mai 2026

<https://doi.org/10.5802/crphys.282>



Cet article est publié sous la licence

CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION 4.0 INTERNATIONAL.

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



*Les Comptes Rendus. Physique* sont membres du  
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte  
[www.centre-mersenne.org](http://www.centre-mersenne.org) — e-ISSN : 1878-1535



Article de synthèse

# Une approche hydrodynamique pour décrire les gaz de bosons unidimensionnels

Isabelle Bouchoule<sup>Ⓢ,a</sup> et Jérôme Dubail<sup>Ⓢ,b</sup>

<sup>a</sup> 2 avenue Augustin Fresnel, 91127 Palaiseau Cedex, France

<sup>b</sup> Centre Européen de Sciences Quantiques, ISIS (UMR 7006), Université de Strasbourg et CNRS, France

Courriels : [isabelle.bouchoule@institutoptique.fr](mailto:isabelle.bouchoule@institutoptique.fr), [j.dubail@unistra.fr](mailto:j.dubail@unistra.fr)

**Résumé.** Cet article de revue présente les résultats récents concernant la description des gaz de bosons unidimensionnels avec interactions de contact répulsives par une approche hydrodynamique généralisée. Les résultats obtenus par les auteurs sont plus particulièrement mis en avant.

**Mots-clés.** Gaz quantiques, systèmes unidimensionnels, physique statistique, théorie des systèmes à  $N$  corps, hydrodynamique.

**Financement.** Projet ANR-20-CE30-0017-01 (QuaDy), projet ANR-22-CE30-0004-01 (UNIOPEN).

**Note.** Isabelle Bouchoule et Jérôme Dubail sont les lauréats 2023 du prix Alexandre Joannidès/Fondation Joannidès de l'Académie des sciences.

*Manuscrit reçu le 10 novembre 2025, révisé le 2 mai 2026, accepté le 5 mai 2026, en ligne depuis le 21 mai 2026.*

Quand un très grand nombre de particules interagissent les unes avec les autres, elles donnent souvent lieu à un comportement fluide émergent à grande échelle. Par exemple, nous sommes habitués à l'idée que  $N \sim 10^{23}$  molécules d'eau se comportent comme un liquide ou comme un gaz selon les conditions de température et de pression. Cette idée de comportement émergent est fondamentale et s'applique à de très nombreux systèmes physiques, de l'infiniment petit à l'infiniment grand, du plasma de quarks-gluons en physique des particules aux amas de galaxies en astrophysique, en passant par les gaz et les liquides de la vie quotidienne ou par des systèmes de matière condensée plus exotiques tels que les superfluides.

Dans cet article, nous nous intéressons au comportement fluide émergent dans un certain type de gaz quantique qui peut être réalisé avec des atomes froids, et nous passons en revue quelques résultats sur la dynamique de ces gaz obtenus récemment.

Le système qui nous intéresse consiste, au niveau microscopique, en quelques centaines ou milliers d'atomes bosoniques sans spin ni autre degré de liberté interne, confinés dans un potentiel très fortement anisotrope de sorte qu'ils ne peuvent se déplacer que le long d'un axe unidimensionnel. Les interactions entre les atomes sont de portée suffisamment courte, de sorte que l'on peut les modéliser par un terme de contact. Le hamiltonien quantique d'un tel gaz s'écrit, en seconde quantification,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \int dx \psi^\dagger(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \frac{g}{2} \int dx \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x) \psi(x) \psi(x). \quad (1)$$

Ici  $m$  est la masse des bosons,  $g$  la constante de couplage,  $\hbar$  la constante de Planck, et  $\psi^\dagger(x)$  et  $\psi(x)$  sont l'opérateur de création et d'annihilation d'un atome à la position  $x$ . Ces opérateurs satisfont les relations de commutation canoniques  $[\psi(x), \psi^\dagger(y)] = \delta(x - y)$ .

Le modèle défini par le hamiltonien (1) est un modèle de gaz quantique très célèbre, dont l'étude a démarré avec les travaux de Lieb et Liniger dans les années 1960 [1,2], suivis par les travaux de Yang et Yang [3], Gaudin [4] et de nombreux autres auteurs en physique théorique et physique mathématique [5]. Longtemps considéré comme un modèle purement théorique aux propriétés très particulières — en particulier la propriété que ce modèle est intégrable, comme nous allons le voir — le gaz de Lieb–Liniger a changé de statut dans les années 2000 avec les progrès du piégeage optique ou magnétique d'atomes froids, qui ont permis de réaliser ce modèle expérimentalement [6-10]. Actuellement, le hamiltonien de Lieb–Liniger, ainsi que certaines de ses variantes pour des atomes avec spin ou des atomes fermioniques, est utilisé quotidiennement par les physiciens et physiciennes dans le domaine des atomes froids pour décrire de nombreuses expériences.

Pour simplifier, dans cet article nous nous restreignons au cas d'interactions répulsives entre les atomes,

$$g > 0, \quad (2)$$

mais nous soulignons que le cas des interactions attractives ( $g < 0$ ) est également intéressant et très riche [9,11-14], avec des avancées expérimentales récentes excitantes [15,16] en lien direct avec notre sujet.

## 1. Distribution de rapidité locale

### 1.1. Distribution de rapidité pour des systèmes homogènes

Le gaz de Lieb–Liniger défini par le hamiltonien (1) fait partie de la classe des modèles unidimensionnels intégrables [4,5], ce qui implique des propriétés remarquables des états stationnaires mais aussi de la dynamique hors équilibre, comme l'ont montré les nombreuses études de ces deux dernières décennies [17,18]. Une notion clef pour décrire ces systèmes est la notion de distribution de rapidités que nous introduisons ci-dessous en utilisant des concepts qui permettent de faire un lien direct avec des quantités expérimentales.

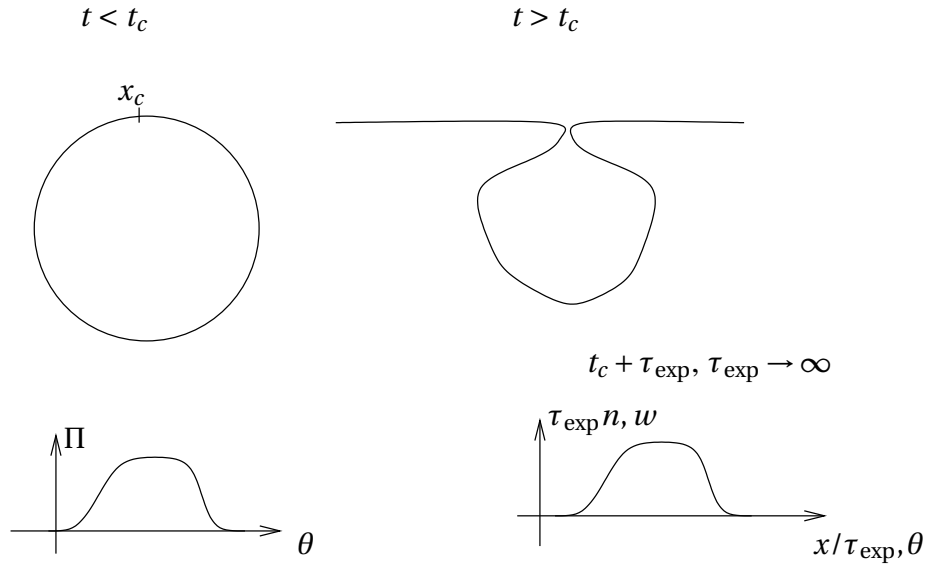
**Distribution de rapidité.** Supposons que les atomes qui constituent le gaz évoluent en présence de conditions aux bords périodiques, le long d'un cercle de circonférence  $L$ . À un instant  $t_c$ , on imagine ouvrir le cercle au point  $x_c$  et connecter chaque extrémité à une ligne semi-infinie, voir figure 1. De cette façon le gaz va s'étaler jusqu'à l'infini. Au cours de cet étalement, la distribution d'impulsion des atomes  $w(\theta)$  évolue sous l'effet de leurs interactions. Néanmoins, après un grand temps d'expansion  $\tau_{\text{exp}}$ , les atomes sont suffisamment éloignés les uns des autres, et les interactions deviennent négligeables. La distribution d'impulsion converge alors vers une distribution asymptotique  $\Pi(t_c, \theta)$  :

$$w(t_c, \tau_{\text{exp}}, \theta) \xrightarrow{\tau_{\text{exp}} \rightarrow \infty} \Pi(t_c, \theta). \quad (3)$$

A priori, cette fonction dépend de la position  $x_c$  de la coupure mais on suppose ici que le système est suffisamment grand pour que cet effet de bord soit négligeable. La distribution asymptotique  $\Pi(t_c, \theta)$  est alors appelée la *distribution de rapidité*.

Remarquons également que, puisque la distribution de densité et la distribution de vitesse sont identiques en champ lointain, la distribution de densité des particules  $n(x)$  devient elle-même identique à la distribution de rapidité après un grand temps d'expansion. Plus précisément,

$$n(\tau_{\text{exp}}, x) \xrightarrow{\tau_{\text{exp}} \rightarrow \infty} \Pi(t_c, x/\tau_{\text{exp}})/\tau_{\text{exp}}. \quad (4)$$



**FIGURE 1** – Expansion unidimensionnelle du gaz de Lieb–Liniger. Le système est confiné sur un cercle de taille  $L$ . Sa distribution de rapidité  $\Pi(\theta)$  est une constante du mouvement. À l’instant  $t_c$ , on coupe le cercle et on le connecte à deux lignes semi-infinies : le nuage est maintenant libre d’explorer la ligne infinie. Le profil de densité ( $n(x)$ ) et le profil de vitesse ( $w(\theta)$ ), après un temps d’expansion suffisamment grand, deviennent égaux à la distribution de rapidité. Ces profils ne dépendent donc pas du temps  $t_c$  auquel est effectuée la coupure, même si une dynamique complexe peut avoir lieu pour le gaz confiné sur le cercle.

**Distribution de rapidité et constantes du mouvement.** L’intégrabilité du modèle de Lieb–Liniger se manifeste par la propriété remarquable que la distribution de rapidité  $\Pi(t_c, \theta)$  ne dépend pas du temps de coupure  $t_c$ , même si une dynamique complexe a lieu dans le gaz confiné sur le cercle avant la coupure. On introduit donc

$$\Pi(\theta) = \Pi(t_c, \theta) \tag{5}$$

qui est une constante du mouvement du système pour toute valeur de  $\theta$ . Les autres constantes du mouvement peuvent être exprimées en fonction de  $\Pi(\theta)$ . Ainsi, le nombre de particules dans le gaz est

$$N = \int \Pi(\theta) d\theta, \tag{6}$$

l’impulsion totale du gaz est

$$P = \int m\theta \Pi(\theta) d\theta, \tag{7}$$

et l’énergie totale est

$$E = \int \frac{m\theta^2}{2} \Pi(\theta) d\theta. \tag{8}$$

Puisque la distribution  $\Pi(\theta)$  est conservée, ces quantités sont évidemment conservées, de même que tous les moments de  $\Pi(\theta)$  d’ordre plus élevé. L’invariance de la distribution de rapidité est propre à l’intégrabilité du modèle de Lieb–Liniger. En effet, pour un système ergodique, par exemple en présence d’interactions entre particules de portée finie, l’hypothèse de thermalisation par états propres (*Eigenstate Thermalisation Hypothesis* en anglais, ou ETH) implique que  $\Pi(t_c, \theta)$  converge à temps long vers la distribution attendue pour un ensemble thermique : si la distribution initiale  $\Pi(0, \theta)$  est non thermique, alors  $\Pi(t_c, \theta)$  va évoluer au cours du temps.

**Distribution de rapidité et états propres.** L'invariance de la distribution de rapidité pour le modèle de Lieb–Liniger peut être établie en analysant les états propres du modèle et leurs propriétés. Nous donnons ci-dessous les grandes lignes de cette dérivation. Un des aspects remarquables du hamiltonien de Lieb–Liniger (1) est que l'on connaît la forme exacte de ses états propres, appelée *Ansatz de Bethe* [19] ou *fonction d'onde de Bethe* [4]. Un état propre avec  $N$  particules est paramétré par  $N$  nombres  $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N$  homogènes à une vitesse. Anticipant le résultat dérivé ci-dessous, nous appelons ces vitesses  $\theta_1, \dots, \theta_N$  les *rapidités*. L'impulsion et l'énergie de cet état propre sont respectivement  $\sum_i m\theta_i$  et  $\sum_i m\theta_i^2/2$ , et sa fonction d'onde à  $N$  corps peut s'écrire sous la forme [4]

$$\psi_{\{\theta_j\}}(x_1, \dots, x_N) = \mathcal{N} \sum_P a_{P, \{\theta_j\}} e^{i \sum_i x_i \theta_{P(i)}}, \quad (9)$$

où la somme est effectuée sur les permutations  $P$  de  $N$  indices. Ici  $\mathcal{N}$  est un facteur de normalisation et les coefficients  $a_{P, \theta_i}$  sont des coefficients de norme 1. Pour alléger les notations, dans la suite de cette section nous posons  $\hbar = m = 1$ .

Pour rendre compte de la dynamique d'expansion qui a lieu aux temps  $t > t_c$ , il convient de développer l'état du système sur les états de Bethe à  $N$  particules sur la ligne infinie [20]. Ce développement s'écrit

$$\psi(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N! (2\pi)^N}} \int_{\mathcal{V}} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_N f(\theta_1, \dots, \theta_N) \sum_P a_{P, \{\theta_j\}} e^{\sum_i x_i \theta_{P(i)}} \quad (10)$$

où l'intégrale sur les rapidités est réalisée sur l'hyper-volume  $\mathcal{V}$  qui est le secteur  $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N$  et le coefficient de normalisation sera justifié a posteriori.  $|f|^2$  est la densité de probabilité dans l'espace, de dimension  $N$ , des rapidités. La distribution de rapidités est

$$\Pi(\theta) = \sum_{i=1}^N \int d\theta_1 \dots d\theta_{i-1} d\theta_{i+1} \dots d\theta_N |f(\theta_1, \dots, \theta_i, \theta_{i+1}, \dots, \theta_N)|^2. \quad (11)$$

Un point crucial pour notre démonstration, que nous admettons ici, est que la distribution de rapidité  $\Pi(\theta)$ , pourvue qu'elle soit lissée avec une résolution beaucoup plus grossière que  $\hbar/(mL)$ , est la même que l'on utilise pour représenter les états de Bethe périodiques sur le cercle ou bien l'expansion ci-dessus qui utilise les états de Bethe sur la ligne infinie. La dynamique de cet état est induite par les phases accumulées par les différents état de Bethe : à un temps  $t_c + \tau$ ,

$$\psi(x_1, \dots, x_N, \tau) = \int_{\mathcal{V}} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_N f(\theta_1, \dots, \theta_N) \frac{1}{\sqrt{N! (2\pi)^N}} \sum_P a_{P, \{\theta_j\}} e^{\sum_i (x_i \theta_{P(i)} - \tau m \theta_i^2 / (2\hbar))}. \quad (12)$$

Pour des temps d'expansion  $\tau$  très longs, l'intégrale peut être évaluée en utilisant la méthode de la phase stationnaire. On trouve alors que, pour  $x_1 < \dots < x_N$ ,

$$|\psi(x_1, \dots, x_N; \tau)|^2 = \frac{1}{\tau^N N!} |f(\theta_1 = x_1/\tau, \dots, \theta_N = x_N/\tau)|^2. \quad (13)$$

Le facteur  $N!$  provient du fait que  $\psi$  est normalisé à 1 sur l'ensemble de l'espace vectoriel de dimension  $N$  alors que  $f$  est normalisée à 1 uniquement sur le volume  $\mathcal{V}$ . Ainsi la distribution de position des atomes à temps long n'est rien d'autre que la distribution des rapidités. On a donc montré que la distribution de rapidité, définie comme dans les paragraphes précédents par la distribution asymptotique, n'est rien d'autre que la distribution des rapidités qui interviennent dans la fonction d'onde de Bethe. Cette identification implique que la distribution de rapidité est une constante du mouvement puisque les états de Bethe sont les états propres du système.

**Localité de la distribution de rapidités.** Un opérateur  $Q$  est dit local s'il peut s'écrire  $Q = \int dx q(x)$  où  $q(x)$  s'obtient à partir de  $q(0)$  par l'opérateur translation et où le support de  $q(x)$  est concentré au point  $x$  : en terme d'opérateur champ,  $q(x)$  s'écrit uniquement à partir de  $\psi(x)$ ,  $\psi^+(x)$  et ses dérivées au point  $x$ . Pour des grands systèmes, cette notion peut être étendue à des opérateurs  $q(x)$  ayant un support de taille finie.

Une propriété fondamentale de  $\Pi(\theta)$  est sa localité, pourvu que  $\Pi$  soit suffisamment lissée. Plus précisément, considérons une fonction de convolution  $\delta_\sigma$  ayant une largeur en  $\theta$  égale à  $\sigma$  et introduisons l'opérateur  $\Pi_\sigma(\theta)$  comme l'opérateur diagonal dans la base des états de Bethe et dont l'action sur un état de Bethe est  $\Pi_\sigma(\theta)|\{\theta_i\}\rangle = \sum_i \delta_\sigma(\theta_i - \theta)|\{\theta_i\}\rangle$ . La localité de  $\Pi$  se traduit par le fait que l'opérateur  $\Pi_\sigma(\theta)$  s'écrit

$$\Pi_\sigma(\theta) = \int dx q_{\sigma,\theta}(x) \quad (14)$$

où  $q_{\sigma,\theta}$  a un support fini, de largeur environ égale à  $\hbar/(m\sigma)$ . Cette propriété est non triviale et une preuve mathématique n'existe, à notre connaissance que dans la limite où la constante de couplage  $g$  est infinie [21].

**Rôle de la distribution de rapidité pour décrire les états stationnaires.** Les états initiaux préparés dans des expériences sont des superpositions de très nombreux états propres, leur nombre étant exponentiellement grand avec la taille  $L$  du système. À temps long, et tant que l'on considère des observables locales, le système relaxe vers un état stationnaire invariant par translation : les valeurs moyennes d'observables qui agissent sur un sous-système de taille  $\ell \ll L$  convergent à temps long vers une valeur asymptotique. Cette notion de relaxation est fondamentale dans toute théorie hydrodynamique.

À partir de l'équation (14), en utilisant l'invariance par translation après relaxation et le fait que  $\Pi(\theta)$  est une quantité conservée, on trouve que l'état après relaxation vérifie  $\langle q_{\sigma,\theta}(x) \rangle_{\text{relax}} = \langle \Pi_\sigma(\theta) \rangle / L$ . Les propriétés de l'état relaxé dépendent donc de la distribution de rapidité par unité de longueur

$$\rho(\theta) = \langle \Pi(\theta) \rangle / L, \quad (15)$$

et c'est cette fonction intensive qui va jouer un rôle clef dans la description hydrodynamique du gaz de bosons unidimensionnel. Dans la suite, on omettra de préciser « par unité de longueur ». En fait, la fonction  $\rho(\theta)$  est non seulement nécessaire mais aussi suffisante pour caractériser les propriétés locales de l'état après relaxation. En termes mathématiques, cela se traduit pas le fait que pour toute observable  $A$  locale, la valeur moyenne de  $A$ , pour des temps grands devant le temps de relaxation  $t_{\text{relax}}$ , est une fonctionnelle de la fonction  $\rho(\theta)$ , ce qui s'écrit

$$\langle A \rangle_{t \gg t_{\text{relax}}} \simeq \langle A \rangle_{[\rho]} \quad \text{pour } A \text{ locale.} \quad (16)$$

Dans le cas où le système est dans un état propre,  $\langle A \rangle$  ne dépend pas du temps et la propriété ci-dessus implique que, tout état propre  $|i\rangle$  dont la distribution de rapidité, une fois lissée, est  $\rho$ , vérifie

$$\langle i|A|i\rangle = \langle A \rangle_{[\rho]} \quad \text{pour } A \text{ locale.} \quad (17)$$

Ainsi tous les états propres de même distribution de rapidité, dont le nombre est exponentiellement grand [3] avec la taille du système, sont identiques vis-à-vis d'observables locales. Cette propriété peut être vue comme la généralisation au cas intégrable de l'hypothèse de thermalisation par état propre et on parle d'hypothèse de thermalisation par états propres généralisée [22].

**Ensemble de Gibbs généralisé.** D'après les équations (16) et (17), pour décrire les propriétés locales d'un système après relaxation, on peut utiliser pour décrire le système global n'importe quelle matrice densité ayant la bonne distribution de rapidité. Un choix particulièrement intéressant est d'utiliser la matrice densité de l'ensemble de Gibbs généralisé (acronyme anglais GGE). Pour introduire cet ensemble, considérons les intervalles successifs  $[\theta_\alpha, \theta_\alpha + \sigma]$  indicés par l'entier  $\alpha$  et où  $\theta_\alpha = \alpha\sigma$ . L'opérateur qui compte le nombre de rapidités dans l'intervalle  $\alpha$  est noté  $\Pi_\sigma(\theta_\alpha)$ . Le GGE est paramétré par des températures généralisées, notées  $f_{\theta_\alpha}$ , dont le nombre est égal au nombre d'intervalles  $[\theta_\alpha, \theta_\alpha + \sigma]$  et il s'écrit  $\hat{\rho} = Z^{-1} \exp[\sum_\alpha f_{\theta_\alpha} \Pi_\sigma(\theta_\alpha)]$  où  $Z$  est une constante de normalisation. À la limite où  $\sigma$  devient très petit la largeur des intervalles tend vers 0, et on tend vers la limite continue : les températures généralisées deviennent donc une fonction

de  $\theta$ , notée  $f(\theta)$ . Le lien entre fonction  $f(\theta)$  et la distribution de rapidités  $\rho(\theta)$  est discutée plus loin. La matrice densité du GGE est diagonale dans la base des états propres du système, qui sont les états de Bethe introduits précédemment, indexés par leurs rapidités  $\{\theta_i\}$ . En utilisant cette base, le GGE s'écrit

$$\hat{\rho}_{\text{GGE}} = \frac{1}{Z} \sum_{\{\theta_i\}} |\{\theta_i\}\rangle \langle \{\theta_i\}| e^{\sum_i f(\theta_i)}. \quad (18)$$

L'intérêt de l'ensemble de Gibbs généralisé est qu'il est factorisable. Plus précisément, considérons un sous-système  $\mathcal{S}$  de taille  $\ell \ll L$ , où  $\ell$  est grand devant les longueurs microscopiques comme la distance interparticules. On appelle  $\mathcal{R}$  le complémentaire de  $\mathcal{S}$ . Si on choisit  $\sigma$  tel que  $\sigma \gg \hbar/(m\ell)$ , alors  $\Pi_\sigma(\theta)$  peut s'écrire avec une bonne approximation comme la somme de la contribution du sous-système et de la contribution de  $\mathcal{R}$ . Ainsi la matrice densité  $\hat{\rho}_{\text{GGE}}$  du système total se factorise avec une très bonne précision, en le produit de deux matrices densité de GGE ayant la même fonction  $f$ , l'une pour  $\mathcal{R}$ , l'autre pour le sous-système  $\mathcal{S}$ .

Alors que, pour décrire le système dans sa globalité après relaxation, toute matrice densité induisant la bonne distribution de rapidité est valable, la matrice densité réduite décrivant un petit sous-système après relaxation est unique. En effet, d'après l'équation (16), pour une distribution de rapidité donnée, la valeur moyenne de tout opérateur sur  $\mathcal{S}$  a une valeur bien définie. Le raisonnement ci-dessus montre que cette matrice densité n'est rien d'autre que celle du GGE. Le fait que le GGE soit le bon ensemble pour décrire le sous-système a une interprétation physique très simple : pour chaque intervalle  $[\theta_\alpha, \theta_\alpha + \sigma]$ , le reste du système agit comme un réservoir de rapidités pour le sous-système.

**Distribution de rapidité du GGE.** Considérons le système global, décrit par un GGE paramétré par la fonction  $f(\theta)$ . Pour calculer des valeurs moyennes d'observables locales, on peut transformer la somme sur les états propres en une somme sur les distributions de rapidité puisque la valeur moyenne d'une observable locale ne dépend que de la distribution de rapidité. On introduit pour cela la fonctionnelle qui compte le nombre de micro-états correspondant à une distribution de rapidité donnée, que l'on écrit sous la forme

$$e^{L S_{\text{YY}}[\rho]} \quad \text{où } L S_{\text{YY}}[\rho] = \log[\text{nombre de micro-états}]. \quad (19)$$

L'entropie intensive du gaz  $S_{\text{YY}}[\rho]$  est appelée *entropie de Yang-Yang* [3]. Il est possible de montrer, en utilisant les propriétés des états de Bethe, que la fonctionnelle  $S_{\text{YY}}[\rho]$  est donnée par

$$S_{\text{YY}}[\rho] = \int [\rho_s \log \rho_s - \rho \log \rho - (\rho_s - \rho) \log(\rho_s - \rho)] d\theta, \quad (20)$$

où la fonction  $\rho_s(\theta)$ , qui est souvent appelée *densité d'états* dans le contexte de l'Ansatz de Bethe Thermodynamique [23] est reliée à la densité de rapidités par la formule suivante [1] :

$$\rho_s(\theta) = \frac{m}{2\pi\hbar} + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \Delta(\theta - \theta') \rho(\theta') d\theta', \quad (21)$$

où  $\Delta(v) = 2(g/\hbar)/((g/\hbar)^2 + v^2)$ . La fonction

$$v(\theta) = \rho(\theta)/\rho_s(\theta), \quad (22)$$

appelée *distribution des facteurs d'occupation*, dépend de manière biunivoque de la distribution de rapidité  $\rho(\theta)$ , et peut donc également être utilisée pour paramétrer les états stationnaires.

L'entropie de Yang-Yang permet de calculer la probabilité d'une configuration  $\rho(\theta)$  dans le GGE : elle est proportionnelle à  $\exp[S_{\text{YY}}[\rho] + \int d\theta f(\theta)\rho(\theta)]$ . En utilisant le fait que l'on considère

un grand système, on trouve que la distribution de rapidité qui va donner la contribution dominante à la valeur moyenne d'une observable est celle qui maximise l'argument de l'exponentielle, c'est-à-dire la distribution de rapidité qui vérifie

$$\frac{\delta S_{YY}}{\delta \rho(\theta)} + f(\theta) = 0. \quad (23)$$

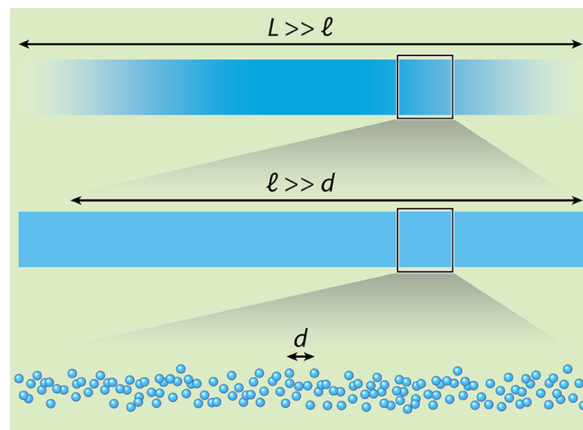
Cette équation mène à une relation fonctionnelle pour  $\rho(\theta)$  qui ne peut en général pas être résolue analytiquement (pour une exposition plus détaillée, nous référons à la section 1 de l'article de revue [10]). Cependant, elle peut être résolue numériquement de façon très efficace par itération, comme montré par Yang et Yang [3].

**Exemple (Distribution  $\rho(\theta)$  à l'équilibre thermique).** La densité de particules  $n$  et l'énergie par unité de longueur  $e$  s'écrivent  $n = \int d\theta \rho(\theta)$  et  $e = \int d\theta \rho(\theta) \theta^2 / 2$ . Il est alors clair que l'ensemble de Gibbs d'un état thermique de température  $T$  et de potentiel chimique  $\mu$  est un cas particulier de GGE pour lequel la fonction  $f$  s'écrit

$$f_{\text{therm}}(\theta) = -\theta^2 / (2k_B T) - (\mu / k_B T). \quad (24)$$

## 1.2. Système avec variations spatiales sur des grandes échelles

**Concept de distribution locale de rapidités.** Dans ce qui précède, nous avons analysé les macro-états du gaz homogène, et nous avons vu qu'ils sont caractérisés par leur distribution de rapidités  $\rho(\theta)$ . Considérons maintenant le cas d'un gaz de Bose unidimensionnel dans un potentiel de confinement longitudinal  $V(x)$ . Si ce potentiel varie suffisamment lentement par rapport à la distance entre les atomes, alors on peut travailler dans l'*approximation de densité locale* pour déterminer l'état du gaz. Cette approximation est valide s'il y a *séparation des échelles* (figure 2), c'est-à-dire que l'échelle *macroscopique* sur laquelle le potentiel varie est séparée par plusieurs ordres de grandeur de l'échelle *microscopique* à laquelle la granularité du gaz devient importante. Sous cette hypothèse, on peut imaginer découper le gaz en *cellules fluides* de taille mésoscopique. Chaque cellule est à la fois suffisamment petite pour que le potentiel  $V(x)$  puisse y être considéré comme constant, et suffisamment grande pour contenir beaucoup d'atomes. L'état du gaz dans une cellule fluide mésoscopique est alors caractérisé par sa distribution locale de rapidités  $\rho(x, \theta)$ , qui dépend de la position  $x$  à l'échelle macroscopique.

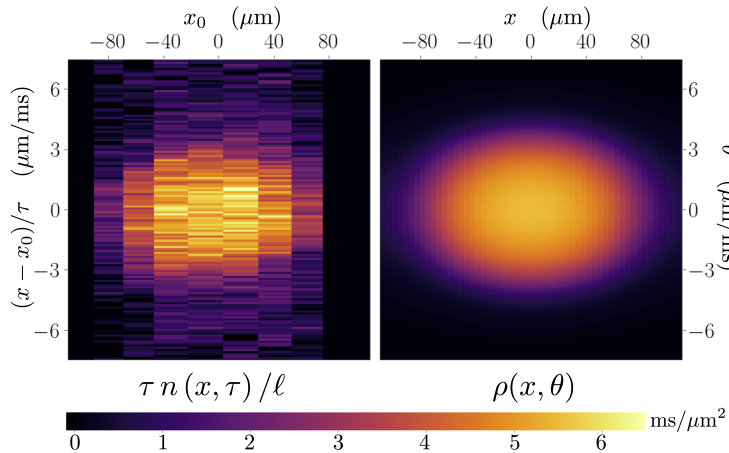


**FIGURE 2** – [Reproduite de la référence [24] avec autorisation — Crédit : APS/Carin Cain] Le gaz est décrit en faisant l'hypothèse de séparation d'échelles.

Faisons maintenant l'hypothèse que le gaz est à l'équilibre thermique dans le potentiel  $V(x)$ , à température  $T$ . Dans l'approximation de densité locale, ceci implique que chaque cellule fluide est à l'équilibre thermique à la température  $T$ , et au potentiel chimique local  $\mu(x) = \mu - V(x)$ , où  $\mu$  est le potentiel chimique global qui permet d'ajuster le nombre total d'atomes dans le système. La distribution locale de rapidités  $\rho(x, \theta)$  est alors obtenue en appliquant la méthode de Yang et Yang à chaque cellule fluide indépendamment.

**Exemple (Distribution locale de rapidité à l'équilibre thermique dans un piège harmonique).**

Sur la figure 3 (partie droite), tirée de la référence [25], nous montrons la prédiction théorique pour la distribution locale de rapidité  $\rho(x, \theta)$  obtenue de cette façon pour un gaz de bosons en interaction faible ( $\gamma \sim 0.5 \times 10^{-2}$ ). Le nuage contient quelques milliers d'atomes à une température d'une centaine de nano-Kelvins. Le rayon du nuage est de l'ordre de  $\sim 100 \mu\text{m}$ , pour une densité inverse qui est typiquement de l'ordre de  $\sim 0.1 \mu\text{m}$ , de sorte que l'hypothèse de séparation d'échelles est parfaitement justifiée. Cette distribution théorique est comparée à la distribution locale de rapidités mesurée expérimentalement (figure 3, partie gauche). Le protocole expérimental utilise le fait que la distribution de rapidité est la distribution de densité atteinte après un grand temps d'expansion longitudinale. Plus précisément, il consiste à couper un petit tronçon du nuage d'atomes, de longueur  $\ell$  centré autour de la position  $x_0$ , puis à le laisser s'étaler le long du tube unidimensionnel avant de mesurer sa densité. Les données expérimentales sont en assez bon accord avec la prédiction théorique pour  $\rho(x, \theta)$ , même si une analyse plus fine révèle de légères déviations qui pourraient être une signature d'un état stationnaire non thermique [25].



**FIGURE 3** – [Reproduite de la référence [25] avec autorisation] À gauche : mesure expérimentale de la distribution de rapidités obtenue par la méthode décrite dans la section 1.1. À droite : prédiction théorique pour  $\rho(x, \theta)$  obtenue dans l'approximation de densité locale, en faisant l'hypothèse que le gaz est à l'équilibre thermique à température  $T = 90 \text{ nK}$  et au potentiel chimique  $\mu = 49 \text{ nK}$ .

## 2. Les équations de l'hydrodynamique généralisée (GHD)

Jusqu'à présent nous avons analysé les propriétés statiques du gaz, en insistant sur l'hypothèse de séparation des échelles qui permet de penser au gaz comme à une assemblée de cellules fluides qui sont chacune dans un état stationnaire caractérisé par sa distribution de rapidités.

**Distribution locale de rapidité évoluant en temps.** Nous nous tournons maintenant vers les propriétés dynamiques du gaz, toujours en nous appuyant sur l'hypothèse de séparation d'échelles. Cette hypothèse est maintenant étendue aux variations temporelles du gaz, et non plus seulement aux variations spatiales. On fait l'hypothèse que l'évolution macroscopique du gaz est suffisamment lente par rapport aux échelles de temps microscopiques, de sorte que chaque cellule fluide a toujours le temps de relaxer vers un état stationnaire. Sous cette hypothèse de séparations d'échelles de distance et de temps, l'état global du gaz est caractérisé par la distribution locale de rapidités  $\rho(x, t, \theta)$ . On souhaite alors trouver une équation d'évolution pour  $\rho(x, t, \theta)$ .

En l'absence de potentiel longitudinal,  $V(x) = 0$ , nous avons vu dans la section 1 que la distribution de rapidités intégrée sur tout le système est conservée,  $\frac{\partial}{\partial t} \int \rho(x, t, \theta) dx = 0$ . Cette loi de conservation est équivalente à l'équation de continuité

$$\partial_t \rho(x, t, \theta) + \partial_x j(x, t, \theta) = 0 \quad (25)$$

si l'on fait l'hypothèse que le courant  $j(x, t, \theta)$  s'annule aux extrémités du système à gauche et à droite. Notons que l'équation (25) est valide pour toute rapidité  $\theta$  et correspond ainsi à une infinité de lois de conservations, ce qui reflète l'intégrabilité du gaz de Lieb–Liniger [1].

**La vitesse effective.** En l'état, l'équation (25) n'est cependant guère instructive, puisqu'on ne connaît pas le courant  $j$ . Pour de faibles gradients spatiaux, on peut effectuer un développement du courant  $j$  en le gradient de la densité  $\rho$ . À l'ordre le plus bas, que l'on appelle l'échelle d'Euler, le courant ne dépend que de  $\rho$  et pas de ses dérivées. À ce stade, le problème est donc d'évaluer ce courant qui est associé à la densité de rapidités  $\rho(\theta)$ . C'est précisément ce problème qui a été résolu dans deux articles parus simultanément en 2016, l'un par Castro-Alvaredo, Doyon et Yoshimura [26], et l'autre par Bertini, Collura, de Nardis et Fagotti [27]. Ces deux articles représentent un tour de force dans la théorie des systèmes intégrables, et ils ont un très fort impact sur la compréhension actuelle de la physique hors-équilibre des systèmes quantiques unidimensionnels [28]. Le résultat principal est que le courant associé à la densité de rapidités  $\rho(\theta)$  est de la forme

$$j(\theta) = \rho(\theta) v_{[\rho]}^{\text{eff}}(\theta) \quad (26)$$

où la *vitesse effective*  $v_{[\rho]}^{\text{eff}}(\theta)$  dépend de la distribution  $\rho(\theta)$ , et est définie comme la solution de l'équation intégrale suivante :

$$v_{[\rho]}^{\text{eff}}(\theta) = \theta - \int \Delta(\theta - \theta') (v_{\text{eff}}(\theta) - v_{\text{eff}}(\theta')) \rho(\theta') d\theta'. \quad (27a)$$

Avant d'expliquer la signification physique de cette équation intégrale, voyons d'abord ce qu'elle implique pour l'équation d'évolution de la distribution locale de rapidités. En injectant (26) dans (25) on arrive directement à une équation cinétique pour la distribution de rapidités, qui est valide en l'absence de potentiel longitudinal. On peut alors facilement incorporer l'effet de la force  $-\partial_x V$  qui est due à un potentiel  $V(x)$  non nul. En vertu de la seconde loi de Newton, celle-ci génère simplement une accélération constante  $a = -\partial_x V / m$ , c'est-à-dire que pendant un temps  $\delta t$  la force modifie la distribution de rapidités  $\rho(\theta)$  en  $\rho(\theta - a\delta t)$ . L'équation d'évolution finalement obtenue est

$$\partial_t \rho + \partial_x (v_{[\rho]}^{\text{eff}} \rho) = \frac{\partial_x V}{m} \partial_\theta \rho. \quad (27b)$$

Les deux formules (27a) et (27b) constituent un système d'équations fermé qui détermine entièrement la dynamique de la distribution locale de rapidités  $\rho(x, t, \theta)$ , pour une condition initiale  $\rho(x, 0, \theta)$  donnée. C'est ce système de deux équations que l'on appelle l'*hydrodynamique généralisée*, abrégé en GHD pour *Generalized Hydrodynamics* en anglais.

**Argument collisionnel pour la vitesse effective.** L'équation intégrale (27a) peut être interprétée physiquement à l'aide de l'argument semi-classique suivant.

Dans un premier temps, imaginons deux atomes identiques de masse  $m$  se déplaçant en une dimension. On peut imaginer que ces deux atomes sont préparés dans deux paquets d'onde bien séparés, à des positions  $x_1 < x_2$  et avec des impulsions  $m\theta_1 > m\theta_2$ . Avant qu'ils n'entrent en collision, les deux paquets d'onde au temps  $t$  sont simplement centrés en

$$(\text{avant collision}) \quad \begin{cases} x_1(t) = x_1 + \theta_1 t, \\ x_2(t) = x_2 + \theta_2 t, \end{cases}$$

où  $\theta_{1,2}$  est la vitesse de groupe d'un atome. Après la collision, que l'on suppose élastique, la conservation de l'énergie et de l'impulsion totales implique que les deux atomes repartent avec les mêmes vitesses de groupe. Néanmoins, durant le processus de collision, ils peuvent avoir été soit ralentis soit accélérés, de sorte que les positions des deux paquets d'onde après la collision sont

$$(\text{après collision}) \quad \begin{cases} x_1(t) = x_1 + \theta_1 t - \Delta(\theta_1 - \theta_2), \\ x_2(t) = x_2 + \theta_2 t + \Delta(\theta_1 - \theta_2). \end{cases}$$

La longueur  $\Delta(p_1 - p_2)$ , que l'on pourrait appeler *décalage collisionnel* (*scattering shift* en anglais), est positive si l'interaction entre les atomes est répulsive (de sorte que les atomes ralentissent en s'approchant) et négative si l'interaction est attractive (les atomes accélèrent en s'approchant). Pour des bosons en interaction delta, on peut montrer que le décalage collisionnel est une lorentzienne,

$$\Delta(\theta_1 - \theta_2) = \frac{2g/\hbar}{(g/\hbar)^2 + (\theta_1 - \theta_2)^2}, \quad (28)$$

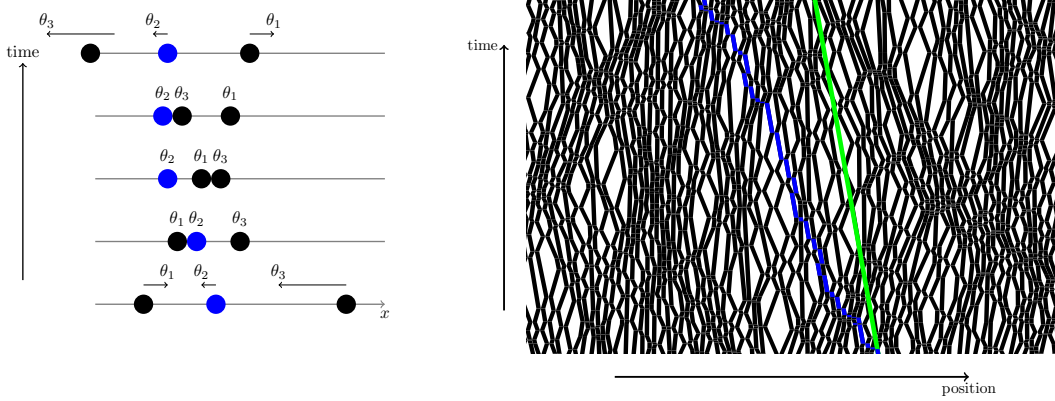
voir par exemple la référence [10]. Notons que le décalage collisionnel est directement relié au *décalage de Wigner* (*Wigner time delay* en anglais). Le délai de Wigner est défini comme le retard ou l'avance d'une particule incidente après son interaction avec un potentiel de diffusion, par rapport à sa trajectoire attendue en l'absence de potentiel; il s'agit d'un concept central dans la théorie de la diffusion [29].

Dans un second temps, imaginons un atome arrivant de la gauche ( $x < 0$ ) avec une impulsion  $m\theta$ , qui se propage le long du système unidimensionnel vers la droite sans rencontrer aucun autre atome jusqu'à entrer dans l'intervalle  $[0, L]$ . Imaginons que, dans cet intervalle, il croise  $N$  autres atomes qui ont tous la même rapidité  $\theta'$  (avec  $\theta' < \theta$ ), puis qu'il ressorte de l'intervalle sur la droite, et qu'il ne croise dès lors plus aucun autre atome. Le temps mis par l'atome pour parcourir l'intervalle  $[0, L]$  est donné par  $[L + N\Delta(\theta - \theta')]/\theta$ , ce qui implique que sa vitesse «  $v^{\text{eff}}$  » dans l'intervalle est en moyenne  $v^{\text{eff}} = \theta/[1 + \frac{N}{L}\Delta(\theta - \theta')]$ .

Maintenant, imaginons un atome avec rapidité  $\theta$  dans une boîte périodique de taille  $L$  occupée par une densité  $\bar{n}_{\theta'}$  d'autres atomes qui ont tous la même rapidité  $\theta'$ . L'atome de rapidité  $\theta$  se propage en moyenne à la vitesse  $v^{\text{eff}}$ , il lui faut donc un temps  $\Delta t = L/v^{\text{eff}}$  pour parcourir la boîte périodique. Pendant ce temps  $\Delta t$ , le nombre de collisions est en moyenne égal à  $N = \bar{n}_{\theta'}(v^{\text{eff}} - \theta')\Delta t = L\bar{n}_{\theta'}(1 - \theta'/v^{\text{eff}})$ . En combinant ce nombre de collisions avec la relation précédemment obtenue pour  $v^{\text{eff}}$ , on voit donc que la vitesse effective obéit à la relation

$$v^{\text{eff}} = \theta - \bar{n}_{\theta'}(v^{\text{eff}} - \theta')\Delta(\theta - \theta'). \quad (29)$$

Nous sommes arrivés à cette relation en faisant l'hypothèse que tous les atomes de la boîte ont la même rapidité  $\theta'$  (sauf un, le « traceur » dont on calcule la vitesse effective). Ce cas correspond au cas où la distribution de rapidités dans la boîte est un delta de Dirac,  $\rho(\lambda) = \theta'\delta(\lambda - \theta')$ , et on voit que dans ce cas notre relation coïncide bien avec (27a). Dans le cas général d'un gaz d'atomes avec une distribution de rapidités arbitraire  $\rho(\theta)$ , on peut reproduire l'exercice en remplaçant



**FIGURE 4** – Vitesse effective dans le gaz classique de sphères dures en une dimension. Figure de gauche : on suit le « traceur » coloré en rouge, qui à tout instant est défini comme la sphère qui se meut à la vitesse  $v_2$ . En entrant en collision avec les autres sphères de même masse, les vitesses des sphères sont échangées, mais il y en a toujours une qui a la vitesse  $v_2$ . Figure de droite : trajectoires des sphères dures dans un diagramme d'espace-temps. On voit que la trajectoire du « traceur » (en rouge) correspond en moyenne à une droite, à des petites fluctuations près. Mais la pente  $1/v^{\text{eff}}$  de cette droite est différente de la pente  $1/v_2$  qui serait observée en l'absence d'autres sphères.

$\bar{n}_{\theta'}$  par  $\rho(\theta') d\theta'$  dans le membre de droite de (29), ainsi que  $v^{\text{eff}} - \theta'$  par  $v_{|\rho|}^{\text{eff}}(\theta) - v_{|\rho|}^{\text{eff}}(\theta')$  dans le comptage des collisions, ce qui aboutit à l'équation intégrale (27a).

Pour conclure cette très brève introduction à la théorie de l'hydrodynamique généralisée, notons que, si les équations (27a)–(27b) ne sont apparues qu'en 2016 dans le contexte des gaz quantiques unidimensionnels, elles étaient connues en physique statistique classique depuis les années 1960. En effet, les mêmes équations décrivent la dynamique à grande échelle du gaz de sphères dures en une dimension [30-32]. Dans le modèle de sphères dures en une dimension, le décalage collisionnel  $\Delta(\theta - \theta')$  est une constante égale à moins le diamètre des sphères (voir figure 4). Pour des introductions plus détaillées à la théorie de l'hydrodynamique généralisée et des articles de revue plus complets, nous recommandons les références [10,23].

### 2.1. Cas limite : cœurs durs

À la constante de couplage  $g$  du gaz de Lieb–Liniger est associée l'échelle de longueur  $\hbar^2/(mg)$  et, pour un gaz de densité  $n$ , on peut définir le paramètre sans dimension  $\gamma = mg/(\hbar^2 n)$ . Dans le régime de forte répulsion  $\gamma \gg 1$ , l'énergie des configurations où deux atomes sont à la même position diverge. En conséquence, la fonction d'onde des  $N$  bosons, qui est une fonction symétrique de leurs positions  $x_1, \dots, x_n$ , s'annule au même point :

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \quad \text{si } x_i = x_j \quad (30)$$

pour une paire d'indices différents  $i, j$ . Les bosons obéissent en quelque sorte à un principe de Pauli. Ceci suggère de représenter le système en termes d'une fonction d'onde fermionique, c'est-à-dire une fonction d'onde antisymétrique. Une telle fonction antisymétrique peut facilement être définie de la façon suivante,

$$\psi_F(x_1, x_2, \dots, x_N) = \left[ \prod_{i < j} \text{signe}(x_j - x_i) \right] \psi(x_1, x_2, \dots, x_N). \quad (31)$$

On peut alors montrer que l'équation de Schrödinger satisfaite par  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$  devient, quand elle est réécrite en fonction de  $\psi_F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , l'équation d'évolution de  $N$  particules libres dans la limite  $g \rightarrow +\infty$ ,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_F = \sum_{j=1}^N \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_{x_j}^2 + V(x_j) \right) \psi_F. \quad (32)$$

Cette observation fondamentale est à la base de très nombreux résultats exacts sur les gaz quantiques dans le régime de forte répulsion, voir par exemple l'article de revue [33].

Puisque la dynamique des atomes dans ce régime est identique à celle d'un gaz de fermions libres, il est clair que si on effectue un temps de vol en une dimension, alors aux temps longs on observera la distribution d'impulsion de ces fermions. Ce phénomène est parfois appelé *fermionisation dynamique* [34,35]. Puisque, en laissant s'étaler le nuage en une dimension, on obtient des atomes dont les impulsions asymptotiques sont les impulsions des fermions sous-jacents, on voit que les rapidités ne sont rien d'autre que les impulsions de ces fermions. En outre, puisque ces fermions n'interagissent pas, leur vitesse effective est indépendante de la distribution de rapidités et est simplement égale à la vitesse de groupe,

$$v_{|\rho|}^{\text{eff}}(\theta) = \theta. \quad (33)$$

Les équations de l'hydrodynamique généralisée dans ce cas se réduisent à l'équation (27b) avec cette vitesse de groupe. Il s'agit donc simplement de l'équation cinétique pour les fermions.

Il est possible d'arriver à cette conclusion directement à partir de l'équation de Schrödinger (32). En effet, dans ce régime on peut identifier la distribution locale des rapidités avec la fonction de Wigner des fermions,

$$\rho(x, \theta) = \int \left( \prod_{j=2}^N dx_j \right) dy e^{i\frac{m}{\hbar}\theta y} \psi_F^* \left( x + \frac{y}{2}, x_2, \dots, x_N \right) \psi_F \left( x - \frac{y}{2}, x_2, \dots, x_N \right). \quad (34)$$

En dérivant par rapport au temps, et en utilisant l'équation d'évolution (32) pour  $\psi_F$  et  $\psi_F^*$ , on obtient exactement (dans le cas où le potentiel longitudinal  $V(x) = 0$ )

$$\partial_t \rho = -\theta \partial_x \rho$$

qui est bien l'équation d'évolution attendue. On voit donc que, dans le régime de bosons avec cœur dur, en identifiant  $\rho(x, \theta)$  avec la fonction de Wigner des fermions sous-jacents, cette équation est valide pour n'importe quel nombre d'atomes, sans avoir besoin d'invoquer l'hypothèse de séparation d'échelles ou la relaxation locale.

## 2.2. Cas limite : entropie nulle et interactions faibles

À température nulle, l'entropie du gaz s'annule. La distribution locale de rapidités est alors contrainte par le fait que l'entropie de Yang–Yang (20) doit s'annuler, et on voit que cela implique que le rapport  $\rho(\theta)/\rho_s(\theta)$  est égal soit à 0 soit à 1 pour tout  $\theta$ . Chaque macro-état d'entropie nulle peut donc être paramétré par ses *points de Fermi*,  $\{\theta_j\}_{1 \leq j \leq 2q}$ , qui sont définis comme les bornes des intervalles à l'intérieur desquels le rapport vaut 1 :

$$\frac{\rho(\theta)}{\rho_s(\theta)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in \bigcup_{j=1}^q [\theta_{2j-1}, \theta_{2j}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (35)$$

L'état fondamental du gaz correspond à une mer de Fermi unique ( $q = 1$ ) [1], alors que les états avec plus d'une mer de Fermi ( $q > 1$ ) correspondent à des états très excités, mais néanmoins d'entropie nulle [36,37].

Les équations de l'hydrodynamique généralisée (27a)–(27b) préservent l'entropie totale du gaz,  $S = \int S_{\text{YY}}(\rho(x, \theta)) dx d\theta$  [38,39]. Ainsi, si le nuage d'atomes est initialement dans un état

d'entropie nulle, par exemple dans l'état fondamental dans un potentiel  $V(x)$ , alors il reste d'entropie nulle à tous temps. On peut alors décrire son évolution uniquement en termes du « contour » de la région de l'espace des phases  $(x, \theta)$  où le rapport  $\rho(x, \theta)/\rho_s(x, \theta)$  vaut 1, qui est paramétré par les points de Fermi  $\theta_j(x, t)$ . On peut alors montrer [40] que l'équation (27b) est équivalente à l'équation d'évolution pour les points de Fermi,

$$\partial_t \theta_j(x, t) + v_j \partial_x \theta_j(x, t) = 0 \quad (36)$$

où  $v_j = v_{[\rho]}^{\text{eff}}(\theta_j)$ . Ici et dans le reste de cette section, nous supposons que  $V(x) = 0$  afin d'alléger les formules. Le mouvement des différents points de Fermi est couplé, parce que la vitesse effective dépend des différents  $\theta_i$  à la même position  $x$  via la distribution locale de rapidités.

Cette description du gaz à entropie nulle est valide pour toute valeur de l'interaction répulsive  $g > 0$ . Il est cependant instructif de considérer le cas particulier du régime d'interaction faible,  $\gamma = mg/(\hbar^2 n) \ll 1$ . Dans ce régime, appelé *régime de quasi-condensat*, il est bien établi que la dynamique du gaz à température nulle est décrite par l'équation de Gross–Pitaevskii,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \varphi + g|\varphi|^2 \varphi, \quad (37)$$

où  $\varphi(x, t)$  est la fonction d'onde du quasi-condensat unidimensionnel. Il est donc naturel de se demander quelle est la relation entre l'hydrodynamique généralisée à entropie nulle (36) et l'équation de Gross–Pitaevskii (37).

Cette question est subtile sur le plan mathématique, et nous nous contentons ici d'esquisser la réponse de façon superficielle. Pour une analyse plus complète, nous référons le lecteur à l'analyse détaillée de Bettelheim [41], qui fait le lien entre l'hydrodynamique généralisée dans la limite  $g \rightarrow 0$  et la théorie de la modulation de Whitham, ainsi qu'aux références [42-44] pour des introductions à cette théorie de la modulation.

Pour commencer, on peut reformuler l'équation de Gross–Pitaevskii comme une équation hydrodynamique grâce à la *transformation de Madelung*  $\varphi(x, t) = \sqrt{n_{\text{GP}}(x, t)} e^{i\theta(x, t)}$ ,  $u(x, t) = \partial_x \theta(x, t)$ , qui mène au système

$$\begin{cases} \partial_t n_{\text{GP}} + \partial_x (n_{\text{GP}} u) = 0 \\ \partial_t u + u \partial_x u = -\frac{1}{n_{\text{GP}}} \partial_x \left( \frac{g n_{\text{GP}}^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_x^2 \sqrt{n_{\text{GP}}}}{\sqrt{n_{\text{GP}}}} \right). \end{cases} \quad (38)$$

Dans le membre de droite, on reconnaît la pression du quasi-condensat  $P = g n_{\text{GP}}^2 / (2m)$  ainsi que la *pression quantique*  $\frac{\hbar^2}{2m} (\partial_x^2 \sqrt{n_{\text{GP}}}) / \sqrt{n_{\text{GP}}}$ . Cette dernière fait intervenir des dérivées par rapport à  $x$ . Ainsi, dans les situations où la densité ne varie que sur de grandes échelles de distance, ce terme de pression quantique peut être négligé, et l'on peut voir que le système (38) est alors équivalent à

$$\begin{cases} \partial_t \theta_1 + \frac{3\theta_1 + \theta_2}{4} \partial_x \theta_1 = 0 \\ \partial_t \theta_2 + \frac{\theta_1 + 3\theta_2}{4} \partial_x \theta_2 = 0 \end{cases} \quad (39)$$

avec

$$n_{\text{GP}}(x, t) = \frac{m}{16g} (\theta_2(x, t) - \theta_1(x, t))^2, \quad u = \frac{\theta_1(x, t) + \theta_2(x, t)}{2}.$$

Cette classe de solutions du système (38), avec des variations très lentes de la densité, n'est cependant pas la plus générale.

L'équation de Gross–Pitaevskii admet également des solutions sous la forme de *trains d'ondes*, où la densité  $n_{\text{GP}}$  oscille fortement sur de courtes distances, avec une amplitude d'oscillation qui peut, elle, ne varier que sur de grandes échelles de distances. On peut par exemple chercher une solution périodique sous la forme  $n_{\text{GP}}(x, t) = n_{\text{GP}}(\xi)$ ,  $u(x, t) = u(\xi)$ ,  $\xi = x - Vt$ . On trouve alors

que les solutions sont de la forme suivante, qui dépend de quatre paramètres  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  et est exprimée en termes du sinus elliptique de Jacobi,

$$n_{\text{GP}}(\xi) = \frac{(\theta_4 - \theta_3 - \theta_2 + \theta_1)^2}{16} + \frac{(\theta_4 - \theta_3)(\theta_2 - \theta_1)}{4} \operatorname{sn}^2\left(\frac{\sqrt{(\theta_4 - \theta_2)(\theta_3 - \theta_1)}}{2}\xi, M\right) \quad (40)$$

avec  $M = \frac{(\theta_2 - \theta_1)(\theta_4 - \theta_3)}{(\theta_4 - \theta_2)(\theta_3 - \theta_1)}$ , et nous avons fixé  $\hbar = m = g = 1$  pour simplifier les notations. La vitesse et la période de ce train d'onde sont données respectivement par

$$V = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{4} \quad (41)$$

et

$$L(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = \frac{4}{\sqrt{(\theta_4 - \theta_2)(\theta_3 - \theta_1)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - M^2 \sin^2 u}}. \quad (42)$$

Les paramètres  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  sont appelés les *invariants de Riemann de la théorie de la modulation de Whitham* [42], et dans la solution (40) ils sont constants. Mais on peut ensuite les faire varier sur de grandes échelles de distance et de temps, de manière à obtenir des solutions approximatives de l'équation de Gross–Pitaevskii qui deviennent exactes dans la limite de séparation d'échelles. Le point crucial est que les invariants de Riemann ne peuvent pas être modulés de manière arbitraire, mais il faut que leur modulation soit compatible avec les lois de conservation de l'équation de Gross–Pitaevskii. Les équations d'évolution qui régissent la dépendance en  $x$  et  $t$  des invariants de Riemann sont l'objet central de la *théorie de la modulation de Whitham* [44] :

$$\partial_t \theta_j + \left[ \left( 1 - \frac{L}{\partial_{\theta_j} L} \partial_{\theta_j} \right) V \right] \partial_x \theta_j = 0. \quad (43)$$

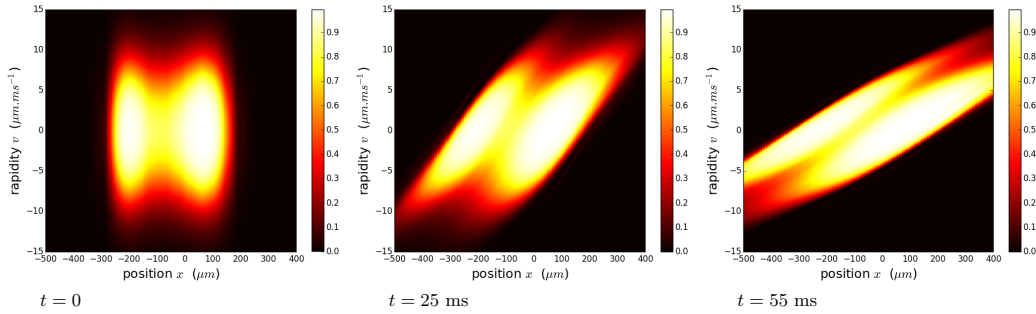
De manière plus générale, on peut trouver des solutions à l'équation de Gross–Pitaevskii sous la forme de trains d'onde avec plusieurs périodes, qui sont caractérisées par un nombre pair d'invariants de Riemann. On peut ensuite moduler ces invariants de Riemann à l'aide des équations de la théorie de Whitham (43).

La relation entre l'équation de Gross–Pitaevskii et l'hydrodynamique généralisée dans le régime de quasi-condensat réside dans le fait que les invariants de Riemann peuvent être identifiés avec les points de Fermi. Il est possible de montrer que les équations de l'hydrodynamique généralisée à entropie nulle (36) sont exactement équivalentes aux équations de la théorie de Whitham (43). Enfin, on peut également montrer que la densité d'atomes  $n(x)$  calculée par l'hydrodynamique généralisée est exactement égale à la densité  $n_{\text{GP}}(x)$  moyennée sur une période d'oscillation  $L$ . Ce dernier point est valide plus généralement pour toutes les quantités conservées locales du gaz de Lieb–Liniger dans la limite  $g \rightarrow 0$ .

Pour plus de détails sur la relation entre l'hydrodynamique généralisée et la théorie de Whitham, voir les références [41,45].

### 3. Tests expérimentaux de la théorie GHD

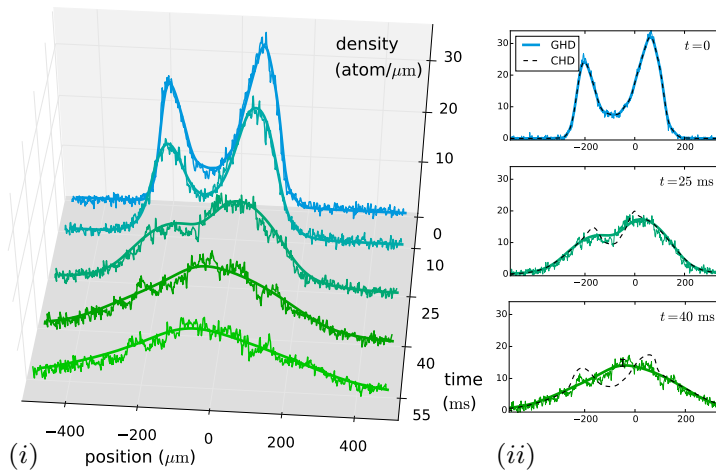
À l'inverse de la théorie hydrodynamique conventionnelle, la théorie GHD ne suppose pas que le système est localement décrit par un équilibre thermique. Au contraire, la théorie GHD autorise l'apparition, au cours de la dynamique, de distributions de rapidités locales qui diffèrent fortement de celles correspondant à un équilibre thermique. C'est notamment le cas lorsque la distribution locale de rapidité, en certaines régions de l'espace, devient une fonction présentant plusieurs maxima locaux, puisque la distribution de rapidité d'un ensemble thermique est toujours une fonction simplement piquée. Pour tester la validité de la théorie GHD, il est donc particulièrement intéressant d'utiliser des protocoles qui conduisent à la présence de telles distributions de rapidité. Les expériences pionnières présentées ci-dessous utilisent en effet de tels protocoles.



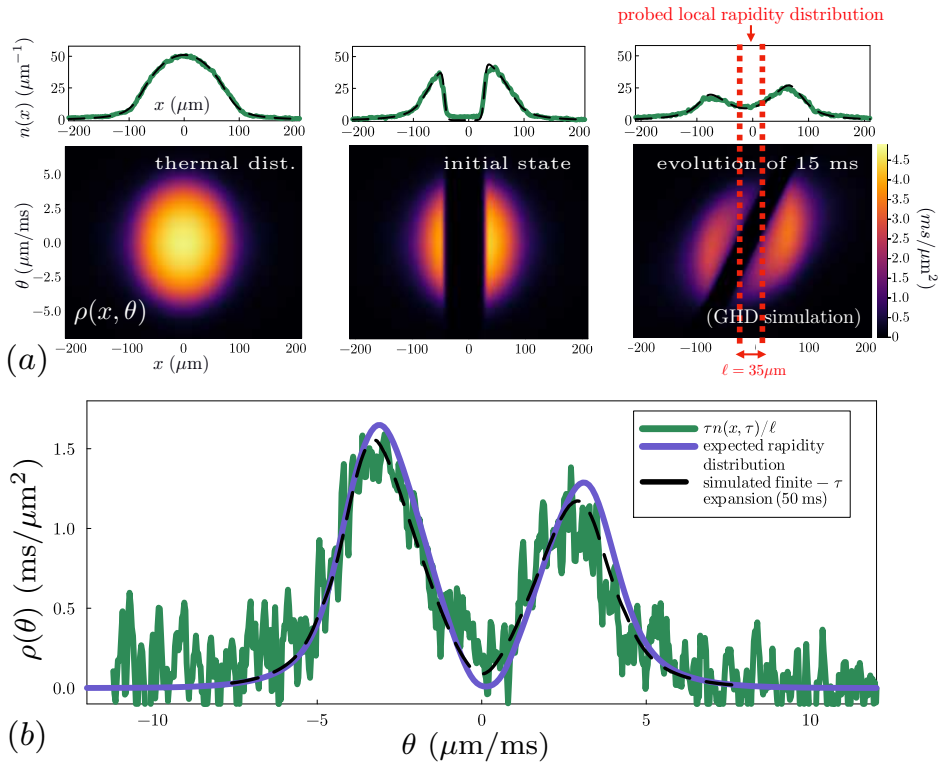
**FIGURE 5** – [Reproduite du Supplemental Material de la référence [46]] Calcul GHD des distributions de rapidités au cours de l’expansion longitudinale d’un nuage initialement doublement piqué. La situation initiale ( $t = 0$ ) qui est celle d’un nuage à l’équilibre thermique dans un double puits de potentiel est celle qui correspond aux données expérimentales de la figure 6. La quantité tracée est le facteur d’occupation  $v$  défini dans l’équation (22).

### 3.1. Évolution libre d’un nuage doublement piqué

La première de ces expérience étudie la dynamique d’un gaz en l’absence de tout potentiel longitudinal dans le cas d’une situation initiale présentant deux nuages séparés spatialement. L’allure de la distribution de rapidités initiale dans ce protocole est celle de la distribution à  $t = 0$  montrée sur la figure 5. Lors de l’évolution libre, les rapidités positives et grandes vont aller vers les  $x$  positifs alors que les rapidités très négatives vont partir vers les  $x$  négatifs. On s’attend ainsi à un phénomène de cisaillement de  $\rho(x, \theta)$  dans l’espace  $(x, \theta)$  qui conduit à l’émergence, au centre du nuage, d’une distribution de rapidité doublement piquée, comme illustré sur la figure 5. Dans la première expérience qui a testé GHD [46], la situation initiale est produite en préparant un nuage à l’équilibre dans un potentiel à deux puits de potentiel. La dynamique résultant de l’extinction soudaine du potentiel longitudinal est observée en mesurant les profils de densité du nuage après différent temps d’évolution. Les résultats, montrés sur la figure 6, sont en très bon accord



**FIGURE 6** – [Reproduite de la référence [46] avec autorisation] Évolution du profil de densité au cours d’une expansion longitudinale. Les données sont comparées aux prédictions effectuées avec la théorie GHD. Les lignes tiretées des figures de droites sont les prédictions obtenues avec la théorie hydrodynamique conventionnelle (acronyme CHD en anglais) qui suppose qu’en tout point et à tout temps le système est localement décrit par une équilibre thermodynamique.



**FIGURE 7** – [Reproduite de la référence [25] avec autorisation] Un profil de densité doublement piqué est réalisé à partir d'un nuage à l'équilibre ((a), colonne de gauche) en enlevant les atomes situés au centre. Le profil de densité est alors constitué de deux nuages non connectés ((a), colonne centrale). On laisse ensuite le système évoluer en l'absence de potentiel longitudinal. Au bout de 15 ms, les deux nuages se recouvrent dans la zone centrale ((a), colonne de droite). Une mesure de la distribution de rapidité de la tranche centrale est alors effectuée : les atomes situés hors de la tranche délimitée par les pointillés rouges sont chassés et on laisse s'étaler la tranche sélectionnée pour obtenir sa distribution de rapidité. La distribution mesurée ((b) courbe verte) présente la structure doublement piquée attendue et elle est en bon accord avec les prédictions de la théorie GHD.

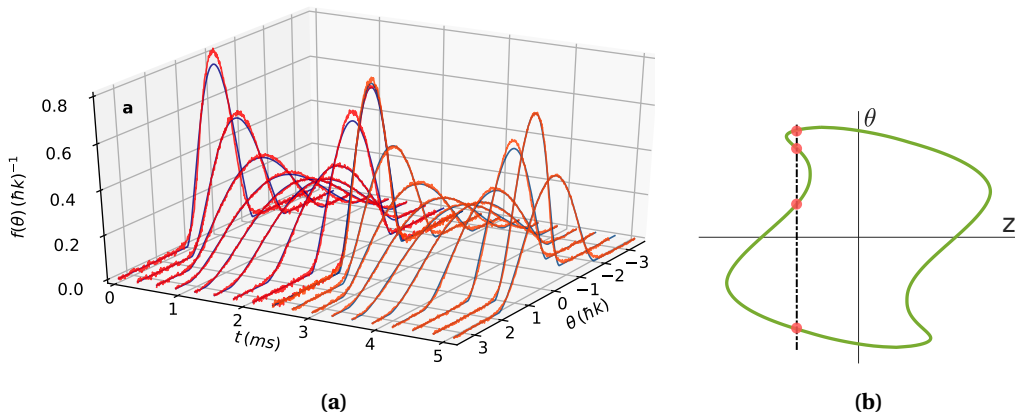
avec les prédictions de la théorie GHD. Au contraire, une théorie hydrodynamique conventionnelle, qui suppose qu'à chaque instant et en chaque position le système peut être décrit par un ensemble thermique, échoue totalement à reproduire les observations expérimentales, comme montré sur la figure 6. Cette théorie prédit même, à temps plus long, l'apparition de chocs : les forts gradients observés sur les courbes numériques correspondant aux prédictions de l'hydrodynamique conventionnelle sur la figure 6 sont les prémices des chocs apparaissant aux temps ultérieurs. De tels chocs sont absents de la théorie GHD qui permet, au cours de la dynamique, des repliements de la distribution de rapidités, avec l'apparition de distributions locales doublement piquées comme montré sur la figure 5 qui présente les résultats des calculs GHD.

La présence d'une distribution locale de rapidités doublement piquée au centre du nuage ne pouvait pas être mise en évidence expérimentalement dans [46], puisque dans cet article pionnier seule la densité linéaire, obtenue en intégrant la distribution de rapidités sur  $\theta$ , est mesurée. Récemment, l'apparition d'une distribution de rapidités doublement piquée au centre du nuage a été mise en évidence expérimentalement en utilisant la technique de mesure de la distribution de rapidité locale présentée dans la section 1.2. Dans cette expérience, présentée dans [25],

le profil de densité initial doublement piqué est préparé, à partir d'un nuage à l'équilibre dans un potentiel harmonique, en enlevant les atomes situés au centre du nuage (voir figure 7). Après un temps d'évolution suffisant pour que la distribution de rapidité au centre deviennent doublement piquée, une tranche centrale du nuage est sélectionnée et sa distribution de rapidité est mesurée en effectuant un étalement longitudinal. Les résultats présentés sur la figure 7 mettent clairement en évidence la nature doublement piquée de la distribution de rapidité.

### 3.2. Modification du potentiel de confinement

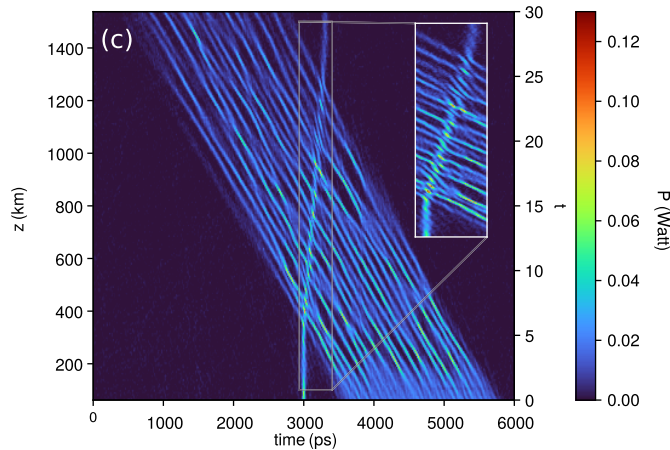
La dynamique engendrée par l'augmentation soudaine du confinement longitudinal a aussi permis de tester avec succès la théorie GHD [47]. Cette expérience a été réalisée en utilisant des atomes confinés dans les tubes unidimensionnels d'un réseau optique bi-dimensionnel. Les paramètres sont très différents des expériences présentées ci-dessus réalisées sur un dispositif de puce atomique : les interactions sont fortes avec un paramètre d'interaction initial  $\gamma$  supérieur à 1 et le système est proche de son état fondamental. Pour différents temps d'évolution, la distribution de rapidité globale du système est mesurée en coupant le confinement longitudinal et en laissant le système s'étaler dans les guides 1D avant d'effectuer une mesure de la distribution de vitesse des atomes. Les résultats montrés sur la figure 8 sont en excellent accord avec les prédictions GHD pour un système initialement à température nulle. Les calculs GHD prédisent l'apparition d'un repliement de la mer de Fermi pour ce protocole, du entre autres à l'anharmonicité du potentiel de confinement, comme montré sur la figure 8(b).



**FIGURE 8** – [Reproduite de la référence [47] avec autorisation] Évolution de la distribution de rapidité d'un ensemble de gaz 1D après une augmentation soudaine du potentiel de confinement longitudinal qui engendre une oscillation de la taille longitudinale du nuage. (a) Mesure de la distribution de rapidité intégrée sur tout le nuage. Les données expérimentales sont en excellent accord avec les prédictions GHD pour un système à température nulle. (b) Les calculs prédisent un repliement de la mer de Fermi, et donc l'apparition d'une distribution de rapidité locale scindée en deux mers de Fermi.

## 4. Perspectives

L'approche hydrodynamique généralisée est une description effective de la dynamique des gaz unidimensionnels intégrables variant sur des grandes échelles dont la pertinence est validée par les très bons accords obtenus avec des données expérimentales, comme présenté dans cette



**FIGURE 9** – [Reproduite de la référence [54] avec autorisation] Modification de la vitesse effective d'un soliton à cause de son interaction avec un gaz de solitons. Le niveau de couleur code l'intensité lumineuse dans une fibre optique non linéaire. Une technique de boucle de recirculation permet de sonder différentes distances de propagations (voir la référence [54] pour plus de détails). L'enveloppe du champ électrique obéit à l'équation de Schrödinger non linéaire focalisante où, comparé à l'équation (37), la position  $z$  joue le rôle du temps et le temps le rôle de la variable  $x$ . La vitesse du soliton, qui est dans cet exemple nulle lorsque le soliton est isolé, est modifiée lorsqu'il interagit avec le gaz de solitons, en accord avec les prédictions pour  $v^{\text{eff}}$  de la théorie GHD des gaz de solitons.

revue. Le domaine de validité de la théorie GHD à l'échelle d'Euler présentée ici est encore à explorer. Sur le plan théorique, les corrections à apporter font l'objet de nombreuses études [48-51], et des effets au-delà de l'échelle d'Euler n'ont pas encore été observés expérimentalement. Effectuer des expériences qui permettraient de sonder ces effets serait une grande avancée. L'enjeu principal pour faire des prédictions qui vont au-delà de l'échelle d'Euler est de bien prendre en compte les fluctuations [52]. Expérimentalement, mesurer les fluctuations de la distribution de rapidités serait donc extrêmement intéressant.

Dans la limite où la constante de couplage  $g$  tend vers 0 et le densité de particules tend vers l'infini de façon à ce que le produit  $gn$  soit constant, les effets de la quantification du champ, c'est-à-dire l'existence des particules, joue un rôle négligeable. La physique est alors celle d'un champ classique dont la dynamique est régie par l'équation de Gross-Pitaevskii aussi appelée *équation de Schrödinger non linéaire*. Nous avons discuté cette limite dans cette revue dans le cas de système d'entropie nulle : dans ce cas, la limite pour  $g \rightarrow 0$  des équations issues de la GHD correspond aux équations régissant l'évolution des points de Riemann de la théorie de Whitham. Il est possible d'aller au-delà des états d'entropie nulle. La distribution de rapidité a un sens en termes du champ classique puisque le protocole d'expansion du gaz a un sens peut être considéré dans ce cadre. En prenant la limite champ classique des équation GHD on obtient les prédictions de champ classique pour l'évolution de la distribution de rapidité [14,53]. Il serait intéressant sur le plan théorique d'avoir une façon d'obtenir ces équations directement dans le modèle classique, indépendamment du modèle quantique (modèle de Lieb-Liniger).

Une telle théorie GHD classique existe pour décrire la dynamique à grande échelle de systèmes classiques intégrables dans le cas où les quasi-particules sont bien identifiées. C'est le cas pour la dynamique d'un gaz de solitons, que ce soient les solitons de l'équation de Korteweg-de Vries ou ceux de l'équation de Schrödinger non linéaire focalisante, c'est-à-dire l'équation de Gross-Pitaevskii avec une constante de couplage attractive  $g < 0$ . Les solitons sont caractérisés

par leur vitesse  $v$  et leur amplitude  $\alpha$  et on peut introduire une distribution de solitons spatialement résolue  $f(v, \alpha, x)$ . Une équation similaire à l'équation (27b) a été dérivée pour décrire l'évolution de cette distribution de solitons  $(x, v, \alpha)$  [55], qui fait intervenir une vitesse effective du même type que celle définie par notre équation (27a), et qui peut être obtenue par le même argument collisionnel que celui présenté dans notre section 2. L'équation de Schrödinger non linéaire focalisante décrit l'évolution de l'enveloppe du champ électromagnétique dans des fibres optiques et des gaz de solitons peuvent être réalisés dans ces systèmes. Sur un tel système, la modification de la vitesse d'un soliton sous l'effet des collisions avec les autres solitons est visible dans les données expérimentales, voir figure 9. Ainsi, il est fort probable que, dans un futur très proche, la physique des gaz intégrables sera explorée aussi dans ces systèmes classiques [56], apportant une perspective nouvelle et complémentaire au sujet du comportement émergent à grande échelle dans les gaz unidimensionnels intégrables.

## Déclaration d'intérêts

Les auteurs ne travaillent pas, ne conseillent pas, ne possèdent pas de parts, ne reçoivent pas de fonds d'une organisation qui pourrait tirer profit de cet article, et n'ont déclaré aucune autre affiliation que leurs organismes de recherche.

## Références

- [1] E. H. Lieb et W. Liniger, « Exact analysis of an interacting Bose gas. I. The general solution and the ground state », *Phys. Rev.* **130** (1963), no. 4, p. 1605-1616.
- [2] E. H. Lieb, « Exact analysis of an interacting Bose gas. II. The excitation spectrum », *Phys. Rev.* **130** (1963), no. 4, p. 1616-1624.
- [3] C.-N. Yang et C. P. Yang, « Thermodynamics of a one-dimensional system of bosons with repulsive delta-function interaction », *J. Math. Phys.* **10** (1969), no. 7, p. 1115-1122.
- [4] M. Gaudin, *The Bethe wavefunction*, Cambridge University Press, 2014.
- [5] V. E. Korepin, N. Bogoliubov et A. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, t. 3, Cambridge University Press, 1997.
- [6] B. L. Tolra, K. O'hara, J. Huckans, W. D. Phillips, S. Rolston et J. V. Porto, « Observation of reduced three-body recombination in a correlated 1D degenerate Bose gas », *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004), no. 19, article no. 190401 (4 pages).
- [7] B. Paredes, A. Widera, V. Murg et al., « Tonks–Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice », *Nature* **429** (2004), no. 6989, p. 277-281.
- [8] T. Kinoshita, T. Wenger et D. S. Weiss, « Observation of a one-dimensional Tonks–Girardeau gas », *Science* **305** (2004), no. 5687, p. 1125-1128.
- [9] E. Haller, M. Gustavsson, M. J. Mark, J. G. Danzl, R. Hart, G. Pupillo et H.-C. Nägerl, « Realization of an excited, strongly correlated quantum gas phase », *Science* **325** (2009), no. 5945, p. 1224-1227.
- [10] I. Bouchoule et J. Dubail, « Generalized hydrodynamics in the one-dimensional Bose gas : theory and experiments », *J. Stat. Mech. Theory Exp.* **2022** (2022), no. 1, article no. 014003 (91 pages).
- [11] G. Astrakharchik, J. Boronat, J. Casulleras et S. Giorgini, « Beyond the Tonks–Girardeau Gas : Strongly Correlated Regime in Quasi-One-Dimensional Bose Gases », *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005), no. 19, article no. 190407 (4 pages).
- [12] M. Batchelor, M. Bortz, X.-W. Guan et N. Oelkers, « Evidence for the super Tonks–Girardeau gas », *J. Stat. Mech. Theory Exp.* **2005** (2005), no. 10, article no. L10001 (9 pages).
- [13] R. Koch, A. Bastianello et J.-S. Caux, « Adiabatic formation of bound states in the one-dimensional Bose gas », *Phys. Rev. B* **103** (2021), no. 16, article no. 165121 (12 pages).
- [14] R. Koch, J.-S. Caux et A. Bastianello, « Generalized hydrodynamics of the attractive non-linear Schrödinger equation », *J. Phys. A. Math. Theor.* **55** (2022), no. 13, article no. 134001 (32 pages).
- [15] K. Yang, Y. Zhang, K.-Y. Li, K.-Y. Lin, S. Gopalakrishnan, M. Rigol et B. L. Lev, « Phantom energy in the nonlinear response of a quantum many-body scar state », *Science* **385** (2024), no. 6713, p. 1063-1067.
- [16] M. Horvath, A. Bastianello, S. Dhar, R. Koch, Y. Guo, J.-S. Caux, M. Landini et H.-C. Nägerl, « Observing Bethe strings in an attractive Bose gas far from equilibrium », prépublication, 2025. En ligne sur <https://arxiv.org/abs/2505.10550>.

- [17] F. H. Essler et M. Fagotti, « Quench dynamics and relaxation in isolated integrable quantum spin chains », *J. Stat. Mech. Theory Exp.* **2016** (2016), no. 6, article no. 064002 (69 pages).
- [18] L. Vidmar et M. Rigol, « Generalized Gibbs ensemble in integrable lattice models », *J. Stat. Mech. Theory Exp.* **2016** (2016), no. 6, article no. 064007 (48 pages).
- [19] H. Bethe, « Zur Theorie der Metalle : I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette », *Z. Phys.* **71** (1931), no. 3, p. 205-226.
- [20] A. S. Campbell, D. M. Gangardt et K. V. Kheruntsyan, « Sudden Expansion of a One-Dimensional Bose Gas from Power-Law Traps », *Phys. Rev. Lett.* **114** (2015), no. 12, article no. 125302 (6 pages).
- [21] T. Palmai et R. M. Konik, « Quasilocal charges and the generalized Gibbs ensemble in the Lieb–Liniger model », *Phys. Rev. E* **98** (2018), no. 5, article no. 052126 (16 pages).
- [22] A. C. Cassidy, C. W. Clark et M. Rigol, « Generalized Thermalization in an Integrable Lattice System », *Phys. Rev. Lett.* **106** (2011), no. 14, article no. 140405 (4 pages).
- [23] B. Doyon, *Lecture notes on generalised hydrodynamics*, SciPost Physics Lecture Notes, t. 18, SciPost, 2020.
- [24] J. Dubail, « A more efficient way to describe interacting quantum particles in 1D », *Physics* **9** (2016), article no. 153 (2 pages).
- [25] L. Dubois, G. Thémèze, F. Nogrette, J. Dubail et I. Bouchoule, « Probing the local rapidity distribution of a one-dimensional Bose gas », *Phys. Rev. Lett.* **133** (2024), no. 11, article no. 113402 (7 pages).
- [26] O. A. Castro-Alvaredo, B. Doyon et T. Yoshimura, « Emergent hydrodynamics in integrable quantum systems out of equilibrium », *Phys. Rev. X* **6** (2016), no. 4, article no. 041065 (17 pages).
- [27] B. Bertini, M. Collura, J. De Nardis et M. Fagotti, « Transport in out-of-equilibrium XXZ chains : exact profiles of charges and currents », *Phys. Rev. Lett.* **117** (2016), no. 20, article no. 207201 (8 pages).
- [28] B. Bertini, F. Heidrich-Meisner, C. Karrasch, T. Prosen, R. Steinigeweg et M. Žnidarič, « Finite-temperature transport in one-dimensional quantum lattice models », *Rev. Mod. Phys.* **93** (2021), no. 2, article no. 025003 (71 pages).
- [29] C. Texier, « Wigner time delay and related concepts : Application to transport in coherent conductors », *Physica E* **82** (2016), p. 16-33.
- [30] J. Percus, « Equilibrium state of a classical fluid of hard rods in an external field », *J. Stat. Phys.* **15** (1976), p. 505-511.
- [31] C. Boldrighini, R. Dobrushin et Y. M. Sukhov, « One-dimensional hard rod caricature of hydrodynamics », *J. Stat. Phys.* **31** (1983), p. 577-616.
- [32] H. Spohn, *Large scale dynamics of interacting particles*, Springer, 2012.
- [33] A. Minguzzi et P. Vignolo, « Strongly interacting trapped one-dimensional quantum gases : Exact solution », *AVS Quantum Sci.* **4** (2022), no. 2, article no. 027102.
- [34] A. Minguzzi et D. Gangardt, « Exact coherent states of a harmonically confined Tonks–Girardeau gas », *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005), no. 24, article no. 240404 (4 pages).
- [35] J. M. Wilson, N. Malvania, Y. Le, Y. Zhang, M. Rigol et D. S. Weiss, « Observation of dynamical fermionization », *Science* **367** (2020), no. 6485, p. 1461-1464.
- [36] T. Fokkema, I. Eliëns et J.-S. Caux, « Split Fermi seas in one-dimensional Bose fluids », *Phys. Rev. A* **89** (2014), no. 3, article no. 033637 (10 pages).
- [37] S. Eliëns et J.-S. Caux, « General finite-size effects for zero-entropy states in one-dimensional quantum integrable models », *J. Phys. A. Math. Theor.* **49** (2016), no. 49, article no. 495203 (14 pages).
- [38] B. Doyon et T. Yoshimura, « A note on generalized hydrodynamics : inhomogeneous fields and other concepts », *SciPost Phys.* **2** (2017), no. 2, article no. 014 (27 pages).
- [39] J.-S. Caux, B. Doyon, J. Dubail, R. M. Konik et T. Yoshimura, « Hydrodynamics of the interacting Bose gas in the Quantum Newton Cradle setup », *SciPost Phys.* **6** (2019), no. 6, article no. 070 (29 pages).
- [40] B. Doyon, J. Dubail, R. Konik et T. Yoshimura, « Large-scale description of interacting one-dimensional Bose gases : Generalized hydrodynamics supersedes conventional hydrodynamics », *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017), no. 19, article no. 195301 (7 pages).
- [41] E. Bettelheim, « The Whitham approach to the  $c \rightarrow 0$  limit of the Lieb–Liniger model and generalized hydrodynamics », *J. Phys. A. Math. Theor.* **53** (2020), no. 20, article no. 205204 (35 pages).
- [42] A. M. Kamchatnov, « Gurevich–Pitaevskii problem and its development », *Physics-Uspekhi* **64** (2021), no. 1, p. 48-82.
- [43] A. M. Kamchatnov, *Nonlinear periodic waves and their modulations : an introductory course*, World Scientific, 2000.
- [44] G. B. Whitham, *Linear and nonlinear waves*, John Wiley & Sons, 2011.
- [45] F. Möller, P. Schüttelkopf, J. Schmiedmayer et S. Erne, « Whitham approach to Generalized Hydrodynamics », *Phys. Rev. Res.* **6** (2024), no. 1, article no. 013328 (15 pages).
- [46] M. Schemmer, I. Bouchoule, B. Doyon et J. Dubail, « Generalized Hydrodynamics on an Atom Chip », *Phys. Rev. Lett.* **122** (2019), no. 9, article no. 090601 (7 pages).
- [47] N. Malvania, Y. Zhang, Y. Le, J. Dubail, M. Rigol et D. S. Weiss, « Generalized hydrodynamics in strongly interacting 1D Bose gases », *Science* **373** (2021), no. 6559, p. 1129-1133.

- [48] J. De Nardis, D. Bernard et B. Doyon, « Diffusion in generalized hydrodynamics and quasiparticle scattering », *SciPost Phys.* **6** (2019), no. 4, article no. 049 (73 pages).
- [49] J. De Nardis, D. Bernard et B. Doyon, « Hydrodynamic diffusion in integrable systems », *Phys. Rev. Lett.* **121** (2018), no. 16, article no. 160603 (7 pages).
- [50] M. Medenjak, J. De Nardis et T. Yoshimura, « Diffusion from convection », *SciPost Phys.* **9** (2020), no. 5, article no. 075 (24 pages).
- [51] F. S. Møller, F. Cataldini et J. Schmiedmayer, « Identifying diffusive length scales in one-dimensional Bose gases », *SciPost Phys. Core* **7** (2024), no. 2, article no. 025 (21 pages).
- [52] B. Doyon, « Hydrodynamic noise in one dimension : projected Kubo formula and its vanishing in integrable models », prépublication, 2025. En ligne sur <https://arxiv.org/abs/2506.05279>.
- [53] G. Del Vecchio, A. Bastianello, A. De Luca et G. Mussardo, « Exact out-of-equilibrium steady states in the semiclassical limit of the interacting Bose gas », *SciPost Phys.* **9** (2020), no. 1, article no. 002 (37 pages).
- [54] P. Suret, M. Dufour, G. Roberti, G. El, F. Copie et S. Randoux, « Soliton refraction by an optical soliton gas », *Phys. Rev. Res.* **5** (2023), no. 4, article no. L042002 (6 pages).
- [55] G. A. El et A. M. Kamchatnov, « Kinetic Equation for a Dense Soliton Gas », *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005), no. 20, article no. 204101 (4 pages).
- [56] A. Bastianello, A. Tikan, F. Copie, S. Randoux et P. Suret, « Observation of a generalized Gibbs ensemble in photonics », prépublication, 2025. En ligne sur <https://arxiv.org/abs/2503.16526>.