



ACADÉMIE
DES SCIENCES
INSTITUT DE FRANCE

Comptes Rendus

Physique

Yvan Castin et Mariia Tsimokha

Relaxation du nombre de phonons dans un superfluide 3D à branche acoustique concave

Volume 27 (2026), p. 381-413

En ligne depuis le 14 octobre 2026

<https://doi.org/10.5802/crphys.292>



Cet article est publié sous la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION 4.0 INTERNATIONAL.
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Les Comptes Rendus. Physique sont membres du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org — e-ISSN : 1878-1535



Article de recherche

Relaxation du nombre de phonons dans un superfluide 3D à branche acoustique concave

Yvan Castin ^a et Mariia Tsimokha ^a

^a Laboratoire Kastler Brossel, ENS-Université PSL, CNRS, Université Sorbonne et Collège de France, 24 rue Lhomond, 75231 Paris, France
Courriel : yvan.castin@lkb.ens.fr

Résumé. Nous considérons l'évolution collisionnelle vers l'équilibre du gaz de phonons spatialement homogène et isotrope d'un superfluide tridimensionnel à branche d'excitation acoustique concave, à une température T non nulle mais arbitrairement basse. Les collisions à trois phonons $1\phi \leftrightarrow 2\phi$ sont interdites par la conservation de l'énergie-impulsion. Les collisions à quatre phonons $2\phi \rightarrow 2\phi$ de Landau et Khalatnikov ne conduisent, au bout d'un temps $\propto T^{-7}$, qu'à un équilibre thermique partiel, une loi de Bose de potentiel chimique non nul pour les phonons, car elles en conservent le nombre total. La relaxation vers l'équilibre thermochimique complet est donc assurée par les collisions beaucoup plus lentes à cinq phonons $2\phi \leftrightarrow 3\phi$ de Khalatnikov, en un temps $\propto T^{-9}$. Au moyen d'équations cinétiques sur les nombres d'occupation des modes de phonons et après calcul explicite par l'hydrodynamique quantique de l'amplitude de collision $2\phi \rightarrow 3\phi$ à basse température, nous déterminons l'évolution correspondante de la fugacité z_ϕ du gaz de phonons depuis le régime non dégénéré $z_\phi = 0^+$ jusqu'à l'équilibre complet $z_\phi = 1^-$. En utilisant la conservation de l'énergie totale, nous trouvons que la fugacité varie avec une loi de puissance non entière $\propto t^{4/5}$ aux temps courts et une loi exponentielle aux temps longs ; la vitesse de variation de l'entropie, toujours positive, est asymptotiquement proportionnelle au carré de la vitesse de variation de la fugacité, $(d/dt)S_\phi \propto [(d/dt)z_\phi]^2$, comme l'avait prédit Landau pour une transformation adiabatique arbitrairement lente. Nos résultats portent à son terme l'étude commencée par Khalatnikov en 1950 et pourraient être vérifiés expérimentalement dans un gaz d'atomes froids fermioniques de spin 1/2 dans le secteur du raccordement CBE-BCS où la branche acoustique est de départ concave, ou dans l'hélium 4 liquide superfluide à suffisamment haute pression.

Mots-clés. Superfluide, branche acoustique, phonons, équations cinétiques, collisions phonons-phonons, potentiel chimique, limite de basse température.

Manuscrit reçu le 17 avril 2026, révisé le 19 septembre 2026, accepté le 21 septembre 2026, en ligne depuis le 14 octobre 2026.

Table des matières

1. Présentation du problème	382
2. Équations cinétiques pour les collisions $2\phi \leftrightarrow 3\phi$ et première expression de $(d/dt)N_\phi$	385
3. Amplitude de collision $2\phi \rightarrow 3\phi$ et expression de $(d/dt)N_\phi$ à basse température	387
4. Cinétique de relaxation de la fugacité des phonons	392
Déclaration d'intérêts	396
Annexe A. La règle d'or de Fermi généralisée	396
A.1. Une subtilité de l'ordre sous-dominant	396
A.2. Dans le bain thermique plutôt que dans le vide	399
Annexe B. Amplitude de collision $2\phi \rightarrow 3\phi$ à basse température	400
B.1. Des transformations astucieuses	401

B.2. Passage à la limite des petits angles à basse température	402
Annexe C. Simplifications des expressions intégrales de C_ϕ et de I_{ang}	404
C.1. Tirer parti de l'invariance d'échelle	404
C.2. Tirer parti de la symétrie d'échange	405
C.3. Des changements de variables angulaires simplificateurs	406
Annexe D. Quelques précisions sur le calcul numérique de C_ϕ	408
D.1. Intégration numérique sur les nombres d'onde et sur les angles $\phi_\pm, \alpha$; résultat final	408
D.2. Intégration analytique sur l'hyperrayon R	409
Références	413

1. Présentation du problème

Considérons un système tridimensionnel isolé de particules bosoniques ou fermioniques en interaction à courte portée, spatialement homogène de densité volumique ρ dans la boîte de quantification arbitrairement grande $[0, L]^3$, entièrement superfluide dans son état fondamental et admettant comme seule branche d'excitation sans bande interdite la branche acoustique de départ linéaire [1-3]

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}} \underset{q \rightarrow 0^+}{=} \hbar c q \left[1 + \frac{\gamma}{8} \left(\frac{\hbar q}{mc} \right)^2 + O(q^4 \ln q) \right]. \quad (1)$$

Ici $\omega_{\mathbf{q}}$ est la pulsation propre des quanta d'excitation — les phonons ϕ — de vecteur d'onde $\mathbf{q}$, c est la vitesse du son à température nulle, m la masse d'une particule du superfluide et γ un paramètre de courbure sans dimension. À température non nulle mais suffisamment basse, on ne peut peupler significativement d'autre branche d'excitation et le système se réduit à un gaz bosonique de phonons, dont la relation de dispersion (1) évoque un hamiltonien quadratique de gaz parfait $\hat{H}_2 = \sum_{\mathbf{q}} \hbar\omega_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}}$, mais qui en réalité interagissent par l'hamiltonien $\hat{H}_3$ de l'hydrodynamique quantique de Landau et Khalatnikov cubique en les opérateurs de création $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger$ et d'annihilation $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ des phonons, voir [3, section 2.1], [4, section 24] et les références [5,6]^{1,2}:

$$\hat{H}_3 = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \frac{1}{2} \mathcal{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{q} + \mathbf{q}') (\hat{b}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{q}'} + \text{h.c.}) + \frac{1}{3!} \mathcal{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', -(\mathbf{q} + \mathbf{q}')) (\hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{q}'} \hat{b}_{-(\mathbf{q}+\mathbf{q}')} + \text{h.c.}) \quad (2)$$

avec l'amplitude de couplage dépendant du paramètre sans dimension Λ de l'équation (15) :

$$\mathcal{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{q}'') = mc^2 \left(\frac{\hbar^3 q q' q''}{8\rho m^3 c^3} \right)^{1/2} \left(3\Lambda + \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}'}{q q'} + \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}''}{q q''} + \frac{\mathbf{q}' \cdot \mathbf{q}''}{q' q''} \right). \quad (3)$$

¹ Comme toute théorie effective de basse énergie, l'hydrodynamique quantique doit être régularisée par une coupure ultraviolette et traitée selon les idées de la renormalisation habituelles en électrodynamique quantique; ainsi, il faudrait prendre en principe comme pulsation propre $\omega_{\mathbf{q}}$ dans $\hat{H}_2$ non pas la valeur mesurée expérimentalement $cq[1 + (\gamma/8)(\hbar q/mc)^2 + \dots]$ dite « effective » comme nous le faisons dans cet article, mais la valeur « nue » $c^{(0)}q[1 + (\gamma^{(0)}/8)(\hbar q/mc^{(0)})^2]$ où $c^{(0)}$ et $\gamma^{(0)}$ sont la vitesse du son et le paramètre de courbure nus, non renormalisés. Le passage de la valeur nue à la valeur effective de $\omega_{\mathbf{q}}$ se fait alors sous l'effet des interactions entre phonons. Cette procédure de renormalisation est un luxe inutile ici : nous calculons un taux d'amortissement par la règle d'or de Fermi généralisée et non pas un déplacement d'énergie, tout se passe sur la couche d'énergie collisionnelle et aucune coupure ultraviolette n'est requise.

² Dans l'hydrodynamique quantique, voir les références précitées, l'hamiltonien d'interaction entre phonons comporte également une contribution $\hat{H}_4$ quartique en les $\hat{b}$ et $\hat{b}^\dagger$, mais qui apporte dans la limite de basse température une contribution sous-dominante au taux de relaxation du nombre de phonons calculé ici, voir après notre équation (14); aussi en faisons-nous l'économie dans cette introduction.

Le superfluide constitue donc un milieu non linéaire pour le son [7] et, rappelons-le, l'hamiltonien $\hat{H} = \hat{H}_2 + \hat{H}_3$ s'applique quelle que soit la force des interactions dans le superfluide sous-jacent ou sa nature liquide ou gazeuse, pourvu que les nombres d'onde q soient suffisamment faibles.

Supposons que notre gaz de phonons soit préparé initialement dans un état excité spatialement homogène et isotrope de basse énergie mais hors d'équilibre, et demandons-nous comment il va relaxer vers l'équilibre thermodynamique complet de température T_{eq} et de potentiel chimique $\mu_\phi^{\text{eq}} = 0$ sous l'effet des collisions entre phonons (on a nécessairement $\mu_\phi^{\text{eq}} = 0$ puisque $\hat{H}_3$ ne conserve pas le nombre total de phonons N_ϕ).

Lorsque la branche acoustique (1) est de départ convexe ($\gamma > 0$), les processus de collision entre phonons dominants à basse énergie sont à trois phonons $1\phi \leftrightarrow 2\phi$, ceux de désintégration $1\phi \rightarrow 2\phi$ de Belyaev (termes $\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b}$ dans $\hat{H}_3$) et ceux inverses de fusion $2\phi \rightarrow 1\phi$ de Landau (termes $\hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b}$ dans $\hat{H}_3$), voir [4, section 34] et la référence [7]. Ils changent à la fois la distribution en vecteur d'onde $n_{\mathbf{q}}$ des phonons et leur nombre total N_ϕ , et conduisent à une atteinte a priori simultanée de l'équilibre thermique $T \rightarrow T_{\text{eq}}$ et chimique $\mu_\phi \rightarrow \mu_\phi^{\text{eq}} = 0$, avec un taux de relaxation caractéristique $\Gamma_\phi^{\text{eq}} \propto T_{\text{eq}}^5$ au voisinage de l'équilibre [8]³. Ce cas monoéchelle n'est pas étudié ici.

Lorsque la branche acoustique (1) est de départ concave⁴ ($\gamma < 0$), les processus à trois phonons ne conservent plus l'énergie-impulsion et les processus de collision dominants deviennent ceux à quatre phonons $2\phi \rightarrow 2\phi$ de Landau et Khalatnikov [5,8,11] (on notera plus généralement que les processus $1\phi \rightarrow n\phi$ et $n\phi \rightarrow 1\phi$ violent la conservation de l'énergie-impulsion pour tout $n > 1$). Les processus à quatre phonons assurent certes la relaxation thermique de la distribution en vecteur d'onde des phonons vers une loi de Bose de potentiel chimique μ_ϕ ,

$$n_{\mathbf{q}} \rightarrow \bar{n}_{\mathbf{q}}(T, \mu_\phi) = \frac{1}{\exp[\beta(\hbar\omega_{\mathbf{q}} - \mu_\phi)] - 1} \quad (4)$$

où $\beta = 1/k_B T$, avec une constante de temps instantanée $\propto T^{-7}$ au sens où le taux d'amortissement des phonons d'énergie $\approx k_B T$ est $\propto T^7 f(\beta\mu_\phi)$ avec $f(\beta\mu_\phi) \approx 1$ pour $\beta|\mu_\phi| \lesssim 1$ [12]⁵, mais pas la relaxation chimique de μ_ϕ vers zéro car ils conservent le nombre total de phonons N_ϕ . La thermalisation de N_ϕ résulte donc, dans une deuxième étape, de processus collisionnels d'ordre plus élevé, beaucoup plus lents à basse température : les processus sous-dominants à cinq phonons $2\phi \leftrightarrow 3\phi$, de temps caractéristique instantané $\propto T^{-9}$, voir [13] et [6, note 57]⁶. Dans la limite $T_{\text{eq}} \rightarrow 0^+$, en omettant un transitoire en $O(T_{\text{eq}}^{-7})$, nous pouvons alors supposer que la loi

³Nous considérons ici seulement les phonons thermiques typiques d'énergie $\hbar\omega_{\mathbf{q}} \propto k_B T$, qui sont à suffisamment basse température dans le régime faiblement collisionnel $\omega_{\mathbf{q}} \gg \Gamma_\phi^{\text{eq}}$ relevant de processus élémentaires $n\phi \leftrightarrow n'\phi$ bien identifiés. Nous ne parlons pas des phonons de pulsation $\omega_{\mathbf{q}} \ll \Gamma_\phi^{\text{eq}}$, qui sont dans le régime hydrodynamique décrit par des coefficients de transport macroscopiques comme la viscosité [9] et correspondant à un amortissement diffusif du son dans le fluide [10]. La même restriction vaut pour $\gamma < 0$ vis-à-vis des collisions $2\phi \rightarrow 2\phi$.

⁴Nous ne traitons pas ici le cas délicat $\gamma = 0$, encore largement ouvert [6].

⁵Nous l'avons dit, il est supposé dans ce travail que la distribution $n_{\mathbf{q}}$ est isotrope. Dans le cas contraire, sa relaxation thermique par les processus $2\phi \rightarrow 2\phi$ peut prendre un temps $\propto T^{-9}$, ce qui ruine la séparation des échelles à venir, voir [13] et [12, note 4]. Par ailleurs, rappelons que, dans la limite de basse température prise ici, les interactions entre phonons apportent une correction négligeable à la distribution d'équilibre de gaz parfait (4).

⁶Quand le gaz de phonons est non dégénéré, c'est-à-dire de fugacité z_ϕ — définie plus loin — petite devant 1, le taux de thermalisation instantané par les processus $2\phi \rightarrow 2\phi$ est en fait proportionnel à $z_\phi T^7 \ll T^7$ où T est la température instantanée, voir [12, équations (38) et (41)], si bien que la division en deux étapes par séparation des échelles de temps semble plus difficile à obtenir expérimentalement (il faudrait réduire encore plus la température). Heureusement, il n'en est rien. Dans la limite non dégénérée, le taux de relaxation instantané de z_ϕ par les processus $2\phi \leftrightarrow 3\phi$ est $\Gamma_\phi^{\text{non deg}} \equiv (dz_\phi/dt)/z_\phi \propto T_{\text{eq}}^9/z_\phi^{5/4}$ d'après (47); or $T \propto T_{\text{eq}}/z_\phi^{1/4}$ d'après (46) donc $\Gamma_\phi^{\text{non deg}} \propto z_\phi T^9$ est lui aussi réduit par un facteur z_ϕ . De plus, on trouve que $\Gamma_{2\phi \rightarrow 2\phi}^{\text{non deg}}/\Gamma_{2\phi \rightarrow 2\phi}^{\text{eq}} \propto z_\phi T^7/T_{\text{eq}}^7 \propto z_\phi^{-3/4} \gg 1$: le taux de collision $2\phi \rightarrow 2\phi$ thermique typique est en fait plus élevé dans le cas non dégénéré $z_\phi \ll 1$ qu'à l'équilibre complet $z_\phi = 1^-$.

de Bose (4) s'applique, avec une température $T(t)$ et un potentiel chimique $\mu_\phi(t)$ dépendant du temps t à une échelle T_{eq}^{-9} .

L'objectif du présent travail est ainsi de déterminer, dans le cas d'une branche acoustique de départ concave ($\gamma < 0$), la loi de relaxation du potentiel chimique des phonons vers zéro sous l'effet des collisions $2\phi \leftrightarrow 3\phi$, en reprenant la méthode théorique à base d'équations cinétiques développée qualitativement par Khalatnikov dans la référence [13] mais en la rendant pleinement quantitative, en particulier (i) en calculant explicitement l'amplitude de collision $\mathcal{A}_{2\phi \rightarrow 3\phi}$, (ii) en menant à terme l'évaluation d'un facteur numérique global dans le taux de variation de μ_ϕ , et (iii) en ne se limitant pas au voisinage de $\mu_\phi = 0$ mais en décrivant tout l'intervalle $\mu_\phi \in]-\infty, 0]$.

Dans la section 2, nous écrivons la contribution des collisions $2\phi \leftrightarrow 3\phi$ aux équations cinétiques sur $n_{\mathbf{q}}$, et nous en déduisons la vitesse de variation du nombre de phonons $(d/dt)N_\phi$ comme une fonctionnelle $\mathcal{F}$ des $n_{\mathbf{q}}$ puis, après leur remplacement par la loi de Bose instantanée $\bar{n}_{\mathbf{q}}(T(t), \mu_\phi(t))$, comme une fonction F de $T(t)$ et $\mu_\phi(t)$. Dans la section 3, nous calculons l'amplitude de collision $\mathcal{A}_{2\phi \rightarrow 3\phi}$ à basse température et la reportons dans la fonction F ; la vitesse de variation $(d/dt)N_\phi$ devient proportionnelle à $T^{12}z_\phi^2(1-z_\phi)C_\phi(z_\phi)$ où $z_\phi = \exp(\beta\mu_\phi)$ est la fugacité des phonons et $C_\phi(z_\phi)$ est le facteur numérique — dépendant faiblement de z_ϕ — mentionné plus haut. Enfin, dans la section 4, en utilisant la conservation de l'énergie totale E_ϕ des phonons, nous relierons $T(t)$ à $\mu_\phi(t)$ et obtenons une équation d'évolution fermée sur $\mu_\phi(t)$, plus commodément sur $z_\phi(t)$; nous en discutons la solution et son comportement aux limites $z_\phi = 0^+, 1^-$.

Pour terminer cette entrée en matière, signalons que le problème considéré ici est loin d'être purement académique. Nos prédictions pourraient en effet être testées expérimentalement dans un gaz d'atomes froids fermioniques de spin 1/2 dans le secteur⁷ du raccordement CBE-BCS où l'on a $\gamma < 0$, ou même dans l'hélium 4 liquide porté à suffisamment haute pression pour que l'on ait $\gamma < 0$ [17,18] (à supposer qu'on puisse considérer l'hélium liquide comme un système isolé).

Note sur la dimension 2. Il serait tentant de généraliser le présent travail à 2D, par exemple à un gaz bidimensionnel de fermions de spin 1/2 pour une force des interactions donnant une branche acoustique de départ concave [19]. L'hydrodynamique quantique de Landau et Khalatnikov ne suffit cependant pas, dans ce cas, à décrire l'interaction entre les phonons. Le problème était déjà connu pour le taux d'amortissement à quatre phonons $2\phi \rightarrow 2\phi$ de Landau et Khalatnikov, voir [6, note 48] : dans la limite $T \rightarrow 0^+$ aux petits angles, l'amplitude de transition⁸ $\mathcal{A}_{2\phi \rightarrow 2\phi}$ est en fait identiquement nulle sur la couche d'énergie à l'ordre dominant naïvement prédit par comptage de puissances $(T^{3/2})^2/T^3 = T^0$, quels que soient les modules et les angles en $O(T)$ des vecteurs d'onde des phonons thermiques entrants et sortants conservant l'énergie-impulsion; l'amplitude est donc probablement d'ordre dominant vrai $T^2 T^0 = T^2$ (les ordres en T vont par pas de deux comme dans la relation de dispersion (1) car l'interaction entre fermions est à courte portée), mais le calcul à cet ordre ne peut s'effectuer au moyen d'une théorie effective aussi simple que celle du présent travail (divers effets omis par cette théorie interviennent

⁷Ce secteur devrait correspondre à un paramètre d'interaction $(k_F a)^{-1} \in]-\infty, (k_F a)_0^{-1}[$ où k_F est le nombre d'onde de Fermi et a la longueur de diffusion dans l'onde s entre atomes de spins opposés. Il contient à coup sûr la limite BCS $k_F a \rightarrow 0^-$. Son point terminal $(k_F a)_0^{-1}$, pour lequel $\gamma = 0$, est probablement proche de la limite unitaire $(k_F a)^{-1} = 0$, mais n'est pas encore connu avec certitude : la référence [14] prédit $(k_F a)_0^{-1} \simeq -0,14$, du côté BCS donc, au moyen de la théorie BCS dépendant du temps linéarisée, alors que les mesures expérimentales de la référence [15] trouvent $(k_F a)_0^{-1} \simeq 0,2$, du côté CBE donc; ces mesures ne permettent cependant pas de trancher car elles souffrent de deux limitations discutées dans la référence [16].

⁸On a $\mathcal{A}_{2\phi \rightarrow 2\phi} = \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | \hat{V} \hat{G}_0(E_i) \hat{V} | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle$ avec $\hat{V} = \hat{H}_3^{(+)} + \hat{H}_3^{(-)}$ dans les notations de (16). Or, chaque élément de matrice de $\hat{H}_3^{(\pm)}$ — ici au nombre de deux — donne un facteur $T^{3/2}$ au numérateur de l'amplitude de transition, comme on le voit sur (14), et chaque dénominateur d'énergie — ici au nombre de un — sort un facteur T^3 , comme dans (89).

alors). La valeur précise du taux d'amortissement de Landau et Khalatnikov, qui dépend quadratiquement de $\mathcal{A}_{2\phi \rightarrow 2\phi}$ dans la règle d'or de Fermi généralisée (voir [8, équation (129)]), est donc probablement d'ordre $(T^2)^2 T^3 = T^7$ plutôt que le T^3 naïvement attendu [6] et reste inconnue à 2D. Nous avons découvert que le même problème se pose pour les collisions $2\phi \leftrightarrow 3\phi$ faisant relaxer le nombre de phonons vers sa valeur d'équilibre : sur la couche d'énergie, l'amplitude de diffusion $\mathcal{A}_{2\phi \rightarrow 3\phi}$ est en fait identiquement nulle à l'ordre $(T^{3/2})^3 / (T^3)^2 = T^{-3/2}$ prédit par comptage de puissances sur son expression (16) et effectivement observé à 3D (27)⁹; l'amplitude est donc probablement d'ordre dominant vrai $T^2 T^{-3/2} = T^{1/2}$ à 2D, ce qui conduirait à un taux de relaxation du nombre de phonons en T^7 , à calculer là aussi avec une théorie plus précise que notre hydrodynamique quantique¹⁰; pour couronner le tout, en admettant que ces estimations soient correctes, on n'aurait donc pas, à 2D, séparation des échelles de temps entre les collisions à quatre phonons et celles à cinq phonons, toutes deux en T^{-7} , ce qui interdirait de faire l'hypothèse (4).

2. Équations cinétiques pour les collisions $2\phi \leftrightarrow 3\phi$ et première expression de $(d/dt)N_\phi$

Écrivons, suivant la procédure habituelle (celle par exemple de [20, section 6.3.2.2]), les équations cinétiques (ou de taux ou de Boltzmann quantiques) donnant l'évolution du nombre de phonons $n_{\mathbf{q}_1}$ du fluide dans le mode de vecteur d'onde $\mathbf{q}_1$ sous l'effet des collisions à cinq phonons $2\phi \leftrightarrow 3\phi$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_{\mathbf{q}_1} \Big|_{2\phi \leftrightarrow 3\phi} = & - \sum_{\mathbf{q}_2} \frac{1}{3!} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{A}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rightarrow \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)|^2 \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3} \delta \left(\sum_{\alpha=1}^2 \hbar \omega_{\mathbf{q}_\alpha} - \sum_{i=1}^3 \hbar \omega_{\mathbf{k}_i} \right) \\ & \times \left[\left(\prod_{\alpha=1}^2 n_{\mathbf{q}_\alpha} \right) \left(\prod_{i=1}^3 (1 + n_{\mathbf{k}_i}) \right) - \left(\prod_{i=1}^3 n_{\mathbf{k}_i} \right) \left(\prod_{\alpha=1}^2 (1 + n_{\mathbf{q}_\alpha}) \right) \right] \\ & - \frac{1}{2!} \sum_{\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3} \frac{1}{2!} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{A}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3 \rightarrow \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)|^2 \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} \delta \left(\sum_{\alpha=1}^3 \hbar \omega_{\mathbf{q}_\alpha} - \sum_{i=1}^2 \hbar \omega_{\mathbf{k}_i} \right) \\ & \times \left[\left(\prod_{\alpha=1}^3 n_{\mathbf{q}_\alpha} \right) \left(\prod_{i=1}^2 (1 + n_{\mathbf{k}_i}) \right) - \left(\prod_{i=1}^2 n_{\mathbf{k}_i} \right) \left(\prod_{\alpha=1}^3 (1 + n_{\mathbf{q}_\alpha}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

⁹Comme à 3D, on exprime les écarts angulaires réduits $\bar{\psi}_{\alpha i}$ et $\bar{\chi}_{i j}$ en fonction des variables indépendantes $\bar{\theta}_{12}, Z_1$ et Z_2 selon l'équation (37), la seule différence étant que Z_1, Z_2 et donc Z_3 sont réelles à 2D (on a $\phi_1 = 0[\pi]$ et $\phi_2 = 0[\pi]$ dans (36) car $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$ doivent être dans le même plan que $\mathbf{q}_1$ et $\mathbf{q}_2$), puis on les reporte dans la différence d'énergie (31) et l'amplitude de transition $2\phi \rightarrow 3\phi$ (27) écrites aux ordres dominants attendus. On trouve ainsi que le défaut d'énergie réduit $u - v$ est un polynôme de degré 2 en $\bar{\theta}_{12}$ et que l'amplitude réduite $\bar{\mathcal{A}}_{i \rightarrow f}$ (28) est une fraction rationnelle $P(\bar{\theta}_{12})/Q(\bar{\theta}_{12})$ en la variable $\bar{\theta}_{12}$, avec des polynômes P de degré 12 et Q de degré 14. On vérifie alors avec un logiciel de calcul formel que le reste de la division euclidienne de $P(\bar{\theta}_{12})$ par $u - v$ est nul pour tous Z_1, Z_2 . Il existe donc un polynôme R de degré 10 en $\bar{\theta}_{12}$ tel que $\bar{\mathcal{A}}_{i \rightarrow f} = R(\bar{\theta}_{12})(u - v)/Q(\bar{\theta}_{12})$.

¹⁰Soyons plus précis sur cette loi en T^7 . En nous plaçant pour simplifier dans la limite asymptotique en temps $z_\phi = \exp(\mu_\phi/k_B T) \rightarrow 1^-$, nous tirons de la version 2D de (7) aux petits angles la loi d'échelle $(d/dt)N_\phi/\mathcal{V} \propto T^2 (T^3)^3 (T^{1/2})^2 T^{-3} (1 - z_\phi) C_\phi^{2D}(z_\phi) \propto T^9 (1 - z_\phi) C_\phi^{2D}(z_\phi)$ où le premier facteur provient de l'intégration sur q_1 , le deuxième sur les modules et angles de $\mathbf{q}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$, le troisième du carré de $\bar{\mathcal{A}}_{i \rightarrow f}$, le quatrième du delta de conservation de l'énergie et le cinquième des facteurs statistiques; le sixième $C_\phi^{2D}(z_\phi)$ est l'équivalent 2D du coefficient sans dimension (41). Or, en dimension 2, l'énergie et le nombre de phonons thermiques sont de la forme $E_\phi \propto \mathcal{V} T^3 e(z_\phi)$ et $N_\phi \propto \mathcal{V} T^2 n(z_\phi)$ où de/dz_ϕ a une limite finie > 0 en $z_\phi = 1^-$, tandis que dn/dz_ϕ diverge comme $|\ln(1 - z_\phi)|$. De la conservation de l'énergie $dE_\phi/dt = 0$ nous déduisons $dT/dt \propto T d(1 - z_\phi)/dt$; alors $(d/dt)N_\phi/\mathcal{V} \propto T^2 |\ln(1 - z_\phi)| d(z_\phi - 1)/dt$ et en définitive $d(z_\phi - 1)/dt \propto -(z_\phi - 1)[T^7 C_\phi^{2D}(z_\phi)/|\ln(1 - z_\phi)|]$, d'où le taux de relaxation de N_ϕ en T^7 à 2D annoncé dans le texte principal. On voit bien cependant qu'il est impossible d'être aussi affirmatif sans connaître le comportement de $C_\phi^{2D}(z_\phi)$ au voisinage de $z_\phi = 1^-$ (le texte principal suppose implicitement — et sans fondement — que $C_\phi^{2D}(z_\phi) \propto |\ln(1 - z_\phi)|$).

Les taux de collision élémentaires s'expriment en termes des amplitudes de transition $2\phi \rightarrow 3\phi$ ou $3\phi \rightarrow 2\phi$ au moyen de la règle d'or de Fermi généralisée, brièvement justifiée dans l'annexe A, dont on reconnaîtra le facteur $2\pi/\hbar$ et le delta de Dirac de conservation de l'énergie (les deltas de Kronecker assurent la conservation de l'impulsion). Dans la première contribution au second membre de (5), le vecteur $\mathbf{q}_1$ est entrant dans une collision $2\phi \rightarrow 3\phi$, ce qui entraîne une dépopulation du mode, d'où le signe moins global; il faut bien sûr sommer sur le second vecteur entrant possible $\mathbf{q}_2$ et sur tous les vecteurs sortants $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ possibles, en divisant la seconde somme par $3!$ pour tenir compte de l'invariance de l'état final par permutation des $\mathbf{k}_i$. Mais nous avons astucieusement regroupé cette dépopulation avec le processus microscopique inverse $3\phi \rightarrow 2\phi$, obtenu en échangeant tous les phonons entrants et tous les phonons sortants. Le processus inverse est un processus d'alimentation du mode puisque $\mathbf{q}_1$ est cette fois sortant, d'où le signe moins entre crochets dans la deuxième ligne; il a bien entendu les mêmes deltas de conservation de l'énergie et de l'impulsion, mais aussi une amplitude de transition de même module au carré compte tenu du principe de microréversibilité :

$$|\mathcal{A}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rightarrow \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)|^2 = |\mathcal{A}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 \rightarrow \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)|^2. \quad (6)$$

En revanche, ses facteurs d'amplification bosonique sont différents, puisqu'il faut mettre un facteur n pour chaque phonon entrant et un facteur $1 + n$ pour chaque phonon sortant.

La seconde contribution au second membre de (5), sur la troisième et la quatrième ligne, s'analyse de la même manière. Cette fois, le vecteur $\mathbf{q}_1$ est entrant dans une collision $3\phi \rightarrow 2\phi$ ou sortant dans la collision inverse $2\phi \rightarrow 3\phi$. Il y a deux vecteurs d'onde libres sur lesquels sommer dans l'état asymptotique contenant $\mathbf{q}_1$, et il y en a deux également dans l'autre état asymptotique; il faut donc diviser deux fois par $2!$ pour éviter les comptages multiples d'états.

La dérivée temporelle du nombre total de phonons N_ϕ s'obtient en sommant (5) sur le vecteur d'onde $\mathbf{q}_1$. Dans la seconde contribution, nous effectuons le changement de nom $\mathbf{q}_\alpha \leftrightarrow \mathbf{k}_i$ sur les variables muettes et utilisons à nouveau le principe de microréversibilité (6) de façon à n'avoir partout qu'une amplitude de transition $2\phi \rightarrow 3\phi$. Ce changement étant fait, les deux contributions de (5) prennent même forme dans $(d/dt)N_\phi$: elles ne diffèrent plus que par un signe et par leurs nombres de symétrie $2!2!$ ou $3!$ au dénominateur, tout le reste se factorise. Il reste

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N_\phi = & \frac{3-2}{2!3!} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{A}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rightarrow \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)|^2 \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3} \\ & \times \delta \left(\sum_{\alpha=1}^2 \hbar\omega_{\mathbf{q}_\alpha} - \sum_{i=1}^3 \hbar\omega_{\mathbf{k}_i} \right) \left[\left(\prod_{\alpha=1}^2 n_{\mathbf{q}_\alpha} \right) \left(\prod_{i=1}^3 (1 + n_{\mathbf{k}_i}) \right) - \left(\prod_{i=1}^3 n_{\mathbf{k}_i} \right) \left(\prod_{\alpha=1}^2 (1 + n_{\mathbf{q}_\alpha}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Comme il est dit dans la section 1, nous pouvons supposer ici que le gaz de phonons est dans un état d'équilibre partiel, thermique mais pas chimique, c'est-à-dire que les nombres d'occupation $n_{\mathbf{q}_\alpha}$ et $n_{\mathbf{k}_i}$ suivent la loi de Bose (4) de température T et de potentiel chimique $\mu_\phi < 0$ et sont remplaçables par $\bar{n}_{\mathbf{q}_\alpha}$ et $\bar{n}_{\mathbf{k}_i}$. Éliminons les facteurs $\bar{n}$ qui s'ensuivent dans (7) au moyen de la relation

$$\bar{n}_{\mathbf{q}_\alpha} = e^{-\beta(\hbar\omega_{\mathbf{q}_\alpha} - \mu_\phi)} (1 + \bar{n}_{\mathbf{q}_\alpha}) \quad \text{ou} \quad \bar{n}_{\mathbf{k}_i} = e^{-\beta(\hbar\omega_{\mathbf{k}_i} - \mu_\phi)} (1 + \bar{n}_{\mathbf{k}_i}). \quad (8)$$

Ceci fait sortir un facteur $z_\phi^2 \exp[-\beta(\hbar\omega_{\mathbf{q}_1} + \hbar\omega_{\mathbf{q}_2})]$ dans le premier terme entre crochets, et un facteur $z_\phi^3 \exp[-\beta(\hbar\omega_{\mathbf{k}_1} + \hbar\omega_{\mathbf{k}_2} + \hbar\omega_{\mathbf{k}_3})]$ dans le second, avec — rappelons-le — $z_\phi = \exp(\beta\mu_\phi)$. En présence du delta de Dirac de conservation de l'énergie, les exponentielles des énergies ont la même valeur dans ces facteurs, qu'on choisit d'écrire $\exp[-\beta(\hbar\omega_{\mathbf{q}_1} + \hbar\omega_{\mathbf{q}_2})]$. Pour éviter de multiplier les équations, éliminons un vecteur d'onde par conservation de l'impulsion, en convenant que

$$\mathbf{k}_3 \equiv \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \quad (9)$$

et passons dans la foulée à la limite thermodynamique d'un volume de quantification $\mathcal{V} = L^3$ tendant vers l'infini, en anticipant le fait (établi dans la section 3, voir son équation (27)) que l'amplitude de collision varie comme

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rightarrow \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \sim \frac{\tilde{\mathcal{A}}_{i \rightarrow f}}{\mathcal{V}^{3/2}}. \quad (10)$$

Ici, pour abrégé, $|i\rangle$ représente l'état initial à deux phonons $|\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\rangle$ et $|f\rangle$ l'état final à trois phonons $|\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3\rangle$, et l'amplitude $\tilde{\mathcal{A}}_{i \rightarrow f}$ ne dépend pas de la taille du système. On notera aussi $E_i = \hbar\omega_{\mathbf{q}_1} + \hbar\omega_{\mathbf{q}_2}$ l'énergie de l'état initial et $E_f = \hbar\omega_{\mathbf{k}_1} + \hbar\omega_{\mathbf{k}_2} + \hbar\omega_{\mathbf{k}_3}$ celle de l'état final. Le remplacement des sommes sur les quatre vecteurs d'onde restants par des intégrales fait sortir un facteur $\mathcal{V}^4$, partiellement compensé par celui $1/\mathcal{V}^3$ provenant de l'amplitude au carré, comme il se doit (N_ϕ est une grandeur extensive $\propto \mathcal{V}$). Il vient finalement

$$\frac{d}{dt} \frac{N_\phi}{\mathcal{V}} = \frac{1}{12} z_\phi^2 (1 - z_\phi) \int_{\mathbb{R}^{12}} \frac{d^3 q_1 d^3 q_2 d^3 k_1 d^3 k_2}{[(2\pi)^3]^4} \frac{2\pi}{\hbar} |\tilde{\mathcal{A}}_{i \rightarrow f}|^2 \delta(E_i - E_f) e^{-\beta E_i} \prod_{\alpha=1}^2 (1 + \bar{n}_{\mathbf{q}_\alpha}) \prod_{i=1}^3 (1 + \bar{n}_{\mathbf{k}_i}). \quad (11)$$

Cette expression est positive, et s'annule seulement pour $z_\phi = 1$, c'est-à-dire pour un potentiel chimique de phonon nul $\mu_\phi = 0$, comme on pouvait s'y attendre.

Pour terminer, réduisons l'intégrale multiple dans (11) au moyen de l'invariance par rotation.

- (i) Par isotropie globale, la direction du vecteur $\mathbf{q}_1$ est sans importance. On peut donc placer $\mathbf{q}_1$ selon l'axe Oz d'un repère cartésien $Oxyz$ et dirigé vers le « haut » (sens des z croissants). On sort un facteur 4π d'angle solide total, et il reste à intégrer sur le module q_1 de $\mathbf{q}_1$ avec l'habituel jacobien sphérique q_1^2 .
- (ii) La direction de $\mathbf{q}_1$ étant ainsi fixée, il reste une invariance par rotation d'axe Oz ; en coordonnées sphériques d'axe polaire Oz , l'intégrande ne dépend pas de l'angle azimutal du vecteur $\mathbf{q}_2$. On peut donc placer $\mathbf{q}_2$ dans le demi-plan xOz , $x > 0$ (plan origine des angles azimutaux). On sort un facteur 2π d'angle azimutal total, et il reste à intégrer sur le module q_2 et l'angle polaire θ_{12} du vecteur $\mathbf{q}_2$, avec l'habituel jacobien $q_2^2 \sin \theta_{12}$.
- (iii) Les directions de $\mathbf{q}_1$ et $\mathbf{q}_2$ étant fixées, il n'y a plus d'invariance par rotation. On intègre sur les vecteurs restants $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$ en coordonnées sphériques d'axe polaire Oz et de demi-plan azimutal de référence xOz , $x > 0$; on appelle k_i , ψ_{1i} et ϕ_i le module, l'angle polaire et l'angle azimutal du vecteur $\mathbf{k}_i$ correspondant.

En d'autres termes, les vecteurs d'onde indépendants s'écrivent comme suit dans le repère cartésien $Oxyz$:

$$\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} q_2 \sin \theta_{12} \\ 0 \\ q_2 \cos \theta_{12} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} k_1 \sin \psi_{11} \cos \phi_1 \\ k_1 \sin \psi_{11} \sin \phi_1 \\ k_1 \cos \psi_{11} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} k_2 \sin \psi_{12} \cos \phi_2 \\ k_2 \sin \psi_{12} \sin \phi_2 \\ k_2 \cos \psi_{12} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

le vecteur $\mathbf{k}_3$ étant toujours donné par (9), et nous avons réduit (11) à une intégrale nonuple :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{N_\phi}{\mathcal{V}} = & \frac{z_\phi^2 (1 - z_\phi)}{6(2\pi)^9 \hbar} \int_0^{+\infty} dq_1 q_1^2 \int_0^{+\infty} dq_2 q_2^2 \int_0^\pi d\theta_{12} \sin \theta_{12} \\ & \times \int_0^{+\infty} dk_1 k_1^2 \int_0^\pi d\psi_{11} \sin \psi_{11} \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^{+\infty} dk_2 k_2^2 \int_0^\pi d\psi_{12} \sin \psi_{12} \\ & \times \int_0^{2\pi} d\phi_2 |\tilde{\mathcal{A}}_{i \rightarrow f}|^2 \delta(E_i - E_f) e^{-\beta E_i} \prod_{\alpha=1}^2 (1 + \bar{n}_{\mathbf{q}_\alpha}) \prod_{i=1}^3 (1 + \bar{n}_{\mathbf{k}_i}). \end{aligned} \quad (13)$$

3. Amplitude de collision $2\phi \rightarrow 3\phi$ et expression de $(d/dt)N_\phi$ à basse température

L'ingrédient manquant dans l'expression (13) de la dérivée temporelle du nombre de phonons est l'amplitude de collision $2\phi \rightarrow 3\phi$ entre les phonons thermiques, c'est-à-dire l'amplitude de

transition $\mathcal{A}_{i \rightarrow f}$ entre l'état initial à deux phonons $|i\rangle = |\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\rangle$ et l'état final à trois phonons $|f\rangle = |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3\rangle$ sous l'effet de l'hamiltonien d'interaction phonon-phonon $\hat{V}$.

Nous menons ici notre calcul à l'ordre dominant en température. Nous pouvons alors réduire $\hat{V}$ à l'interaction cubique décrite dans la section 1, qui plus est en la restreignant aux trios de vecteurs d'onde faisant un petit angle $O(T)$ entre eux [5,8,13]. Nous prenons en pratique $\hat{V} = \hat{H}_3^{(+)} + \hat{H}_3^{(-)}$, avec $\hat{H}_3^{(+)} = [\hat{H}_3^{(-)}]^\dagger$ et

$$\hat{H}_3^{(-)} \underset{\text{angles}}{\overset{\text{petits}}{=}} \frac{3mc^2(1+\Lambda)}{2\rho^{1/2}L^{3/2}} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \left(\frac{\hbar}{2mc} \right)^{3/2} [qq'(q+q')]^{1/2} \hat{b}_{\mathbf{q}+\mathbf{q}'}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{q}'} \quad (14)$$

comme dans la référence [6]. En particulier, comme l'ont montré les références [5,8,13], nous pouvons ignorer les processus non résonnants $\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger$ et $\hat{b} \hat{b} \hat{b}$ naturellement présents dans l'hamiltonien cubique $\hat{H}_3$ (2) de l'hydrodynamique quantique, ainsi que l'hamiltonien quartique $\hat{H}_4$ prédit par cette théorie, voir [4, équations (24,12) et (24,13)]. Dans l'expression (14) comme dans (2), on a introduit le paramètre sans dimension

$$\Lambda = \frac{\rho \frac{d^2 \mu_0}{d\rho^2}}{3 \frac{d\mu_0}{d\rho}} = \frac{\rho^2 \frac{d^2 \mu_0}{d\rho^2}}{3mc^2} \quad (15)$$

où μ_0 est le potentiel chimique du superfluide sous-jacent dans l'état fondamental et, rappelons-le, ρ est sa densité volumique, m la masse d'une particule constituante et c la vitesse du son à température nulle, effectivement donnée par $mc^2 = \rho d\mu_0/d\rho$.

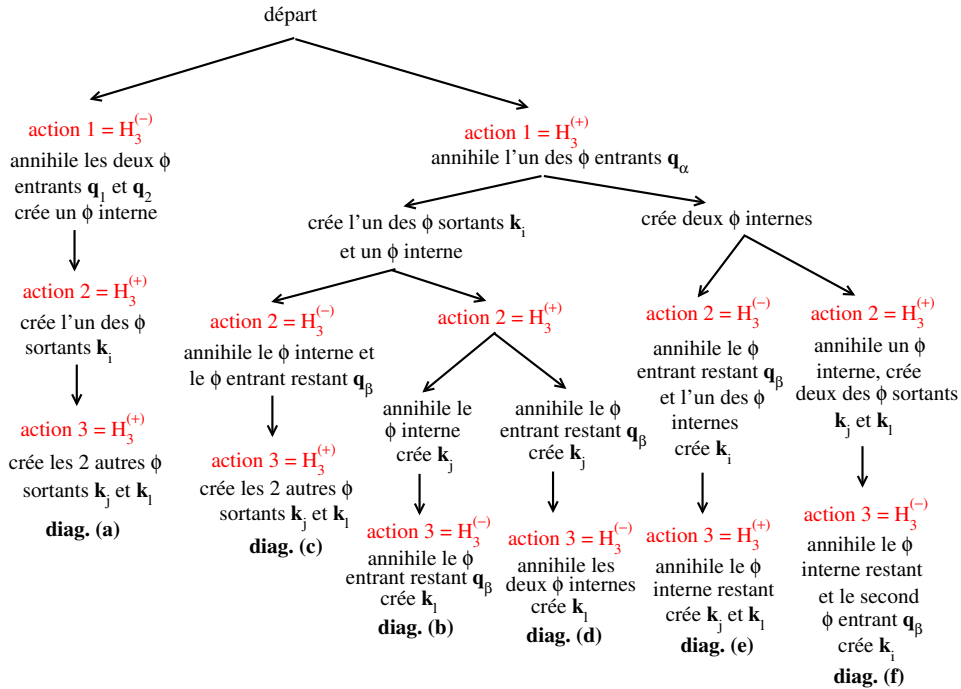


FIGURE 1 – Arbre de décision trouvant tous les diagrammes dans l'amplitude de transition (16) d'ordre 3 en $\hat{V} = \hat{H}_3^{(+)} + \hat{H}_3^{(-)}$ entre l'état initial à deux phonons $|i\rangle = |\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\rangle$ et l'état final à trois phonons $|f\rangle = |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3\rangle$. On rappelle qu'une action de $\hat{H}_3^{(+)}$ désintègre un phonon en deux (termes $\hat{b}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{b}$), et qu'une action de $\hat{H}_3^{(-)}$ fusionne deux phonons en un (termes $\hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{b}$). On a exclu les cas de mesure nulle à la limite thermodynamique où il existe des relations simples entre ces différents vecteurs d'onde, comme $\mathbf{q}_\alpha = \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l$, etc., autres que la conservation de l'impulsion totale.

De plus, à 3D, toujours grâce à la limite de basse température, il nous suffit de calculer l'amplitude de transition au premier ordre non nul en $\hat{V}$, ici l'ordre 3 comme dans l'annexe A; comme nous sommes sur la couche d'énergie $E_i = E_f$ dans l'équation (13), nous utilisons la forme mixte suivante, qui conduit aux dénominateurs d'énergie les plus simples :

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f} = \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 | \hat{V} \hat{G}_0(E_f) \hat{V} \hat{G}_0(E_i) \hat{V} | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle = \sum_{\lambda, \mu} \frac{\langle f | \hat{V} | \mu \rangle \langle \mu | \hat{V} | \lambda \rangle \langle \lambda | \hat{V} | i \rangle}{\Delta E_2(\mu) \Delta E_1(\lambda)} \quad (16)$$

où $\hat{G}_0(z) = (z\text{Id} - \hat{H}_2)^{-1}$ est la résolvante de l'hamiltonien non perturbé $\hat{H}_2 = \sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}}$ et nous avons introduit une relation de fermeture sur les états propres de $\hat{H}_2$ intermédiaires λ, μ avec les différences d'énergie $\Delta E_1(\lambda) = E_i - E_\lambda$ et $\Delta E_2(\mu) = E_f - E_\mu$. En explorant tous les cas possibles au moyen de la figure 1, nous aboutissons aux six diagrammes de la figure 2, numérotés de (a) à (f), dont les contributions à l'amplitude s'écrivent explicitement comme suit :

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(a)} = \sum_i \frac{\langle \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_l | \hat{V} | \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l \rangle \langle \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l, \mathbf{k}_i | \hat{V} | \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 \rangle \langle \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 | \hat{V} | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle}{(\varepsilon_{\mathbf{k}_j} + \varepsilon_{\mathbf{k}_l} - \varepsilon_{\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l})(\varepsilon_{\mathbf{q}_1} + \varepsilon_{\mathbf{q}_2} - \varepsilon_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2})}, \quad (17)$$

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(b)} = \sum_{\alpha} \sum_{i \neq j} \frac{\langle \mathbf{k}_l | \hat{V} | \mathbf{q}_{\beta}, \mathbf{k}_l - \mathbf{q}_{\beta} \rangle \langle \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_l - \mathbf{q}_{\beta} | \hat{V} | \mathbf{q}_{\alpha} - \mathbf{k}_i \rangle \langle \mathbf{k}_i, \mathbf{q}_{\alpha} - \mathbf{k}_i | \hat{V} | \mathbf{q}_{\alpha} \rangle}{(\varepsilon_{\mathbf{k}_l} - \varepsilon_{\mathbf{q}_{\beta}} - \varepsilon_{\mathbf{k}_l - \mathbf{q}_{\beta}})(\varepsilon_{\mathbf{q}_{\alpha}} - \varepsilon_{\mathbf{k}_i} - \varepsilon_{\mathbf{q}_{\alpha} - \mathbf{k}_i})}, \quad (18)$$

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(c)} = \sum_{\alpha} \sum_i \frac{\langle \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_l | \hat{V} | \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l \rangle \langle \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l | \hat{V} | \mathbf{q}_{\alpha} - \mathbf{k}_i, \mathbf{q}_{\beta} \rangle \langle \mathbf{k}_i, \mathbf{q}_{\alpha} - \mathbf{k}_i | \hat{V} | \mathbf{q}_{\alpha} \rangle}{(\varepsilon_{\mathbf{k}_j} + \varepsilon_{\mathbf{k}_l} - \varepsilon_{\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l})(\varepsilon_{\mathbf{q}_{\alpha}} - \varepsilon_{\mathbf{k}_i} - \varepsilon_{\mathbf{q}_{\alpha} - \mathbf{k}_i})}, \quad (19)$$

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(d)} = \sum_{\alpha} \sum_{i \neq j} \frac{\langle \mathbf{k}_l | \hat{V} | \mathbf{q}_{\alpha} - \mathbf{k}_i, \mathbf{q}_{\beta} - \mathbf{k}_j \rangle \langle \mathbf{k}_j, \mathbf{q}_{\beta} - \mathbf{k}_j | \hat{V} | \mathbf{q}_{\beta} \rangle \langle \mathbf{k}_i, \mathbf{q}_{\alpha} - \mathbf{k}_i | \hat{V} | \mathbf{q}_{\alpha} \rangle}{(\varepsilon_{\mathbf{k}_l} - \varepsilon_{\mathbf{q}_{\alpha} - \mathbf{k}_i} - \varepsilon_{\mathbf{q}_{\beta} - \mathbf{k}_j})(\varepsilon_{\mathbf{q}_{\alpha}} - \varepsilon_{\mathbf{k}_i} - \varepsilon_{\mathbf{q}_{\alpha} - \mathbf{k}_i})}, \quad (20)$$

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(e)} = \sum_{\alpha} \sum_i \frac{\langle \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_l | \hat{V} | \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l \rangle \langle \mathbf{k}_i | \hat{V} | \mathbf{q}_{\beta}, \mathbf{k}_i - \mathbf{q}_{\beta} \rangle \langle \mathbf{k}_i - \mathbf{q}_{\beta}, \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l | \hat{V} | \mathbf{q}_{\alpha} \rangle}{(\varepsilon_{\mathbf{k}_j} + \varepsilon_{\mathbf{k}_l} - \varepsilon_{\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l})(\varepsilon_{\mathbf{q}_{\alpha}} - \varepsilon_{\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l} - \varepsilon_{\mathbf{k}_i - \mathbf{q}_{\beta}})}, \quad (21)$$

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(f)} = \sum_{\alpha} \sum_i \frac{\langle \mathbf{k}_i | \hat{V} | \mathbf{q}_{\beta}, \mathbf{k}_i - \mathbf{q}_{\beta} \rangle \langle \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_l | \hat{V} | \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l \rangle \langle \mathbf{k}_i - \mathbf{q}_{\beta}, \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l | \hat{V} | \mathbf{q}_{\alpha} \rangle}{(\varepsilon_{\mathbf{k}_i} - \varepsilon_{\mathbf{q}_{\beta}} - \varepsilon_{\mathbf{k}_i - \mathbf{q}_{\beta}})(\varepsilon_{\mathbf{q}_{\alpha}} - \varepsilon_{\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l} - \varepsilon_{\mathbf{k}_i - \mathbf{q}_{\beta}})}. \quad (22)$$

On a noté $\varepsilon_{\mathbf{q}} = \hbar \omega_{\mathbf{q}}$ et $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar \omega_{\mathbf{k}}$ les énergies propres des phonons et on a tenu compte de la conservation de l'impulsion à chaque sommet. De plus, comme sur la figure 2, on a posé (i) $\{\beta\} = \{1, 2\} \setminus \{\alpha\}$ lorsqu'il y a une somme sur $\alpha \in \{1, 2\}$, (ii) $\{j, l\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ lorsqu'il y a une somme simple sur $i \in \{1, 2, 3\}$ (l'ordre choisi entre j et l est sans importance car le sommande est une fonction symétrique de ces indices, on peut par exemple imposer $j < l$) et (iii) $\{l\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}$ lorsqu'il y a une somme double sur $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$. En d'autres termes, (α, β) est une permutation des indices $(1, 2)$ dans l'état initial et (i, j, l) une permutation des indices $(1, 2, 3)$ dans l'état final. On vérifie aisément que l'amplitude est une fonction des nombres d'onde entrants et sortants, ainsi que de tous les angles non orientés entre les vecteurs d'onde entrants et sortants :

$$\theta_{12} = \widehat{(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)}, \quad \psi_{\alpha i} = \widehat{(\mathbf{q}_{\alpha}, \mathbf{k}_i)}, \quad \chi_{ij} = \widehat{(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j)}, \quad (23)$$

les angles $\theta_{12}, \psi_{11}, \psi_{12}$ ainsi définis reproduisant ceux des coordonnées sphériques dans (12).

Désormais, nous nous plaçons dans la limite de basse température, contrôlée par le petit paramètre

$$\epsilon \equiv \frac{k_B T}{mc^2} \rightarrow 0^+. \quad (24)$$

Les nombres d'onde des phonons thermiques entrants et sortants et tous les angles (23) tendent vers zéro linéairement en température [13] — c'était déjà le cas dans les collisions à quatre phonons [5,8] ; ceci signifie que les nombres d'onde et les angles mis à l'échelle, repérés par une barre et définis par

$$q_{\alpha} = \frac{k_B T}{\hbar c} \bar{q}_{\alpha}, \text{ etc.}, \quad \theta_{12} = \epsilon |\gamma|^{1/2} \bar{\theta}_{12}, \text{ etc.}, \quad (25)$$

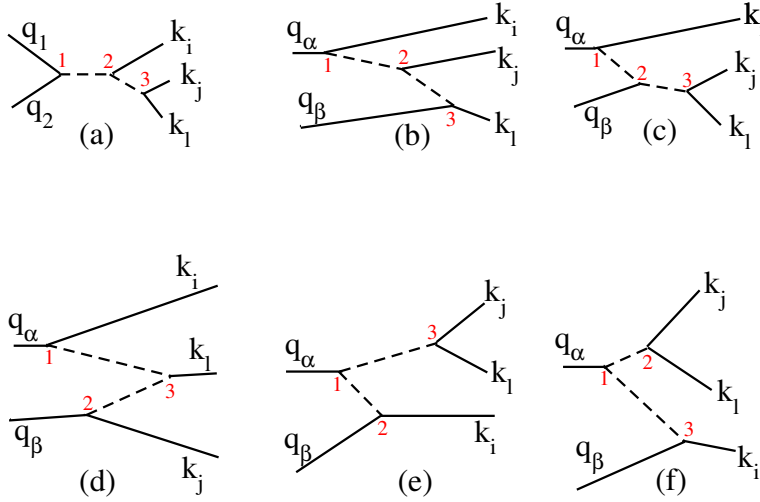


FIGURE 2 – Les six diagrammes intervenant dans l’amplitude de collision à cinq phonons $2\phi \rightarrow 3\phi$ de l’équation (16). Ici $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}$ et $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ sont les indices des vecteurs d’onde entrants et des vecteurs d’onde sortants à prendre dans les différents ordres possibles dans les actions successives — représentées de gauche à droite — de $\hat{H}_3^{(\pm)}$, mais sans double comptage en cas d’invariance du diagramme par échange de deux indices. Les lignes des phonons internes sont en tireté. La numérotation des actions de $\hat{H}_3^{(\pm)}$ en rouge est celle de la figure 1.

ont une limite finie et non nulle, et que la relation de dispersion (1) de notre branche acoustique concave (paramètre de courbure $\gamma < 0$) s’écrit

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}} \xrightarrow{T \rightarrow 0^+} \bar{q}^{\text{fixé}} k_B T \left[\bar{q} - \frac{|\gamma|}{8} \epsilon^2 \bar{q}^3 + O(\epsilon^4 \ln \epsilon) \right]. \quad (26)$$

La prise de limite des expressions (17)–(22) sur la couche d’énergie est détaillée dans l’annexe B, nous donnons ici seulement le résultat :

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f} \xrightarrow[T \rightarrow 0^+]{\text{angles}=O(T)} \frac{3^3 \sqrt{2}}{2^3 \gamma^{3/2}} \frac{mc^2(1+\Lambda)^3}{\epsilon^{3/2} \rho^{3/2} \gamma^2} \frac{1}{(\bar{q}_1 \bar{q}_2 \bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3)^{1/2}} \bar{\mathcal{A}}_{i \rightarrow f} \quad (27)$$

avec l’amplitude réduite

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}}_{i \rightarrow f} = & \sum_{1 \leq i \leq 3} \frac{\bar{k}_i}{\left[\frac{\bar{\theta}_{12}^2}{(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)^2} + \frac{3}{4} \right] \left[\frac{\bar{\chi}_{jl}^2}{(\bar{k}_j + \bar{k}_l)^2} + \frac{3}{4} \right]} + \sum_{1 \leq \alpha \leq 2} \sum_{1 \leq i \leq 3} \frac{(-\bar{q}_\beta)}{\left[\frac{\bar{\psi}_{\alpha i}^2}{(\bar{q}_\alpha - \bar{k}_i)^2} + \frac{3}{4} \right] \left[\frac{\bar{\chi}_{jl}^2}{(\bar{k}_j + \bar{k}_l)^2} + \frac{3}{4} \right]} \\ & + \sum_{1 \leq \alpha \leq 2} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{\bar{k}_l}{\left[\frac{\bar{\psi}_{\alpha i}^2}{(\bar{q}_\alpha - \bar{k}_i)^2} + \frac{3}{4} \right] \left[\frac{\bar{\psi}_{\beta j}^2}{(\bar{q}_\beta - \bar{k}_j)^2} + \frac{3}{4} \right]}. \end{aligned} \quad (28)$$

Il faut développer de même la différence d’énergie $E_i - E_f$ en argument du delta de Dirac dans (13). La forme (26) donne immédiatement :

$$E_i - E_f \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} k_B T \left[\bar{q}_1 + \bar{q}_2 - \bar{k}_1 - \bar{k}_2 - \bar{k}_3 - \frac{|\gamma|}{8} \epsilon^2 (\bar{q}_1^3 + \bar{q}_2^3 - \bar{k}_1^3 - \bar{k}_2^3 - \bar{k}_3^3) + O(\epsilon^4 \ln \epsilon) \right]. \quad (29)$$

Seul le nombre d’onde réduit $\bar{k}_3$ est inconnu, mais il s’obtient aisément à l’ordre ϵ^2 en prenant la norme du premier et du second membre de l’équation (9), avec l’astuce d’écriture exploitant le

fait qu'on a $q_1 + q_2 > k_1 + k_2$ lorsque tous les vecteurs entrants et sortants sont quasi colinéaires et de même sens :

$$k_3 = (q_1 + q_2 - k_1 - k_2) \left[1 + \frac{(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2 - (q_1 + q_2 - k_1 - k_2)^2}{(q_1 + q_2 - k_1 - k_2)^2} \right]^{1/2}. \quad (30)$$

Après développement des carrés au numérateur de la grande fraction, ne restent plus que des différences entre doubles produits de vecteurs et de scalaires, comme $-2\mathbf{q}_\alpha \cdot \mathbf{k}_i + 2q_\alpha k_i = 2q_\alpha k_i(1 - \cos \psi_{\alpha i}) \sim q_\alpha k_i \psi_{\alpha i}^2$. Les termes linéaires en nombre d'onde se compensent dans (29) et nous retenons que

$$E_i - E_f \underset{T \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2} k_B T |\gamma| \epsilon^2 (u - v) \quad (31)$$

avec

$$u = \frac{\bar{q}_1 \bar{q}_2 \bar{\theta}_{12}^2 + \bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{\chi}_{12}^2 - \sum_{\alpha, i=1}^2 \bar{q}_\alpha \bar{k}_i \bar{\psi}_{\alpha i}^2}{\bar{q}_1 + \bar{q}_2 - \bar{k}_1 - \bar{k}_2}, \quad (32)$$

$$v = \frac{1}{4} (\bar{q}_1^3 + \bar{q}_2^3 - \bar{k}_1^3 - \bar{k}_2^3 - \bar{k}_3^3). \quad (33)$$

Les comportements dominants en ϵ étant maintenant déterminés, on supposera satisfaite dans la suite la relation valable à l'ordre zéro :

$$\bar{q}_1 + \bar{q}_2 = \bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3. \quad (34)$$

Dans toutes ces formules, les différentes variables angulaires ne sont bien sûr pas indépendantes, mais s'expriment en fonction des angles polaires $\theta_{12}, \psi_{11}, \psi_{12}$ et azimutaux ϕ_1, ϕ_2 du paramétrage sphérique (12). Les calculs trigonométriques requis sont un peu longs mais sans difficulté dans la limite des petits angles¹¹. Les résultats obtenus se simplifient grandement si l'on pense à introduire des variables complexes encapsulant ψ_{11}, ψ_{12} et ϕ_1, ϕ_2 :

$$Z_1 \equiv \bar{\psi}_{11} \exp(i\phi_1) - \frac{\bar{q}_2}{\bar{q}_1 + \bar{q}_2} \bar{\theta}_{12}, \quad Z_2 \equiv \bar{\psi}_{12} \exp(i\phi_2) - \frac{\bar{q}_2}{\bar{q}_1 + \bar{q}_2} \bar{\theta}_{12}, \quad Z_3 = -\frac{\bar{k}_1 Z_1 + \bar{k}_2 Z_2}{\bar{k}_3}. \quad (36)$$

Le décalage proportionnel à $\bar{\theta}_{12}$ découple astucieusement cette variable angulaire des autres dans la forme quadratique u , voir plus bas, et la variable surnuméraire Z_3 , non indépendante, permet de rétablir une certaine symétrie entre les vecteurs sortants $\mathbf{k}_i$ (brisée dans le paramétrage (9) et (12)). Alors, on a pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$:

$$\bar{\psi}_{1i} = \left| Z_i + \frac{\bar{q}_2}{\bar{q}_1 + \bar{q}_2} \bar{\theta}_{12} \right|, \quad \bar{\psi}_{2i} = \left| Z_i - \frac{\bar{q}_1}{\bar{q}_1 + \bar{q}_2} \bar{\theta}_{12} \right|, \quad \bar{\chi}_{ij} = |Z_i - Z_j| \quad (37)$$

et

$$u = \frac{\bar{q}_1 \bar{q}_2}{\bar{q}_1 + \bar{q}_2} \bar{\theta}_{12}^2 - \frac{1}{\bar{k}_3} (Z_1^*, Z_2^*) M \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M = \begin{pmatrix} \bar{k}_1(\bar{k}_1 + \bar{k}_3) & \bar{k}_1 \bar{k}_2 \\ \bar{k}_1 \bar{k}_2 & \bar{k}_2(\bar{k}_2 + \bar{k}_3) \end{pmatrix}. \quad (38)$$

On note que la matrice M ainsi introduite est définie positive et de déterminant

$$\det M = \bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3 (\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3). \quad (39)$$

¹¹On accède au sinus de l'angle cherché entre deux vecteurs au travers de la norme de leur produit vectoriel, sachant qu'on peut ici linéariser les sinus des angles autres qu'azimutaux et remplacer leur cosinus par un. Par exemple, la relation exacte $k_i k_3 \sin \chi_{i3} = |\mathbf{k}_i \wedge \mathbf{k}_3|$ ($i \in \{1, 2\}$) donne, après usage de (9) et (12) et linéarisation trigonométrique, $k_i k_3 \chi_{i3} \sim k_i |(\psi_{1i} \cos \phi_i, \psi_{1i} \sin \phi_i, 1) \wedge (q_2 \theta_{12} - k_j \psi_{1j} \cos \phi_j, -k_j \psi_{1j} \sin \phi_j, q_1 + q_2 - k_j \simeq k_3 + k_i)|$ où $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$ et l'on a tenu compte de (34) et du fait que $\mathbf{k}_i \wedge \mathbf{k}_i = \mathbf{0}$. Il en résulte que

$$\chi_{i3} \sim \left| \left((k_3 + k_i) \psi_{1i} \sin \phi_i + k_j \psi_{1j} \sin \phi_j, -((k_3 + k_i) \psi_{1i} \cos \phi_i + k_j \psi_{1j} \cos \phi_j - q_2 \theta_{12}), 0 \right) \right| / k_3 \quad (35)$$

ou encore, après mise à l'échelle des nombres d'onde et des angles, $\bar{\chi}_{i3} = |(\bar{k}_3 + \bar{k}_i) z_i + \bar{k}_j z_j - \bar{q}_2 \bar{\theta}_{12}| / \bar{k}_3$ avec les nombres complexes $z_n = \bar{\psi}_{1n} \exp(i\phi_n)$, $n \in \{1, 2\}$. Ceci se réduit à $\bar{\chi}_{i3} = |Z_i - Z_3|$ grâce à (34) et (36).

En reportant dans l'équation (13) les résultats de cette section, nous obtenons finalement la vitesse de variation du nombre de phonons à l'ordre dominant en température,

$$\frac{d}{dt} \frac{N_\phi}{\mathcal{V}} \underset{T \rightarrow 0^+}{\sim} k_B T \frac{mc(1+\Lambda)^6}{\hbar^2 \gamma^2 \rho^3} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^{11} \frac{3^5}{4^7 \pi^9} z_\phi^2 (1 - z_\phi) C_\phi(z_\phi) \quad (40)$$

avec un coefficient sans dimension fonction seulement de la fugacité des phonons,

$$C_\phi(z_\phi) = \int_0^{+\infty} \prod_{\alpha=1}^2 d\bar{q}_\alpha \prod_{i=1}^3 d\bar{k}_i \delta\left(\sum_{\alpha=1}^2 \bar{q}_\alpha - \sum_{i=1}^3 \bar{k}_i\right) I_{\text{ang}}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3) \\ \times e^{-(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)} \prod_{\alpha=1}^2 (1 + \bar{n}_{q_\alpha}^{\text{lin}}) \prod_{i=1}^3 (1 + \bar{n}_{k_i}^{\text{lin}}). \quad (41)$$

Ici, $\bar{n}^{\text{lin}}$ est la loi de Bose pour une relation de dispersion des phonons linéarisée,

$$\bar{n}_q^{\text{lin}} = \frac{1}{e^{\beta(\hbar c q - \mu_\phi)} - 1} = \frac{1}{z_\phi^{-1} \exp \bar{q} - 1} \quad (42)$$

et la fonction I_{ang} est l'intégrale angulaire¹²

$$I_{\text{ang}}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3) = \frac{\bar{q}_1 \bar{q}_2 \bar{k}_1 \bar{k}_2}{\bar{k}_3} \int_0^{+\infty} d\bar{\theta}_{12} \bar{\theta}_{12} \int_{\mathbb{C}} d^2 Z_1 \int_{\mathbb{C}} d^2 Z_2 |\mathcal{A}_{i \rightarrow i}|^2 \delta(u - v). \quad (43)$$

Une forme plus belle des intégrales (41) et (43), et aussi plus facile à traiter numériquement, est donnée dans l'annexe C. Le coefficient C_ϕ est, comme les nombres d'occupation thermiques, une fonction croissante de $z_\phi - I_{\text{ang}}$, intégrale d'une fonction positive, est positive — mais, nous le verrons dans la section 4, en dépend en réalité assez peu.

Terminons cette section par une remarque importante. On s'attend à ce que l'hydrodynamique quantique de Landau et Khalatnikov soit une théorie effective exacte à basse énergie, donc à ce que (40) soit un équivalent exact de la vitesse de variation du nombre de phonons, quelle que soit la force des interactions dans le superfluide (nous n'avons pas de raison de mettre en doute les équations cinétiques en régime de couplage faible entre phonons).

4. Cinétique de relaxation de la fugacité des phonons

La loi de Bose (4) fait intervenir deux variables dépendant du temps, la température $T(t)$ et la fugacité des phonons $z_\phi(t) = \exp(\beta(t)\mu_\phi(t))$ où $\mu_\phi(t)$ est le potentiel chimique des phonons. Nous ne disposons que d'une seule équation d'évolution, celle (40) sur le nombre total de phonons N_ϕ . Une seconde équation nous est heureusement fournie par la conservation de l'énergie totale des phonons E_ϕ , notre fluide étant isolé dans le volume de quantification $\mathcal{V}$. Encore faut-il relier ces quantités à z_ϕ et T .

Pour cela, le plus simple est de calculer le grand potentiel $\Omega_\phi(T, \mu_\phi, \mathcal{V})$ du gaz de phonons, toujours à la limite thermodynamique et, ce qui autorise à linéariser la branche acoustique, à l'ordre dominant en température :

$$\frac{\Omega_\phi}{\mathcal{V}} \underset{T \rightarrow 0^+}{\sim} k_B T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \ln[1 - e^{-\beta(\hbar c q - \mu_\phi)}] = -mc^2 \frac{\epsilon^4}{\pi^2 \xi^3} g_4(z_\phi) \quad (44)$$

¹²L'intégrale dans $\mathbb{C}$ d'une fonction de la variable complexe $f(z)$, notée ici $J = \int_{\mathbb{C}} d^2 z f(z)$, est définie comme l'intégrale dans $\mathbb{R}^2$ sur les parties réelle et imaginaire de z , $J = \int_{\mathbb{R}^2} dx dy f(x + iy)$. Avec un système de coordonnées polaires dans le plan complexe, c'est-à-dire une représentation de z par son module $\psi > 0$ et sa phase $\phi \in [0, 2\pi[$ comme dans (36), on obtient plutôt — mais de manière équivalente — $J = \int_0^{+\infty} d\psi \psi \int_0^{2\pi} d\phi f(\psi \exp(i\phi))$, ce qui est la forme apparaissant dans (13) après linéarisation de $\sin \psi$ aux petits angles. La différence entre les variables z et Z dans (36) n'étant qu'une simple translation (de jacobien visiblement unité), ceci explique comment passer de l'intégrale sphérique sur la direction de $\mathbf{k}_1$ ou $\mathbf{k}_2$ dans (13) à une intégrale sur le plan complexe dans (43), un voisinage proche du pôle nord sur la sphère pouvant être approximé par le plan tangent.

où $\xi = \hbar/mc$ est la longueur dite de relaxation, $g_\alpha(z) = \sum_{n \geq 1} z^n/n^\alpha$ est une fonction de Bose ou polylogarithme et l'on pose $\epsilon = k_B T/mc^2$ comme dans l'équation (24). Les différentes grandeurs thermodynamiques se déduisent de la définition $\Omega_\phi = E_\phi - TS_\phi - \mu_\phi N_\phi$ et de la forme différentielle associée, $d\Omega_\phi = -S_\phi dT - N_\phi d\mu_\phi - P_\phi dV$, avec S_ϕ l'entropie¹³ et P_ϕ la pression du gaz de phonons. En se souvenant que $(d/dv)g_\alpha(e^v) = g_{\alpha-1}(e^v)$, on obtient

$$\frac{N_\phi}{V} \sim \frac{\epsilon^3}{\pi^2 \xi^3} g_3(z_\phi), \quad \frac{E_\phi}{V} \sim mc^2 \frac{3\epsilon^4}{\pi^2 \xi^3} g_4(z_\phi), \quad \frac{S_\phi}{V k_B} \sim \frac{\epsilon^3}{\pi^2 \xi^3} [4g_4(z_\phi) - g_3(z_\phi) \ln z_\phi]. \quad (45)$$

La pression est proportionnelle à l'énergie volumique, $P_\phi \sim E_\phi/3V$; c'est une propriété bien connue des gaz parfaits ultrarelativistes.

La conservation de l'énergie permet d'éliminer $\epsilon(t)$ au profit de la fugacité $z_\phi(t)$, le plus commodément en termes de sa valeur $\epsilon_{eq} = k_B T_{eq}/mc^2$ à l'équilibre thermochimique complet, atteint pour $z_\phi = 1$ (asymptotiquement en temps) et repéré par l'indice « eq » :

$$\epsilon^4 g_4(z_\phi) = \text{cte}_{t \rightarrow +\infty} = \epsilon_{eq}^4 g_4(1) = \epsilon_{eq}^4 \zeta(4) \quad \text{donc} \quad \epsilon(t) = \epsilon_{eq} \left(\frac{\zeta(4)}{g_4(z_\phi(t))} \right)^{1/4} \quad (46)$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann. Nous tirons alors des expressions (45) et (40) de N_ϕ et de sa dérivée l'équation du mouvement cherchée sur la fugacité :

$$\frac{1}{\Gamma_\phi^{eq}} \frac{d}{dt} z_\phi = F(z_\phi) \equiv \frac{4\zeta(2)\zeta(4) - 3\zeta^2(3)}{4g_2(z_\phi)g_4(z_\phi) - 3g_3^2(z_\phi)} \left(\frac{\zeta(4)}{g_4(z_\phi)} \right)^{5/4} \frac{C_\phi(z_\phi)}{C_\phi(1)} z_\phi^3 (1 - z_\phi) \geq 0. \quad (47)$$

Nous avons introduit le taux de relaxation Γ_ϕ^{eq} de z_ϕ au voisinage de l'équilibre complet,

$$\Gamma_\phi^{eq} \underset{T_{eq} \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{3^5}{(4\pi)^7} \frac{4\zeta(4)C_\phi(1)}{4\zeta(2)\zeta(4) - 3\zeta^2(3)} \frac{(1+\Lambda)^6}{\gamma^2(\rho\xi^3)^3} \left(\frac{k_B T_{eq}}{mc^2} \right)^9 \frac{mc^2}{\hbar} \quad (48)$$

pour nous ramener à une fonction $F(z_\phi)$ sans dimension et dépendant seulement de la fugacité. Ce taux est proportionnel à la température à la puissance neuf, comme nous l'annonçons dans la section 1. Il entre dans l'équation de relaxation linéaire à laquelle obéit asymptotiquement toute grandeur G variant — après élimination de ϵ comme dans (46) — linéairement avec la fugacité en $z_\phi = 1$ (au sens où $(d/dz_\phi)G(z_\phi) \neq 0$ en $z_\phi = 1$),

$$\frac{d}{dt} G(z_\phi(t)) \Big|_{\Gamma_\phi^{eq} t \rightarrow +\infty} \sim -\Gamma_\phi^{eq} [G(z_\phi(t)) - G_{eq}] \quad (49)$$

telle que la température T , le potentiel chimique μ_ϕ ou la densité $\rho_\phi = N_\phi/V$ du gaz de phonons,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T(t) \Big|_{\Gamma_\phi^{eq} t \rightarrow +\infty} &\sim -\Gamma_\phi^{eq} [T(t) - T_{eq}], \\ \frac{d}{dt} \mu_\phi \Big|_{\Gamma_\phi^{eq} t \rightarrow +\infty} &\sim -\Gamma_\phi^{eq} \mu_\phi, \\ \frac{d}{dt} \rho_\phi \Big|_{\Gamma_\phi^{eq} t \rightarrow +\infty} &\sim -\Gamma_\phi^{eq} [\rho_\phi - \rho_\phi^{eq}]. \end{aligned} \quad (50)$$

Aux temps longs $\Gamma_\phi^{eq} t \gg 1$, on peut en effet remplacer G par son approximation affine $G(z_\phi) \simeq G_{eq} + G'(1)(z_\phi - 1)$ et utiliser le fait que, par définition, $(d/dt)z_\phi \sim -\Gamma_\phi^{eq}(z_\phi - 1)$. Ici $G'(1)$ est la dérivée de G par rapport à z_ϕ en $z_\phi = 1$. Si la grandeur G varie au contraire quadratiquement — la dérivée première $G'(1)$ est nulle, la dérivée seconde $G''(1)$ est non nulle —, on utilise plutôt

¹³On notera que, dans notre limite de basse température, S_ϕ est aussi l'entropie du système dans son ensemble, dans la mesure où les phonons sont les seules excitations peuplées thermiquement. On pourrait donc la noter S .

l'approximation $G(z_\phi) \simeq G_{\text{eq}} + (1/2)G''(1)(z_\phi - 1)^2$ et la relaxation se produit asymptotiquement avec un taux double,

$$\frac{d}{dt} G(z_\phi) \Big|_{\Gamma_\phi^{\text{eq}} t \rightarrow +\infty} \sim G''(1)(z_\phi - 1) \frac{d}{dt} z_\phi \Big|_{\Gamma_\phi^{\text{eq}} t \rightarrow +\infty} \sim -2\Gamma_\phi^{\text{eq}} [G(z_\phi) - G_{\text{eq}}] \quad (51)$$

en sous-entendant la dépendance en temps de z_ϕ pour alléger, mais il est physiquement plus parlant d'écrire

$$\frac{d}{dt} G(z_\phi) \Big|_{\Gamma_\phi^{\text{eq}} t \rightarrow +\infty} \sim -\frac{G''(1)}{\Gamma_\phi^{\text{eq}}} \left(\frac{dz_\phi}{dt} \right)^2. \quad (52)$$

Ce cas de variation quadratique est celui de l'entropie S_ϕ , dont l'expression (45) et l'élimination (46) conduisent à

$$\frac{S_\phi(z_\phi)}{S_\phi^{\text{eq}}} = \left(\frac{\zeta(4)}{g_4(z_\phi)} \right)^{3/4} \frac{4g_4(z_\phi) - g_3(z_\phi) \ln z_\phi}{4\zeta(4)} \quad (53)$$

donc à¹⁴ $S'_\phi(1) = 0$ et

$$\frac{S''_\phi(1)}{S_\phi^{\text{eq}}} = -\frac{4\zeta(2)\zeta(4) - 3\zeta^2(3)}{16\zeta^2(4)} < 0. \quad (54)$$

L'équation (52) appliquée à S_ϕ reproduit joliment la première formule hors texte de [21, section 11], issue d'un argument « à la Landau », dans le contexte un peu différent d'une transformation adiabatique pilotée de l'extérieur par la variation arbitrairement lente d'un paramètre physique du système. Plus généralement, dans notre problème, nous trouvons que l'entropie est toujours une fonction croissante du temps, en accord avec le second principe de la thermodynamique, même loin de l'état d'équilibre complet $z_\phi = 1$:

$$\frac{1}{\Gamma_\phi^{\text{eq}}} \frac{d}{dt} \frac{S_\phi(t)}{S_\phi^{\text{eq}}} = \frac{4\zeta(2)\zeta(4) - 3\zeta^2(3)}{16\zeta^2(4)} \left(\frac{\zeta(4)}{g_4(z_\phi)} \right)^3 (-\ln z_\phi) z_\phi^2 (1 - z_\phi) \frac{C_\phi(z_\phi)}{C_\phi(1)} \geq 0. \quad (55)$$

Formellement, l'équation du mouvement (47) s'intègre facilement car elle est à variables séparables. De plus, comme elle est du premier ordre en temps, sa solution particulière correspondant à l'état initial $z_\phi(t=0) = 0$ d'un gaz de phonons de Boltzmann — infiniment non dégénéré car infiniment peu dense — contient toutes les trajectoires possibles, à une redéfinition près de l'origine des temps. Cette solution particulière est donnée par

$$\int_0^{z_\phi(t)} \frac{dz_\phi}{F(z_\phi)} = \Gamma_\phi^{\text{eq}} t. \quad (56)$$

Il nous reste à calculer numériquement $C_\phi(z_\phi)$, comme il est expliqué dans l'annexe D et représenté sur la figure 3(a), pour tracer ladite solution particulière sur la figure 3(b). Des expressions analytiques simples peuvent être obtenues dans des cas limites. Aux temps courts, la propriété $g_\alpha(z) \sim z$, $z \rightarrow 0$ conduit à

$$F(z_\phi) \Big|_{z_\phi \rightarrow 0^+} \sim \frac{4}{5} A z_\phi^{-1/4} \quad \text{avec} \quad A = \frac{5}{4} [\zeta(4)]^{5/4} [4\zeta(2)\zeta(4) - 3\zeta^2(3)] \frac{C_\phi(0)}{C_\phi(1)} \quad (57)$$

d'où la loi de puissance non entière

$$z_\phi(t) \Big|_{\Gamma_\phi^{\text{eq}} t \rightarrow 0^+} \sim (A\Gamma_\phi^{\text{eq}} t)^{4/5} \quad (58)$$

représentée en rouge sur la figure 3(b). Numériquement, nous trouvons que

$$C_\phi(0) = 3,528(1) \times 10^4 \quad \text{et} \quad C_\phi(1) = 5,422(3) \times 10^4 \quad \text{donc} \quad A = 2,502(2). \quad (59)$$

¹⁴Nous disposons en effet des développements limités en $v = 0$, $g_4(e^v) = \zeta(4) + \zeta(3)v + (1/2)\zeta(2)v^2 + \dots$ et $g_3(e^v) = \zeta(3) + \zeta(2)v + \dots$ avec $v = \ln z_\phi$.

Aux temps longs, la propriété¹⁵

$$\frac{1}{F(z_\phi)} \underset{z_\phi \rightarrow 1^-}{=} \frac{1}{1 - z_\phi} + O(\ln(1 - z_\phi)) \quad (60)$$

¹⁵La fonction $g_2(z_\phi)$ admet le terme singulier $-(z_\phi - 1)\ln(1 - z_\phi)$ dans son développement en $z_\phi = 1^-$, car sa dérivée en ce point diverge comme $g_1(z_\phi) = -\ln(1 - z_\phi)$. Numériquement, la dérivée de $C_\phi(z_\phi)$ semble elle aussi diverger logarithmiquement en $z_\phi = 1^-$ (analytiquement, ceci résulte du fait que, pour $z_\phi = 1$, le facteur statistique $\prod_{\alpha,i} (1 + \bar{n})$ dans (41) diverge lorsqu'un ou plusieurs nombres d'onde réduits tendent vers zéro, tandis que I_{ang} tend vers zéro toujours assez vite pour faire converger l'intégrale donnant $C_\phi(1)$ mais pas toujours assez vite pour faire converger celle donnant sa dérivée $C'_\phi(1)$). D'où la domination logarithmique du reste dans (60). Soyons plus précis sur le comportement de $I_{\text{ang}}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3)$ (43) à faible nombre d'onde, en nous mettant directement sur la variété $\mathcal{W}$ (106) pour simplifier : (a) si $\bar{q}_1 \rightarrow 0^+$ à $\bar{k}_1$ et $\bar{k}_2$ fixés, l'annulation est quartique $I_{\text{ang}} \propto \bar{q}_1^4$; (b) si $\bar{k}_1 \rightarrow 0^+$ à $\bar{q}_1$ et $\bar{k}_2$ fixés, elle est linéaire $I_{\text{ang}} \propto \bar{k}_1$; (c) si $\bar{k}_1 \propto \bar{k}_2 \rightarrow 0^+$ à $\bar{q}_1$ fixé, elle est quintique $I_{\text{ang}} \sim C(\bar{q}_1) \bar{k}_1 \bar{k}_2 (\bar{k}_1^3 + \bar{k}_2^3) + (4\pi/3)^2 \bar{q}_1 \bar{q}_2 \bar{k}_1 \bar{k}_2 (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)^3$ où $C(\bar{q}_1)$ est une certaine fonction de $\bar{q}_1$; (d) si $\bar{q}_1 \propto \bar{k}_1 \propto \bar{k}_2 \rightarrow 0^+$, elle est sextique $I_{\text{ang}} \sim (4\pi/3)^2 \bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{q}_1 [\min(\bar{q}_1^3, (\bar{k}_1 + \bar{k}_2)^3) + Y(\bar{q}_1 - \bar{k}_1) \min(\bar{k}_2^3, (\bar{q}_1 - \bar{k}_1)^3) + Y(\bar{q}_1 - \bar{k}_2) \min(\bar{k}_1^3, (\bar{q}_1 - \bar{k}_2)^3)]$ avec Y la fonction de Heaviside. Nous obtenons ces résultats dans la représentation de l'annexe C.3, c'est-à-dire avec le paramétrage (116) des variables complexes Z_1 et Z_2 en termes de ζ_+ et ζ_- , l'écriture (121) de I_{ang} comme une intégrale sur ζ_+ et ζ_- dans le plan complexe et l'expression (123) de l'angle $\bar{\theta}_{12}$ sur la couche d'énergie. Le résultat (a) s'obtient en passant dans (121) à la limite $\bar{q}_1 \rightarrow 0^+$ sous le signe intégral à ζ_+ et ζ_- fixés et en montrant que $\mathcal{A}_{i \rightarrow f} \propto \bar{q}_1^2$ (les termes dominants dans (28) sont $\propto 1/\bar{\theta}_{12}^{(0)2} \propto \bar{q}_1$ mais ils se compensent à cet ordre). Le résultat (b) s'obtient en effectuant le changement de variable $\zeta_- = \bar{k}_1^{1/2} \check{\zeta}_-$ puis en passant à la limite $\bar{k}_1 \rightarrow 0^+$ à ζ_+ et $\check{\zeta}_-$ fixés (on vérifie que $\mathcal{A}_{i \rightarrow f} \propto \bar{k}_1^0$, le facteur $\bar{k}_1$ provient du jacobien $d^2\zeta_-/d^2\check{\zeta}_-$). Si l'on prend $\bar{k}_2 > \bar{k}_1$ pour simplifier les notations, le résultat (c) s'obtient en passant à la limite (i) à ζ_+ et $\check{\zeta}_- = \zeta_-/\bar{k}_1^{1/2}$ fixés ($\mathcal{A}_{i \rightarrow f} \propto \bar{k}_2^2$, les termes dominants $\propto \bar{k}_2$ se compensent), puis (ii) à ζ_- et $\check{\zeta}_+ = \zeta_+/\bar{k}_2^{1/2}$ fixés ($\mathcal{A}_{i \rightarrow f} \propto \bar{k}_1^2$, les termes dominants $\propto \bar{k}_1$ se compensent), et enfin (iii) à ζ_+ et $w \in \mathbb{C}$ fixés avec le changement de variable $\zeta_- = \check{\zeta}_{12=0}(\check{\zeta}_+) + w \bar{k}_2^{3/2}$ (ici $\check{\zeta}_{12=0}(\check{\zeta}_+) = [(a-b)/(a+b)](m_-/m_+)^{1/2} \check{\zeta}_+$ est la valeur de ζ_- annulant $\bar{\chi}_{12}$ à ζ_+ fixé). Toujours pour $\bar{k}_2 > \bar{k}_1$, le résultat (d) s'obtient d'abord en passant à la limite à $\check{\zeta}_+ = \zeta_+/\bar{k}_2^{1/2}$ et w fixés, après avoir effectué les changements de variables (i) $\zeta_- = \check{\zeta}_{12=0}(\check{\zeta}_+) + \bar{k}_2^{3/2} w$ et (ii) $\zeta_- = \check{\zeta}_{11=0}(\check{\zeta}_+) + \bar{k}_2^{3/2} w$, puis en passant à la limite à $\check{\zeta}_- = \zeta_-/\bar{k}_1^{1/2}$ et w fixés après le changement de variable (iii) $\zeta_+ = \check{\zeta}_{12=0}(\check{\zeta}_-) + \bar{k}_2^{3/2} w$; contrairement à $\check{\zeta}_{12=0}(\check{\zeta}_+)$, le point d'annulation de $\bar{\psi}_{11}$ ou de $\bar{\psi}_{12}$ à $\check{\zeta}_+$ ou $\check{\zeta}_-$ fixé n'a pas d'expression explicite simple, mais il suffit ici de le connaître à l'ordre dominant, $\check{\zeta}_{11=0}(\check{\zeta}_+) \sim [\bar{k}_1/(\bar{q}_1 - \bar{k}_1)]^{1/2} [\bar{k}_2 |\check{\zeta}_+|^2 + (3/4)(\bar{k}_1 + \bar{k}_2 - \bar{q}_1)]^{1/2}$ ou $\check{\zeta}_{12=0}(\check{\zeta}_-) \sim [\bar{k}_2/(\bar{q}_1 - \bar{k}_2)]^{1/2} [\bar{k}_1 |\check{\zeta}_-|^2 + (3/4)(\bar{k}_1 + \bar{k}_2 - \bar{q}_1)]^{1/2}$ (il n'existe alors que pour $\bar{q}_1 > \bar{k}_1$ ou $\bar{q}_1 > \bar{k}_2$). On l'aura compris dans (d), les lieux d'annulation des angles $\bar{\psi}_{\alpha i}$ ou $\bar{\chi}_{j l}$ ne contribuent à I_{ang} à l'ordre dominant que si, dans les dénominateurs de (28), ces angles sont divisés par des « largeurs de lorentzienne » $|\bar{q}_\alpha - \bar{k}_i|$ ou $\bar{k}_j + \bar{k}_l$ tendant vers zéro (l'angle $\bar{\psi}_{23}$ fait exception car il tend partout vers zéro à $\check{\zeta}_+$ et $\check{\zeta}_-$ fixés).

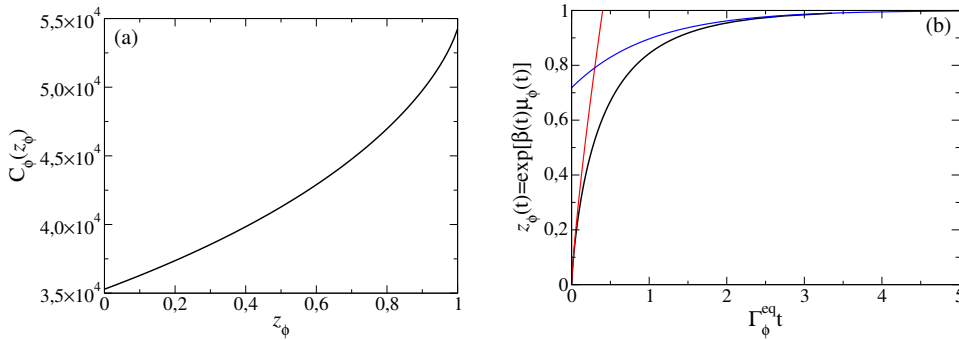


FIGURE 3 – Pour un gaz de N_ϕ phonons à l'équilibre thermique mais pas chimique — c'est-à-dire de fugacité $z_\phi < 1$ — dans un superfluide isolé spatialement homogène de branche acoustique concave : (a) dépendance en z_ϕ du coefficient sans dimension C_ϕ dans la vitesse de variation (40) de N_ϕ sous l'effet des collisions à cinq phonons $2\phi \leftrightarrow 3\phi$ de Khalatnikov, et (b) relaxation correspondante de z_ϕ vers sa valeur à l'équilibre thermodynamique complet selon l'équation (56). En (b), en couleur, les comportements limites aux temps courts (58) et aux temps longs (61). Le taux de relaxation asymptotique Γ_ϕ^{eq} est donné par (48).

montre que l'écart $1/F(z_\phi) - 1/(1 - z_\phi)$ est d'intégrale finie sur l'intervalle $[0, 1]$ et motive une simple astuce plus-moins sur l'intégrande de (56), $1/F(z_\phi) = 1/(1 - z_\phi) + [1/F(z_\phi) - 1/(1 - z_\phi)]$. L'intégration donne une loi exponentielle comme attendu,

$$z_\phi(t)_{\Gamma_\phi^{\text{eq}} t \rightarrow +\infty} = 1 - \exp(B - \Gamma_\phi^{\text{eq}} t) + O(\Gamma_\phi^{\text{eq}} t \exp(-2\Gamma_\phi^{\text{eq}} t)) \quad (61)$$

avec

$$B = \int_0^1 dz_\phi \left[\frac{1}{F(z_\phi)} - \frac{1}{1 - z_\phi} \right] = -1,269(3). \quad (62)$$

La loi (61) est représentée en bleu — bien entendu sans le O — sur la figure 3(b).

Déclaration d'intérêts

Les auteurs ne travaillent pas, ne conseillent pas, ne possèdent pas de parts, ne reçoivent pas de fonds d'une organisation qui pourrait tirer profit de cet article, et n'ont déclaré aucune autre affiliation que leurs organismes de recherche

Annexe A. La règle d'or de Fermi généralisée

La règle d'or de Fermi généralisée est habituellement utilisée à l'ordre minimal n_0 en la perturbation $\hat{V}$ auquel elle prédit un taux de transition non nul entre états propres non perturbés, en tenant compte de tout état initial possible $|i\rangle$ d'énergie E_i et de tout état final possible $|f\rangle$ d'énergie E_f . Les états intermédiaires $|\mu\rangle$ intervenant dans l'expression perturbative de l'amplitude de transition d'ordre n_0 correspondante $\mathcal{A}_{i \rightarrow f}$ ont alors tous des énergies E_μ différentes de E_i (et de E_f), sinon la transition $|i\rangle \rightarrow |\mu\rangle$ serait permise à un ordre en $\hat{V}$ strictement inférieur à n_0 . Ici, sur une branche acoustique concave, la perturbation $\hat{V}$ est somme de l'interaction cubique (14) entre phonons et de son hermitien conjugué, l'on a $n_0 = 2$ (les processus dominants $2\phi \rightarrow 2\phi$ ont une amplitude d'ordre 2 en $\hat{V}$), et notre emploi de la règle d'or dans la section 2 sort de ce cadre, puisque l'équation cinétique (5) décrit les processus sous-dominants $2\phi \leftrightarrow 3\phi$, dont l'amplitude est d'ordre 3 en $\hat{V}$. On s'attend donc à devoir affronter quelque subtilité, comme l'explique la section A.1.

Un autre point insatisfaisant, dans notre usage de la règle d'or, est que l'amplitude de transition $2\phi \rightarrow 3\phi$ (16) est calculée dans le vide, alors que les collisions se produisent en réalité dans le bain thermique du gaz de phonons; ainsi, dans les contributions (17)–(22) des diagrammes de la figure 2, il faudrait prendre en compte les facteurs $(n+1)^{1/2}$ ou $n^{1/2}$ accompagnant la création ou l'annihilation d'un phonon interne dans un mode déjà peuplé thermiquement (ces facteurs dans les modes des phonons entrants ou sortants sont bien inclus dans l'équation (5)); de plus, il faudrait ajouter à la figure 2 les nouveaux diagrammes permis par cette occupation thermique des modes intermédiaires. Cette question a été traitée pour les collisions $2\phi \rightarrow 2\phi$ dans la référence [8], qui trouve que l'amplitude de transition a même valeur dans le bain thermique et dans le vide tant qu'on reste sur la couche d'énergie $E_i = E_f$. Dans la section A.2, nous étendons cette conclusion aux collisions $2\phi \rightarrow 3\phi$ (toujours à l'ordre dominant en $\hat{V}$).

A.1. Une subtilité de l'ordre sous-dominant

Le plus simple pour mener l'étude perturbative de l'amplitude de probabilité de transition de $|i\rangle = |\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\rangle$ vers $|f\rangle = |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3\rangle$ est de partir de son expression exacte [22],

$$\langle f | \hat{U}(t) | i \rangle = \int_{+\infty+i0^+}^{-\infty+i0^+} \frac{dz}{2i\pi} e^{-izt/\hbar} \langle f | \hat{G}(z) | i \rangle \quad (63)$$

avec $\hat{U}(t)$ l'opérateur d'évolution pendant $t > 0$, puis de développer la résolvante de l'hamiltonien complet $\hat{G}(z) = (z\text{Id} - \hat{H})^{-1}$ en puissances de $\hat{V}$, $\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 + \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 + \dots$ (les notations sont celles de la section 3). À l'ordre 3 en $\hat{V}$ qui nous intéresse, nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{U}(t) | i \rangle^{(3)} &= \int_{+\infty+i0^+}^{-\infty+i0^+} \frac{dz}{2i\pi} \frac{\exp(-izt/\hbar)}{(z-E_i)(z-E_f)} \langle f | \hat{V} \hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}_0(z) \hat{V} | i \rangle \\ &= \int_{+\infty+i0^+}^{-\infty+i0^+} \frac{dz}{2i\pi} \frac{\exp(-izt/\hbar)}{(z-E_i)(z-E_f)} \sum_{\lambda, \mu} \frac{\langle f | \hat{V} | \mu \rangle \langle \mu | \hat{V} | \lambda \rangle \langle \lambda | \hat{V} | i \rangle}{(z-E_\lambda)(z-E_\mu)} \end{aligned} \quad (64)$$

où la somme porte comme dans l'équation (16) sur le nombre fini d'états intermédiaires possibles. Il nous reste à refermer le contour d'intégration par un demi-cercle à l'infini dans le demi-plan complexe inférieur, et à appliquer le théorème des résidus dans le cas générique d'énergies deux à deux distinctes :

$$\begin{aligned} \langle f | \hat{U}(t) | i \rangle^{(3)} &= \sum_{\lambda, \mu} \langle f | \hat{V} | \mu \rangle \langle \mu | \hat{V} | \lambda \rangle \langle \lambda | \hat{V} | i \rangle \\ &\quad \left[\frac{\exp(-iE_i t/\hbar)}{(E_i - E_f)(E_i - E_\lambda)(E_i - E_\mu)} + \frac{\exp(-iE_f t/\hbar)}{(E_f - E_i)(E_f - E_\lambda)(E_f - E_\mu)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\exp(-iE_\lambda t/\hbar)}{(E_\lambda - E_i)(E_\lambda - E_f)(E_\lambda - E_\mu)} + \frac{\exp(-iE_\mu t/\hbar)}{(E_\mu - E_i)(E_\mu - E_f)(E_\mu - E_\lambda)} \right]. \end{aligned} \quad (65)$$

La suite ressemble à l'établissement de la règle d'or de Fermi habituelle : le module au carré de l'amplitude se met à diverger linéairement en temps, ce qui permet de définir un taux de transition élémentaire $\delta\Gamma_{i \rightarrow f}$, lorsque deux des énergies sont très proches. Or, rappelons-le, la perturbation $\hat{V}$ est une interaction à trois phonons et ne conserve pas l'énergie sur une branche acoustique concave ; il en résulte que E_λ est bien séparée de E_i , E_μ est bien séparée de E_f , E_λ et E_μ sont bien séparées entre elles ; en revanche, on peut avoir $E_i = E_f$, $E_i = E_\mu$ ou $E_\lambda = E_f$ (mais pas deux de ces possibilités en même temps).

Commençons par le cas attendu d'un croisement entre E_i et E_f . Nous pouvons alors approximer E_i et E_f par leur demi-somme $\bar{E} = (E_i + E_f)/2$ dans l'expression entre crochets de (65), sauf dans le facteur $E_i - E_f$ et sous les exponentielles (le temps t diverge) :

$$[\dots]_{\text{Eq. (65)}} \simeq \frac{-2ie^{-i\bar{E}t/\hbar} \sin[(E_i - E_f)t/2\hbar]}{(E_i - E_f)(\bar{E} - E_\lambda)(\bar{E} - E_\mu)} + \frac{1}{E_\lambda - E_\mu} \left(\frac{e^{-iE_\lambda t/\hbar}}{(E_\lambda - \bar{E})^2} - \frac{e^{-iE_\mu t/\hbar}}{(E_\mu - \bar{E})^2} \right). \quad (66)$$

Au sens des distributions, $\sin^2(\Omega t)/(\Omega^2 t)$ tend vers $\pi\delta(\Omega)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, donc le module au carré de la première contribution dans (66) diverge linéairement en temps ; en revanche, il n'y a pas de divergence en temps dans le module au carré de la seconde contribution, ou dans le terme d'interférence entre les deux contributions (par exemple, $\sin(\Omega t)/\Omega$ tend vers $\pi\delta(\Omega)$). Nous aboutissons à la règle d'or généralisée attendue :

$$\left| \langle f | \hat{U}(t) | i \rangle^{(3)} \right|^2 \Big|_{t \rightarrow +\infty} \stackrel{E_i \approx E_f}{\simeq} \frac{2\pi t}{\hbar} \delta(E_i - E_f) \left| \sum_{\lambda, \mu} \frac{\langle f | \hat{V} | \mu \rangle \langle \mu | \hat{V} | \lambda \rangle \langle \lambda | \hat{V} | i \rangle}{(\bar{E} - E_\lambda)(\bar{E} - E_\mu)} \right|^2. \quad (67)$$

Poursuivons par le cas inhabituel d'un croisement entre E_i et E_μ (celui d'un croisement entre E_f et E_λ se traite de manière symétrique). Remarquons d'abord, au vu de la figure 2, que la résonance $E_i = E_\mu$ peut certes se produire, mais seulement dans les diagrammes (a), (c) et (e),

où l'état intermédiaire $|\mu\rangle$ est à deux phonons¹⁶. Procédons ensuite aux mêmes manipulations dans l'équation (65), en posant cette fois $\bar{E} = (E_i + E_\mu)/2$, pour obtenir¹⁷ :

$$\left| \langle f | \hat{U}(t) | i \rangle \right|_{t \rightarrow +\infty}^2 \stackrel{E_i \approx E_\mu}{\sim} \frac{2\pi t}{\hbar} \sum_{\mu} \delta(E_i - E_\mu) \left| \sum_{\lambda} \frac{\langle f | \hat{V} | \mu \rangle \langle \mu | \hat{V} | \lambda \rangle \langle \lambda | \hat{V} | i \rangle}{(\bar{E} - E_\lambda)(\bar{E} - E_f)} \right|^2. \quad (68)$$

Cette expression semble prédire l'existence d'une transition $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ de taux non nul se produisant sans conservation de l'énergie (si $E_i = E_\mu$, on a nécessairement $E_f \neq E_i$ car $E_f \neq E_\mu$, voir plus haut). Nous serions donc confrontés à une sérieuse « crise de l'énergie ».

Heureusement, il n'y a rien de réel là-dedans, ceci résulte seulement d'une mauvaise interprétation. L'équation (68) n'est pas une contribution au taux de transition $2\phi \rightarrow 3\phi$ entre $|i\rangle$ et $|f\rangle$, mais résulte de la transition $2\phi \rightarrow 2\phi$ entre $|i\rangle$ et $|\mu\rangle$. Voilà qui est paradoxal : l'état $|f\rangle$ étant à trois phonons et l'état $|\mu\rangle$ à deux phonons, ces états sont orthogonaux et l'on ne voit pas comment une transition de $|i\rangle$ vers $|\mu\rangle$ pourrait augmenter l'amplitude de probabilité de présence dans $|f\rangle$. Mais ce serait oublier que les phonons introduits jusqu'à présent, loin d'être des excitations élémentaires exactes du système, n'en sont que l'approximation d'ordre zéro en $\hat{V}$: sous l'effet incessant de l'hamiltonien cubique $\hat{V}$, chaque phonon nu interagit avec lui-même, et s'habille de phonons dits captifs ou virtuels [23]. L'état $|\mu\rangle$ n'est donc que l'approximation d'ordre zéro en $\hat{V}$ d'un état à deux phonons habillés $|\tilde{\mu}\rangle$, qui s'écrit à l'ordre un comme suit, selon la théorie des perturbations ordinaire :

$$|\tilde{\mu}\rangle = |\mu\rangle + \sum_{\nu} |\nu\rangle \frac{\langle \nu | \hat{V} | \mu \rangle}{E_\mu - E_\nu} + O(\hat{V}^2). \quad (69)$$

L'état à trois phonons nus $|f\rangle$ n'est pas orthogonal aux états à deux phonons habillés $|\tilde{\mu}\rangle$, et les transitions $2\phi \rightarrow 2\phi$ induisent donc, indirectement, une transition de $|i\rangle$ vers $|f\rangle$ avec l'amplitude

$$\langle f | \hat{U}(t) | i \rangle \Big|_{2\phi \rightarrow 2\phi} = \sum_{\mu} \langle f | \tilde{\mu} \rangle \langle \tilde{\mu} | \hat{U}(t) | i \rangle \simeq \sum_{\mu} \frac{\langle f | \hat{V} | \mu \rangle}{E_\mu - E_f} \langle \mu | \hat{U}(t) | i \rangle \Big|^{(2)}. \quad (70)$$

Il reste à se souvenir de la règle d'or de Fermi généralisée à l'ordre 2 en $\hat{V}$,

$$\left| \langle \mu | \hat{U}(t) | i \rangle \right|_{t \rightarrow +\infty}^2 \stackrel{(2)}{\sim} \frac{2\pi t}{\hbar} \delta(E_i - E_\mu) \left| \sum_{\lambda} \frac{\langle \mu | \hat{V} | \lambda \rangle \langle \lambda | \hat{V} | i \rangle}{\bar{E} - E_\lambda} \right|^2 \quad (71)$$

avec $\bar{E} = (E_i + E_\mu)/2$ comme précédemment, et à approximer le dénominateur restant $E_\mu - E_f$ par $\bar{E} - E_f$, pour reconnaître le résultat déroutant (68) dans le module au carré de (70).

En conclusion, à l'ordre dominant en $\hat{V}$, le taux de transition $2\phi \rightarrow 3\phi$ pour une branche acoustique concave est correctement donné par la règle d'or attendue (67), dont il est fait usage dans les sections 2 et 3. En particulier, sur la couche d'énergie $E_i = E_f$, il n'y a pas de divergence particulière à craindre car il n'y a pas d'annulation possible d'un dénominateur d'énergie $\bar{E} - E_\lambda$ ou $\bar{E} - E_\mu$ dans l'amplitude de transition effective, même si les transitions $2\phi \rightarrow 2\phi$ peuvent conserver l'énergie-impulsion. La situation est donc considérablement plus simple que celle d'une branche acoustique même partiellement convexe, où le calcul du taux de collision $2\phi \rightarrow 2\phi$, sous-dominant par rapport à $1\phi \leftrightarrow 2\phi$, nécessite une régularisation non perturbative (on

¹⁶En effet, sur une branche acoustique croissante concave, la fusion de deux phonons diminue toujours l'énergie et la désintégration en deux phonons l'augmente toujours, c'est-à-dire que l'énergie varie dans le même sens que le nombre de phonons sous l'effet de $\hat{H}_3^{(\pm)}$.

¹⁷On pourrait faire rentrer la somme sur μ et la distribution de Dirac à l'intérieur du module au carré, au prix de l'introduction pas très orthodoxe de la racine carrée $\delta^{1/2}$, pour tenir compte d'une dégénérescence, c'est-à-dire de l'existence de plusieurs états intermédiaires $|\mu\rangle$ de même énergie.

tient compte de la durée de vie finie des phonons intermédiaires due aux processus à trois phonons en leur attribuant une énergie complexe) [24]¹⁸.

A.2. Dans le bain thermique plutôt que dans le vide

L'occupation thermique des modes des phonons internes sur la figure 2 a deux conséquences : (i) elle fait apparaître un nouveau mécanisme, l'absorption de phonons intermédiaires (compensée en définitive par leur réémission), bien sûr impossible à température nulle, et (ii) elle modifie les amplitudes de transition au travers des amplitudes bosoniques $n^{1/2}$ ou $(1+n)^{1/2}$, n étant un nombre de phonons internes. Heureusement, nous trouvons après réflexion que, pour chaque diagramme de la figure 2, les processus élémentaires à trois phonons (les sommets du diagramme) restent exactement les mêmes, mais doivent maintenant être combinés dans un ordre quelconque ; en d'autres termes, chaque diagramme à température nulle donne naissance à une classe de $3! = 6$ diagrammes à température non nulle, s'en déduisant par permutation des trois sommets (le cas des diagrammes (e) et (f) est particulier, voir plus bas). Le calcul des nouvelles amplitudes reste donc assez simple, puisque les éléments de matrice de l'interaction cubique $\hat{V}$ peuvent être mis en facteur.

Détaillons le cas du diagramme (a). Appelons $\mathbf{q}_{12} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$ et $\mathbf{k}_{jl} = \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l$ les vecteurs d'onde des phonons internes, et notons $A_1 = \langle \mathbf{q}_{12} | \hat{V} | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle$, $A_2 = \langle \mathbf{k}_i, \mathbf{k}_{jl} | \hat{V} | \mathbf{q}_{12} \rangle$ et $A_3 = \langle \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_l | \hat{V} | \mathbf{k}_{jl} \rangle$ les éléments de matrice à température nulle des processus élémentaires à trois phonons, dans leur ordre d'apparition sur la figure 2, ainsi que $\delta_1 = \hbar\omega_{\mathbf{q}_{12}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}_1} - \hbar\omega_{\mathbf{q}_2}$, $\delta_2 = \hbar\omega_{\mathbf{k}_i} + \hbar\omega_{\mathbf{k}_{jl}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}_{12}}$ et $\delta_3 = \hbar\omega_{\mathbf{k}_j} + \hbar\omega_{\mathbf{k}_l} - \hbar\omega_{\mathbf{k}_{jl}}$ les variations d'énergie correspondantes. L'amplitude des diagrammes de la classe (a) en présence du bain thermique s'écrit comme une somme sur les permutations σ des processus élémentaires,

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(a)} = \sum_i \sum_{\sigma \in S_3} \mathcal{A}_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)}^{(a)} \quad (72)$$

avec en indice de chaque terme l'ordre des actions retenu, de gauche à droite dans le diagramme ; on l'aura compris, le cas dans le vide — sans bain thermique — correspond à la permutation identité et à l'indice 123, comme sur la figure 2. Nous nous mettons tout de suite sur la couche d'énergie, d'où la relation

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0 \quad (73)$$

dont nous ferons bon usage dans la suite. Le calcul donne¹⁹

$$\mathcal{A}_{123}^{(a)} = \frac{A_1 A_2 A_3}{-\delta_1 \delta_3} (1 + n_{\mathbf{q}_{12}})(1 + n_{\mathbf{k}_{jl}}), \quad \mathcal{A}_{132}^{(a)} = \frac{A_1 A_2 A_3}{-\delta_1 \delta_2} n_{\mathbf{k}_{jl}} (1 + n_{\mathbf{q}_{12}}), \quad (74)$$

$$\mathcal{A}_{213}^{(a)} = \frac{A_1 A_2 A_3}{-\delta_2 \delta_3} n_{\mathbf{q}_{12}} (1 + n_{\mathbf{k}_{jl}}), \quad \mathcal{A}_{231}^{(a)} = \frac{A_1 A_2 A_3}{-\delta_2 \delta_1} n_{\mathbf{q}_{12}} (1 + n_{\mathbf{k}_{jl}}), \quad (75)$$

$$\mathcal{A}_{312}^{(a)} = \frac{A_1 A_2 A_3}{-\delta_3 \delta_2} n_{\mathbf{k}_{jl}} (1 + n_{\mathbf{q}_{12}}), \quad \mathcal{A}_{321}^{(a)} = \frac{A_1 A_2 A_3}{-\delta_3 \delta_1} n_{\mathbf{q}_{12}} n_{\mathbf{k}_{jl}}, \quad (76)$$

¹⁸Soyons plus précis dans le cas concave. Les phonons intermédiaires, faisant partie d'un bain thermique, y acquièrent après tout une durée de vie finie sous l'effet des collisions $2\phi \rightarrow 2\phi$. Ceci leur confère une énergie complexe, avec une partie imaginaire de l'ordre de T^7 comme il est dit dans la section 1. Voilà qui est négligeable, à basse température, devant l'échelle des dénominateurs d'énergie $E_i - E_\lambda$, $E_i - E_\mu$, de l'ordre de T^3 aux petits angles comme dans (89). En particulier, on peut trouver dans l'équation (67) des temps t suffisamment longs pour que la largeur $\hbar/t$ du pseudo-delta de Dirac soit négligeable, mais suffisamment courts pour ne pas activer l'instabilité $2\phi \rightarrow 2\phi$.

¹⁹Dans ces expressions, les dénominateurs valent simplement $\delta_{\sigma(1)}(\delta_{\sigma(1)} + \delta_{\sigma(2)}) = -\delta_{\sigma(1)}\delta_{\sigma(3)}$.

soit, après regroupement des termes puis utilisation de (73) pour remplacer le facteur $(\delta_1 + \delta_3)$ par $-\delta_2$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(a)} &= - \sum_i \frac{A_1 A_2 A_3}{\delta_1 \delta_2 \delta_3} \{ (\delta_1 + \delta_3) [n_{\mathbf{k}_{jl}}(1 + n_{\mathbf{q}_{12}}) + n_{\mathbf{q}_{12}}(1 + n_{\mathbf{k}_{jl}})] + \delta_2 [(1 + n_{\mathbf{q}_{12}})(1 + n_{\mathbf{k}_{jl}}) + n_{\mathbf{q}_{12}} n_{\mathbf{k}_{jl}}] \} \\ &= - \sum_i \frac{A_1 A_2 A_3}{\delta_1 \delta_3}. \end{aligned} \quad (77)$$

De façon remarquable, nous retrouvons le résultat dans le vide (17), quels que soient d'ailleurs les nombres d'occupation $n_{\mathbf{q}_{12}}$ et $n_{\mathbf{k}_{jl}}$ des modes de phonons internes (ils n'ont pas besoin d'être thermiques).

Le même raisonnement peut être mené pour les diagrammes de (b) à (d), et aboutit à la même conclusion. Enfin, il convient de regrouper les diagrammes restants (e) et (f) en une même classe (ef), car les deux phonons intermédiaires de ces diagrammes sont égaux, $\mathbf{k}_{i\beta} = \mathbf{k}_i - \mathbf{q}_\beta$ et $\mathbf{k}_{jl} = \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l$, et les trois processus élémentaires mis en jeu sont exactement les mêmes, avec des éléments de matrice $A_1 = \langle \mathbf{k}_{jl}, \mathbf{k}_{i\beta} | \hat{V} | \mathbf{q}_\alpha \rangle$, $A_2 = \langle \mathbf{k}_i | \hat{V} | \mathbf{q}_\beta, \mathbf{k}_{i\beta} \rangle$, $A_3 = \langle \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_l | \hat{V} | \mathbf{k}_{jl} \rangle$ et les variations d'énergie correspondantes $\delta_1 = \hbar\omega_{\mathbf{k}_{jl}} + \hbar\omega_{\mathbf{k}_{i\beta}} - \hbar\omega_{\mathbf{q}_\alpha}$, $\delta_2 = \hbar\omega_{\mathbf{k}_i} - \hbar\omega_{\mathbf{q}_\beta} - \hbar\omega_{\mathbf{k}_{i\beta}}$, $\delta_3 = \hbar\omega_{\mathbf{k}_j} + \hbar\omega_{\mathbf{k}_l} - \hbar\omega_{\mathbf{k}_{jl}}$, phénomène qui ne se produit pas avec les autres diagrammes. On a alors, sur le modèle de (72),

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(\text{ef})} = \sum_\alpha \sum_i \sum_{\sigma \in S_3} \mathcal{A}_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)}^{(\text{ef})}. \quad (78)$$

Dans le vide, la permutation identité redonne le diagramme (e) de la figure 2, la permutation τ_{23} — transposition des indices 2 et 3 — redonne le diagramme (f), et les autres permutations donnent zéro. Dans le bain thermique, en suivant l'ordre lexicographique comme dans (74), (75), (76) pour $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(\text{ef})} &= \sum_\alpha \sum_i (-A_1 A_2 A_3) \left[\frac{1}{\delta_1 \delta_3} (1 + n_{\mathbf{k}_{jl}})(1 + n_{\mathbf{k}_{i\beta}}) + \frac{1}{\delta_1 \delta_2} (1 + n_{\mathbf{k}_{jl}})(1 + n_{\mathbf{k}_{i\beta}}) + \frac{1}{\delta_2 \delta_3} n_{\mathbf{k}_{i\beta}}(1 + n_{\mathbf{k}_{jl}}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta_1 \delta_2} n_{\mathbf{k}_{i\beta}} n_{\mathbf{k}_{jl}} + \frac{1}{\delta_2 \delta_3} n_{\mathbf{k}_{jl}}(1 + n_{\mathbf{k}_{i\beta}}) + \frac{1}{\delta_1 \delta_3} n_{\mathbf{k}_{jl}} n_{\mathbf{k}_{i\beta}} \right]. \end{aligned} \quad (79)$$

Après regroupement des termes puis utilisation de (73) pour remplacer le facteur $(\delta_2 + \delta_3)$ par $-\delta_1$, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(\text{ef})} &= - \sum_\alpha \sum_i \frac{A_1 A_2 A_3}{\delta_1 \delta_2 \delta_3} \{ (\delta_2 + \delta_3) [(1 + n_{\mathbf{k}_{jl}})(1 + n_{\mathbf{k}_{i\beta}}) + n_{\mathbf{k}_{i\beta}} n_{\mathbf{k}_{jl}}] \\ &\quad + \delta_1 [n_{\mathbf{k}_{i\beta}}(1 + n_{\mathbf{k}_{jl}}) + n_{\mathbf{k}_{jl}}(1 + n_{\mathbf{k}_{i\beta}})] \} = \sum_\alpha \sum_i \frac{A_1 A_2 A_3}{\delta_2 \delta_3}. \end{aligned} \quad (80)$$

On retrouve ainsi exactement le résultat dans le vide (82).

En conclusion, sur la couche d'énergie, l'amplitude de collision à cinq phonons $2\phi \rightarrow 3\phi$ n'est, à l'ordre dominant en l'interaction cubique $\hat{V}$, pas affectée par la présence d'un bain thermique, plus précisément par le fait que les modes des phonons internes aient des nombres d'occupation non nuls, thermiques ou pas. L'approximation de « collision dans le vide » est exacte à cet ordre.

Annexe B. Amplitude de collision $2\phi \rightarrow 3\phi$ à basse température

Nous établissons ici le comportement dominant (27) de l'amplitude de diffusion (16) sur la couche d'énergie dans la limite de faibles nombres d'onde et de petits angles $O(T)$ pour les vecteurs entrants $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ et sortants $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$. Nous effectuons quelques manipulations sur les expressions (17)–(22) des différentes contributions dans la section B.1, avant de passer explicitement à la limite dans la section B.2.

B.1. Des transformations astucieuses

Regroupement des contributions (e) et (f), puis (c). Il est assez naturel de regrouper les expressions (21) et (22) car (i) elles ont le même domaine de sommation, (ii) elles ont le même numérateur, (iii) elles ont au dénominateur le facteur commun $\Delta E_1^{(e)}(\lambda) = \Delta E_1^{(f)}(\lambda) = \varepsilon_{\mathbf{q}\alpha} - \varepsilon_{\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l} - \varepsilon_{\mathbf{k}_i - \mathbf{q}\beta}$ (les quantités $\Delta E_1(\lambda)$ et $\Delta E_2(\mu)$ sont celles de l'équation (16)). Il reste à additionner

$$\frac{1}{\Delta E_2^{(e)}(\mu)} + \frac{1}{\Delta E_2^{(f)}(\mu)} = \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}_j} + \varepsilon_{\mathbf{k}_l} - \varepsilon_{\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l}} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}_i} - \varepsilon_{\mathbf{q}\beta} - \varepsilon_{\mathbf{k}_i - \mathbf{q}\beta}} \stackrel{E_i=E_f}{=} \frac{\Delta E_1^{(e,f)}(\lambda)}{\Delta E_2^{(e)}(\mu) \Delta E_2^{(f)}(\mu)}. \quad (81)$$

Les facteurs $\Delta E_1^{(e,f)}(\lambda)$ se simplifient et l'on aboutit au joli résultat

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(e)} + \mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(f)} = \sum_{\alpha} \sum_i \frac{\langle \mathbf{k}_i | \hat{V} | \mathbf{q}\beta, \mathbf{k}_i - \mathbf{q}\beta \rangle \langle \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_l | \hat{V} | \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l \rangle \langle \mathbf{k}_i - \mathbf{q}\beta, \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l | \hat{V} | \mathbf{q}\alpha \rangle}{(\varepsilon_{\mathbf{k}_j} + \varepsilon_{\mathbf{k}_l} - \varepsilon_{\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l})(\varepsilon_{\mathbf{k}_i} - \varepsilon_{\mathbf{q}\beta} - \varepsilon_{\mathbf{k}_i - \mathbf{q}\beta})}. \quad (82)$$

On remarque alors que si, dans l'amplitude $\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(c)}$ écrite comme dans (19), on effectue la transposition $\alpha \leftrightarrow \beta$ et l'on change l'ordre des facteurs au numérateur, on obtient une expression qui ressemble beaucoup à (82),

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(c)} = \sum_{\alpha} \sum_i \frac{\langle \mathbf{k}_i, \mathbf{q}\beta - \mathbf{k}_i | \hat{V} | \mathbf{q}\beta \rangle \langle \mathbf{k}_j, \mathbf{k}_l | \hat{V} | \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l \rangle \langle \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l | \hat{V} | \mathbf{q}\beta - \mathbf{k}_i, \mathbf{q}\alpha \rangle}{(\varepsilon_{\mathbf{k}_j} + \varepsilon_{\mathbf{k}_l} - \varepsilon_{\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l})(\varepsilon_{\mathbf{q}\beta} - \varepsilon_{\mathbf{k}_i} - \varepsilon_{\mathbf{q}\beta - \mathbf{k}_i})} \quad (83)$$

et qui nous permettra dans la suite de regrouper les contributions (c), (e) et (f) dans la limite des petits angles.

Transformation de la contribution (d), puis (b). Dans l'expression (20) de $\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(d)}$, effectuons sur les variables muettes la transposition $(\alpha, i) \leftrightarrow (\beta, j)$, ce qui ne change ni l'indice l ni le domaine de sommation; il vient

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(d)} = \sum_{\alpha} \sum_{i \neq j} \frac{\langle \mathbf{k}_l | \hat{V} | \mathbf{q}\beta - \mathbf{k}_j, \mathbf{q}\alpha - \mathbf{k}_i \rangle \langle \mathbf{k}_i, \mathbf{q}\alpha - \mathbf{k}_i | \hat{V} | \mathbf{q}\alpha \rangle \langle \mathbf{k}_j, \mathbf{q}\beta - \mathbf{k}_j | \hat{V} | \mathbf{q}\beta \rangle}{(\varepsilon_{\mathbf{k}_l} - \varepsilon_{\mathbf{q}\beta - \mathbf{k}_j} - \varepsilon_{\mathbf{q}\alpha - \mathbf{k}_i})(\varepsilon_{\mathbf{q}\beta} - \varepsilon_{\mathbf{k}_j} - \varepsilon_{\mathbf{q}\beta - \mathbf{k}_j})}. \quad (84)$$

Le numérateur et le facteur $\Delta E_2^{(d)}(\mu)$ au dénominateur sont eux aussi inchangés. Remplaçons ensuite $\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(d)}$ par la demi-somme de son ancienne écriture (20) et de sa nouvelle écriture (84); il reste à additionner

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta E_1^{(d)}(\lambda)} + \frac{1}{\Delta E_1^{(d)}(\lambda) |_{(\alpha, i) \leftrightarrow (\beta, j)}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{q}\alpha} - \varepsilon_{\mathbf{k}_i} - \varepsilon_{\mathbf{q}\alpha - \mathbf{k}_i}} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{q}\beta} - \varepsilon_{\mathbf{k}_j} - \varepsilon_{\mathbf{q}\beta - \mathbf{k}_j}} \right) \stackrel{E_i=E_f}{=} \frac{\frac{1}{2} \Delta E_2^{(d)}(\mu)}{(\varepsilon_{\mathbf{q}\alpha} - \varepsilon_{\mathbf{k}_i} - \varepsilon_{\mathbf{q}\alpha - \mathbf{k}_i})(\varepsilon_{\mathbf{q}\beta} - \varepsilon_{\mathbf{k}_j} - \varepsilon_{\mathbf{q}\beta - \mathbf{k}_j})}. \quad (85)$$

Les facteurs $\Delta E_2^{(d)}(\mu)$ se simplifient, et l'on obtient

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(d)} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{i \neq j} \frac{\langle \mathbf{k}_l | \hat{V} | \mathbf{q}\alpha - \mathbf{k}_i, \mathbf{q}\beta - \mathbf{k}_j \rangle \langle \mathbf{k}_i, \mathbf{q}\alpha - \mathbf{k}_i | \hat{V} | \mathbf{q}\alpha \rangle \langle \mathbf{k}_j, \mathbf{q}\beta - \mathbf{k}_j | \hat{V} | \mathbf{q}\beta \rangle}{(\varepsilon_{\mathbf{q}\alpha} - \varepsilon_{\mathbf{k}_i} - \varepsilon_{\mathbf{q}\alpha - \mathbf{k}_i})(\varepsilon_{\mathbf{q}\beta} - \varepsilon_{\mathbf{k}_j} - \varepsilon_{\mathbf{q}\beta - \mathbf{k}_j})}. \quad (86)$$

Effectuons une renumérotation similaire dans l'amplitude (18) du diagramme (b) : on échange d'abord les variables muettes l et j (ce qui ne change pas i ni le domaine de sommation), puis l'on effectue la transposition²⁰ $(\alpha, i) \leftrightarrow (\beta, j)$ (ce qui ne change pas l). Nous aboutissons à

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(b)} = \sum_{\alpha} \sum_{i \neq j} \frac{\langle \mathbf{k}_l, \mathbf{k}_i - \mathbf{q}\alpha | \hat{V} | \mathbf{q}\beta - \mathbf{k}_j \rangle \langle \mathbf{k}_i | \hat{V} | \mathbf{q}\alpha, \mathbf{k}_i - \mathbf{q}\alpha \rangle \langle \mathbf{k}_j, \mathbf{q}\beta - \mathbf{k}_j | \hat{V} | \mathbf{q}\beta \rangle}{(\varepsilon_{\mathbf{k}_l} - \varepsilon_{\mathbf{q}\alpha} - \varepsilon_{\mathbf{k}_i - \mathbf{q}\alpha})(\varepsilon_{\mathbf{q}\beta} - \varepsilon_{\mathbf{k}_j} - \varepsilon_{\mathbf{q}\beta - \mathbf{k}_j})} \quad (87)$$

²⁰L'ensemble revient à faire une permutation circulaire directe sur les indices (α, β) et (i, j, l) .

après changement de l'ordre des facteurs au numérateur. Ceci ressemble à la nouvelle forme (86) de $\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(d)}$ au facteur global $1/2$ près, et nous permettra de regrouper les contributions (b) et (d) dans la limite des petits angles.

B.2. Passage à la limite des petits angles à basse température

Désormais, les nombres d'onde des phonons entrants et sortants, ainsi que tous les angles entre eux, tendent vers zéro linéairement en température, comme dans l'équation (25).

On doit calculer dans cette limite un équivalent des différentes contributions à l'amplitude de transition $\mathcal{A}_{i \rightarrow f}$ dans le cas où les angles des phonons internes avec les phonons entrants ou sortants tendent eux aussi vers zéro plutôt que vers π — c'est en effet à cette condition que tous les dénominateurs d'énergie $\Delta E_1(\lambda)$ et $\Delta E_2(\mu)$ sont en $O(T^3)$ plutôt qu'en $O(T)$ et qu'on bénéficie à plein de l'effet petit dénominateur. On garde trace des contraintes qui peuvent s'ensuivre sur les nombres d'onde q_α et k_i au moyen de la fonction de Heaviside Y . Par exemple, dans le diagramme (a) de la figure 2, il n'y a aucune contrainte, les vecteurs internes $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$ et $\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l$ devenant automatiquement colinéaires à et de même sens que les vecteurs entrants et sortants lorsque tous les angles (23) tendent vers zéro. En revanche, dans le diagramme (b), ce n'est le cas que si $q_\alpha > k_i$ et $k_l > q_\beta$; il faudra donc inclure un facteur $Y(q_\alpha - k_i)Y(k_l - q_\beta)$ au numérateur dans la forme (18), qui devient $Y(q_\beta - k_j)Y(k_i - q_\alpha)$ dans la forme (87) que nous utiliserons en pratique.

Au numérateur des amplitudes, on utilise le comportement limite à angle nul (14) des éléments de matrice réécrit comme suit, sans oublier le facteur 2 provenant de la symétrie d'échange bosonique²¹,

$$\langle \mathbf{k} + \mathbf{k}' | \hat{V} | \mathbf{k}, \mathbf{k}' \rangle \underset{T \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{3mc^2(1 + \Lambda)}{2^{3/2}(\rho V)^{1/2}} e^{3/2} [\bar{k}\bar{k}'(\bar{k} + \bar{k}')]^{1/2}. \quad (88)$$

Au dénominateur des amplitudes, on utilise la relation [3, (14)] écrite dans le présent cas concave sous la forme

$$\varepsilon_{\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mathbf{q}'} - \varepsilon_{\mathbf{q} + \mathbf{q}'} \underset{T \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2} k_B T |\gamma| \varepsilon^2 \bar{q} \bar{q}' (\bar{q} + \bar{q}') \left[\frac{\bar{\theta}^2}{(\bar{q} + \bar{q}')^2} + \frac{3}{4} \right] \quad (89)$$

avec l'angle $\theta = \widehat{(\mathbf{q}, \mathbf{q}')} = O(T)$ et $\bar{\theta}$ sa forme réduite. On en déduit immédiatement que

$$\varepsilon_{\mathbf{q}_1} + \varepsilon_{\mathbf{q}_2} - \varepsilon_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2} \underset{T \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2} k_B T |\gamma| \varepsilon^2 \bar{q}_1 \bar{q}_2 (\bar{q}_1 + \bar{q}_2) \left[\frac{\bar{\theta}_{12}^2}{(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)^2} + \frac{3}{4} \right], \quad (90)$$

$$\varepsilon_{\mathbf{k}_j} + \varepsilon_{\mathbf{k}_l} - \varepsilon_{\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l} \underset{T \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2} k_B T |\gamma| \varepsilon^2 \bar{k}_j \bar{k}_l (\bar{k}_j + \bar{k}_l) \left[\frac{\bar{\chi}_{jl}^2}{(\bar{k}_j + \bar{k}_l)^2} + \frac{3}{4} \right], \quad (91)$$

sans condition sur les nombres d'onde. Sous la condition $\bar{k}_l > \bar{q}_\beta$ assurant que les vecteurs $\mathbf{q}_\beta$ et $\mathbf{k}_l - \mathbf{q}_\beta$ sont presque colinéaires et de même sens, on en déduit également que

$$\varepsilon_{\mathbf{q}_\beta} + \varepsilon_{\mathbf{k}_l - \mathbf{q}_\beta} - \varepsilon_{\mathbf{k}_l} \underset{T \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\bar{k}_l > \bar{q}_\beta}{2} k_B T |\gamma| \varepsilon^2 (\bar{k}_l - \bar{q}_\beta) \bar{q}_\beta \bar{k}_l \left[\frac{\bar{\theta}^2}{\bar{k}_l^2} + \frac{3}{4} \right] \quad (92)$$

avec l'angle $\theta = \widehat{(\mathbf{q}_\beta, \mathbf{k}_l - \mathbf{q}_\beta)} = O(T)$. En passant par la norme d'un produit vectoriel, $\sin \theta = |(\mathbf{k}_l - \mathbf{q}_\beta) \wedge \mathbf{q}_\beta| / |\mathbf{k}_l - \mathbf{q}_\beta| q_\beta = k_l \sin \psi_{\beta l} / |\mathbf{k}_l - \mathbf{q}_\beta|$, on trouve que $\theta \sim k_l \psi_{\beta l} / (k_l - q_\beta)$ et donc que

$$\varepsilon_{\mathbf{q}_\beta} + \varepsilon_{\mathbf{k}_l - \mathbf{q}_\beta} - \varepsilon_{\mathbf{k}_l} \underset{T \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\bar{k}_l > \bar{q}_\beta}{2} k_B T |\gamma| \varepsilon^2 (\bar{k}_l - \bar{q}_\beta) \bar{q}_\beta \bar{k}_l \left[\frac{\bar{\psi}_{\beta l}^2}{(\bar{k}_l - \bar{q}_\beta)^2} + \frac{3}{4} \right]. \quad (93)$$

²¹ Les termes de $\hat{H}_3^{(-)}$ contribuant à (88) sont en effet d'indices $(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = (\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ et $(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = (\mathbf{k}', \mathbf{k})$.

On a de même, par échange formel des $\mathbf{q}$ et $\mathbf{k}$,

$$\varepsilon_{\mathbf{k}_i} + \varepsilon_{\mathbf{q}_\alpha - \mathbf{k}_i} - \varepsilon_{\mathbf{q}_\alpha} \frac{\bar{q}_\alpha > \bar{k}_i}{T \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} k_B T |\gamma| \varepsilon^2 (\bar{q}_\alpha - \bar{k}_i) \bar{q}_\alpha \bar{k}_i \left[\frac{\bar{\psi}_{\alpha i}^2}{(\bar{q}_\alpha - \bar{k}_i)^2} + \frac{3}{4} \right]. \quad (94)$$

On applique les expressions précédentes aux formes éventuellement optimisées (17), (82), (83), (86) et (87) des amplitudes de transition. On constate qu'on peut sortir un facteur

$$\mathcal{A}_0 = \left[\frac{3mc^2(1 + \Lambda)\varepsilon^{3/2}}{2^{3/2}(\rho V)^{1/2}} \right]^3 \frac{1}{\left(\frac{1}{2} k_B T |\gamma| \varepsilon^2\right)^2 (\bar{q}_1 \bar{q}_2 \bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3)^{1/2}} \quad (95)$$

qui se réécrit trivialement comme dans l'expression (27) annoncée. Il vient alors²²

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(a)} \underset{T \rightarrow 0^+}{\sim} \mathcal{A}_0 \sum_i \frac{\bar{k}_i}{\left[\frac{\bar{\theta}_{12}^2}{(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)^2} + \frac{3}{4} \right] \left[\frac{\bar{\chi}_{jl}^2}{(\bar{k}_j + \bar{k}_l)^2} + \frac{3}{4} \right]}, \quad (96)$$

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(e)} + \mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(f)} \underset{T \rightarrow 0^+}{\sim} -\mathcal{A}_0 \sum_\alpha \sum_i \frac{\bar{q}_\alpha Y(\bar{k}_i - \bar{q}_\beta)}{\left[\frac{\bar{\chi}_{jl}^2}{(\bar{k}_j + \bar{k}_l)^2} + \frac{3}{4} \right] \left[\frac{\bar{\psi}_{\beta i}^2}{(\bar{k}_i - \bar{q}_\beta)^2} + \frac{3}{4} \right]}, \quad (97)$$

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(c)} \underset{T \rightarrow 0^+}{\sim} -\mathcal{A}_0 \sum_\alpha \sum_i \frac{\bar{q}_\alpha Y(\bar{q}_\beta - \bar{k}_i)}{\left[\frac{\bar{\chi}_{jl}^2}{(\bar{k}_j + \bar{k}_l)^2} + \frac{3}{4} \right] \left[\frac{\bar{\psi}_{\beta i}^2}{(\bar{q}_\beta - \bar{k}_i)^2} + \frac{3}{4} \right]}, \quad (98)$$

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(d)} \underset{T \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2} \mathcal{A}_0 \sum_\alpha \sum_{i \neq j} \frac{\bar{k}_l Y(\bar{q}_\alpha - \bar{k}_i) Y(\bar{q}_\beta - \bar{k}_j)}{\left[\frac{\bar{\psi}_{\alpha i}^2}{(\bar{q}_\alpha - \bar{k}_i)^2} + \frac{3}{4} \right] \left[\frac{\bar{\psi}_{\beta j}^2}{(\bar{q}_\beta - \bar{k}_j)^2} + \frac{3}{4} \right]}, \quad (99)$$

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(b)} \underset{T \rightarrow 0^+}{\sim} \mathcal{A}_0 \sum_\alpha \sum_{i \neq j} \frac{\bar{k}_l Y(\bar{k}_i - \bar{q}_\alpha) Y(\bar{q}_\beta - \bar{k}_j)}{\left[\frac{\bar{\psi}_{\alpha i}^2}{(\bar{q}_\alpha - \bar{k}_i)^2} + \frac{3}{4} \right] \left[\frac{\bar{\psi}_{\beta j}^2}{(\bar{q}_\beta - \bar{k}_j)^2} + \frac{3}{4} \right]}. \quad (100)$$

L'amplitude $\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(a)}$ dans (96) donne directement la première somme de l'équation (28). Dans l'addition $(\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(e)} + \mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(f)}) + \mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(c)}$ de (97) et (98), les fonctions de Heaviside se complètent à un, $Y(\bar{k}_i - \bar{q}_\beta) + Y(\bar{q}_\beta - \bar{k}_i) = 1$, et l'on retrouve la deuxième somme de l'équation (28) après transposition $\alpha \leftrightarrow \beta$. Enfin, avant de la regrouper avec $\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(d)}$, il faut travailler un peu sur l'amplitude $\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(b)}$ dans (100) : en effectuant l'échange $(\alpha, i) \leftrightarrow (\beta, j)$ dans le second membre — ce qui ne change ni l'indice l ni le dénominateur — et en prenant la demi-somme du second membre et de sa nouvelle expression ainsi obtenue, on arrive à

$$\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(b)} \underset{T \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{2} \mathcal{A}_0 \sum_\alpha \sum_{i \neq j} \frac{\bar{k}_l [Y(\bar{k}_i - \bar{q}_\alpha) Y(\bar{q}_\beta - \bar{k}_j) + Y(\bar{q}_\alpha - \bar{k}_i) Y(\bar{k}_j - \bar{q}_\beta)]}{\left[\frac{\bar{\psi}_{\alpha i}^2}{(\bar{q}_\alpha - \bar{k}_i)^2} + \frac{3}{4} \right] \left[\frac{\bar{\psi}_{\beta j}^2}{(\bar{q}_\beta - \bar{k}_j)^2} + \frac{3}{4} \right]}. \quad (101)$$

Or, à l'ordre zéro en ε , on a $\bar{q}_1 + \bar{q}_2 = \bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3$ par conservation de l'énergie ou de l'impulsion, si bien que l'inégalité $\bar{k}_i > \bar{q}_\alpha = \bar{k}_i + \bar{k}_j + \bar{k}_l - \bar{q}_\beta$ implique que $\bar{q}_\beta > \bar{k}_j + \bar{k}_l \geq \bar{k}_j$ et l'on peut écrire $Y(\bar{k}_i - \bar{q}_\alpha) Y(\bar{q}_\beta - \bar{k}_j) = Y(\bar{k}_i - \bar{q}_\alpha)$ dans (101). Il en résulte que, dans le regroupement $\mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(b)} + \mathcal{A}_{i \rightarrow f}^{(d)}$ de (101) et (99), apparaissent des fonctions de Heaviside se complétant en cascade à un, $Y(\bar{k}_i - \bar{q}_\alpha) + Y(\bar{q}_\alpha - \bar{k}_i) Y(\bar{k}_j - \bar{q}_\beta) + Y(\bar{q}_\alpha - \bar{k}_i) Y(\bar{q}_\beta - \bar{k}_j) = Y(\bar{k}_i - \bar{q}_\alpha) + Y(\bar{q}_\alpha - \bar{k}_i) = 1$. Dans le nouveau sommande obtenu, invariant par échange $(\alpha, i) \leftrightarrow (\beta, j)$, les parties $\sum_{i < j}$ et $\sum_{j < i}$ donnent des contributions égales après sommation sur α : elles se doublent, ce qui fait disparaître

²²On remarque en particulier que le produit de tous les nombres d'onde internes apparaît systématiquement au numérateur et au dénominateur, et se simplifie dans le rapport.

le facteur 1/2 global, et l'on retrouve la troisième et dernière somme de l'équation (28). Voilà qui établit le résultat annoncé (27), qui vaut sans condition sur les vecteurs d'onde internes.

Annexe C. Simplifications des expressions intégrales de C_ϕ et de I_{ang}

C.1. Tirer parti de l'invariance d'échelle

On remarque que l'intégrale angulaire I_{ang} définie par l'équation (43) est une fonction positivement homogène de degré huit de ses cinq variables, au sens où

$$I_{\text{ang}}(\lambda \bar{q}_1, \lambda \bar{q}_2, \lambda \bar{k}_1, \lambda \bar{k}_2, \lambda \bar{k}_3) = \lambda^8 I_{\text{ang}}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3) \quad \forall \lambda > 0. \quad (102)$$

Pour le voir, multiplions comme au premier membre de (102) les cinq nombres d'onde réduits $\bar{q}_\alpha$ et $\bar{k}_i$ par le facteur d'échelle $\lambda > 0$ et effectuons dans (43) les changements de variable $\theta_{12} \rightarrow \lambda \theta_{12}$, $Z_1 \rightarrow \lambda Z_1$ et $Z_2 \rightarrow \lambda Z_2$, ce qui sort déjà un facteur $\lambda^4 / \lambda = \lambda^3$ dans le préfacteur de (43) et un facteur $(\lambda^2)^3$ au travers des éléments d'intégration $d\bar{\theta}_{12} \bar{\theta}_{12} d^2 Z_1 d^2 Z_2$. De plus, sous l'effet de ces transformations, tous les angles réduits (37) sont multipliés par λ , l'amplitude réduite $\bar{\mathcal{A}}_{i \rightarrow f}$ est multipliée par λ dans (28) donc son carré par λ^2 — les dénominateurs sont inchangés, les numérateurs sont multipliés par λ —, les quantités u et v sont multipliées par λ^3 dans (32)–(33) si bien que $\delta(u-v) \rightarrow \lambda^{-3} \delta(u-v)$. Comme $\lambda^3 (\lambda^2)^3 \lambda^2 / \lambda^3 = \lambda^8$, on arrive au résultat (102) annoncé.

Exploitions l'invariance d'échelle (102) de I_{ang} dans la définition (41) du coefficient $C_\phi(z_\phi)$, en ajoutant un facteur $\delta(\bar{q}_1 + \bar{q}_2 - \lambda)$ dans l'intégrande et une intégrale extérieure (tout à gauche) $\int_0^{+\infty} d\lambda$, selon une astuce bien connue,

$$C_\phi(z_\phi) = \int_0^{+\infty} d\lambda \int_0^{+\infty} \prod_{\alpha=1}^2 d\bar{q}_\alpha \prod_{i=1}^3 d\bar{k}_i \delta(\bar{q}_1 + \bar{q}_2 - \lambda) \delta(\bar{q}_1 + \bar{q}_2 - \bar{k}_1 - \bar{k}_2 - \bar{k}_3) I_{\text{ang}}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3) \\ \times e^{-(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)} \prod_{\alpha=1}^2 (1 + \bar{n}_{q_\alpha}^{\text{lin}}) \prod_{i=1}^3 (1 + \bar{n}_{k_i}^{\text{lin}}) \quad (103)$$

puis en effectuant le changement de variable $\bar{q}_\alpha \rightarrow \lambda \bar{q}_\alpha$ et $\bar{k}_i \rightarrow \lambda \bar{k}_i$ sur les cinq nombres d'onde réduits. Les éléments d'intégration sortent un facteur λ^5 , chaque delta de Dirac sort un facteur $1/\lambda$ et I_{ang} sort un facteur λ^8 . Il reste²³

$$C_\phi(z_\phi) = \int_0^1 d\bar{q}_1 d\bar{q}_2 d\bar{k}_1 d\bar{k}_2 d\bar{k}_3 \delta(\bar{q}_1 + \bar{q}_2 - 1) \delta(\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3 - 1) I_{\text{ang}}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3) \\ \times \int_0^{+\infty} d\lambda \lambda^{11} e^{-\lambda} S(\lambda \bar{q}_1, \lambda \bar{q}_2, \lambda \bar{k}_1, \lambda \bar{k}_2, \lambda \bar{k}_3) \quad (104)$$

avec la notation compacte pour la partie statistique bosonique,

$$S(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3) \equiv \prod_{\alpha=1}^2 (1 + \bar{n}_{q_\alpha}^{\text{lin}}) \prod_{i=1}^3 (1 + \bar{n}_{k_i}^{\text{lin}}) \\ = [(1 - z_\phi e^{-\bar{q}_1})(1 - z_\phi e^{-\bar{q}_2})(1 - z_\phi e^{-\bar{k}_1})(1 - z_\phi e^{-\bar{k}_2})(1 - z_\phi e^{-\bar{k}_3})]^{-1}. \quad (105)$$

Cette nouvelle forme de $C_\phi(z_\phi)$ présente deux avantages : (i) elle permet de découpler l'intégration des facteurs thermiques, seuls à dépendre de la fugacité, et (ii) elle permet de restreindre l'évaluation de I_{ang} à la variété

$$\mathcal{W} = \{(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3) \in [0, 1]^5 \mid \bar{q}_1 + \bar{q}_2 = \bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3 = 1\} \quad (106)$$

²³Nous nous sommes permis de remplacer $\bar{q}_1 + \bar{q}_2$ par 1 dans l'argument du second delta de Dirac et sous l'exponentielle en préfacteur de S , comme nous y autorise le premier delta de Dirac, ce qui permet aussi de limiter le domaine d'intégration sur les nombres d'onde à $[0, 1]^5$.

ce qui conduit à des simplifications dans les expressions des quantités $\overline{\mathcal{A}}_{i \rightarrow f}$, u et v , par exemple

$$v \stackrel{\mathcal{W}}{=} \frac{3}{4} [(1 - \bar{k}_1)(1 - \bar{k}_2)(1 - \bar{k}_3) - (1 - \bar{q}_1)(1 - \bar{q}_2)], \quad (107)$$

$$u \stackrel{\mathcal{W}}{=} \bar{q}_1 \bar{q}_2 \bar{\theta}_{12}^2 - \frac{1}{\bar{k}_3} (Z_1^*, Z_2^*) M \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}, \quad (108)$$

avec

$$M \stackrel{\mathcal{W}}{=} \begin{pmatrix} \bar{k}_1(1 - \bar{k}_2) & \bar{k}_1 \bar{k}_2 \\ \bar{k}_1 \bar{k}_2 & \bar{k}_2(1 - \bar{k}_1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det M \stackrel{\mathcal{W}}{=} \bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3. \quad (109)$$

C.2. Tirer parti de la symétrie d'échange

Dans l'intégrale quintuple (104) sur les nombres d'onde réduits donnant $C_\phi(z_\phi)$, l'intégrande doit être une fonction symétrique des deux premiers $\bar{q}_1, \bar{q}_2$ et une fonction symétrique des trois derniers $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$. Ceci reflète bien entendu la symétrie d'échange de l'état initial $|i\rangle$ et celle de l'état final $|f\rangle$ dans la collision $2\phi \rightarrow 3\phi$. Seule la symétrie de I_{ang} n'est pas évidente : elle ne saute pas aux yeux sur la définition (43), à cause du rôle particulier joué par les vecteurs d'onde $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$ dans le paramétrage (9) dont elle est issue, mais nous vérifierons explicitement qu'elle est satisfaite dans la section C.3. Cette symétrie permet de se restreindre au domaine ordonné $\bar{q}_1 < \bar{q}_2$ au prix de l'ajout d'un facteur 2 et $\bar{k}_1 < \bar{k}_2 < \bar{k}_3$ au prix de l'ajout d'un facteur $3! = 6$, comme nous le détaillons maintenant.

Commençons par les variables $\bar{q}_\alpha$: en sous-entendant la dépendance en les $\bar{k}_i$, nous sommes confrontés à l'intégrale

$$I = \int_0^1 d\bar{q}_1 \int_0^1 d\bar{q}_2 \delta(\bar{q}_1 + \bar{q}_2 - 1) f(\bar{q}_1, \bar{q}_2) = 2 \int_0^1 d\bar{q}_2 \int_0^{\bar{q}_2} d\bar{q}_1 \delta(\bar{q}_1 + \bar{q}_2 - 1) f(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \quad (110)$$

où la fonction f est symétrique et nous nous sommes réduits comme promis au domaine ordonné dans la seconde égalité. Mais il est possible de simplifier encore l'écriture. Intégrons le delta de Dirac sur $\bar{q}_1$, ce qui revient à imposer que $\bar{q}_1 = 1 - \bar{q}_2$, ce qui est manifestement positif; la contrainte $\bar{q}_1 < \bar{q}_2$ conduit alors à $1 - \bar{q}_2 < \bar{q}_2$ donc à $\bar{q}_2 > 1/2$. Réciproquement, si $\bar{q}_2 > 1/2$, on a automatiquement $\bar{q}_1 = 1 - \bar{q}_2 < 1/2 < \bar{q}_2$. Il reste donc

$$I = 2 \int_{1/2}^1 d\bar{q}_2 f(1 - \bar{q}_2, \bar{q}_2). \quad (111)$$

Procédons de même pour les variables $\bar{k}_i$: en sous-entendant la dépendance en les $\bar{q}_\alpha$, nous sommes confrontés à l'intégrale

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 d\bar{k}_1 \int_0^1 d\bar{k}_2 \int_0^1 d\bar{k}_3 \delta(\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3 - 1) g(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3) \\ &= 6 \int_0^1 d\bar{k}_3 \int_0^{\bar{k}_3} d\bar{k}_2 \int_0^{\bar{k}_2} d\bar{k}_1 \delta(\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3 - 1) g(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3) \end{aligned} \quad (112)$$

avec une fonction g symétrique et une restriction au domaine ordonné. Pour simplifier encore, intégrons comme précédemment le delta de Dirac sur $\bar{k}_1$, ce qui revient à imposer $\bar{k}_1 = 1 - \bar{k}_2 - \bar{k}_3$. Comme $\bar{k}_1 < \bar{k}_3$ et $\bar{k}_2 < \bar{k}_3$, on en déduit que $1 < 3\bar{k}_3$ donc que $\bar{k}_3 > 1/3$. Comme $\bar{k}_1 < \bar{k}_2$, on en déduit que $\bar{k}_2 > (1 - \bar{k}_3)/2$; voilà qui est compatible avec la condition $\bar{k}_2 < \bar{k}_3$ puisque l'on a $\bar{k}_3 > 1/3$. Réciproquement, l'inégalité $2\bar{k}_2 > 1 - \bar{k}_3$ s'écrit aussi $2(1 - \bar{k}_1 - \bar{k}_3) > 1 - \bar{k}_3$ ou encore $\bar{k}_1 < (1 - \bar{k}_3)/2$, et l'inégalité $\bar{k}_1 < \bar{k}_2$ est automatiquement satisfaite. Enfin, il faut penser à vérifier que $\bar{k}_1 = 1 - \bar{k}_2 - \bar{k}_3$ reste positif, donc que $\bar{k}_2 < 1 - \bar{k}_3$, ce qui est une condition indépendante de l'inégalité $\bar{k}_2 < \bar{k}_3$ et plus contraignante qu'elle dès que $\bar{k}_3 > 1/2$. Il reste finalement

$$J = 6 \int_{1/3}^1 d\bar{k}_3 \int_{(1-\bar{k}_3)/2}^{\min(1-\bar{k}_3, \bar{k}_3)} d\bar{k}_2 g(1 - \bar{k}_2 - \bar{k}_3, \bar{k}_2, \bar{k}_3). \quad (113)$$

En menant en parallèle ces simplifications dans (104), nous aboutissons à l'expression maximale réduite cherchée

$$C_\phi(z_\phi) = 12 \int_{1/3}^1 d\bar{k}_3 \int_{(1-\bar{k}_3)/2}^{\min(1-\bar{k}_3, \bar{k}_3)} d\bar{k}_2 \int_{1/2}^1 d\bar{q}_2 I_{\text{ang}}(1-\bar{q}_2, \bar{q}_2, 1-\bar{k}_2-\bar{k}_3, \bar{k}_2, \bar{k}_3) \\ \times \int_0^{+\infty} d\lambda \lambda^{11} e^{-\lambda} S(\lambda(1-\bar{q}_2), \lambda\bar{q}_2, \lambda(1-\bar{k}_2-\bar{k}_3), \lambda\bar{k}_2, \lambda\bar{k}_3). \quad (114)$$

C.3. Des changements de variables angulaires simplificateurs

Nous nous plaçons dans cette section C.3 immédiatement sur la variété $\mathcal{W}$ (106). L'idée directrice est de simplifier encore l'expression de la quantité u (108) en argument du delta de Dirac dans I_{ang} (43). À cette fin, on effectue un changement de variable sur les grandeurs complexes Z_1 et Z_2 : on réduit maximale la forme hermitienne définissant u en se plaçant dans la base propre orthonormale

$$\mathbf{e}_+ = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_- = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \quad (115)$$

de la matrice M et en faisant apparaître dans les amplitudes au dénominateur la racine carrée des valeurs propres correspondantes $m_+ > m_- > 0$ de M , et au numérateur la racine carrée de $\bar{k}_3$,

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \left(\frac{\bar{k}_3}{m_+} \right)^{1/2} \zeta_+ \mathbf{e}_+ + \left(\frac{\bar{k}_3}{m_-} \right)^{1/2} \zeta_- \mathbf{e}_- \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} Z_1 = \frac{a\bar{k}_3^{-1/2}}{m_+^{1/2}} \zeta_+ - \frac{b\bar{k}_3^{-1/2}}{m_-^{1/2}} \zeta_- \\ Z_2 = \frac{b\bar{k}_3^{-1/2}}{m_+^{1/2}} \zeta_+ + \frac{a\bar{k}_3^{-1/2}}{m_-^{1/2}} \zeta_- \end{cases} \quad (116)$$

où ζ_+ et ζ_- décrivent $\mathbb{C}$. En partant de l'expression (109) de M sur la variété, on trouve que

$$m_\pm = s - p \pm |\delta + ip|, \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\delta}{|\delta + ip|} \right)^{1/2}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\delta}{|\delta + ip|} \right)^{1/2}. \quad (117)$$

avec les raccourcis de notation

$$s = \frac{1}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2), \quad \delta = \frac{1}{2}(\bar{k}_1 - \bar{k}_2), \quad p = \bar{k}_1 \bar{k}_2. \quad (118)$$

De plus, le delta de Dirac permet d'intégrer sur l'angle réduit positif $\bar{\theta}_{12}$, en vertu de l'identité

$$\delta(u - v) = \delta(\bar{q}_1 \bar{q}_2 \bar{\theta}_{12}^2 - |\zeta_+|^2 - |\zeta_-|^2 - v) = \frac{\delta(\bar{\theta}_{12} - \bar{\theta}_{12}^{(0)})}{2\bar{q}_1 \bar{q}_2 \bar{\theta}_{12}^{(0)}} \quad \text{où} \quad \bar{\theta}_{12}^{(0)} = \frac{(|\zeta_+|^2 + |\zeta_-|^2 + v)^{1/2}}{(\bar{q}_1 \bar{q}_2)^{1/2}} \quad (119)$$

à supposer que cette valeur de $\bar{\theta}_{12}$ annulant l'argument du delta de Dirac soit réelle positive. Compte tenu du jacobien du changement de variable (116),

$$\frac{D(\text{Re } Z_1, \text{Im } Z_1, \text{Re } Z_2, \text{Im } Z_2)}{D(\text{Re } \zeta_+, \text{Im } \zeta_+, \text{Re } \zeta_-, \text{Im } \zeta_-)} = \left[\frac{(a^2 + b^2)\bar{k}_3}{(m_+ m_-)^{1/2}} \right]^2 = \frac{\bar{k}_3}{\bar{k}_1 \bar{k}_2} \quad (120)$$

il reste dans (43) (avec Y la fonction de Heaviside)

$$I_{\text{ang}}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3) \stackrel{\mathcal{W}}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{C}} d^2 \zeta_+ \int_{\mathbb{C}} d^2 \zeta_- |\mathcal{A}_{i \rightarrow f}|_{\bar{\theta}_{12} = \bar{\theta}_{12}^{(0)}}^2 Y(|\zeta_+|^2 + |\zeta_-|^2 + v). \quad (121)$$

Dans le calcul numérique, nous passerons en représentation phase-module $\zeta_{\pm} = \rho_{\pm} \exp(i\phi_{\pm})$, puis en coordonnées polaires pour intégrer sur (ρ_+, ρ_-) , en posant $\rho_+ = R \cos \alpha$ et $\rho_- = R \sin \alpha$ avec $R = (|\zeta_+|^2 + |\zeta_-|^2)^{1/2} > 0$ et $\alpha \in [0, \pi/2]$, auquel cas²⁴

$$I_{\text{ang}}(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3) \stackrel{\mathcal{W}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi_+ \int_0^{2\pi} d\phi_- \int_0^{\pi/2} d\alpha \cos \alpha \sin \alpha \int_0^{+\infty} dR R^3 |\mathcal{A}_{i \rightarrow f}|_{\bar{\theta}_{12} = \bar{\theta}_{12}^{(0)}}^2 Y(R^2 + \nu) \quad (122)$$

avec la valeur réelle positive de $\bar{\theta}_{12}$ (si elle existe)

$$\bar{\theta}_{12}^{(0)} \stackrel{\mathcal{W}}{=} \frac{(R^2 + \nu)^{1/2}}{(\bar{q}_1 \bar{q}_2)^{1/2}}. \quad (123)$$

Pour terminer, vérifions la symétrie d'échange de I_{ang} utilisée dans la section C.2.

- (i) Il est simple de voir que I_{ang} est invariant par la transformation $(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \zeta_+, \zeta_-) \rightarrow (\bar{q}_2, \bar{q}_1, -\zeta_+, -\zeta_-)$ appliquée à (121). En effet, la forme de l'intégrale dans (121) est manifestement préservée, et les quantités ν et $\bar{\theta}_{12}^{(0)}$ sont manifestement inchangées. De plus, comme les coefficients $m_{\pm}$, a et b ne changent pas non plus, les variables complexes originelles sont transformées comme suit dans (116), $(Z_1, Z_2) \rightarrow (-Z_1, -Z_2)$, et donc $Z_3 \rightarrow -Z_3$ dans (36), ce qui échange les angles réduits $\bar{\psi}_{1i}$ et $\bar{\psi}_{2i}$ sans toucher aux angles réduits $\bar{\chi}_{ij}$ dans (37). On en déduit que l'amplitude réduite $\mathcal{A}_{i \rightarrow f}$ (28) ne change pas (après sommation sur l'indice α bien entendu), puisque $\bar{q}_\alpha$ et $\bar{q}_\beta$ sont intervertis, de même que $\bar{\psi}_{\alpha i}$ et $\bar{\psi}_{\beta i}$. La symétrie par échange de $\bar{q}_1$ et $\bar{q}_2$ est ainsi confirmée.
- (ii) Il reste simple d'établir la symétrie par échange de $\bar{k}_1$ et $\bar{k}_2$. Il suffit de vérifier, de manière similaire au point (i), l'invariance de I_{ang} par la transformation $(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \zeta_+, \zeta_-) \rightarrow (\bar{k}_2, \bar{k}_1, \zeta_+, -\zeta_-)$: les quantités $\nu, \bar{\theta}_{12}^{(0)}, m_+, m_-$ sont invariantes, mais les coordonnées du vecteur propre $\mathbf{e}_+$ sont échangées dans (117), $a \leftrightarrow b$; il en résulte que les variables complexes s'intervertissent, $(Z_1, Z_2) \rightarrow (Z_2, Z_1)$, comme les angles $\bar{\psi}_{\alpha 1}$ et $\bar{\psi}_{\alpha 2}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ ou comme les angles $\bar{\chi}_{13}$ et $\bar{\chi}_{23}$, le complexe Z_3 et les autres angles réduits $\bar{\psi}_{13}, \bar{\psi}_{23}, \bar{\chi}_{12}$ étant inchangés; l'amplitude $\mathcal{A}_{i \rightarrow f}$ dans son ensemble est préservée.
- (iii) Le cas de la symétrie par échange de $\bar{k}_2$ et $\bar{k}_3$ est plus retors. Après réflexion, on introduit la transformation $(\bar{k}_2, \bar{k}_3, \zeta_+, \zeta_-) \rightarrow (\bar{k}_3, \bar{k}_2, \tilde{\zeta}_+, \tilde{\zeta}_-)$ avec

$$\begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_+ \\ \tilde{\zeta}_- \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \zeta_+ \\ \zeta_- \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{m}_+^{1/2}}{\bar{k}_2^{1/2}} & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{m}_-^{1/2}}{\bar{k}_2^{1/2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ -\tilde{b} & \tilde{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_3} & -\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\bar{k}_3^{1/2}}{m_+^{1/2}} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{k}_3^{1/2}}{m_-^{1/2}} \end{pmatrix}. \quad (124)$$

Les quantités $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{m}_{\pm}$ se déduisent de $a, b, m_{\pm}$ par échange de $\bar{k}_2$ et $\bar{k}_3$. On vérifie que P est une matrice orthogonale de déterminant -1 , en calculant laborieusement $P^t P$ après avoir montré que

$$Q^t Q = \begin{pmatrix} \bar{k}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{k}_3^{-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (125)$$

où la matrice Q est le produit des trois dernières matrices entrant dans l'équation (124)²⁵.

La transformation (124) est donc de jacobien unité, et l'on a $|\tilde{\zeta}_+|^2 + |\tilde{\zeta}_-|^2 = |\zeta_+|^2 + |\zeta_-|^2$

²⁴L'intégrande est invariant par changement de (ζ_+, ζ_-) en (ζ_+^*, ζ_-^*) , donc par changement de (ϕ_+, ϕ_-) en $(2\pi - \phi_+, 2\pi - \phi_-)$. On peut alors se contenter d'intégrer numériquement sur $\phi_+ \in [0, \pi]$ après avoir enlevé le facteur $1/2$ devant l'intégrale. On gagne ainsi un facteur 2 sur le temps de calcul.

²⁵Donnons trois résultats intermédiaires : $m_+ a^2 + m_- b^2 \stackrel{\mathcal{W}}{=} \bar{k}_1 (1 - \bar{k}_2)$, $m_- a^2 + m_+ b^2 \stackrel{\mathcal{W}}{=} \bar{k}_2 (1 - \bar{k}_1)$ et $ab(m_+ - m_-) \stackrel{\mathcal{W}}{=} \bar{k}_1 \bar{k}_2$, obtenus en écrivant les éléments de matrice diagonaux M_{11} et M_{22} et non diagonal M_{12} de deux façons différentes, (i) comme dans la définition (109) et (ii) au travers de la décomposition spectrale $M = m_+ |\mathbf{e}_+\rangle \langle \mathbf{e}_+| + m_- |\mathbf{e}_-\rangle \langle \mathbf{e}_-|$ en notation de Dirac. Par ailleurs, le déterminant d'un produit est le produit des déterminants, d'où $\det P = -(a^2 + b^2)(\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2)(\tilde{m}_+ \tilde{m}_- / m_+ m_-)^{1/2}$. Or $a^2 + b^2 = \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 = 1$ par construction et $m_+ m_- = \tilde{m}_+ \tilde{m}_- \stackrel{\mathcal{W}}{=} \bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3$ d'après (109).

$|\zeta_-|^2$; $\bar{\theta}_{12}^{(0)}$ reste intact et la structure de l'intégrale (121) sur ζ_+, ζ_- est préservée. Cette transformation est en fait très simple dans les variables complexes originelles Z_i (36), $(Z_1, Z_2) \rightarrow (Z_1, Z_3)$ et $Z_3 \rightarrow Z_2$, c'est même comme cela qu'elle a été construite²⁶; il en résulte dans (37) que $\bar{\psi}_{11}$, $\bar{\psi}_{21}$ et $\bar{\chi}_{23}$ ne varient pas mais que $\bar{\psi}_{\alpha 2}$ et $\bar{\psi}_{\alpha 3}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ sont échangés, tout comme $\bar{\chi}_{12}$ et $\bar{\chi}_{13}$; l'amplitude réduite $\bar{\mathcal{A}}_{i \rightarrow f}$ est préservée dans (28), et la symétrie d'échange de I_{ang} est confirmée.

Annexe D. Quelques précisions sur le calcul numérique de C_ϕ

D.1. Intégration numérique sur les nombres d'onde et sur les angles $\phi_\pm, \alpha$; résultat final

Nous utilisons l'expression (114) de $C_\phi(z_\phi)$, et nous effectuons le calcul en parallèle pour les $n_\phi \simeq 100$ valeurs requises de la fugacité z_ϕ équiréparties dans $[0, 1]$, afin de n'avoir pas à évaluer n_ϕ fois l'intégrale angulaire I_{ang} , qui n'en dépend pas et qui est coûteuse en temps. Nous introduisons un petit paramètre η_{qk} contrôlant la discrétisation des intégrales sur les nombres d'onde réduits dans la méthode du point milieu. Dans l'intégrale sur $\bar{k}_3$, nous prenons le pas $d\bar{k}_3 \simeq (2/3)\eta_{qk}$ (nous avons écrit $\simeq$ car il faut ajuster légèrement $d\bar{k}_3$ pour avoir un nombre entier de pas dans la longueur $2/3$ de l'intervalle d'intégration, lorsque η_{qk} n'est pas l'inverse d'un entier). Dans l'intégrale suivante, sur $\bar{k}_2$, nous utilisons $d\bar{k}_2 \simeq \eta_{qk}$, valeur là aussi arrondie pour avoir un nombre entier non nul de pas. Dans la troisième intégrale, sur $\bar{q}_2$, nous identifions comme points remarquables $\bar{k}_i$ et $1 - \bar{k}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$ — du moins ceux qui sont dans l'intervalle $[1/2, 1]$ — et le point d'annulation de ν , $\bar{q}_2(\nu = 0) = |1 + (1 - 4\sigma)^{1/2}|/2$, si $\sigma \equiv (1 - \bar{k}_1)(1 - \bar{k}_2)(1 - \bar{k}_3) < 1/4$; nous intégrons ensuite sur chaque sous-intervalle $[\bar{q}_2^{\text{inf}}, \bar{q}_2^{\text{sup}}]$ délimité par ces points²⁷ et par les bornes d'intégration $1/2$ et 1 . Enfin, l'intégrale sur le facteur d'échelle est calculée, toujours par la méthode du point milieu, avec un pas $d\lambda = 1/n_\phi \simeq 0,01$ (de façon qu'on ait toujours $1 - z_\phi$ nul ou supérieur à $d\lambda$) et une coupure $\lambda_{\text{max}} = 40$.

Nous évaluons numériquement l'intégrale angulaire I_{ang} à partir de la forme (122). L'intégration sur les angles $\phi_\pm$ et α est contrôlée par le nombre entier $n_{\alpha\phi} \gg 1$, au sens où nous utilisons les pas $d\alpha = \pi/2n_{\alpha\phi}$ et $d\phi_+ = d\phi_- = d\phi = 2\pi/n_{\alpha\phi}$; on a donc $d\alpha \ll d\phi$. Nous décalons les grilles régulières en ϕ_+ et en ϕ_- d'un demi-pas pour éviter d'avoir $\phi_+ = \phi_- [\pi]$, pour une raison qui apparaîtra plus bas²⁸. L'intégrale sur R est calculée analytiquement comme il est expliqué dans la section D.2.

Dans notre calcul numérique de $C_\phi(z_\phi)$, à partir du point de référence ($\eta_{qk} = 1/40$, $n_{\alpha\phi} = 60$), (i) nous doublons $n_{\alpha\phi}$ à $\eta_{qk} = 1/40$ fixé jusqu'à ce que le résultat change de moins de 10^{-3} en valeur relative (et ceci uniformément en $z_\phi \in [0, 1]$), et (ii) nous divisons η_{qk} par deux à $n_{\alpha\phi} = 60$ fixé jusqu'à ce que le résultat change là encore de moins de 10^{-3} en valeur relative. La convergence est atteinte au point (i) pour $n_{\alpha\phi} = 240$, et au point (ii) pour $\eta_{qk} = 1/160$. Faire

²⁶Les deux dernières matrices dans (124) font passer de (ζ_+, ζ_-) à (Z_1, Z_2) comme dans (116); la matrice médiane change (Z_1, Z_2) en (Z_1, Z_3) ; les deux premières matrices font revenir aux variables zêta par transformation inverse de (116) après échange de $\bar{k}_2$ et $\bar{k}_3$.

²⁷Si $\bar{q}_2 = \bar{k}_i$ ou $\bar{q}_1 = 1 - \bar{q}_2 = \bar{k}_i$, on tombe sur une division par zéro dans (28). Le cas $\nu = 0$ est lui aussi particulier, comme le laisse pressentir la fonction $Y(R^2 + \nu)$ dans (122) et comme la suite le confirmera. Si le sous-intervalle est de largeur $\bar{q}_2^{\text{sup}} - \bar{q}_2^{\text{inf}} < \eta_{qk}^2$, on l'ignore simplement, sinon on prend un pas d'intégration $d\bar{q}_2 \simeq \eta_{qk}$ arrondi pour avoir un nombre entier de pas au moins égal à 1.

²⁸Nous nous souvenons aussi de la note 24. En pratique, nous prenons donc $n_{\alpha\phi}$ pair et $\phi_+ \in \{d\phi/2, 3d\phi/2, \dots, (n_{\alpha\phi} - 1)d\phi/2\}$, $\phi_- \in \{0, d\phi, \dots, (n_{\alpha\phi} - 1)d\phi\}$.

directement le calcul pour $(\eta_{qk} = 1/160, n_{\alpha\phi} = 240)$ serait long; nous préférons extrapoler à partir du point de référence comme suit :

$$C_\phi(z_\phi) \simeq C_\phi(z_\phi)|_{n_{\alpha\phi}=60}^{\eta_{qk}=1/40} + \left(C_\phi(z_\phi)|_{n_{\alpha\phi}=240}^{\eta_{qk}=1/40} - C_\phi(z_\phi)|_{n_{\alpha\phi}=60}^{\eta_{qk}=1/40} \right) + \left(C_\phi(z_\phi)|_{n_{\alpha\phi}=60}^{\eta_{qk}=1/160} - C_\phi(z_\phi)|_{n_{\alpha\phi}=60}^{\eta_{qk}=1/40} \right) \quad (126)$$

ce qui conduit à la figure 3. À titre de comparaison, nous effectuons aussi le calcul pour $(\eta_{qk} = 1/80, n_{\alpha\phi} = 120)$; la demi-somme et la demi-différence avec (126) conduisent aux valeurs et barres d'erreur données pour $z_\phi = 0$ et $z_\phi = 1$ dans (59).

D.2. Intégration analytique sur l'hyperrayon R

D'abord, nous écrivons l'amplitude de collision réduite (28) sous la forme synthétique

$$\bar{\mathcal{A}}_{i \rightarrow f} = \sum_{n=1}^{15} \frac{C_n}{\left(|A_n R + \lambda_n \bar{\theta}_{12}|^2 + \frac{3}{4} \right) \left(|B_n R + \mu_n \bar{\theta}_{12}|^2 + \frac{3}{4} \right)} \quad (127)$$

où les différentes quantités complexes A_n, B_n ou réelles λ_n, μ_n figurent dans la table 1, puis nous développons le carré $|\bar{\mathcal{A}}_{i \rightarrow f}|^2$ en 15 termes carrés $n = n'$ et en 105 termes rectangles $n < n'$ (sans oublier le facteur 2 dans ces doubles produits) pour nous ramener dans (122) à

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{dR R^3 Y(R^2 + \nu)}{\prod_{m=1}^4 \left(|D_m R + \nu_m \bar{\theta}_{12}^{(0)}|^2 + \frac{3}{4} \right)} \quad (128)$$

où $D_m \in \mathbb{C}, \nu_m \in \mathbb{R}$. Dans le cas $\nu \neq 0$ où nous sommes (voir plus haut), nous effectuons le changement de variable strictement croissant

$$R = \frac{|v|^{1/2}}{2} \left(x - \frac{s_\nu}{x} \right) \quad \text{où} \quad s_\nu \equiv \nu/|\nu| \in \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad x \in [1, +\infty[. \quad (129)$$

On vérifie alors que la valeur minimale prise par R dans (129) vaut 0 si $\nu > 0$ et $|v|^{1/2}$ si $\nu < 0$, exactement comme l'impose la fonction de Heaviside dans (128), et que la valeur (123) de l'angle polaire réduit assurant la conservation de l'énergie,

$$\bar{\theta}_{12}^{(0)} \stackrel{w}{=} \frac{|v|^{1/2}}{2(\bar{q}_1 \bar{q}_2)^{1/2}} \left(x + \frac{s_\nu}{x} \right) \quad (130)$$

est libre de racine carrée. Nous voilà ramenés à l'intégrale d'une fraction rationnelle,

$$K = \frac{\nu^2}{16} \int_1^{+\infty} \frac{dx x^3 (x^4 - 1)(x^2 - s_\nu)^2}{\prod_{m=1}^4 (a_m x^4 + b_m x^2 + c_m)} \stackrel{X=x^2}{=} \frac{\nu^2}{32} \int_1^{+\infty} dX \frac{X(X-1)^{2+s_\nu} (X+1)^{2-s_\nu}}{\prod_{m=1}^4 (a_m X^2 + b_m X + c_m)} \quad (131)$$

avec les notations suivantes :

$$a_m = |\check{D}_m + \check{\nu}_m|^2, \quad b_m = \frac{3}{4} + 2s_\nu(\check{\nu}_m^2 - |\check{D}_m|^2), \quad c_m = |\check{D}_m - \check{\nu}_m|^2 \quad (132)$$

et

$$\check{D}_m = \frac{|v|^{1/2}}{2} D_m, \quad \check{\nu}_m = \frac{|v|^{1/2}}{2(\bar{q}_1 \bar{q}_2)^{1/2}} \nu_m. \quad (133)$$

Les pôles X_i de la fraction rationnelle $R(X)$ dans l'intégrande de (131) s'obtiennent par résolution d'une équation du second degré; on vérifie qu'aucun pôle ne peut être réel positif (sinon le x_i sous-jacent serait réel et on aurait $|DR + \nu \bar{\theta}_{12}^{(0)}|^2 = -3/4$ avec R et $\bar{\theta}_{12}^{(0)}$ réels, ce qui est impossible); en revanche, on peut avoir X_i réel négatif (le x_i sous-jacent est imaginaire pur) ou X_i de partie imaginaire non nulle, appartenant à une paire de pôles complexes conjugués X_i et X_i^* . Pour

TABLE 1 – Coefficients entrant dans la forme synthétique (127) de l’amplitude de collision réduite $2\phi \rightarrow 3\phi$. La numérotation de 1 à 15 respecte l’ordre des sommes et l’ordre lexicographique de leurs termes dans son expression (28). Pour simplifier, nous nous sommes placés sur la variété $\mathcal{W}$ (106), comme nous le faisons dans le calcul numérique.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$
$A_n R$	0	0	0	$\frac{Z_1}{ \bar{q}_1 - \bar{k}_1 }$	$\frac{Z_2}{ \bar{q}_1 - \bar{k}_2 }$	$\frac{Z_3}{ \bar{q}_1 - \bar{k}_3 }$	$\frac{Z_1}{ \bar{q}_2 - \bar{k}_1 }$	$\frac{Z_2}{ \bar{q}_2 - \bar{k}_2 }$	$\frac{Z_3}{ \bar{q}_2 - \bar{k}_3 }$
λ_n	1	1	1	$\frac{\bar{q}_2}{ \bar{q}_1 - \bar{k}_1 }$	$\frac{\bar{q}_2}{ \bar{q}_1 - \bar{k}_2 }$	$\frac{\bar{q}_2}{ \bar{q}_1 - \bar{k}_3 }$	$\frac{-\bar{q}_1}{ \bar{q}_2 - \bar{k}_1 }$	$\frac{-\bar{q}_1}{ \bar{q}_2 - \bar{k}_2 }$	$\frac{-\bar{q}_1}{ \bar{q}_2 - \bar{k}_3 }$
$B_n R$	$\frac{Z_2 - Z_3}{1 - \bar{k}_1}$	$\frac{Z_3 - Z_1}{1 - \bar{k}_2}$	$\frac{Z_1 - Z_2}{1 - \bar{k}_3}$	$\frac{Z_2 - Z_3}{1 - \bar{k}_1}$	$\frac{Z_3 - Z_1}{1 - \bar{k}_2}$	$\frac{Z_1 - Z_2}{1 - \bar{k}_3}$	$\frac{Z_2 - Z_3}{1 - \bar{k}_1}$	$\frac{Z_3 - Z_1}{1 - \bar{k}_2}$	$\frac{Z_1 - Z_2}{1 - \bar{k}_3}$
μ_n	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C_n	$\bar{k}_1$	$\bar{k}_2$	$\bar{k}_3$	$-\bar{q}_2$	$-\bar{q}_2$	$-\bar{q}_2$	$-\bar{q}_1$	$-\bar{q}_1$	$-\bar{q}_1$

	$n = 10$	$n = 11$	$n = 12$	$n = 13$	$n = 14$	$n = 15$
$A_n R$	$\frac{Z_1}{ \bar{q}_1 - \bar{k}_1 }$	$\frac{Z_1}{ \bar{q}_1 - \bar{k}_2 }$	$\frac{Z_2}{ \bar{q}_1 - \bar{k}_3 }$	$\frac{Z_1}{ \bar{q}_2 - \bar{k}_1 }$	$\frac{Z_1}{ \bar{q}_2 - \bar{k}_2 }$	$\frac{Z_2}{ \bar{q}_2 - \bar{k}_3 }$
λ_n	$\frac{\bar{q}_2}{ \bar{q}_1 - \bar{k}_1 }$	$\frac{\bar{q}_2}{ \bar{q}_1 - \bar{k}_2 }$	$\frac{\bar{q}_2}{ \bar{q}_1 - \bar{k}_3 }$	$\frac{-\bar{q}_1}{ \bar{q}_2 - \bar{k}_1 }$	$\frac{-\bar{q}_1}{ \bar{q}_2 - \bar{k}_2 }$	$\frac{-\bar{q}_1}{ \bar{q}_2 - \bar{k}_3 }$
$B_n R$	$\frac{Z_2}{ \bar{q}_2 - \bar{k}_2 }$	$\frac{Z_3}{ \bar{q}_2 - \bar{k}_3 }$	$\frac{Z_3}{ \bar{q}_2 - \bar{k}_1 }$	$\frac{Z_2}{ \bar{q}_1 - \bar{k}_2 }$	$\frac{Z_3}{ \bar{q}_1 - \bar{k}_3 }$	$\frac{Z_3}{ \bar{q}_1 - \bar{k}_1 }$
μ_n	$\frac{-\bar{q}_1}{ \bar{q}_2 - \bar{k}_2 }$	$\frac{-\bar{q}_1}{ \bar{q}_2 - \bar{k}_3 }$	$\frac{-\bar{q}_1}{ \bar{q}_2 - \bar{k}_1 }$	$\frac{\bar{q}_2}{ \bar{q}_1 - \bar{k}_2 }$	$\frac{\bar{q}_2}{ \bar{q}_1 - \bar{k}_3 }$	$\frac{\bar{q}_2}{ \bar{q}_1 - \bar{k}_1 }$
C_n	$\bar{k}_3$	$\bar{k}_2$	$\bar{k}_1$	$\bar{k}_3$	$\bar{k}_2$	$\bar{k}_1$

calculer l’intégrale, il reste à décomposer la fraction rationnelle en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et à utiliser la primitive naturelle²⁹

$$F(X) = \int dX R(X) = \int dX \sum_i \sum_{k=1}^{n_i} \frac{c_k(i)}{(X - X_i)^k} = \sum_i c_1(i) \ln(X - X_i) + \sum_{k=2}^{n_i} \frac{c_k(i)}{1 - k} \frac{1}{(X - X_i)^{k-1}} \quad (134)$$

pour obtenir dans le cas général où $R(X) = o(1/X)$ à l’infini et où l’on a donc $\sum_i c_1(i) = 0$:

$$K = \frac{\nu^2}{32} [-F(1)] \quad (135)$$

(les cas particuliers contraires sont discutés autour des équations (139) et (140)).

En pratique, l’expression analytique (135) tirée de (134) est assez délicate à utiliser (de même que celle donnant les racines du trinôme $aX^2 + bX + c$ sous la forme $(-b \pm \Delta^{1/2})/2a$, $\Delta = b^2 - 4ac$, lorsque ac/b^2 est inférieur à la précision numérique — il vaut mieux alors exprimer les racines par leur développement limité en puissances de ac/b^2). Supposons en effet — c’est le pire cas — que les huit pôles X_i soient deux à deux distincts mais à une très faible distance d’un même point

²⁹On convient que la dernière somme dans (134) est vide si $n_i = 1$. Ici, les racines X_i sont deux à deux distinctes et les n_i sont leurs multiplicités.

réel fixé $x_0 < 1$, ce qui revient à prendre $X_i = x_0 + \eta Y_i$, Y_i fixé, $\eta \rightarrow 0^+$, et considérons l'intégrale simplifiée

$$K_{\text{simp}}(\eta) = \int_1^{+\infty} dX R_{\text{simp}}(X) \quad \text{avec} \quad R_{\text{simp}}(X) = \frac{1}{\prod_{i=1}^8 (X - X_i)} = \sum_{i=1}^8 \frac{c_1(i)}{X - X_i}. \quad (136)$$

Les coefficients des éléments simples s'écrivent $c_1(i) = C(i)/\eta^7$ avec $C(i) = \prod_{j \neq i} (Y_i - Y_j)$ indépendant de η . D'après les équations (134)–(135), on a alors

$$K_{\text{simp}}(\eta) = -\frac{1}{\eta^7} \sum_{i=1}^8 C(i) \ln(1 - x_0 - \eta Y_i). \quad (137)$$

Le problème est que l'intégrale $K_{\text{simp}}(\eta)$ est, d'après (137), une somme de termes individuellement d'ordre η^{-7} , alors qu'elle est, d'après sa définition (136), de limite finie $\int_1^{+\infty} dX/(X - x_0)^8 = (1/7)(1 - x_0)^{-7}$ lorsque $\eta \rightarrow 0^+$: dans le développement limité de la somme (137) en puissances de η , des compensations exactes doivent se produire de l'ordre η^0 à η^6 inclus. Sur un ordinateur, de précision numérique non infinitésimale π_{num} , la forme analytique n'est donc utilisable que si

$$\eta^7 \gg \pi_{\text{num}}, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \eta \gtrsim 10^{-2} & \text{en double précision } \pi_{\text{num}} \approx 10^{-15}, \\ \eta \gtrsim 10^{-4} & \text{en quadruple précision } \pi_{\text{num}} \approx 10^{-31}. \end{cases} \quad (138)$$

En pratique, il vaut mieux donc faire coalescer les pôles X_i distants de moins de η entre eux³⁰, avant d'utiliser (135). Comme la quadruple précision est coûteuse en temps et que $\eta = 10^{-2}$ n'est pas suffisamment faible (ce choix amènerait à faire coalescer des pôles complexes conjugués de partie réelle supérieure strictement à 1, ce qui conduirait pour le coup à un résultat faux³¹), nous avons adopté une stratégie de compromis : (i) les calculs sont en général faits en double précision, avec une distance de coalescence $\eta = 10^{-3}$; (ii) en cas de multiplicité supérieure ou égale à quatre ou de résultat absurde (une valeur négative de K), on passe localement et temporairement en quadruple précision; (iii) cette stratégie est validée pour des grilles numériques pas trop grandes, $n_{\alpha\phi} = 60$ et $\eta_{qk} = 1/40$, par un calcul entièrement en quadruple précision avec $\eta = 10^{-4}$ (le temps de restitution est d'une demi-journée sur 128 cœurs, et le résultat diffère de la double précision de moins de $2 \cdot 10^{-6}$ en valeur relative).

Une autre difficulté est à examiner dans l'évaluation analytique de (131) au moyen de (135), celle de l'annulation d'un ou de plusieurs coefficients a_m , plus exactement de leur quasi-annulation dans le calcul numérique (au sens où, par exemple, $|a_m| < 10^{-12}(|b_m| + |c_m|)$) :

- (i) Si un seul coefficient a_m est quasi nul, on le remplace directement par zéro dans (131) sans déclencher de divergence à l'infini. On est simplement ramené à une fraction rationnelle $R_7(X)$ avec un dénominateur de degré 7, de primitive calculée comme dans (134), et l'on peut prendre $K \simeq (v^2/32)[-F_7(1)]$.
- (ii) Dans le cas où deux coefficients a_m sont quasi nuls, par exemple a_1 et a_2 , leur mise à zéro conduit à une fraction rationnelle $R_6(X)$ avec un dénominateur de degré 6; comme

³⁰On assimile deux pôles X_i et X_j à leur moyenne pondérée par leurs multiplicités si $|X_i - X_j| < \eta \max(1, (|X_i| + |X_j|)/2)$.

³¹Par exemple, pour $x_0 > 1$ fixé et $\eta \rightarrow 0^+$, on a $\int_1^{+\infty} dX \phi(X)/[(X - x_0 - i\eta)(X - x_0 + i\eta)] = \pi\phi(x_0)/\eta + \phi(x_0)/(1 - x_0) - \phi'(x_0)\ln(x_0 - 1) + \dots$, où $\phi(X)$ est une fonction régulière en x_0 et nous avons isolé la contribution des pôles $x_0 \pm i\eta$ à l'intégrale; la coalescence et l'utilisation aveugle de (134) — avec prise de partie réelle — nous feraient rater la partie divergente $\propto 1/\eta$.

le numérateur est de degré 5, ceci déclenche une divergence logarithmique à l'infini. On montre néanmoins qu'on peut utiliser l'expression³²

$$K \simeq \frac{\nu^2}{32} \left[-F_6(1) + \frac{X_0 \ln(-X'_0) - X'_0 \ln(-X_0)}{X_0 - X'_0} \frac{1}{b_1 b_2 a_3 a_4} \right] \quad (139)$$

en commettant une erreur qui tend vers zéro avec $(a_1^2 + a_2^2)^{1/2}$. Ici, $X_0 = -b_1/a_1$ et $X'_0 = -b_2/a_2$ sont une approximation des pôles divergents dans la fraction rationnelle originelle $R_8(X)$, et la fonction $F_6(X)$ est la primitive de $R_6(X)$ donnée par l'équation (134) après décomposition de $R_6(X)$ en éléments simples; la première contribution dans (139) n'est donc que le résultat d'une application aveugle — et incorrecte — de l'expression analytique (135) à $R_6(X)$. Le cas particulier $X_0 = X'_0$ se traite par la règle de L'Hospital (on remplace la première fraction du second terme dans (139) par sa limite lorsque $X'_0 \rightarrow X_0$, c'est-à-dire par $-1 + \ln(-X_0)$). Bien entendu, la formule (139) échoue si les deux coefficients a_1 , a_2 sont exactement nuls; on le voit sur la définition (132) des a_m et sur leurs valeurs explicites tirées de la table 1, cet événement est hautement improbable (et ne se produit pas dans notre calcul numérique) lorsque les phases ϕ_+ et ϕ_- diffèrent modulo π , d'où les grilles décalées dans la note 28.

- (iii) Si trois ou quatre coefficients a_m sont quasi nuls, la divergence devient linéaire ou quadratique en la distance inverse de ces coefficients à zéro. Mais ceci impose d'avoir à la fois $\tilde{A}_n + \lambda_n \simeq 0$ et $\tilde{B}_n + \mu_n \simeq 0$ pour l'un des quinze termes de (127), les renormalisations repérées par un accent tchèque étant celles de l'équation (133), ou si l'on préfère $A_n + \lambda_n/(\bar{q}_1 \bar{q}_2)^{1/2} \simeq 0$ et $B_n + \mu_n/(\bar{q}_1 \bar{q}_2)^{1/2} \simeq 0$. On montre alors que la double annulation stricte ne se produit pas, et qu'il n'y a pas de problème. Vérifions-le pour le terme $n = 10$: la double annulation impose $Z_1|_{R=1} = -(\bar{q}_2/\bar{q}_1)^{1/2}$ et $Z_2|_{R=1} = (\bar{q}_1/\bar{q}_2)^{1/2}$. Compte tenu de l'équation (116) et de la représentation phase-module avant (122), ceci constitue un système de Cramer pour les deux inconnues $\cos \alpha \exp(i\phi_+)$ et $\sin \alpha \exp(i\phi_-)$, que l'on résout aisément. Comme la somme des modules au carré des deux inconnues doit valoir un, on tombe, en se souvenant de la note 25, sur la condition

$$\frac{\bar{q}_1(1-\bar{k}_1)}{(1-\bar{q}_1)\bar{k}_1} + \frac{(1-\bar{q}_1)(1-\bar{k}_2)}{\bar{q}_1\bar{k}_2} - 2 \stackrel{\mathcal{W}}{=} \frac{1-\bar{k}_1-\bar{k}_2}{\bar{k}_1\bar{k}_2}. \quad (140)$$

C'est en définitive une équation du second degré sur $\bar{q}_1$; on vérifie que les deux racines sont simplement $\bar{q}_1 = \bar{k}_1$ et $\bar{q}_1 = 1 - \bar{k}_2$ (c'est-à-dire $\bar{q}_2 = \bar{k}_2$ sur la variété $\mathcal{W}$). Ce résultat s'étend aux autres termes de (127) — étant entendu que les nombres d'onde réduits sont non nuls, on tombe toujours pour n supérieur ou égal à 3 sur une condition $\bar{k}_i = \bar{q}_\alpha$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $\alpha \in \{1, 2\}$. Alors (i) cette condition est violée sur la grille numérique de $\bar{q}_2$, qui exclut les points remarquables $\bar{k}_i$ et $1 - \bar{k}_i$, et (ii) dans la limite $d\bar{q}_2 \rightarrow 0^+$, cette condition tendrait à être satisfaite, mais le terme correspondant dans l'amplitude $\overline{\mathcal{A}}_{i \rightarrow f}$ est supprimé par la divergence de $1/(\bar{k}_i - \bar{q}_\alpha)^2$ au dénominateur.

³²Choisissons pour cela une coupure Λ beaucoup plus grande que l'unité et que les pôles bornés X_i , $1 \leq i \leq 6$ de $R_8(X)$, qui peuvent être approximés par les pôles de $R_6(X)$, mais beaucoup plus petite que les pôles divergents X_0 et X'_0 de $R_8(X)$. Dans l'intégrale au troisième membre de (131), on peut alors approximer l'intégrande par $R_6(X)$ sur l'intervalle $X \in [0, \Lambda]$ et par $1/[a_1 a_2 a_3 a_4 X(X - X_0)(X - X'_0)]$ sur l'intervalle $X \in [\Lambda, +\infty[$. Il reste à appliquer (134) à chaque intervalle, en remarquant que $F_6(\Lambda) \simeq (\ln \Lambda)/(b_1 b_2 a_3 a_4)$.

Références

- [1] D. T. Son et M. Wingate, « General coordinate invariance and conformal invariance in nonrelativistic physics : Unitary Fermi gas », *Ann. Phys.* **321** (2006), no. 1, p. 197-224.
- [2] M. A. Escobedo et C. Manuel, « Effective field theory and dispersion law of the phonons of a nonrelativistic superfluid », *Phys. Rev. A* **82** (2010), article no. 023614 (11 pages).
- [3] Y. Castin, A. Serafin et A. Sinatra, « Amortissement des phonons dans un superfluide 2D : insuffisance de la règle d'or de Fermi à basse température », *Comptes Rendus. Physique* **24** (2023), no. S3, p. 187-239. [Version anglaise « Phonon damping in a 2D superfluid : insufficiency of Fermi's golden rule at low temperature », hal-04168815 v2 (2024), en ligne sur <https://hal.science/hal-04168815>].
- [4] L. Landau et E. Lifchitz, *Cours de Physique théorique tome IX — Physique statistique deuxième partie*, Éditions Mir : Moscou, 1990.
- [5] L. Landau et I. Khalatnikov, « Teoriya vyazkosti Geliya-II », *Zh. Èksper. Teor. Fiz.* **19** (1949), p. 637. [Version anglaise dans *Collected papers of L.D. Landau*, chapitre 69, p. 494, édité par D. ter Haar (Pergamon, New York, 1965)].
- [6] Y. Castin, « Questions ouvertes pour les gaz de fermions en interaction forte et de portée nulle/Open questions for strongly interacting Fermi gases with zero-range interactions », *Comptes Rendus. Physique* **26** (2025), p. 393-461.
- [7] H. J. Maris, « Phonon-phonon interactions in liquid helium », *Rev. Mod. Phys.* **49** (1977), p. 341-359.
- [8] H. Kurkjian, Y. Castin et A. Sinatra, « Three-phonon and four-phonon interaction processes in a pair-condensed Fermi gas », *Ann. Phys. (Berlin)* **529** (2017), article no. 1600352.
- [9] I. Khalatnikov, *An Introduction to the Theory of Superfluidity*, Taylor & Francis : Boca Raton, 2018.
- [10] P. B. Patel, Z. Yan, B. Mukherjee, R. J. Fletcher, J. Struck et M. W. Zwierlein, « Universal sound diffusion in a strongly interacting Fermi gas », *Science* **370** (2020), no. 6521, p. 1222-1226.
- [11] H. Kurkjian, Y. Castin et A. Sinatra, « Landau-Khalatnikov phonon damping in strongly interacting Fermi gases », *Europhys. Lett.* **116** (2016), no. 4, article no. 40002 (7 pages). [Version française : « Amortissement Landau-Khalatnikov des phonons dans un gaz de fermions en interaction forte », hal-01350507 v4 (2026), en ligne sur <https://hal.science/hal-01350507>].
- [12] Y. Castin, « Étalement de la phase et cohérence temporelle d'un gaz de fermions condensé par paires à basse température », *Comptes Rendus. Physique* **20** (2019), no. 6, p. 540-568. [Version anglaise « Phase spreading and temporal coherence of a pair-condensed Fermi gas at low temperature », hal-01849311 v2 (2019), en ligne sur <https://hal.science/hal-01849311>].
- [13] I. Khalatnikov, « Pogloshcheniye zvuka v gelii II », *Zh. Èksper. Teor. Fiz.* **20** (1950), p. 243-266.
- [14] H. Kurkjian, Y. Castin et A. Sinatra, « Concavity of the collective excitation branch of a Fermi gas in the BEC-BCS crossover », *Phys. Rev. A* **93** (2016), article no. 013623 (7 pages). [Version française : « Concavité de la branche d'excitation collective d'un gaz de fermions dans la zone de raccordement CBE-BCS », hal-01228798 v2 (2016), en ligne sur <https://hal.science/hal-01228798>].
- [15] H. Biss, L. Sobirey, N. Luick, M. Bohlen, J. J. Kinnunen, G. M. Bruun, T. Lompe et H. Moritz, « Excitation Spectrum and Superfluid Gap of an Ultracold Fermi Gas », *Phys. Rev. Lett.* **128** (2022), article no. 100401 (7 pages).
- [16] Y. Castin, « Comment on "Excitation Spectrum and Superfluid Gap of an Ultracold Fermi Gas" », *Phys. Rev. Lett.* **133** (2024), article no. 109301 (2 pages). [Version française : « Commentaire sur "Excitation Spectrum and Superfluid Gap of an Ultracold Fermi Gas" », hal-04336110 (2024), en ligne sur <https://hal.science/hal-04336110>].
- [17] E. C. Svensson, A. D. B. Woods et P. Martel, « Phonon Dispersion in Liquid Helium under Pressure », *Phys. Rev. Lett.* **29** (1972), p. 1148-1149.
- [18] D. Rugar et J. S. Foster, « Accurate measurement of low-energy phonon dispersion in liquid ^4He », *Phys. Rev. B* **30** (1984), p. 2595-2602.
- [19] S. Van Loon et C. A. R. Sá de Melo, « Effects of Quantum Fluctuations on the Low-Energy Collective Modes of Two-Dimensional Superfluid Fermi Gases from the BCS to the Bose Limit », *Phys. Rev. Lett.* **131** (2023), article no. 113001 (7 pages).
- [20] Y. Castin, *Condensats de Bose-Einstein — La théorie, des fondements aux applications, Tome II*, EDP Sciences/CNRS Éditions : Les Ulis/Paris, 2025.
- [21] L. Landau et E. Lifchitz, *Cours de Physique théorique tome V — Physique statistique première partie*, Éditions Mir : Moscou, 1984.
- [22] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, EDP Sciences/CNRS Éditions : Paris, 1988.
- [23] Y. Castin, « Marche au hasard d'une quasi-particule massive dans le gaz de phonons d'un superfluide à très basse température », *Comptes Rendus. Physique* **21** (2020), no. 6, p. 571-618. [Version anglaise « Random walk of a massive quasiparticle in the phonon gas of an ultralow temperature superfluid », hal-02895083 v2 (2021), en ligne sur <https://hal.science/hal-02895083>].
- [24] I. N. Adamenko, Y. A. Kitsenko, K. E. Nemchenko et A. F. G. Wyatt, « Theory of scattering between two phonon beams in superfluid helium », *Phys. Rev. B* **80** (2009), article no. 014509 (13 pages).