INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus
Physique

Jacques Villain

Foreword

Volume 21, issue 6 (2020), p. 501-506

Published online: 14 January 2021
Issue date: 14 January 2021

https://doi.org/10.5802/crphys.46

Part of Special Issue: Prizes of the French Academy of Sciences 2019 (continued)

CENTRE MERSENNE

Les Comptes Rendus. Physique *sont membres du*
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org
e-ISSN : 1878-1535

Comptes Rendus
Physique
2020, 21, nº 6, p. 501-506
https://doi.org/10.5802/crphys.46

Prizes of the French Academy of Sciences 2019 (continued) / *Prix 2019 de l'Académie des sciences (suite)*

Foreword

Avant-propos

Jacques Villain [a]

[a] Theory Group, Institut Laue Langevin, F-38054 Grenoble Cedex 9, France
E-mail: jvillain@infonie.fr

This issue of CR Physique brings together three contributions relating to cracks in materials by Gilles Pijaudier-Cabot (Dolomieu prize 2019), Nicolas Moes (ONERA prize) and Benoît Noetinger (Adrien Constantin de Magny Prize). In addition it contains an article by Rémi Rhodes and Vincent Vargas (Marc Yor Prize) related to quantum gravity, and an article by Yvan Castin on superfluids.

Some physicist would perhaps tend to disdain the physics of materials. However the first three articles introduce a remarkable phenomenon, namely softening under stress: the stress decreases when the deformation increases! Another property which may arouse the interest of the layman is a paradox not necessarily known to all physicists, but Pijaudier-Cabot reminds us of it at the beginning of his article: if we calculate by the classical theory of elasticity the stress necessary to break an elastic material, we obtain a value of the order of a third of the Young's modulus E, which is 10 to 100 times larger than the experimental value [1]. This paradox, as Pijaudier-Cabot explains, was partly resolved by Griffith almost a century ago. However, much remains to be done to fully understand the damage to a material.

The article by Pijaudier-Cabot has the merit of combining experiments and modeling. Concerning the modeling aspect, the author introduces a damage parameter D ($0 < D < 1$) which depends on the history of the material. As long as the strain ϵ does not exceed a critical value Y_{D0}, there is no damage and $D = 0$. If ϵ has exceeded the value Y_{D0} at any time, then D is some function of the maximum value Y reached by ϵ over time. The damage is irreversible, D never decreases. In particular, if $\epsilon(t)$ is an increasing function of time t, then $Y = \epsilon(t)$. The function $D(Y)$ is chosen as

$$D = 1 - \exp(Y_{D0} - Y) \text{ if } Y > Y_{D0} \quad ; \quad D = 0 \text{ if } Y < Y_{D0}$$

The stress σ corresponding to a strain ϵ is assumed equal to $\sigma = (1-D)E\epsilon$, and in the model just defined it is given by figure 6 of the article. Thus, beyond a certain threshold, the stress decreases when the strain increases! It is clear that in an elastic material this is impossible. But the material defined by the model is not an elastic material because its behavior is irreversible: if we increase the strain, the stress decreases, but if we decrease the strain, the stress also decreases.

Such materials do exist, in which the stress irreversibly decreases as the strain increases. This phenomenon is called strain softening. However, in the model first considered by Pijaudier-Cabot, the material is unstable: it breaks as soon as the strain exceeds the value Y_{D0}. Indeed the break makes it possible to gain an elastic energy proportional to the volume of the sample, much greater than the energy cost of the break. The trouble with this is that the failure occurs without any energy input, which is an artifact of the model. The author therefore modifies the model by introducing a characteristic length, which is the size of the area in which the constraint is located. A cracking energy is thus regained, in agreement with experiment. The reader will find the details in the article.

The article by Jihed Zghal and Nicolas Moes is also devoted to damage, and here again the parameter D is introduced to describe this phenomenon. The authors, however, consider a model in which the material does not respond instantly to a constraint: the response takes a time τ_c to be established. As a result, the response is not the same if the stress is applied gradually or if it is applied suddenly. The authors' idea is just to compare the breakage of a bar in these two cases (which in fact makes three because the second case splits into two separate cases). In the case of a stress applied suddenly, the description of the failure seems correct. However, in the case of a stress applied progressively, the description is incorrect, because the failure occurs without any supply of energy, and therefore as if the edges of the fracture had no surface energy.

An important property of cracked materials, especially rocks, is that they allow liquids, which can be water, but also, for example, petroleum, to pass through. The transport of a liquid in a homogeneous, porous material satisfies Darcy's law [2,3]. In a disordered material a local form of this law should be applied. Such a generalization is $\mathbf{q} = -(k/\eta)(\nabla p - \rho \mathbf{g})$, or $\mathbf{q} = -(k/\eta)\nabla(p - \rho g z)$, where $\mathbf{q}$ is the flux of the liquid, η its viscosity, p is the pressure, ρ the specific mass of the fluid, z the altitude and g the gravity [4]. The coefficient k varies from point to point, partly at random. The conservation of fluid matter imposes the condition $\nabla.\mathbf{q} = 0$[1]. For practical applications, we do not want to have a description which is too local, at the scale of the centimeter for example. And yet, if we want to calculate the flows from first principles, we must start from formulae that are valid on a very small scale, such as Poiseuille's law, as we are reminded in the article by Pijaudier-Cabot. How can we go from the microscopic scale to the macroscopic scale? This "up scaling" is the subject of Benoît Noetinger's article. This is a common problem in statistical mechanics, but in the case of geological materials in which the author is interested, the problem is made particularly difficult by the inevitable presence of disorder, since the coefficient k of Darcy's law is not the same everywhere. This article provides a fairly comprehensive summary of the situation, and a considerable bibliography which will allow the reader to delve deeper.

The following article, by Rhodes and Vargas, uses a technique of mathematical physics known as bootstrap, whose mysterious name calls for a few words of etymology. It is taken from the story of Baron Münchausen (1720–1797) who would have had the talent to hoist himself in the air by catching his bootstrap. This theory was developed in the 1960s by particle physicist G. Chew. He made elementary particles both the vector of nuclear forces and the result of the interaction.

The ideas of conformal field theory were developed from the 1970s by Polyakov and several later collaborators. To the usual symmetries, translation, Lorentz group, they added scale invariance and more generally all conformal transformations, that is to say preserving angles. If scale invariance were to appear to result from fixed points of the renormalization group, the physical realization of which manifests itself at critical points of phase transitions, the assumption of invariance by the whole conformal group is stronger. In particular in dimension two this symmetry

[1]It is of interest to compare with the diffusion of atoms B dissolved in a fluid or a homogeneous solid A. If $\mathbf{q}$ is the flux of B and ρ is its concentration, $\partial\rho/\partial t = -\nabla.\mathbf{q}$ only vanishes in the stationary regime. In contrast, in a flow through a porous material the cavities are assumed to be completely filled.

comprises an infinity of generators, since any analytical transformation $z' = f(z)$ of the complex plane preserves the angles. In 1984 Belavin, Polyakov and Zamolodchikov characterized conformal field theories by an algebra of operators on which the conformal group acts. The classification of irreducible representations of this (Virasoro) algebra leads in simple cases, in fact most solvable two-dimensional models, to exact values for the scale dimensions of the fields (e.g. critical exponents). In this point of view, the models that we address are defined, not by a Lagrangian or Hamiltonian, but by a parameter, the central charge, which characterizes the representation of algebra. Now, in physics, there is a Lagrangian, and this Lagrangian does appear in the article by Rhodes and Vargas. These authors deal with the same problem of conformal field theory, now starting from Liouville's field theory, also introduced by Polyakov in his study of two-dimensional gravity. In classical mathematics, the Liouville equation characterizes surfaces of constant negative curvature; the relationship with gravity stems from subtle reasoning which will not be discussed here. In this theory the Lagrangian contains an exponential interaction in the fields, and the authors introduce a probabilistic construction of the path integral of quantum theory. This allows them to rigorously find the results that had been deduced from the previous algebraic approach for the structure constants (defined in the article by Rhodes and Vargas). This remarkable work opens up new perspectives in this very active field.

The last article, by Yvan Castin, is devoted to the random walk of a massive quasi-particle (of finite, non-vanishing effective mass) in a superfluid. It may, for example, be a "BCS quasi-particle" in a gas of paired spin 1/2 cold fermionic atoms. To obtain a given number n of BCS quasiparticles, one can put N atoms in the spin state + and $N+n$ in the spin state − in a trap with a flat bottom, thus at low temperature N pairs of Cooper and n BCS quasi-particles will be obtained. Realistic values are $N = 10^6$ and $n = 1000$ for example. Each quasi-particle collides with the phonons of the superfluid and therefore undergoes a random walk analogous to the Brownian motion of a mesoscopic particle in a liquid. A remarkable result obtained by Castin is that the correlation function $C(t) = \langle \mathbf{v}(t).\mathbf{v}(0)\rangle$ of the speed is damped with two very different time scales τ_1 and τ_2 at low temperature T. The time τ_1, proportional to T^{-8}, corresponds to the thermalization of the modulus of the wave vector of the massive quasi-particle. The time τ_2, proportional to T^{-9}, corresponds to the decorrelation of the direction of the wave vector. According to Castin, $C(t) = C_1(t) + C_2(t)$, where $C_2(0)/C_1(0)$ is proportional to T as well as τ_1/τ_2. It follows that the effective spatial diffusion coefficient passes over time through two different values, depending on whether $\tau_1 \ll t \ll \tau_2$ or $t \gg \tau_2$ (true asymptotic regime).

We thank the authors for accepting our invitation to present their work. The first three articles may help to bridge the gap between physics and technology, which unfortunately tends to become wider. The last two build a bridge between mathematics and physics.

We also thank Edouard Brézin for his help in writing this introduction.

Avant-propos

Ce numéro des C.R. Physique regroupe trois contributions relatives aux fissures dans les matériaux, par Gilles Pijaudier-Cabot (prix Dolomieu 2019), Nicolas Moes (prix ONERA) et Benoît Noetinger (Prix Adrien Constantin de Magny) ; il contient en outre un article de Rémi Rhodes et Vincent Vargas (Prix Marc Yor) lié à la gravité quantique, et un article d'Yvan Castin sur les superfluides

Pour le physicien qui aurait tendance à dédaigner la physique des matériaux, on peut préciser que les trois premiers articles introduisent un phénomène remarquable qui est l'adoucissement sous contrainte : la contrainte décroît quand la déformation croît ! Une autre propriété qui pourra éveiller l'intérêt du profane est un paradoxe pas forcément connu de tous les physiciens, rappelé par Pijaudier-Cabot au début de son article : si on calcule par la théorie classique de l'élasticité la contrainte nécessaire pour casser un matériau élastique, on obtient une valeur de l'ordre du tiers du module d'Young E, soit 10 à 100 fois supérieure à la valeur expérimentale [1]. Ce paradoxe, comme l'explique Pijaudier-Cabot, a été en partie résolu par Griffith il y a presque un siècle. Cependant il reste beaucoup à faire pour comprendre complètement l'endommagement d'un matériau.

L'article de Pijaudier-Cabot a le mérite de combiner l'expérimentation et la modélisation. Insistons sur l'aspect modélisation. L'auteur introduit un paramètre d'endommagement D compris entre 0 et 1, qui dépend de l'histoire du matériau. Tant que la déformation ϵ ne dépasse pas une valeur critique Y_{D0}, il n'y a pas de dommage et $D = 0$. Si ϵ a dépassé la valeur Y_{D0} à un moment quelconque, alors D est une certaine fonction de la valeur maximale Y atteinte par ϵ au cours des temps. Le dommage est irréversible, D ne peut pas décroître. En particulier, si $\epsilon(t)$ est une fonction croissante du temps t, alors $Y = \epsilon(t)$. La fonction $D(Y)$ est choisie de la forme

$$D = 1 - \exp(Y_{D0} - Y) \text{ si } Y > Y_{D0} \quad ; \quad D = 0 \text{ si } Y < Y_{D0}$$

La contrainte σ correspondant à une déformation ϵ est supposée égale à $\sigma = (1 - D)E\epsilon$, et dans le modèle qu'on vient de définir elle est donnée par la figure 6 de l'article. Ainsi, au-delà d'un certain seuil, la contrainte diminue quand la déformation augmente! Il est clair que dans un matériau élastique, cela est impossible. Mais le matériau défini par le modèle n'est pas un matériau élastique car son comportement est irréversible : si on augmente la déformation, la contrainte diminue, mais si on diminue la déformation, la contrainte diminue aussi.

De tels matériaux existent, dans lesquels la contrainte diminue irréversiblement quand la déformation augmente. Ce phénomène s'appelle en anglais strain softening. La traduction française officielle est écrouissage négatif, mais on peut lui préférer la traduction littérale adoucissement sous contrainte. Toutefois, dans le modèle considéré d'abord par Pijaudier-Cabot, le matériau est instable : il se casse dès que la déformation dépasse un tant soit peu la valeur Y_{D0}. En effet la cassure permet de gagner une énergie élastique proportionnelle au volume de l'échantillon, très supérieure à l'énergie que coûte la cassure. L'ennui est que la rupture se fait sans qu'il faille fournir d'énergie, ce qui est un artefact du modèle. L'auteur modifie donc le modèle en introduisant une longueur caractéristique, qui est la taille de la zone dans laquelle la contrainte se localise. Il retrouve ainsi une énergie de fissuration conforme aux mesures expérimentales. Nous laissons le lecteur lire la suite dans l'article.

Dans l'article de Jihed Zghal et Nicolas Moes il est également question d'endommagement et ici encore on introduit le paramètre D pour décrire ce phénomène. Mais l'auteur considère un modèle dans lequel le matériau ne répond pas instantanément à une contrainte : la réponse met un temps τ_c à s'établir. Il en résulte que la réponse n'est pas la même si la contrainte est appliquée de façon progressive et si elle appliquée de façon brusque. L'idée des auteurs est précisément de comparer la rupture d'une barre dans ces deux cas (qui en font en fait trois car le second cas se décompose en deux). Dans le cas d'une contrainte appliquée brusquement, la description de la rupture semble correcte. Par contre dans le cas d'une contrainte appliquée progressivement, la description est incorrecte car la rupture se produit sans qu'on ait d'énergie à fournir, donc comme si les bords de la cassure n'avaient pas d'énergie de surface.

Une propriété importante des matériaux fissurés, et notamment des roches, est de laisser passer les liquides, qui peuvent être l'eau, mais aussi par exemple du pétrole. Le transport d'un liquide dans un matériau poreux homogène obéit à la loi de Darcy [2, 3]. Dans un matériau désordonné il faut avoir recours à une forme locale de cette loi. Une telle formule locale est $\mathbf{q} = -(k/\eta)(\nabla p - \rho\mathbf{g})$, soit $\mathbf{q} = -(\mathbf{k}/\eta)\nabla(\mathbf{p} - \rho\mathbf{gz})$, où $\mathbf{q}$ est le flux de liquide, p est la pression, ρ la masse volumique du fluide, η sa viscosité, z l'altitude et g l'accélération de la pesanteur [4]. Le coefficient k varie d'un point à un autre, de façon en partie aléatoire. La conservation de la matière fluide impose la condition $\nabla.\mathbf{q} = 0$[2]. Pour les applications pratiques, on ne souhaite pas avoir une description trop locale, à l'échelle du centimètre par exemple. Et pourtant, si on veut calculer les débits à partir des premiers principes, il faut partir de formules valables à très petite échelle, comme la loi de Poiseuille rappelée dans l'article de Pijaudier-Cabot. Comment passer de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique ? Cette « dilatation d'échelle » est l'objet de l'article de Benoît Noetinger. C'est un problème usuel en mécanique statistique, mais dans le cas des matériaux géologiques auxquels s'intéresse l'auteur, le problème est rendu particulièrement difficile par la présence inévitable du désordre, puisque le coefficient k de la loi de Darcy n'est pas le même partout. On trouvera dans cet article un résumé assez complet de la situation, et une bibliographie considérable qui permettra au lecteur d'approfondir.

L'article suivant, de Rémi Rhodes et Vincent Vargas, fait appel à une technique de physique mathématique dite bootstrap, dont le nom mystérieux appelle quelques mots d'étymologie. Il est tiré de l'histoire du baron de Münchhausen (1720–1797) qui aurait eu le talent de se hisser en l'air en attrapant ses tirants de botte (*bootstrap*). Cette terminologie fut introduite dans les années 1960 par le physicien des particules G. Chew. Celui-ci faisait des particules élémentaires à la fois le vecteur des forces nucléaires et le résultat de l'interaction.

Les idées de la théorie conforme des champs furent développées à partir des années 1970, par Polyakov et plusieurs collaborateurs ultérieurs. Aux symétries usuelles, translation, groupe de Lorentz, ils ajoutaient l'invariance d'échelle et plus généralement toutes les transformations conformes, c'est-à-dire conservant les angles. Si l'invariance d'échelle devait apparaître comme résultant de points fixes du groupe de renormalisation, dont la réalisation physique se manifeste aux points critiques des transitions de phase, l'hypothèse de l'invariance par tout le groupe conforme est plus forte. En particulier en dimension deux cette symétrie comporte une infinité de générateurs, puisque toute transformation analytique $z' = f(z)$ du plan complexe conserve les angles. En 1984 Belavin, Polyakov et Zamolodchikov caractérisèrent les théories conformes des champs par une algèbre d'opérateurs sur laquelle agit le groupe conforme. La classification des représentations irréductibles de cette algèbre (de Virasoro) conduit dans des cas simples, en fait la plupart des modèles bidimensionnels résolubles, à des valeurs exactes pour les dimensions d'échelle des champs (telles que les exposants critiques). Dans ce point de vue, les modèles que l'on résout sont définis, non pas par un Lagrangien ou Hamiltonien, mais par un paramètre, la charge centrale, qui caractérise la représentation de l'algèbre. Or, en physique, il y a un Lagrangien, et celui-ci apparaît dans l'article de Rhodes et Vargas. Ces auteurs traitent ce même problème de théorie des champs conformes en partant de la théorie des champs de Liouville, introduite elle-aussi par Polyakov dans son étude de la gravité à 2 dimensions. En mathématique classique l'équation de Liouville caractérise les surfaces de courbure constante négative ; la relation avec la gravité découle d'un raisonnement subtil qui ne sera pas abordé ici. Dans cette théorie le Lagrangien contient une interaction exponentielle dans les champs, et les auteurs introduisent une construction probabiliste de l'intégrale de chemin de la théorie quantique. Cela leur permet de retrouver de manière rigoureuse les résultats qui avaient été déduits de l'approche algébrique antérieure pour les constantes de structure (définies dans l'article de Rhodes et Vargas). Ce travail remarquable ouvre des perspectives nouvelles dans ce domaine très actif.

Le dernier article, par Yvan Castin, est consacré à la marche au hasard d'une quasi-particule massive (de masse effective finie et non nulle) dans un superfluide. Il peut s'agir par exemple d'une « quasi-particule BCS » dans un gaz d'atomes froids fermioniques de spin 1/2 appariés.

[2]Il est intéressant de comparer avec la diffusion d'une matière B dissoute dans un liquide ou un solide A homogène. Si $\mathbf{q}$ est le flux de B et ρ sa concentration, $\partial\rho/\partial t = -\nabla.\mathbf{q}$ n'est nul qu'en régime stationnaire. Mais dans un écoulement en milieu poreux on suppose que les pores sont saturés, c'est-à-dire remplis.

Pour obtenir un nombre donné n de quasi-particule BCS il suffit de mettre N atomes dans l'état de spin + et $N+n$ dans l'état de spin − dans un piège à fond plat, on obtiendra ainsi à basse température N paires de Cooper et n quasi-particules BCS. Des valeurs réalistes sont $N = 10^6$ et $n = 1000$ par exemple. Chaque quasi-particule est bousculée par les phonons du superfluide et subit donc une marche au hasard analogue au mouvement brownien d'une particule mésoscopique dans un liquide. Un résultat remarquable obtenu par Castin est que la fonction de corrélation $C(t) =< \mathbf{v}(t).\mathbf{v}(0) >$ de la vitesse s'amortit avec deux échelles de temps τ_1 et τ_2 très différentes à basse température T. Le temps τ_1, proportionnel à T^{-8}, correspond à la thermalisation du module du vecteur d'onde de la quasi-particule massive. Le temps τ_2, proportionnel à T^{-9}, correspond à la décorrélation de la direction du vecteur d'onde. Selon Castin, $C(t) = C_1(t)+C_2(t)$, où $C_2(0)/C_1(0)$ est proportionnel à T ainsi que τ_1/τ_2. Il en résulte que le coefficient de diffusion spatiale effectif passe au cours du temps par deux valeurs différentes, suivant que $\tau_1 \ll t \ll \tau_2$ ou que $t \gg \tau_2$ (vrai régime asymptotique).

Nous remercions les auteurs d'avoir accepté notre invitation à exposer leurs travaux. Les trois premiers articles pourront aider à consolider la passerelle entre la physique et la technologie, qui tend malheureusement à se rétrécir. Les deux derniers établissent plutôt des ponts entre la mathématique et la physique.

Edouard Brézin est également remercié chaleureusement pour son aide dans la rédaction de cette introduction.

Jacques Villain
Editor-in-Chief
jvillain@infonie.fr

References

[1] Y. Quéré, *Physique des matériaux. Cours et problèmes*, Ellipses, 1988.
[2] G. de Marsily, *Quantitative hydrogeology, groundwater hydrology for Engineers*, Academic Press, 1986.
[3] E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, *Hydrodynamique physique*, 2nd ed., Savoirs actuels, CNRS Editions, 2001.
[4] P. Cormault, "Hydraulique", in *Encyclopedia Universalis*, Encyclopedia Universalis, vol. 12, Encyclopedia Universalis SA, 2008, p. 7.