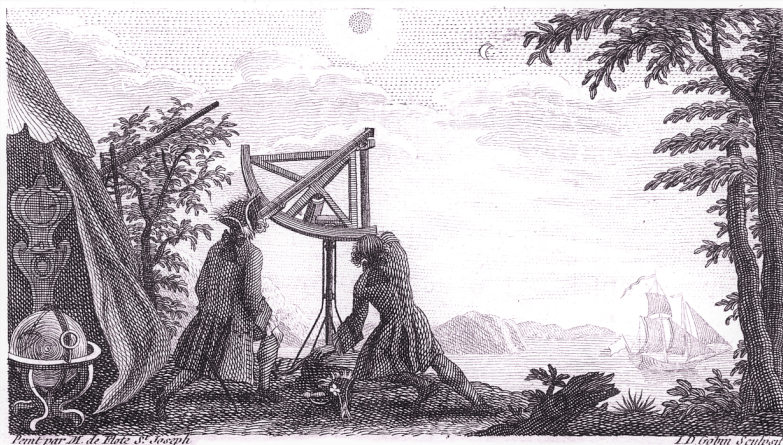
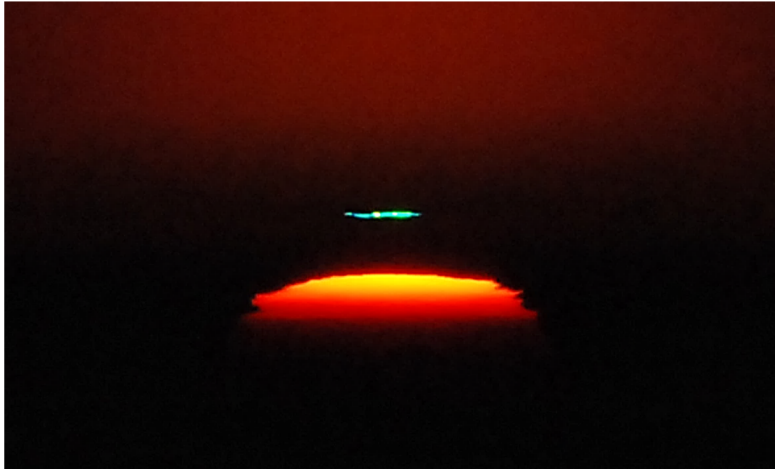


# COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

1878-1535 (electronic)

## *Physique*



Volume 23, Special Issue S1, 2022

**Special issue / Numéro thématique**

*Astronomie, atmosphères et réfraction / Astronomy, Atmospheres  
and Refraction*

**Guest editors / Rédacteurs en chef invités**

Pierre Léna, Luc Dettwiller

Académie des sciences — Paris



INSTITUT DE FRANCE  
Académie des sciences



# *Comptes Rendus*

---

## *Physique*

### **Objective of the journal**

*Comptes Rendus Physique* is a peer-reviewed electronic journal of international standing, covering all fields of physics and astrophysics. It publishes mainly thematic issues, but also original research articles, preliminary announcements, review articles, historical perspectives, pedagogical texts or conference proceedings, without length limit, in English or in French. It also publishes special issues devoted to certain recent and/or significant aspects of the discipline, whose authors are chosen from among the most active researchers on the subject and whose coordination is assured by guest editors.

*Comptes Rendus Physique* is published according to a virtuous policy of diamond open access, free for authors (no publication fees) as well as for readers (immediate and permanent open access).

**Editorial director:** Étienne Ghys

**Editors-in-Chief:** D. Gratias, J. Villain

**Guest editors:** Pierre Léna and Luc Dettwiller

**Editorial Board:** Jacqueline Bloch, Christian Bordé, Hélène Bouchiat, Alexandre Bouzdine, Yves Bréchet, Françoise Combes, Jean Dalibard, Michel Davier, Daniel Estève, Stéphan Fauve, Pierre Fayet, Frédérique de Fornel, Maurice Goldman, Guy Laval, Chaouqi Misbah, Jean-Yves Ollitrault, Nathalie Palanque-Delabrouille

**Editorial secretary:** Julien Desmarests

### **About the journal**

All journal's information, including the text of published articles, which is fully open access, is available from the journal website at <https://comptes-rendus.academie-sciences.fr/physique/>.

### **Author enquiries**

For enquiries relating to the submission of articles, please visit this journal's homepage at <https://comptes-rendus.academie-sciences.fr/physique/>.

### **Contact**

Académie des sciences

23, quai de Conti, 75006 Paris, France

Tel: (+33) (0)1 44 41 43 72

[CR-Physique@academie-sciences.fr](mailto:CR-Physique@academie-sciences.fr)



The articles in this journal are published under the license  
Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.en>





---

## Contents / Sommaire

Rédacteurs en chef invités .....	3-4
<b>Luc Dettwiller, Pierre Léna, Denis Gratias</b> Astronomy, Atmospheres and Refraction : Foreword .....	5-11
PREMIÈRE PARTIE. OBSERVATIONS, THÉORIE ET APPLICATIONS	
<b>Luc Dettwiller</b> Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie .....	13-62
<b>Luc Dettwiller</b> Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique .....	63-102
<b>Luc Dettwiller</b> Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre .....	103-132
<b>François Mignard</b> Les tables de réfraction astronomique .....	133-178
<b>Andrew T. Young</b> Relations among atmospheric structure, refraction, and extinction .....	179-212
<b>Bruno Sicardy</b> Study of atmospheres in the solar system, from stellar occultation or planetary transit .....	213-241
<b>Serge Koutchmy</b> The Lomonosov arc : refraction and scattering in Venus atmosphere during solar transits .....	243-268
<b>Daniel Bonneau</b> Les effets optiques de la turbulence atmosphérique dans les images astronomiques ..	269-291
<b>Gérard Rousset, Thierry Fusco</b> Optique adaptative : correction des effets de la turbulence atmosphérique sur les images astronomiques .....	293-344
<b>Laurent Koechlin, Luc Dettwiller</b> Correction de la dispersion atmosphérique dans l'imagerie par les grands télescopes et les interféromètres astronomiques .....	345-364
<b>Siebren van der Werf</b> Novaya Zemlya effect and Fata Morgana. Raytracing in a spherically non-symmetric atmosphere .....	365-389

**François Mignard**

Images du Soleil et de la Lune, depuis le sol ou la Station spatiale internationale ..... 391-414

SECONDE PARTIE. HISTOIRE SPÉCIALISÉE : DÉCRYPTAGE DE DONNÉES THÉORIQUES  
FÉCONDES, SUR DES DOCUMENTS ORIGINAUX (XVIII<sup>e</sup>–XX<sup>e</sup>)

**Luc Dettwiller**

L'invariant de Bouguer et ses conséquences : commentaire historique ..... 415-452

**Luc Dettwiller**

Les développements de Lambert : commentaire historique ..... 453-465

**Andrew T. Young**

Did Monge really explain inferior mirages? ..... 467-481

**Luc Dettwiller**

Le théorème de Biot et le changement de variable de Biot–Auer–Standish : commentaire  
historique ..... 483-501

**Luc Dettwiller**

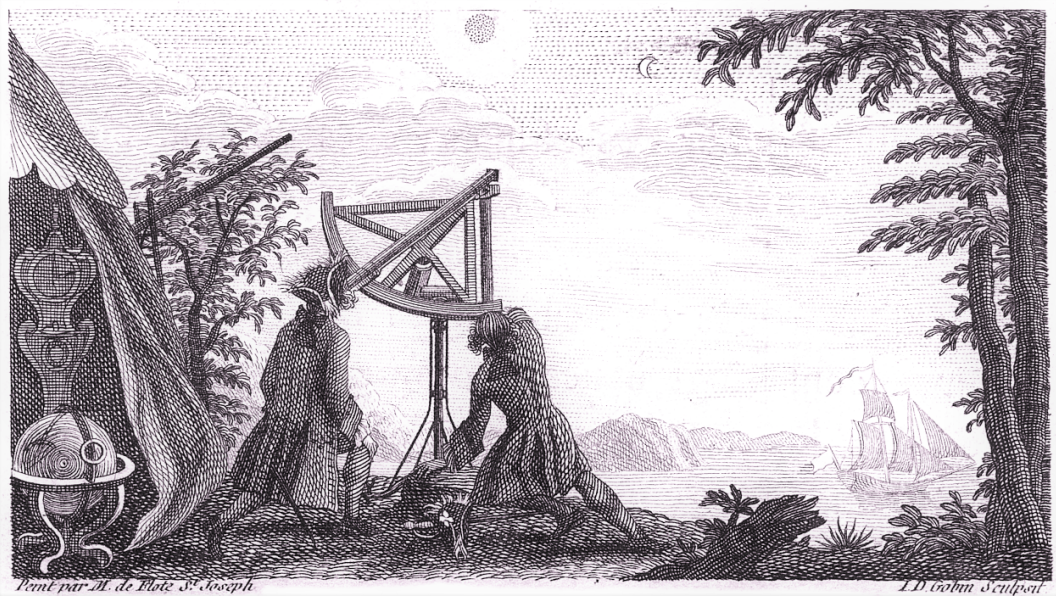
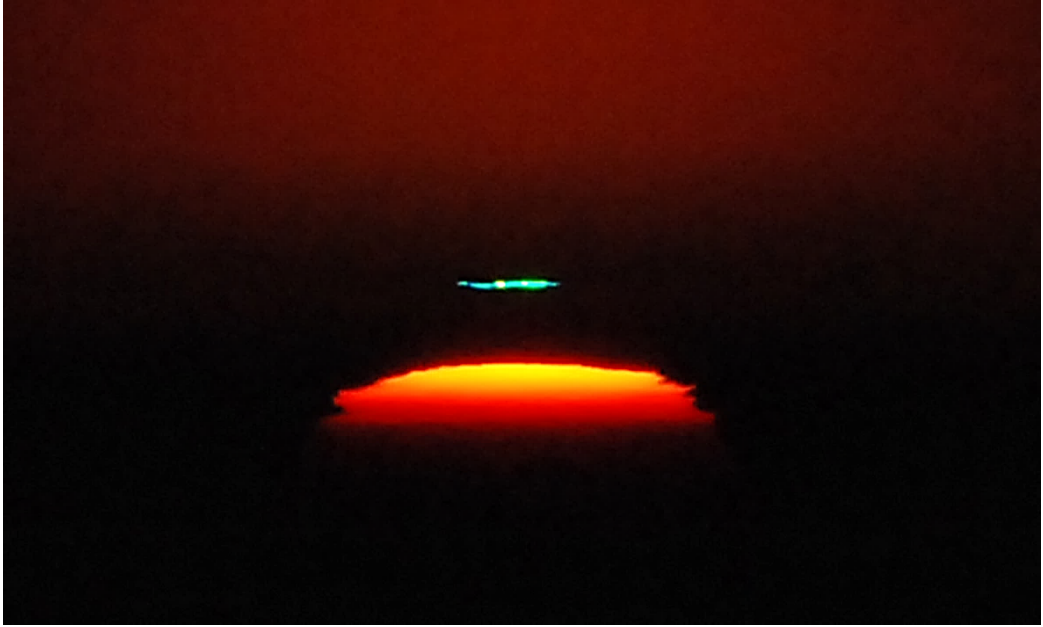
La discussion par Kummer d'une quadrature sur la réfraction astronomique : commen-  
taire historique ..... 503-525

**Luc Dettwiller**

Les développements de Radau et leur divergence : commentaire historique ..... 527-536

**Luc Dettwiller**

La photométrie des éclipses de Lune, vue par František Link : commentaire historique 537-555



**Figure de la page précédente, en haut.** Un effet chromatique spectaculaire de réfraction astronomique, vu de l'Observatoire du Pic du Midi lors d'un coucher de Soleil en présence d'un pseudo-mirage : la formation d'un « béret » bleu bien détaché du reste de l'image solaire. Dans le cas de cette photo, le détachement important est dû à la proximité (juste sous l'observateur en haute altitude) d'une couche atmosphérique avec forte inversion de température, dont la pente peut approcher localement la valeur critique 116 K / km, mais ne la dépasse pas (sinon la longueur du béret correspondrait au diamètre du disque solaire). Au sens météorologique, cette couche de forte inversion de température est une « inversion couvrante », i.e. qui ne se laisse pas traverser vers le haut par les aérosols, et les maintient sous son sommet; elle fait que le bord inférieur visible de l'image rouge du Soleil est bien horizontal et adouci — les parties plus basses de cette image solaire étant cachées par la couche d'aérosols dont la densité croît quand on s'enfonce sous l'inversion. Les petites indentations de l'image rouge révèlent la présence de fines couches d'inversion supplémentaires, d'épaisseur souvent sub-décamétrique. La dissymétrie de l'image, manifestée par une indentation évidente à gauche qui n'a pas son correspondant à droite, témoigne de l'absence de symétrie sphérique de l'atmosphère, probablement due à une onde de gravité; la dynamique de celle-ci était, comme d'habitude, trop lente pour être perceptible pendant la durée de ce coucher de Soleil. Le « béret » n'est pas dû à la brisure de symétrie sphérique pour l'atmosphère; il est une double image de la portion sommitale du disque solaire : image renversée constituant la partie inférieure du « béret » (et donc sous l'horizon astronomique car le théorème de Biot-Sang-Meyer-Fraser-White reste approximativement applicable malgré l'onde de gravité), accolée à une image droite au-dessus, toutes deux très aplaties, l'ensemble constituant le « béret ». Celui-ci apparaît bleu lors de sa dernière seconde d'existence, car les paires d'images formant les « bérets » rouge et vert, qui étaient quasiment superposées au bleu, viennent de disparaître l'une après l'autre et dans cet ordre.

**Figure de la page précédente, en bas.** Gravure sur la p. 1 du livre de J.-B. de Chabert, *Voyage fait par ordre du Roi en 1750 et 1751...*, *Suite des Mémoires de l'Académie des Sciences*, Imprimerie Royale (Paris, 1753), où apparaît (p. 136) la première occurrence du terme « mirage » en français. Ce dessin montre deux officiers, vraisemblablement le Marquis Joseph Bernard de Chabert, de l'Académie de marine, et M. de Diziers — ainsi que, au loin à droite, leur vaisseau : la frégate de 24 canons *La Mutine*. Ils mesurent l'angle entre les directions de la Lune et le Soleil, avec un quadrant de deux pieds et demi, fabriqué par Langlois et équipé de deux lunettes — l'une au-dessus du plan du quart de cercle, l'autre en dessous — ainsi que d'un micromètre, pour déduire de cet angle l'heure du méridien de référence. Pour ce faire, ils utilisent la différence entre les longitudes écliptiques de la Lune et du Soleil, elles-mêmes déduites des *Éphémérides* ou de la *Connaissance des Temps* pour le méridien de Paris. Dans ce même but, mais de nuit, ils pouvaient encore utiliser les émersions des satellites galiléens de Jupiter, observées à l'aide d'une lunette (non achromatisée à l'époque, donc de grande longueur — 15 ou 18 pieds : ils avaient un modèle de chaque dimension) visible à gauche de l'arbre proche de la tente. De surcroît, ils disposaient encore d'autres instruments, dont une lunette de 6,5 pieds de long. Par comparaison avec l'heure solaire locale, ils en déduisaient la longitude de la station d'observation où ils se trouvaient dans le Nouveau Monde. Dans la tente, un globe céleste finement gradué pouvait aider à prévoir les heures des observations nécessaires, et servir de calculateur analogique de l'angle parallactique, en utilisant le rapporteur circulaire accroché à son cercle méridien — cet angle est utile à connaître lors des occultations par la Lune, pour prédire le lieu et le moment d'émergence de l'astre occulté. L'horloge leur permettait, entre autres, de lire à la seconde près l'heure locale des émersions des satellites de Jupiter. Néanmoins il fallait en contrôler la marche à l'aide des mesures de distance angulaire Soleil-Lune, et la recalibrer régulièrement en se basant sur la hauteur du Soleil, corrigée de la réfraction astronomique par le calcul. Noter les détails des instruments,



ainsi que l'équipement de l'époque — qui comprenait une épée! *Source de l'image : Archives de l'Académie des sciences / numérisation par la Bibliothèque de l'Institut de France*

### **Remerciements**

Les Rédacteurs en chef invités remercient Patrick Muller, Observateur associé aux coronographes HACO / CLIMSO du Pic du Midi, pour son autorisation de reproduction d'une de ses photographies sur deux des pages précédentes (dont la couverture), ainsi que le Dr Siebren van der Werf pour de fructueux échanges sur cette photographie; de même, ils expriment leur reconnaissance au Dr. Andrew T. Young et à Éric Frappa pour leur avoir procuré et commenté en détail l'illustration historique montrée sur les mêmes pages.

## Rédacteurs en chef invités

### *Guest Editors*

*Published online: 11 August 2023, Issue date: 11 August 2023*



**Luc Dettwiller**



**Pierre Léna**

**Luc Dettwiller**, 64 ans, a enseigné la Physique en Classes préparatoires aux grandes écoles, dès 1984 dans la classe de P'-PC\*, et a participé au concours d'entrée à l'École normale supérieure de Lyon, puis à l'Agrégation de Physique. Il a toujours maintenu en parallèle une activité de recherche théorique en optique, concrétisée, dans des revues de rang A, par la publication d'une trentaine d'articles de recherche, à côté d'une quarantaine d'articles d'enseignement de la physique. Il est auteur de plusieurs livres d'optique, et contributeur pour une centaine de pages dans un volume de la série *Optoélectronique* (Hermès / Lavoisier, 2003). Ses travaux récemment parus portent sur la théorie de la formation des images dans les hypertélescopes ou les interféromètres stellaires, ainsi que sur les possibilités de réflexion supraluminique sur des miroirs multidiélectriques à grand nombre de couches. Il contribue au développement et au renouveau de la coronographie à l'Observatoire du Pic du Midi, pour lequel il a calculé l'optique des coronographes (respectivement infrarouge et visible) de 20 cm d'ouverture inaugurés en 2007; il suit l'installation imminente d'un coronographe de 40 cm. Il publie aussi des recherches en optique atmosphérique et donne volontiers des conférences sur ce thème, dont il mesure l'impact positif en terme d'attrait collectif pour des études approfondies en physique.

*Luc Dettwiller, 64, has taught physical science since 1984 in Higher education sections (P'-PC\* classrooms). He took part in the entrance examination at the École Normale Supérieure of Lyon, then in the Agrégation de Physique. He has always maintained in parallel a theoretical research activity in Optics, leading to some thirty research articles in refereed journals, alongside with*

*forty articles on physics teaching. He is the author of several books on Optics, and contributor for a hundred pages in a volume of the Optoélectronique series (Hermès / Lavoisier, 2003). His recently published work focuses on the theory of the image formation in hypertelescopes or stellar interferometers, as well as on the possibilities of superluminal reflection on multielectric mirrors with a large number of layers. He contributes to the development and renewal of coronagraphy at the Pic du Midi Observatory, for which he calculated at infrared and visible wavelengths the optics of the 20-cm aperture coronagraphs, inaugurated in 2007. He also publishes research in atmospheric optics and gives public lectures on this theme, with a clear positive impact to stimulate the interest in physics.*

**Pierre Léna** est astrophysicien, professeur émérite à l'Observatoire de Paris et à l'Université Paris Cité, membre de l'Académie des sciences depuis 1991. Son œuvre scientifique s'est déroulée autour de l'astronomie dans l'infrarouge, qui se développa à partir des années 1960, en utilisant des avions, ainsi que des observatoires terrestres et spatiaux pour l'étude du Soleil puis des régions de formation d'étoiles. Il consacra une partie importante de son activité à la conception et la réalisation du *Very Large Telescope* européen au Chili, avec l'implantation sur celui-ci de l'optique adaptative et de l'interférométrie optique, domaines nouveaux et riches en découvertes, où la réfraction atmosphérique terrestre joue un rôle majeur. Il dirigea pendant nombre d'années l'École doctorale Astronomie & Astrophysique d'Île-de-France, qui forma plusieurs générations de jeunes astrophysiciens. Engagé dans l'amélioration de l'enseignement scientifique à l'école et au collège, en France et dans le monde, il co-fonda l'opération *La main à la pâte* en 1995 et en a suivi le déploiement jusqu'aujourd'hui.

*Pierre Léna is an astrophysicist, Professor Emeritus at Paris Observatory and Université Paris Cité, and has been a member of the Académie des Sciences since 1991. His scientific work has focused on infrared astronomy, which developed from the 1960s onwards, using airplanes, ground-based and space-based observatories to study the Sun and star-forming regions. He devoted a large part of his time to the design and construction of the European Very Large Telescope in Chile, where he introduced adaptive optics and optical interferometry – new and exciting fields in which terrestrial atmospheric refraction plays a major role. For many years, he directed the École doctorale Astronomie & Astrophysique d'Île-de-France, which trained several generations of young astrophysicists. Committed to improving science teaching in schools and colleges, in France and around the world, he co-founded the “La main à la pâte” operation in 1995 and has followed its deployment to the present day.*



---

Astronomie, atmosphères et réfraction / *Astronomy, Atmospheres and Refraction*

# Astronomy, Atmospheres and Refraction: Foreword

*Astronomie, atmosphères et réfraction : Avant-propos*

Luc Dettwiller<sup>\*, a</sup>, Pierre Léna<sup>\*, b</sup> and Denis Gratias<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School,  
Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France

<sup>b</sup> LESIA, Observatoire de Paris, 92195 Meudon, France

<sup>c</sup> IRCP Chimie-ParisTech Paris, France

E-mails: [dettwiller.luc@gmail.com](mailto:dettwiller.luc@gmail.com) (Luc Dettwiller), [pierre.lena@obspm.fr](mailto:pierre.lena@obspm.fr)  
(Pierre Léna), [denis.gratias@academie-sciences.fr](mailto:denis.gratias@academie-sciences.fr) (Denis Gratias)

*Published online: 11 August 2023, Issue date: 11 August 2023*

## ***La version française suit la version anglaise***

This volume devoted to astronomical and atmospheric refraction is singular in several ways.

First, by the apparent simplicity of the phenomenon discussed here, the refraction of light, taught in high schools with the famous Snell-Descartes formula found at the beginning of the XVII<sup>th</sup> century, and whose study, going back to the X<sup>th</sup> century with Ibn Sahl, did not cease to fascinate the astronomers in front of the difficulty of observing the stars after the travel of their light in the Earth's atmosphere.

Then, by the concern of many of the present authors to follow the historical evolution of the problem in referring explicitly to some of the most important original articles that have marked this research until the advent of satellites.

Finally, by the number and the content of articles written in French in order to allow easy access to teachers, in particular of the first cycle of higher education, and to invite them to show to their students the genesis of a scientific approach of almost four centuries, carried out between mathematics, astronomy and physics.

This volume is an educational issue of history of science, an exemplary illustration of the story of great scientific adventures, which we hope will be the first of its kind but not the unique one. Perceiving the progress of science in its historical dimension is an essential approach to practice

---

\* Corresponding authors.



in our institutions to understand not only the world around us but also the way it has gradually opened up to us. Exhibiting research on astronomical refraction provides a great opportunity to do so.

Its main concern is the effects – excluding those of extinction – produced on the observation of the stars by the propagation of their light in the Earth's atmosphere, at the wavelengths of the visible, later extended to the infrared, radiations: the celestial bodies are seen in an apparent direction, different from their real direction, and more or less distorted. The study of these phenomena has a long and rich history, particularly since the xviii<sup>th</sup> century, in connection with developments not only in optics, but also in mathematics, physics of gases and the atmosphere, and geodesy. This gave rise to successive mathematical models and approximations interesting to examine in their historical development. Indeed, astronomical refraction calculations progressed hand in hand with those of differential geometry, integral calculus and series expansions, which they stimulated and used very early on. Obtaining good tables of astronomical refraction was a major issue for navigation. At a time of intense competition in the development of overseas empires, scientific interest met geopolitical interests. At the same time, Newton stressed the fundamental role of these tables for astronomy. Indeed, the accuracy of astrometric measurements had long been dependent on the careful consideration of astronomical refraction and its modeling, until the advent of space-based observations.

The inverse problem, i.e. the determination of properties of the Earth's atmosphere from observations of refraction, was also the subject of much work, until it was recognized that the problem was ill-posed and had no unique solution. The refraction of light in the atmospheres of other bodies in the solar system – which can be seen in particular during stellar occultations or transits – led to the discovery of an atmosphere around the planet Venus in the xviii<sup>th</sup> century. This method is still used today to probe the atmospheres of solar system bodies from a distance even if they are tenuous, and to follow their temporal evolution.

In addition, to improve the altitude calculations of geodetic points on land, it appeared necessary to study what is usually called “terrestrial” or “atmospheric” refraction. Moreover, it is involved in the precise knowledge of the apparent height of the sea horizon, and therefore in the practice of astronomical navigation. This second aspect of the effects of refraction in the Earth's atmosphere, which includes various categories of particular and spectacular phenomena, such as mirages or *Fata Morgana*, also aroused curiosity and then quantitative explanations.

Beyond the large-scale refractive properties of the atmosphere, its local random fluctuations, which are caused by small-scale turbulence, were for a very long time a fundamental obstacle to the high angular resolution of astronomical images in the visible and infrared domains, until the development of contemporary adaptive optics methods, which are now used in all large ground-based telescopes. In parallel to this adaptive correction, the chromatic dispersion occurring in the atmosphere must be compensated for, so that multi-telescope optical interferometry, which is now rich in discoveries, is fully operational. The major importance of these two methods in contemporary astronomy justifies addressing them in this thematic issue dominated by refraction.

These developments, starting from the origin of the study of astronomical and atmospheric refractions, continuing with the exposition of theoretical properties and the analysis of various observations, and finally concluding with various consequences on astronomical observation using today's instruments, constitute a first part of twelve articles. The second part of this special issue wishes to shed light on several remarkable pieces of work from scientists of the past centuries, and to connect these with today's presentations. It includes seven more properly historical articles, including six commentaries on major texts, which opened up fruitful avenues of study. They are placed in their historical and scientific context, with their repercussions. Extensive excerpts from the original editions bring readers into direct contact with the source

of notions that have become essential. In order to overcome the difficulty of getting to the heart of an ancient text, a table of correspondences is proposed, linking the ancient notations to the current ones, as used in the two articles at the beginning of the first part. It is recommended to read these articles before tackling these historical comments. The two parts, both for the concepts and for the notations, thus retain an overall coherency, beyond the diversity of the articles.

By gathering here such a set of articles around refraction in the terrestrial and celestial atmospheres, we wish to show to the reader, researcher, professor or student, the richness and the variety of a subject which could seem almost trivial today, and to propose to him a tool which will be able to renew in depth his vision of a “simple”, most often geometrical, problem of optics. Many eminent scientists have dealt with it, as it has played and still plays a major role in astronomical observation and in the study of the atmospheres of celestial bodies.

The first three texts of Part I are by the same author and split for clarity. The first one (“Panorama historique...” [1]) presents a detailed history of the study of astronomical refraction, without limiting itself to general ideas. It goes into technical details, as is nowadays the practice in the history of mathematical sciences at large, and transcribes the outstanding formulas obtained in the past, accompanied by numerous quotations. The second article (“Propriétés remarquables de la réfraction astronomique...” [2]) exposes the main mathematical results, whether they take the form of rigorous theorems or more or less approximate expressions, in the case of an idealized, spherically symmetric atmosphere. The last article of this methodological presentation (“Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre” [3]) deals with terrestrial refraction and its various manifestations, of which it presents an attempt at a reasoned classification but non-exhaustive since some mysterious observations remain unclassifiable today.

Nine articles then discuss a variety of remarkable situations in which the interpretation or quality of the observation depends on refraction. Hence, article 4 (“Les tables de réfraction astronomique” [4]) presents the historical development of astronomical refraction tables. Article 5 (“Relations among atmospheric structure...” [5]) explores efforts to deduce the properties of the Earth’s atmosphere from refraction. With paper 6 (“Study of atmospheres in the solar system...” [6]), the richness of the methods used is revealed in the contemporary study of the atmospheres of solar system bodies, as it was in the discovery of an atmosphere around the planet Venus, presented in paper 7 (“The Lomonossov arc...” [7]), with interesting modern extensions. In articles 8 (“Les effets optiques de la turbulence atmosphérique...” [8]), 9 (“Optique adaptative...” [9]) and 10 (“Correction de la dispersion atmosphérique...” [10]), contemporary developments in adaptive optics and optical interferometry in the presence of atmospheric turbulence are analyzed. The reader’s curiosity will be nourished by articles 11 (“Novaya Zemlya effect and Fata Morgana” [11]) and 12 (“Images du Soleil et de la Lune...” [12]), which explore some consequences of unusual refractions: the *Novaya Zemlya* effect (1597), where the Sun is seen when it is significantly below the horizon; the distortion of the aspects of the Sun and the Moon at the horizon, seen from the ground or the International Space Station.

The second part, as announced, deals with historical studies, without however neglecting the theoretical and quantitative aspects. Six short articles by the same author each focus on a major text by a different scholar, systematically giving the context, then a summary with comments, and finally the most important derivations and results, reproducing certain essential original passages. This second part, with its precise analysis, along with a choice to go in depth into the presentation of these works, is clearly aimed at physicists as well as historians of science. Three texts are dedicated to the xviii<sup>th</sup> century. Bouguer’s seminal work (“L’invariant de Bouguer et ses conséquences” [13]) explores the curvature of light rays. Shortly afterwards, Lambert (“Les développements de Lambert” [14]) corrects the summit altitudes calculated by the Cassinis who had neglected terrestrial refraction, and proposes various series expansions to express the astronomical refraction angle. The last text (“Did Monge really explain inferior mirages?” [15])

shows that the claim about Monge, who after Bonaparte's expedition to Egypt is often credited with explaining ordinary mirages, is neither historically nor scientifically valid.

Three scholars of the XIX<sup>th</sup> century follow: Biot, author of a remarkable theorem and method of calculation concerning the integral of refraction ("Le théorème de Biot..." [16]); Kummer, applying a classical method of discussion in mechanics to the study of the vision of the horizon, which makes it possible to expose the whole of the corrections required at the time of the astronomical point at sea ("La discussion par Kummer d'une quadrature..." [17]); and finally, Radau, synthesizing the studies of the time – largely based on series expansions of which the divergence was then little known ("Les développements de Radau et leur divergence" [18]).

For the XX<sup>th</sup> century, we have chosen the remarkable works of Link, who laid the foundations of a theoretical photometric study of total lunar eclipses and showed that they can be indirectly used to probe the upper atmosphere of the Earth ("La photométrie des éclipses de Lune..." [19]).

We hope that this issue, with its wealth of historical references and the talent of its authors, will contribute to the work of researchers and historians and inspire many teachers to go beyond teaching science and tell its wonderful story!

### **Version française**

Ce numéro thématique consacré à la réfraction astronomique et /ou atmosphérique est singulier à plus d'un titre.

Tout d'abord, par la simplicité apparente du phénomène discuté ici, la réfraction de la lumière enseignée en France dès le lycée avec la fameuse formule de Snell–Descartes du début du XVIII<sup>e</sup> siècle. Son étude, remontant au X<sup>e</sup> siècle avec Ibn Sahl, n'a cessé de passionner les astronomes face à la difficulté d'observer les astres après le passage de leur lumière dans l'atmosphère terrestre.

Ensuite, par le souci affiché des auteurs de suivre l'évolution historique du problème en se référant explicitement à certains des plus importants articles originaux qui ont jalonné cette recherche jusqu'à l'avènement des satellites.

Enfin, par le nombre et la teneur de certains articles, rédigés pour beaucoup en langue française afin d'en permettre facilement l'accès aux enseignants, en particulier du premier cycle de l'enseignement supérieur. Ils sont ainsi invités à montrer à leurs étudiants la genèse d'une démarche scientifique de quatre siècles, conduite conjointement entre les mathématiques, l'astronomie et la physique.

On l'aura compris, il s'agit d'un numéro à caractère pédagogique tourné vers l'histoire des sciences, une illustration exemplaire du récit des grandes aventures scientifiques, que nous espérons le premier de ce genre mais non l'unique. Percevoir les progrès des sciences dans leur dimension historique est une démarche essentielle à pratiquer dans nos institutions d'enseignement pour comprendre non seulement le monde qui nous entoure mais également la façon dont il s'est peu à peu ouvert à nous. Exposer les recherches sur la réfraction astronomique en fournit une formidable occasion.

Sa problématique est celle des effets, hors celui d'extinction, produits sur l'observation des astres par la propagation de leur lumière dans l'atmosphère terrestre, aux longueurs d'onde du visible puis de l'infrarouge : les corps célestes sont vus dans une direction apparente, différente de leur direction réelle, et plus ou moins déformés. L'étude de ces phénomènes possède une longue et riche histoire, en particulier depuis le XVIII<sup>e</sup> siècle, en lien non seulement avec les progrès de l'optique, mais également avec ceux des mathématiques, de la physique des gaz et de l'atmosphère, ainsi que de la géodésie. Ceci donna lieu à des modélisations et des approximations mathématiques successives, intéressantes à examiner dans leur déploiement historique. En effet, les calculs de réfraction astronomique progressèrent de pair avec ceux de la géométrie

différentielle, du calcul intégral et des développements en série, qu'ils stimulèrent et utilisèrent très tôt. L'obtention de bonnes tables de réfraction astronomique fut un enjeu majeur pour la navigation. À une époque de forte concurrence due à l'expansion des empires maritimes, l'intérêt scientifique rencontrait les intérêts géopolitiques. En parallèle, Newton soulignait le rôle fondamental de ces tables pour l'astronomie. De fait, la précision des mesures en astrométrie a longtemps dépendu de la prise en compte minutieuse de la réfraction astronomique et de sa modélisation, jusqu'à l'avènement des observations spatiales.

Le problème inverse, à savoir la détermination de propriétés de l'atmosphère de la Terre à partir d'observations de la réfraction, fut également l'objet de nombreux travaux, jusqu'à ce que soit reconnu ceci : le problème était en grande partie mal posé et n'avait pas de solution unique. La réfraction de la lumière dans les atmosphères d'autres corps du système solaire, perceptible notamment lors d'occultations stellaires ou de transits, conduisit dès le XVIII<sup>e</sup> siècle à la découverte d'une atmosphère autour de la planète Vénus. Cette méthode n'a rien perdu de son importance : elle permet aujourd'hui encore de sonder à distance les atmosphères de corps du système solaire, même ténues, et de suivre leurs évolutions temporelles.

Par ailleurs, pour améliorer les calculs d'altitude de points géodésiques terrestres, il s'avéra nécessaire d'étudier ce que l'on qualifia habituellement de « réfraction terrestre » ou « atmosphérique ». De plus, celle-ci intervient pour la connaissance précise de la hauteur apparente de l'horizon marin, donc dans la pratique de la navigation astronomique. Ce second volet des effets de la réfraction dans l'atmosphère de la Terre, qui regroupe diverses catégories de phénomènes particuliers et spectaculaires, tels les mirages ou les *Fata Morgana*, suscita également la curiosité puis des explications quantitatives.

S'ajoutant aux propriétés réfractives à grande échelle de l'atmosphère, les propriétés très locales, de surcroît aléatoires et causées par la turbulence à petite échelle, ont été très longtemps un obstacle fondamental à la haute résolution angulaire des images astronomiques dans les domaines visible et infrarouge, jusqu'à ce que se développent les méthodes contemporaines de l'optique adaptative, qui équipe désormais tous les grands télescopes terrestres. Outre cette correction adaptative, la dispersion chromatique se produisant dans l'atmosphère doit être compensée afin que l'interférométrie optique multi-télescopes, aujourd'hui riche de découvertes, soit pleinement opératoire. L'importance majeure de ces deux méthodes dans l'astronomie contemporaine justifie de les aborder dans ce numéro thématique dominé par la réfraction.

Ces développements, partant de l'origine de l'étude des réfractions astronomique et atmosphérique, se poursuivant par l'exposé des propriétés théoriques et l'analyse d'observations variées, enfin se concluant par diverses conséquences sur les instruments actuels d'observation astronomique, donnent matière à une première partie de douze articles. La seconde partie de ce numéro spécial souhaite, en ce qui concerne notre sujet, mettre en lumière de façon originale divers travaux féconds de scientifiques des siècles passés, et jeter un pont avec la présentation actuelle des concepts étudiés. Elle comprend donc sept articles plus proprement historiques, dont six commentaires de textes majeurs, qui ouvrirent de fécondes voies d'étude. Ils sont resitués dans leur contexte historique et scientifique, avec leurs répercussions. De larges extraits des éditions originales mettent les lecteurs en contact direct avec la source de notions devenues incontournables. Pour pallier la difficulté d'entrer de plain-pied au cœur d'un texte ancien, un tableau de correspondances est proposé, reliant les anciennes notations aux actuelles, telles qu'utilisées dans les deux articles débutant la première partie. Il est recommandé de lire ceux-ci avant d'aborder ces commentaires historiques. Les deux parties, tant pour les notions que pour les notations, conservent ainsi une cohérence d'ensemble, au-delà de la diversité des articles.

En rassemblant ici une telle somme d'articles autour de la réfraction dans les atmosphères terrestre et célestes, nous souhaitons montrer au lecteur, qu'il soit chercheur, professeur ou étudiant, la richesse et la variété d'un sujet qui pourrait paraître banal aujourd'hui, et lui proposer



un outil qui pourra renouveler en profondeur sa vision d'un « simple » problème d'optique, géométrique le plus souvent. Nombre d'éminents scientifiques l'ont traité, tant il joua et joue encore un rôle majeur dans l'observation en astronomie et dans l'étude des atmosphères des corps célestes.

Les trois premiers textes de la première partie sont du même auteur. L'article 1 (« Panorama historique... » [1]) présente un historique détaillé de l'étude de la réfraction astronomique, sans se limiter aux idées générales. Il entre dans les détails techniques, comme cela se pratique aujourd'hui dans l'histoire des sciences mathématiques au sens large, et transcrit les formules marquantes obtenues jadis, en les accompagnant de nombreuses citations *verbatim* assorties. L'article suivant (« Propriétés remarquables de la réfraction astronomique... » [2]) expose les principaux résultats mathématiques, qu'ils prennent la forme de théorèmes rigoureux ou d'expressions plus ou moins approximatives, dans le cas d'une atmosphère idéalisée, à symétrie sphérique. Le dernier article de cette présentation méthodologique (« Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre » [3]) traite de la réfraction terrestre et ses diverses manifestations, dont il présente une tentative de classification raisonnée, mais non exhaustive – car certaines observations mystérieuses demeurent aujourd'hui encore inclassables.

Neuf articles déroulent ensuite une diversité de situations remarquables dans lesquelles l'interprétation ou la qualité de l'observation sont tributaires de la réfraction. Il en est ainsi dans l'article 4 (« Les tables de réfraction astronomique » [4]), qui expose l'élaboration des tables de réfraction astronomique. L'article 5 (« Relations among atmospheric structure... » [5]) explore les efforts cherchant à déduire de la réfraction les propriétés de l'atmosphère de la Terre. Avec l'article 6 (« Study of atmospheres in the solar system... » [6]), la richesse des méthodes utilisées se révèle dans l'étude contemporaine des atmosphères de corps du système solaire, comme elle le fut dans la découverte d'une atmosphère autour de la planète Vénus, présentée dans l'article 7 (« The Lomonossov arc... » [7]), aux intéressants prolongements modernes. Dans les articles 8 (« Les effets optiques de la turbulence atmosphérique... » [8]), 9 (« Optique adaptative... » [9]) et 10 (« Correction de la dispersion atmosphérique... » [10]), les développements contemporains de l'optique adaptative et de l'interférométrie optique, en présence de turbulence atmosphérique, sont analysés. La curiosité du lecteur se nourrira des articles 11 (« Novaya Zemlya effect and Fata Morgana » [11]) et 12 (« Images du Soleil et de la Lune... » [12]) qui explorent certaines conséquences de réfractions insolites : l'effet *Novaya Zemlya* (1597), où le Soleil est vu alors qu'il est significativement en dessous de l'horizon; la distorsion des aspects du Soleil et de la Lune à l'horizon, vus depuis le sol ou la Station spatiale internationale.

La seconde partie, comme annoncé, est constituée d'études historiques, sans toutefois délaissier les aspects théoriques et quantitatifs. Six courts articles du même auteur s'attachent chacun à un texte majeur d'un savant différent, dont ils donnent systématiquement le contexte, puis un résumé assorti de commentaires, enfin les démonstrations et résultats marquants en reproduisant certains passages originaux essentiels. La précision des analyses ainsi présentées, jointe au refus de se cantonner à une présentation superficielle de ces travaux, fait que cette seconde partie s'adresse autant à des physiciens qu'à des historiens des sciences. Trois textes sont dédiés au XVIII<sup>e</sup> siècle. Les travaux fondateurs de Bouguer (« L'invariant de Bouguer et ses conséquences » [13]) explorent la courbure des rayons lumineux. Peu après, Lambert (« Les développements de Lambert » [14]) corrige les altitudes de sommets, calculées par les Cassini qui avaient négligé la réfraction terrestre et propose divers développements en série pour exprimer l'angle de réfraction astronomique. Le dernier texte (« Did Monge really explain inferior mirages? » [15]) montre que l'affirmation sur Monge, qui, après l'expédition d'Égypte, est souvent crédité d'avoir expliqué les mirages ordinaires, n'est ni historiquement ni scientifiquement recevable.

Suivent trois savants du XIX<sup>e</sup> siècle : Biot, auteur d'un théorème et d'une méthode de calcul remarquables concernant l'intégrale de réfraction (« Le théorème de Biot... » [16]) ; Kummer, appliquant une méthode de discussion classique en mécanique à l'étude de la vision de l'horizon, ce qui permet d'exposer l'ensemble des corrections requises lors du point astronomique en mer (« La discussion par Kummer d'une quadrature... » [17]) ; et enfin, Radau, synthétisant les études de l'époque, largement basées sur des développements en série, dont la divergence était alors peu connue (« Les développements de Radau et leur divergence » [18]).

Au XX<sup>e</sup> siècle, nous avons retenu la personnalité de Link, posant les bases d'une étude photométrique théorique des éclipses totales de Lune et montrant qu'elles permettent de sonder la haute atmosphère terrestre (« La photométrie des éclipses de Lune... » [19]).

Nous espérons que ce numéro, par la richesse de ses références historiques et par le talent de ses auteurs, contribuera au travail des chercheurs comme des historiens et engendrera de nombreuses vocations chez les professeurs, afin qu'au-delà d'enseigner les sciences, ils en racontent la merveilleuse histoire !

## References / Références

- [1] L. Dettwiller, "Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 13-62.
- [2] L. Dettwiller, "Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 63-102.
- [3] L. Dettwiller, "Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 103-132.
- [4] F. Mignard, "Les tables de réfraction astronomique", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 133-178.
- [5] A. T. Young, "Relations among atmospheric structure, refraction, and extinction", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 179-212.
- [6] B. Sicardy, "Study of atmospheres in the solar system, from stellar occultation or planetary transit", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 213-241.
- [7] S. Koutchmy, "The Lomonosov arc: refraction and scattering in Venus atmosphere during solar transits", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 243-268.
- [8] D. Bonneau, "Les effets optiques de la turbulence atmosphérique dans les images astronomiques", *Comptes Rendus. Physique* **23** (2022), no. S1, p. 269-291.
- [9] G. Rousset, T. Fusco, "Optique adaptative : correction des effets de la turbulence atmosphérique sur les images astronomiques", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 293-344.
- [10] L. Koechlin, L. Dettwiller, "Correction de la dispersion atmosphérique dans l'imagerie par les grands télescopes et les interféromètres astronomiques", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 345-364.
- [11] S. Van Der Werf, "Novaya Zemlya effect and Fata Morgana. Raytracing in a spherically non-symmetric atmosphere", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 365-389.
- [12] F. Mignard, "Images du Soleil et de la Lune, depuis le sol ou la Station spatiale internationale", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 391-414.
- [13] L. Dettwiller, "L'invariant de Bouguer et ses conséquences : commentaire historique", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 415-452.
- [14] L. Dettwiller, "Les développements de Lambert : commentaire historique", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 453-465.
- [15] A. T. Young, "Did Monge really explain inferior mirages?", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 467-481.
- [16] L. Dettwiller, "Le théorème de Biot et le changement de variable de Biot-Auer-Standish : commentaire historique", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 483-501.
- [17] L. Dettwiller, "La discussion par Kummer d'une quadrature sur la réfraction astronomique : commentaire historique", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 503-525.
- [18] L. Dettwiller, "Les développements de Radau et leur divergence : commentaire historique", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 527-536.
- [19] L. Dettwiller, "La photométrie des éclipses de Lune, vue par František Link : commentaire historique", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 537-555.



**Première partie. Observations, théorie et applications**







---

Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

# Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie

*Historical overview for the treatment of astronomical  
refraction: a little-known history involving Optics,  
Mathematics and Geodesy*

Luc Dettwiller<sup>® a</sup>

<sup>a</sup> Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School,  
Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France

*Courriel*: [dettwiller.luc@gmail.com](mailto:dettwiller.luc@gmail.com)

**Résumé.** De l'antiquité grecque à l'ère de l'informatique, la réfraction astronomique pose question, quant à la position angulaire réelle des astres, à la structure de l'atmosphère, et la navigation astronomique. Après les idées embryonnaires et les premières mesures présentées en introduction, on commence par la série des fondateurs d'une étude mathématiquement structurée : les Cassini, Newton, Taylor — ces deux derniers inventant des notions mathématiques appropriées. Puis on voit les géodésiens du XVIII<sup>e</sup> (Bouguer, Lacaille, etc.) enrichir le corpus des observations entretenant la réflexion. Ensuite viennent les formules des Classiques : Simpson, Bradley, Kramp, Laplace. Mais avec les progrès de la métrologie démarrent des études précises de l'indice de l'air et reviennent les géodésiens et théoriciens, comme Biot qui est présent sur tous ces tableaux. L'augmentation de précision qui s'ensuit nécessite des calculs théoriques pour des modèles d'atmosphère plus sophistiqués, effectués par des continuateurs emblématiques comme, entre autres, Radau et Ivory. Ce dernier pointant une divergence dans les séries numériques utilisées, un sursaut mathématique est dû à quelques ouvriers comme Kummer et Hausdorff. Toute cette virtuosité analytique sera finalement supplantée par l'étude numérique informatique, mais dont l'implémentation efficace repose grandement sur les avancées théoriques de Biot.

**Abstract.** From Greek antiquity to the era of computer science, astronomical refraction has raised questions about the real angular position of celestial bodies as seen from Earth surface, the structure of its atmosphere, and the celestial navigation. After introducing the embryonic ideas and the first measurements, the article first presents the early founders of a mathematically structured study: Cassini, Newton, Taylor—the last two inventing appropriate mathematical tools. Then the 18th century geodesists (Bouguer, Lacaille, etc.) enrich the corpus of observations to be understood, followed by the “classics”—Simpson, Bradley, Kramp, Laplace. The progress in metrology allows precise studies of the air refractive index and new theoretical efforts with Biot's omnipresence. This gain in accuracy requires new calculations involving more sophisticated

atmospheric models, as Radau and Ivory, among others, will do. Ivory pointing out a divergence in the numerical series being used, Kummer and Hausdorff find a new mathematical way. Numerical work on computers is eventually making useless all this mathematical virtuosity, although present work keeps relying on Biot's theoretical advances.

**Mots-clés.** Réfraction astronomique, Coefficient de réfraction, Formule de Simpson, Formule de Bradley, Théorème d'Oriani, Hauteur réduite, Théorème de Biot.

**Keywords.** Astronomical refraction, Refraction coefficient, Simpson's formula, Bradley's formula, Oriani's theorem, Reduced height, Biot's theorem.

*Published online: 25 May 2023, Issue date: 11 August 2023*

« To make a new table of refractions has taken up almost all my time ever since the holidays: and I have hitherto lost my pains in fruitless calculations, by reason of the difficulty of the work. For considering that such a table is the foundation of astronomy [...] »

Isaac Newton, *Lettre à l'Astronome Royal John Flamsteed* (26/01/1695)

## 1. Introduction

De manière générale, les phénomènes de réfraction sont des effets d'optique géométrique dans lesquels la direction des rayons lumineux change le long de leur trajet à cause d'une variation spatiale d'indice de réfraction. Dans le cas d'un milieu continu, les rayons sont *a priori* courbes, dépourvus de points anguleux, leur concavité étant tournée dans le sens des indices localement croissants. Cela se produit dans l'atmosphère terrestre, à cause de l'inhomogénéité de l'air qui la constitue, liée surtout à la non-uniformité de la pression et de la température ; mais on verra que dans certains cas il vaut mieux parler de quasi-réflexion plutôt que de réfraction (voir [1, sous-paragraphe 2.1], dans notre article sur les « Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre » dans ce numéro spécial). Pour un observateur situé sur Terre en  $S$  (d'altitude quelconque), lorsque ces effets affectent la vision d'un objet terrestre, on dit qu'il s'agit de réfraction atmosphérique. Sous sa forme standard, les géodésiens en tiennent compte minutieusement et l'appellent la « réfraction terrestre » ; hors du cas standard, les effets de réfraction peuvent prendre des formes variées, incluant les traditionnels mirages, que nous détaillerons dans [1]. Par contre, dans le cas de la vision d'un objet extra-atmosphérique comme un astre  $A$ , on dit qu'il s'agit de réfraction astronomique. Ce numéro spécial se limitera à ce dernier cas, sauf dans les articles [1, 2].

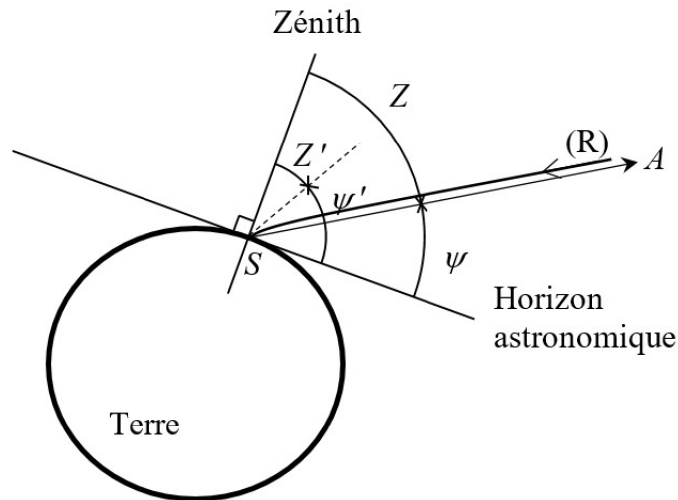
Assimilons  $A$  à un point situé à l'infini, et considérons le rayon lumineux (R) allant de  $A$  à  $S$ . L'angle  $Z$  entre le zénith (i.e. la verticale ascendante en  $S$ ) et la direction de  $A$  est appelé la distance zénithale de  $A$  ; mais la courbure de (R) fait que depuis  $S$  l'« image » de  $A$  est vue dans une direction différente, dont l'angle  $Z'$  avec le zénith est la distance zénithale apparente de  $A$  (voir la Figure 1) — nous avons mis ici le mot image entre guillemets, car il n'y pas stigmatisme (voir [1, paragraphe 1]) même pour  $A$  à l'infini (pour plus de détails, voir aussi [3, introduction du paragraphe 7] dans ce numéro spécial). Si dans les définitions ci-dessus on remplace le zénith par l'horizon astronomique (i.e. l'ensemble des directions horizontales pour  $S$  — voir la Figure 1), on obtient alors les angles  $\psi = 90^\circ - Z$  et  $\psi' = 90^\circ - Z'$  qui sont respectivement les hauteurs vraie et apparente de  $A$ . En supposant que (R) est dans le plan contenant  $A$  et la verticale de  $S$ , on appelle réfraction  $\chi_S$  de  $A$  pour  $S$  l'angle, compté positivement vers le haut, de la direction de  $A$  vers celle de son « image » pour  $S$ , soit

$$\chi_S = Z - Z' = \psi' - \psi ; \quad (1)$$

dans le vocabulaire actuel il serait plus cohérent de l'appeler « déviation astronomique ».

Usuellement l'indice de réfraction  $n$  croît vers le bas sur tout le trajet de (R) ; la concavité de celui-ci est alors partout tournée vers le bas, et  $\chi_S$  est positif.

La réfraction est petite, comme la variation  $\eta_S$  de  $n$  qui, de  $A$  à  $S$ , passe de 1 à  $n_S$  : usuellement  $\eta_S \cong 3 \times 10^{-4}$  (des valeurs plus précises seront données au paragraphe 4), et on verra que  $\chi_S \cong$



**FIGURE 1.** Définition des distances zénithales vraie et apparente  $Z$  et  $Z'$  de l'astre  $A$ , et de ses hauteurs vraie et apparente  $\psi$  et  $\psi'$ , le tout pour l'observateur  $S$ .

$3 \times 10^{-4} \text{ rad} \cong 1'$  pour  $Z' = 45^\circ$ , mais  $\chi_S \cong 0,5^\circ$  pour  $Z' = 90^\circ$ . On peut déjà entrevoir que, dans la recherche d'expressions approchées de la réfraction, la petitesse de  $\eta_S$  est un atout fondamental.

On pourrait être surpris d'apprendre que ce point très précis d'optique atmosphérique a suscité au cours de l'histoire, et suscite encore, un tel intérêt et une littérature si abondante. Ce ne serait probablement pas le cas s'il ne concernait que les astronomes, car ils doivent fonder leur discipline sur la connaissance précise des directions vraies dans lesquelles se trouvent les astres. Mais la recherche de ce savoir est mêlée aussi à des enjeux géopolitiques. Ainsi, au siècle des Lumières, était-il devenu clair que cette connaissance est indispensable pour répondre aussi à un problème majeur dans le développement des empires : le point nautique, avec la navigation astronomique. À ce sujet, le rapport concernant la création du Bureau des longitudes, présenté le 25 juin 1795 par l'Abbé Grégoire à la Convention, est éloquent :

« [...] Thémistocle disait : “Quiconque est maître de la mer, l'est de la Terre.” Un de nos poètes exprimait la même idée à sa manière en disant : “Le trident de Neptune est le sceptre du monde.” Les succès des Anglais à diverses époques, et spécialement dans la guerre de 1761, n'ont que trop prouvé que la supériorité de la marine décide souvent des résultats de la guerre. Une des mesures les plus efficaces pour étouffer la tyrannie britannique, c'est de rivaliser dans l'emploi des moyens par lesquels cet État, qui ne devait jouer qu'un rôle secondaire dans l'ordre politique, est devenu une puissance colossale. Or les Anglais, bien convaincus que sans Astronomie on n'avait ni commerce, ni marine, ont fait des dépenses incroyables pour pousser cette science vers le point de perfection. [...] »

En ce domaine, ils avaient initialement 50 ans d'avance sur la marine française ; en deux ans et demi, Grégoire gommait, pour la France, son demi-siècle de retard. Gardons-nous de croire que la technologie actuelle a relégué ces préoccupations au musée d'un passé définitivement révolu : depuis 2015, la navigation astronomique est de nouveau enseignée à l'Académie navale d'Annapolis (USA) — par crainte de défaillances du système GPS dues à d'éventuelles cyberattaques, mais aussi à son usure, à des pannes électriques créées par des événements solaires, à des dysfonctionnements voire des collisions de satellites, etc. Il faut savoir qu'une erreur de  $1'$  (i.e. une

minute d'angle) en latitude correspond à un écart de position Nord-Sud d'un mille nautique, soit 1 852 m — ce qui peut être dramatique pour un navire au voisinage de récifs ou de hauts-fonds ! Pour obtenir cette précision de 1' en navigation astronomique [4–7], il est indispensable d'appliquer aux mesures brutes (prises autrefois avec un bon sextant par exemple) diverses corrections, dont certaines sont liées à la réfraction et sont bien connues dans le cas standard, mais dont la valeur réelle du moment peut s'écarter beaucoup et d'une quantité mal connue ! Il en est de même, quoiqu'avec des variations souvent moindres, pour la géodésie — et aussi la cartographie, qui était la tâche prioritaire voulue par Jean-Baptiste Colbert, ministre de Louis XIV, pour les astronomes de l'Académie des sciences et l'Observatoire de Paris, fondés successivement en 1666 et 1667. Nous détaillerons ces diverses corrections dues à la réfraction, dans ce numéro spécial [8, sous-paragraphe 4.2 et 4.3].

Du phénomène de réfraction astronomique spécifiquement, la première preuve expérimentale actuellement conservée semble se trouver dans l'ouvrage édité par Schöner en 1544 [9]. Le patricien Bernhard Walther (qui avait financé le premier observatoire d'Europe, à Nuremberg), y relate son observation des 6 et 7 mars 1489 (plus d'un siècle avant la découverte de l'effet *Novaya Zemlya* en 1597 — voir [10] dans ce numéro spécial) : avec une sphère armillaire il constate que la distance angulaire entre Vénus et le Soleil change au coucher de celui-ci ; il attribue ce fait à la réfraction, dont il effectuera la première mesure un an plus tard.

Mais dès l'antiquité, puis le Moyen-Âge, des précurseurs ont conjecturé l'existence de cas de réfraction atmosphérique, puis astronomique. Hipparque de Nicée (II<sup>e</sup> siècle av. J.-C.) — dont les traités sont presque tous perdus — aurait, d'après Pline l'Ancien et Ptolémée, été le premier à déduire à l'œil nu l'existence de la réfraction astronomique : car il a observé une éclipse de Lune rare, où l'on voyait le Soleil sur l'horizon en même temps que la Lune éclipcée !

Entre le I<sup>er</sup> et le II<sup>e</sup> siècle av. J.-C., Cléomède [11] semble être le premier à suggérer que la réfraction permettrait de voir le soleil couchant alors qu'il est déjà sous l'horizon, et il tente d'expliquer par elle l'illusion de la Lune [12], en attribuant le tout à la réfraction entre l'air sec au niveau de l'observateur et l'air au loin, supposé humide donc plus dense et plus proche du sol, mais aussi plus réfringent (comme l'eau — ce qui s'avère faux !) : car Cléomède connaissait la réfraction (grâce au premier écrit qui la mentionne, dû à Euclide au III<sup>e</sup> av. J.-C.) notamment à la surface de l'eau d'un récipient rempli à ras bord, ce qui permet de voir latéralement le fond du récipient qui serait invisible sans réfraction.

Ptolémée dans l'*Almageste* traite de même l'« illusion de la Lune » [13], i.e. le fait que celle-ci sur l'horizon semble [14, 15] beaucoup plus grosse qu'en plein ciel. Dans le Livre V de son *Optique* (vers l'an 170) il constate le déplacement vers l'horizon nord (peut-être observé au moyen d'une sphère armillaire) des astres au levant ou au couchant, puis l'explique par un modèle simple où il considère que la Terre est entourée d'une coquille d'air homogène, et où il calcule la réfraction à l'interface de l'air et de l'éther.

Alors que l'Europe n'en était encore qu'au Moyen-Âge, Ibn al-Haytham (connu en Occident sous le nom d'Alhazen, c. 965–c. 1040) explique correctement l'illusion de la Lune [16, livre VII, article 55], qui s'avère n'être qu'un effet psychologique, donc une illusion perceptive sans lien avec l'optique [14, 15] ; et il attribue fort justement à la réfraction l'aplatissement apparent du Soleil sur l'horizon, de 6' environ : un phénomène nommé « accourcissement » et pris en compte par les marins pour le calcul du point nautique, à 1' près si possible.

Des siècles plus tard, plusieurs savants européens se penchent sur cette problématique.

Les premières mesures précises tabulées remontent aux tables empiriques et posthumes de Tycho Brahe (1546–1601) [17] : il avait, dans son observatoire danois d'Uraniborg, les meilleurs instruments de mesure de positions de l'époque (précision de 1–2', améliorée pour la première fois depuis Ptolémée — d'un facteur 10), avec lesquels il assurait des observations d'une grande continuité. Il a mesuré la hauteur apparente d'étoiles circumpolaires lors des culminations

supérieure et inférieure de chacune ; alors il a constaté une incohérence de  $4'$ , concernant la latitude de son observatoire, et il l'attribue à la réfraction. Tycho est le premier à vouloir corriger de cet effet ses déterminations de positions, mais pour le Soleil et la Lune la méthode précédente ne s'applique pas. Alors, surtout au voisinage des solstices où la déclinaison solaire est stationnaire (ce qui réduit les incertitudes des calculs à partir de son éphéméride), Tycho a mesuré pour le Soleil la différence entre sa hauteur observée et celle calculée en fonction de son azimut, ce qui lui permit d'estimer la réfraction. Il trouva  $33,5'$  pour la réfraction horizontale  $\chi_{Sh}$  (i.e. la valeur de  $\chi_S$  pour  $\psi' = 0^\circ$ ) — précision remarquable ! Pensant que la réfraction dépend de la distance de la source et de son intensité, il dressa trois tables : une pour la Lune ; une pour le Soleil (avec  $4-5'$  en trop, cette erreur étant due en partie à la croyance en la fausse parallaxe solaire de  $3'$  à laquelle on adhérerait jusqu'à ce que Gian Domenico Cassini montre, en exploitant son travail de 1656 sur les observations à la grande méridienne de San Petronio de Bologne [18], qu'elle est inférieure à  $12''$ ) ; et une pour les étoiles (la plus juste) ! *L'Encyclopédie* de Diderot citera les mesures de réfraction de Tycho : il

« fait les *réfractions* [...] lunaires quelquefois plus grandes & quelquefois plus petites que celles des étoiles. Mais on n'étoit point encore au fait dans son siècle de la théorie des *réfractions*, dont nous sommes redevables à Snellius [...]. Tycho Brahé veut que les *réfractions* du soleil s'évanouissent à la hauteur de  $46^d$  [il ne leur donnait que  $5''$  à  $45^\circ$  !] ; celles de la lune à celle de  $45^d$ , & celles des étoiles fixes à  $20^d$  : mais Cassini a trouvé qu'elles s'étendent jusqu'assez près du zénith. » [19]

Les écarts oscillants dénoncés ci-dessus, concernant les différences de réfraction entre la Lune et les étoiles selon Tycho, venaient probablement de la difficulté à séparer les effets de parallaxe lunaire de ceux de réfraction, ainsi que des erreurs dans les éphémérides de l'époque. Et c'est à cause de sa forte surestimation de la parallaxe du Soleil que Tycho prétend sa réfraction nulle à  $\psi' = 46^\circ$  tout en consentant à lui donner une valeur non exactement nulle à  $45^\circ$ , mais Cassini montrera aussi dans son travail de 1656 qu'elle vaut environ  $1'$  — beaucoup plus que ce que pensait Tycho.

L'influence de l'humidité de l'air sur la réfraction intéressait déjà Tycho en 1599. Tombé en disgrâce au Danemark à cause de ses propres excès, il l'avait quitté de lui-même en 1597, emmenant avec lui ses instruments, ses livres, ses meubles et sa cour. Après plusieurs étapes, dont le château de Wandsbeck près de Hambourg, il fit son entrée à Prague en juin 1599, car il était nommé *mathematicus* impérial par Rodolphe II de Habsbourg ; il choisit d'installer un observatoire et de résider au château de Benátky nad Jizerou, petite ville arrosée par la Jizera et située à 37 km au nord-est de Prague. Cette rivière, que dominant le bourg et son château baroque, inondait souvent les vergers environnants, d'où le surnom de « Venise bohémienne » repris par Tycho lui-même dans la lettre d'invitation qu'il adressa à Kepler le 9 décembre 1599 [20] ; d'ailleurs l'appellation tchèque Benátky, dérivée du nom de Venise en slovène (Benetke), est utilisée pour désigner des lieux proches de l'eau. Tycho était alors bien placé pour écrire (au dos d'un brouillon de lettre) :

« *Potissima igitur et varior refractionum causa, est in vaporis Terrae superfici perpetuo imminentibus, qui aerem nobis proximum paululum crassiolem minusque diaphanum quam est superior emis portio, reddunt.* » [21],

i.e. « La cause la plus puissante — relativement variable — de la réfraction réside dans les vapeurs perpétuellement en suspens à la surface de la Terre, qui nous rendent l'air le plus proche un peu plus dense et moins transparent que ne l'est la portion supérieure de [emis ?] ». Cet effet était étudié aussi par Christoph Rothman (astronome du Landgrave Wilhelm IV) ; l'idée sera reprise par Pierre Perrault dans son livre paru en 1674 [22] — Pierre avait quatre frères, dont Charles

qui contribua à la fondation de l'Académie des Sciences (1666), et Claude qui fut nommé unique architecte de l'Observatoire de Paris créé en 1667 ! Mais il faudra attendre 1806 pour savoir que, contre toute attente, l'influence de la vapeur d'eau est négligeable, alors que l'opinion contraire était très prégnante (et s'avèrera tenace) : elle se trouvait déjà chez Cléomède et Ptolémée, nous la reverrons chez Huygens [23, p. 42–43], puis chez Jacques Cassini [24, 25], Newton et Flamsteed [26], Bouguer [27, 28], etc. En fait, la variation de l'hygrométrie n'est prise en compte que dans le cadre des travaux actuels d'astrométrie fine ; elle ne sera incluse dans les tables qu'à partir de 1906, avec celles de de Ball (publiées à Leipzig).

Mais l'idée d'une forte influence de l'humidité avait déjà été démentie [29] par Johannes Kepler (1571–1630) dans son premier traité d'optique *Ad Vitellionem paralipomena* [30]. Et les tables de Tycho seront insérées par Kepler dans les *Tabulae Rudolphinae* [31]. Tous deux avaient conscience de l'importance des lois de l'optique pour interpréter correctement les observations astronomiques — alors que Nicolas Copernic (1473–1543) l'ignorait. Grâce à elles, on doit à Kepler la première étude quantitative de l'accourcissement [30]. D'abord il se réfère à Vitello (c. 1230–1280) :

« Ce qui est dit dans la proposition 53 [de Vitello], à savoir que la distance entre les étoiles, ainsi que les diamètres des corps célestes, apparaissent plus grands vers le zénith, mais par contre, raccourcies quand elles sont proches de l'horizon, est correct. Non seulement c'est vrai, mais c'est aussi bien visible, et pour un astronome il est très nécessaire de le reconnaître. »

Puis il complète Vitello (comme l'indique le titre de son traité) en le critiquant pour avoir dit que les corps célestes semblent toujours ronds auprès de l'horizon : les diamètres horizontal et vertical de chacun d'eux changent différemment, d'où une ovalisation, « comme on voit une pièce de monnaie dans l'eau quand on la regarde obliquement ». Sur ce terrain, Kepler sera suivi en 1615 par Christoph Scheiner (1575–1650) [32] — qui voulait revendiquer l'antériorité ? Mais Kepler cherchait aussi à expliquer la rougeur de la Lune lors de ses éclipses ; il avait compris qu'elle est partiellement liée à la réfraction — qui est en effet un point majeur de l'étude des éclipses de Lune (voir [33] dans ce numéro spécial). Comme dans l'antiquité et comme Tycho, Kepler considérait que l'atmosphère est un « océan d'air », avec une « surface d'atmosphère », qu'il ne mettait pas (d'après le modèle de Ptolémée) à plus d'un demi-mile allemand d'altitude [29], soit environ 3,7 km — car le mile allemand correspond par définition à un angle au centre de  $1^\circ/15$  sur l'équateur terrestre, i.e. 7,421 km.

René Descartes (1596–1650), dans ses *Principes de la Philosophie* [34, article 15 et Pr III, art. 131] publiés en 1647, considère que la réfraction de la lumière à la superficie des cieux fait « que nous ne voyons quasi jamais les étoiles dans le lieu où elles sont [...] et nous pourrions aussi en voir plus qu'il n'y en a. » Une année après, le Père Minime toulousain E. Maignan consacre les pages 94–104 de sa *Perspectiva horaria* à la réfraction astronomique, surtout pour dire qu'on ne peut pas la déterminer [35, Propositio XXXX], ce qui semble être une régression ; il considère qu'elle dépend de la « surface de l'atmosphère », qui serait un dioptré air-éther.

Après ces premiers balbutiements très majoritairement empiriques, l'étude de la réfraction astronomique a pris son envol dans la seconde moitié du XVII<sup>e</sup> siècle, tant sur le plan expérimental, avec la diffusion des télescopes et des lunettes, que sur le plan théorique grâce au développement conjoint des mathématiques (avec le calcul intégral, l'utilisation des séries, etc.) et de la physique (sur les propriétés optiques et thermodynamiques des gaz, la distribution de pression dans l'atmosphère, etc.). Suivons donc maintenant l'essor de cette étude aux motivations multiples, qui débordent le cadre de l'astronomie et même celui de la science. Comme ce sujet ne constitue pas à lui seul une discipline à part entière, nous croiserons un grand nombre de scientifiques célèbres, astronomes ou non, qui ont touché à son étude et réalisé, souvent indépen-

damment les uns des autres, des avancées en ordre dispersé et décalées dans le temps, avant de retourner à d'autres recherches. Il est donc vain de vouloir suivre un ordre chronologique strict ; nous adopterons un plan plus thématique, correspondant à quatre grandes périodes : le temps des fondateurs (de la seconde moitié du xvii<sup>e</sup> siècle au début du xviii<sup>e</sup>), puis celui des géodésiens explorateurs (1<sup>e</sup> moitié du xviii<sup>e</sup>), celui des Classiques (suite du xviii<sup>e</sup>), celui des géodésiens métrologistes (début xix<sup>e</sup>), et — pour finir — celui des continuateurs et des ouvreurs (suite du xix<sup>e</sup>-début xx<sup>e</sup>). Au terme de ce parcours, nous verrons qu'il subsiste actuellement, pour étudier la réfraction astronomique, des motivations comparables à celles qui étaient liées à la quête de domination sur les mers au xviii<sup>e</sup> : « ceux qui sauront contrôler l'espace, sauront également prendre le contrôle de la surface de la Terre. . . », déclarait en guise d'avertissement un général américain (cité par Jacques Arnould [36]) un mois et demi après le succès (en 1957) du premier satellite soviétique, le célèbre Spoutnik 1 ; et si le GPS des militaires américains offre une précision sub-métrique, et pas seulement hectométrique comme celle qui était accordée aux usages civils avant la décision d'ouverture prise par le président Bill Clinton en mai 2000, c'est moyennant d'indispensables corrections, dont celles qui dépendent indirectement de la réfraction astronomique (cf. paragraphe 4) en vertu d'un théorème dû à Laplace [37, chap. 3].

## 2. Les fondateurs

### 2.1. *Gian Domenico et Jacques Cassini*

La première théorie quantitative de la réfraction remonte à la correspondance [38] de 1662 entre le marquis Cornelio Malvasia (1603–1664) et Gian Domenico Cassini (1625–1712) qui en dirigeait l'observatoire privé à Panzano (près de Bologne) depuis 1645 — avant de devenir le premier directeur de l'Observatoire de Paris, fondé en 1667. La renommée de Cassini est en partie due à ses calculs sur le Soleil et sur la réfraction (1656) ; ils lui permettent aussi de montrer, en collaboration avec Richer envoyé à Cayenne au moment de l'opposition périhélique de Mars de septembre 1672, que la parallaxe solaire est voisine de 10'' — ils la mesurent avec seulement 10 % d'erreur. Cela permit encore, au siècle suivant, la construction de nouvelles tables de la Lune [39] par Tobias Mayer (1723–1762), proposées pour la détermination de la longitude en mer. Au sujet de Gian Domenico Cassini (qui reçoit de Colbert des « Lettres de naturalité » française en avril 1673 [40, p. 69–71] et dont le prénom a dès lors été francisé), Delambre écrira en 1814 : « Dominique Cassini est le premier qui ait proposé une hypothèse propre à calculer les réfractions pour toutes les hauteurs; et la table qu'il en dressa était déjà d'une exactitude très-remarquable. » [41, p. 294] Quelle est cette hypothèse, et quel est vraiment le degré d'exactitude de ses résultats ?

Dans les années 1660 les astronomes ne pensaient pas forcément que les rayons lumineux dans l'atmosphère sont courbes ; quoi qu'il en soit, ils n'avaient pas les moyens de les mettre en équations : le calcul différentiel et intégral leur manquait. De plus, à l'instar des penseurs antiques, puis de Brahe, Kepler et Maignan, Cassini croit l'atmosphère limitée et sans vagues. Alors il utilise, comme avant lui Kepler, le modèle attribué à Ptolémée, où la masse volumique  $\mu$  de l'air est supposée uniforme — Cassini est probablement le dernier. Venant de Bologne et arrivant à Paris le 4 avril 1669 sur l'appel de Colbert pour prendre la direction de l'Observatoire et être reçu à l'Académie des sciences (avec une rémunération quintuple des gratifications ordinaires des autres académiciens), il fut présenté le 6 avril au Roi, qui « le reçut, dit Fontenelle dans son éloge funèbre, & comme un homme rare, & comme un Etranger qui quittoit sa Patrie pour lui » [40, p. 6] ; il était considéré, depuis la publication de ses *Ephemerides bononienses Mediceorum siderum* en 1668 à Bologne, comme un scientifique de « réputation de grand savoir ». Puisqu'en 1669 les murs de l'Observatoire atteignaient alors juste le premier étage, Charles



Perrault lui apprête un logement aux Galeries du Louvre, où il réside jusqu'à son installation à l'Observatoire le 14 septembre 1671 — alors que le gros œuvre ne sera terminé qu'en 1672 [42]. Il pouvait être informé facilement de la mesure précise du rayon terrestre (que nous assimilerons à la distance  $r_S$  entre  $S$  et le centre  $C$  de la Terre) : 6 371,9 km d'après la campagne géodésique d'Amiens à La Ferté-Alais effectuée entre 1669 et 1670 par l'un des trois premiers académiciens astronomes français, l'Abbé Jean Picard (1620–1682) — les deux autres étant Adrien Auzout et Jean Richer. Cassini utilisait aussi la *hauteur de l'atmosphère homogène* (ou *hauteur réduite*)  $H_1$ , i.e. celle qui donnerait (à l'équilibre et en négligeant la variation de la pesanteur  $g$  avec l'altitude) la même pression au sol que l'atmosphère réelle (voir aussi [3, sous-paragraphe 4.1] de notre exposé des « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique [...] » dans ce numéro spécial) ; muni d'une valeur précise de  $r_S$ , il pourra regarder en confiance le calcul numérique de  $H_1$ ...

Il considérait donc dès le début des années 1660 la réfraction par un dioptre sphérique à l'altitude  $H_1$  (par rapport à l'observateur) entre le vide et l'air supposé homogène (qui d'ailleurs serait instable vis-à-vis de la convection — voir le sous-paragraphe suivant). Toutes ses études sont sans algèbre, uniquement fondées sur des rapports géométriques exprimant les lois de la réfraction, connues depuis moins d'un siècle. Leur traduction en formules, pour  $S$  supposé au sol, donne [43] :

$$\chi_S = \arcsin\left(\frac{r_S}{r_S + H_1} n_S \sin Z'\right) - \arcsin\left(\frac{r_S}{r_S + H_1} \sin Z'\right). \quad (2)$$

Afin de mieux comprendre certaines propriétés importantes qui apparaîtront aux paragraphes 3 et 4, il est intéressant de considérer ici  $\chi_S$  comme une fonction des deux paramètres petits fondamentaux (à savoir la réfractivité  $\eta_S := n_S - 1$  de l'air en  $S$  — le symbole  $:=$  indiquant une définition ou une notation — et la hauteur réduite relative  $h_1 := H_1 / r_S$  de l'atmosphère) donnant

$$\chi_S(\eta_S, h_1) = \arcsin\left(\frac{1 + \eta_S}{1 + h_1} \sin Z'\right) - \arcsin\left(\frac{1}{1 + h_1} \sin Z'\right), \quad (3)$$

et de calculer — selon une idée due à James Ivory (1765–1842) en 1821 — son développement limité à l'ordre total 2 au voisinage de  $(0, 0)$  : on trouve

$$\chi_S(\eta_S, h_1) = \eta_S (\tan Z') \left[ (1 - h_1) - \left( h_1 - \frac{\eta_S}{2} \right) \tan^2 Z' \right] + o(\eta_S^2 + h_1^2). \quad (4)$$

Comme cette expression n'est pas définie en  $Z' = 90^\circ$ , on préfère une autre approximation, même si elle est obtenue de manière moins systématique que la précédente. Pour cela on part de l'expression (3), mise sous une forme symétrisée par rapport à l'argument  $\frac{\sin Z'}{1 + h_1} \left(1 + \frac{\eta_S}{2}\right)$  :

$$\chi_S = \arcsin\left[\frac{\sin Z'}{1 + h_1} \left(1 + \frac{\eta_S}{2}\right) + \frac{\eta_S}{2} \frac{\sin Z'}{1 + h_1}\right] - \arcsin\left[\frac{\sin Z'}{1 + h_1} \left(1 + \frac{\eta_S}{2}\right) - \frac{\eta_S}{2} \frac{\sin Z'}{1 + h_1}\right]; \quad (5)$$

on en déduit une approximation ayant seulement une erreur d'ordre 3 en  $\eta_S$ , au lieu d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \chi_S &\cong 2 \frac{\eta_S}{2} \frac{\sin Z'}{1 + h_1} / \sqrt{1 - \left[\frac{\sin Z'}{1 + h_1} \left(1 + \frac{\eta_S}{2}\right)\right]^2} \\ &\cong \eta_S \left(1 - \frac{\eta_S}{2}\right) \sin Z' / \sqrt{2 \left(h_1 - \frac{\eta_S}{2}\right) + \cos^2 Z'}. \end{aligned} \quad (6)$$

Cette expression est en accord avec celle donnée par Radau [44, p. B.7].

Quelle que soit l'expression considérée, la fonction  $Z' \mapsto \chi_S$  est complètement déterminée par deux paramètres (par exemple  $\eta_S$  et  $h_1$ ), que Cassini ajuste de façon à retrouver ses valeurs de référence :  $\chi_S \cong 5' 28'' \cong 1,59 \times 10^{-3}$  rad pour  $\psi' = 10^\circ$ , et  $\chi_{S_h} \cong 32' 20'' \cong 9,405 \times 10^{-3}$  rad. La seconde valeur, en particulier, est intrigante car relativement irréaliste ; en 1821 Delambre disait encore : « nous n'avons pu deviner comment il a trouvé [ses] deux réfractions fondamentales » [45, p. 725] — et il confirme sa perplexité quelques années plus tard [46, p. 260].

Grâce à son étude quantitative, Jean-Dominique Cassini démontra, aux dires mêmes de son fils Jacques (1677–1756), un résultat que Flamsteed lui-même aura du mal à croire : les « refractions [...] diminuent à mesure que les Astres s’elevent, & ne cessent entierement qu’au Zenith, comme mon Pere l’a démontré, quoique tous les Astronomes avant lui ayent été persuadés qu’elles étoient insensibles à la hauteur de 45 degrés » [25, p. 43] et même nulles suffisamment au-dessus selon Tycho. Jean-Dominique a déjà conscience, ainsi que Tycho et Picard, de leurs variations saisonnières (niées par La Hire), et il devine qu’elles sont dues à la variation de température moyenne, mais il oublie l’influence de la pression — contrairement à son collègue Edmond Halley (1656–1742), deuxième *Astronomer Royal*, qui la signale en 1720 [47] ; et plus tard, on mettra bien en évidence des variations saisonnières de pression atmosphérique, mais moins importantes (en valeur relative) que celles de température absolue.

Sauf près de l’horizon, le modèle de Ptolémée, joint au schéma calculatoire de J.-D. Cassini, était (en vertu de la loi de Simpson — voir le paragraphe 4) encore utilisé, avec des valeurs contemporaines de  $\eta_S$  et  $H_1$ , par le Bureau des longitudes au XIX<sup>e</sup> siècle ; en 1821, Ivory disait :

« The simple hypothesis of Cassini seems hardly to have met from astronomers with the attention it deserves; for, if we use accurate elementary quantities in the computation, it will determine the refractions to the extent of 74° from the zenith with the same degree of exactness as any of the other methods, without even excepting the formula of Laplace. » [48, p. 322]

En effet, à 74° de distance zénithale (où  $\chi_S \cong 3'20''$ ) la formule (2) n’a que 0,051'' d’erreur, donc elle y satisfait largement l’exigence de précision actuelle de 0,04 % [49] ; mais son erreur devient 1'' à 81°, 4'' à 84°, croît très vite au-delà et atteint 13' à l’horizon. Confiant envers les mesures de réfraction réalisées par Tycho, Kepler avait déjà prévu dans son livre de 1604 [30] que le modèle de Ptolémée ne donnerait pas une loi de réfraction (en fonction de la distance zénithale) expliquant l’aplatissement apparent du Soleil au voisinage de l’horizon. Mais au lieu de remettre en cause le modèle d’atmosphère, Kepler mettait en doute la loi de la réfraction, et trouvait même qu’aucune loi basée sur la trigonométrie ne pourrait arranger ce problème ! En 1665 Giovanni Battista Riccioli (1598–1671, jésuite, astronome en chef de l’Église), croyait encore (à l’instar de Tycho) les réfractions nulles à partir d’une certaine hauteur, qu’il estime à 26° [46, p. 775] ; mais il signale [50], comme étant une coquille possible, le même problème que celui déjà prévu par Kepler [30] : notamment, si l’on exprime  $\chi_S$  en fonction de la hauteur apparente  $\psi'$ , on constate que dans la table calculée par Jean-Dominique Cassini  $\chi_S(1^\circ) - \chi_S(2^\circ) > \chi_S(0^\circ) - \chi_S(1^\circ)$ , ce qui n’est pas conforme aux observations (la valeur de  $\chi_S(0^\circ)$  donnée par Cassini est 3' trop petite, et  $\chi_S(1^\circ)$  environ 3' trop grande) ; Cassini répond par lettre, publiée deux fois ([51], [52, p. 306 ss]) qu’il n’y a pas de coquille et, en somme, que *ses calculs* sont justes (voir [53, sous-paragraphe 2.2] dans ce numéro spécial)... Magnifique exemple de déni ! Mais ce défaut, encore pointé par Philippe de la Hire (1640–1718), sera reconnu par Jacques Cassini.

Au bout de tâtonnements numériques qu’il trouve laborieux (voir aussi une présentation moderne par Bruhns [54, p. 34–35]), Jean-Dominique lui-même, toujours en se servant de ses deux valeurs de  $\chi_S$  de référence, trouve  $h_1 \cong 6,115 \times 10^{-4}$  (sans s’intéresser à la réfractivité  $\eta$  de l’air ni à son indice de réfraction, ces notions n’étant pas définies à son époque) ; et il prend  $r_S \cong 3\,271\,600$  toises  $\cong 6\,376$  km, d’où  $H_1 \cong 2\,000,6$  toises  $\cong 3,899$  km (un peu plus que ce que pensait Kepler [30] en 1604). La reprise de cet ajustement à partir des formules rigoureuses (2)–(3) donne  $h_1 \cong 6,116 \times 10^{-4}$ , et  $\eta_S \cong 2,848 \times 10^{-4}$  ; à 10 °C et 752 torr (conditions standard adoptées par Bradley — cf. le paragraphe 4) cette valeur de  $\eta_S$  est la réfractivité de l’air sec à 394 nm de longueur d’onde. Si on change la première valeur de référence en une autre tirée de la même table (en particulier,  $\chi_S \cong 59'' \cong 2,860 \times 10^{-4}$  rad pour  $\psi' = 45^\circ$  dans l’espoir, si comme Cassini on procède « à la main », d’arriver plus vite à une bonne approximation de  $\eta_S$ ), on trouve des

résultats augmentés d'un peu moins de 1 % :  $H_1 \cong 3,937$  km et  $\eta_S \cong 2,863 \times 10^{-4}$  ; la différence avec les résultats précédents, ainsi que la couleur violette associée aux 394 nm, si elles ne sont pas dues à des données erronées, pourraient montrer de manière interne le caractère irréaliste du modèle de Cassini. Mais cet irréalisme se manifeste surtout de manière externe, quand on sait que la valeur actuellement admise pour  $H_1$  est 7,990 km dans les conditions normales (0 °C, 760 torr = 1 atm) sous nos latitudes ! Pire : si on voulait obtenir encore  $\chi_S \cong 5'28''$  pour  $\psi' = 10^\circ$ , mais aussi la valeur correspondante réaliste de 35' pour  $\chi_{Sh}$ , il faudrait prendre  $H_1 \cong 3,4$  km ! L'origine de cette double surprise — le fait qu'un modèle très simple donne une valeur aussi bonne pour  $\eta_S$ , contrastant avec son résultat deux fois trop petit pour  $H_1$  — s'éclairera au fur et à mesure de la marche du temps. En ce tout début d'étude, contentons-nous de souligner le fait que la très mauvaise estimation de  $H_1$  ne vient pas d'un problème numérique ni de données fortement erronées : elle vient des défauts du modèle irréaliste utilisé, trompeur car ils ont des effets insensibles sur les valeurs de la réfraction  $\chi_S$  assez loin de l'horizon, mais ils produisent en revanche des erreurs importantes concernant la réfraction horizontale  $\chi_{Sh}$  ; pour s'en convaincre, il suffit de comparer ce que donne la formule (6) pour  $Z' = 90^\circ$ , avec la formule (16) liée à un modèle moins grossier. Avec des valeurs correctes de  $\eta_S$  et  $h_1$ , le modèle de Ptolémée-Cassini surestime  $\chi_S$  très légèrement (de moins de 0,1'') pour  $Z' < 78^\circ$ , mais le sous-estime pour  $Z' > 78^\circ$  et de plus en plus gravement (de 13' à l'horizon — cf. supra). Malheureusement, la duperie provoquée par ce modèle induira une idée fautive qui entravera la réflexion de Bouguer (voir le paragraphe 3).

Jean-Dominique publie en 1684 une nouvelle table de réfraction, plus précise. *La Connoissance des Temps*, recueil annuel d'éphémérides dont le premier est édité pour l'an 1679, publie une première table des réfractions dans l'édition suivante (la table de Tycho, pour le Soleil...), puis utilisera en partie la nouvelle table de Cassini pour 1685–1688, et la publiera intégralement pour 1689–1765 (avec une précision de 1'' pour tous les degrés de hauteur à partir de 1702 seulement).

Jacques Cassini poursuit avec son père la mesure de la méridienne de France prévue par Picard. Une nouvelle campagne géodésique, en 1700–1701, les mène dans les Pyrénées. Entre autres, ils visent l'horizon marin depuis divers points élevés dont ils venaient de déterminer l'altitude, comme la Tour de la Massane dans le Roussillon [55, p. 139–141]. Reprise par Bouguer, cette mesure connaîtra d'intéressants rebondissements, concernant la navigation astronomique d'une part (voir [56, sous-paragraphe 3.7], et [8, sous-paragraphe 4.2 et 4.3], dans ce numéro spécial), mais aussi la théorie de la géodésie elle-même d'autre part : une cinquantaine d'années plus tard, Lambert (voir [57, p. 82] présenté par l'article [58] dans ce numéro spécial) utilise les mesures d'altitudes faites par les Cassini, non sans préciser « que la plupart de ces hauteurs souffrent une correction considérable parce qu'elles sont calculées sans la réfraction. Voici donc les hauteurs corrigées [...] » [58, paragraphe 2].

Au décès de son père en 1712, Jacques Cassini lui succède à la tête de l'Observatoire. Il reviendra sur l'estimation de  $H_1$  par Jean-Dominique. Dans une présentation de leur travail en 1714 à l'Académie des sciences par son Secrétaire perpétuel — de 1699 à 1740, Bernard le Bouyer de Fontenelle (1657–1757) — on lit [24, p. 65] : « Cette hauteur de 2 000 Toises, qui n'est pas d'une Lieuë, est beaucoup plus petite que celle de 6 lieuës 1/2 que donnent à l'Atmosphère ceux qui lui donnent le moins, comme Messieurs Cassini & Maraldi, car il y en a d'autres qui vont jusqu'à 18 ou 20 » (notons qu'aux Indes, un demi-siècle plus tard, Le Gentil trouvait 1 750 toises [59, p. 426–447]).

Au moins depuis le x<sup>e</sup> siècle, on avait l'idée d'utiliser l'observation de l'arche crépusculaire et de sa durée pour estimer la hauteur totale de l'atmosphère : lors de la transition entre les crépuscules nautique et astronomique, i.e. quand le Soleil est à 12° sous l'horizon, un observateur au niveau de la mer ne peut voir éclairées par les rayons solaires que les portions de l'atmosphère

situées à plus de 30 km d'altitude environ — et 70 km environ à la fin du crépuscule astronomique (Soleil à 18° sous l'horizon). Alors la petitesse de cette valeur de 2 000 toises intriguait les Cassini à juste titre, même si on peut dire que la hauteur réduite  $H_1$  est inférieure à la hauteur « totale » de l'atmosphère (qu'ils croyaient finie).

En effet, au début du XVIII<sup>e</sup> siècle, ces chercheurs se débattaient avec des données troublantes. Il y avait d'une part celles de Jean-Dominique Cassini : il mène des recherches sur la base des observations, par Spole et Bilberg en 1695 en Botnie, de la valeur élevée (58' et plus selon La Hire [60]) de la réfraction horizontale (impressionnante avant le début du XX<sup>e</sup> siècle, tant qu'on n'avait pas compris qu'elle est majoritairement due à la présence, dès le niveau du sol, de la forte inversion de température nocturne très courante dans les contrées nordiques — voir le paragraphe 3) ; supposant toujours l'air homogène, Jean-Dominique avait lu un mémoire à la séance de l'Académie des sciences le 17 février 1700 [61], où il arrivait à la conclusion que la réfraction horizontale en Botnie devait être presque double de celle de Paris, et par rapport à celle-ci moindre d'environ un tiers dans les régions équatoriales — or « Entre les Tropiques, le Barometre en général s'éleve moins que dans les païs Septentrionaux, ce qui marque sûrement que l'air de la Zone Torride est plus leger, & ce plus de legereté s'accorde bien avec de moindres refractions. » [62] D'autre part, il y avait les constatations de La Hire qui, à la séance précédente du 13 février 1700, avait lu un mémoire dans lequel il notait que le baromètre donnait les mêmes indications en Suède et à Paris — et nous ajoutons que la température *absolue*  $T$  n'est pas deux fois plus petite en Botnie qu'à Paris. Sous l'autorité du Secrétaire perpétuel, vient la conclusion du moment :

« Il y a une remarque à faire, laquelle est fort considérable, que la partie de l'air qui cause les Refractions, n'a point de rapport avec celle qui fait la pesanteur, puisqu'il arrive à Stockholm et à Paris les mêmes changements de mercure dans le tuyau du baromètre, & qu'on y a aussi observé les mêmes hauteurs à très-peu-près. » [63] « Voilà bien des contrariétés apparentes, qui éloignent beaucoup l'établissement d'un système ; il suffit maintenant de ramasser tous les sujets d'incertitude, & peut-être quand ils seront en assés grand nombre, produiront-ils quelque certitude, ou quelque vrai-semblance. » [62]

L'exposé du travail de Jacques Cassini continue ainsi [24, p. 65] : « L'Atmosphere ne seroit donc réfractive que dans une petite partie de son étenduë, & dans ses couches les plus basses, ou, si l'on veut, la matiere réfractive seroit différente de l'Atmosphère. [...] » De cette conception erronée, la seconde partie au moins vient de J.-P. Maraldi, qui l'introduisit en 1703 : en extrapolant la baisse de pression qu'il mesure entre divers sommets de cotes croissantes connues, il conclut qu'elle doit s'annuler à 12 796 toises d'altitude (soit les « 6 lieuës 1/2 » mentionnées plus haut), et cet important désaccord avec les 2 000 toises de hauteur réduite d'atmosphère trouvée par Jean-Dominique Cassini poussa Maraldi à « conjecturer qu'il pourroit y avoir quelque matiere fluide répandue dans la partie inférieure de l'air, & peu élevée sur les plus hautes montagnes de la terre, qui fut la cause principale des réfractions des Astres » [64]. À sa suite, Jean-Dominique Cassini, écrivait en 1707 : « [...] la partie de l'air qui cause la refraction est d'une nature differente de la partie à laquelle on attribué la pesanteur qui équilibre la hauteur des liqueurs dans le vuide » [65, p. 197] ; et un argument avancé l'année précédente (mais dont on sait maintenant qu'il est mal fondé car il repose sur l'idée fausse selon laquelle la vapeur d'eau augmenterait la réfraction) allait dans le même sens :

« Il sembleroit de même que la refraction d'un Astre vû au travers d'un nuage devoit être plus grande. Elle ne l'est pourtant pas, & c'est ce que M. Cassini & le P. Laval ont observé plusieurs fois. Delà M. Cassini conjecture qu'il pourroit y avoir dans l'air une *matiere refractive* differente de l'air. » [62, p. 103]

On verra (au paragraphe 3) que Bouguer reprendra à son compte l'intégralité de cette conception erronée, mais sans y tenir vraiment, puis il s'en écartera progressivement !

Cependant, le Secrétaire expose une autre idée [24, p. 65–66] :

« Mais l'hypothèse d'où l'on tire cette hauteur de 2 000 Toises est que le rayon rompu vienne à l'œil en ligne droite, & l'hypothèse peut fort bien n'être pas vraie. [On fait alors] l'hypothèse la plus simple qu'il soit possible, c'est que la densité croisse toujours également à chaque couche infiniment peu épaisse de la matière, c'est-à-dire, comme les nombres naturels 1, 2, 3, & c. De-là il suit que le rayon rompu [...] est le côté de la Courbe qui se décrit [...] »

Jacques Cassini devait bien avoir, dès les années 1690 au moins, l'idée que les rayons lumineux étaient en fait courbes, et Jean-Dominique s'est finalement penché sur cette idée ; car celui-ci, au sujet de son unique retour temporaire en Italie pour des travaux astronomiques mais aussi et surtout techniques (« rétablir la méridienne de l'église Saint-Pétrone à Bologne, [...] et] discuter directement avec le pape à propos des travaux d'assainissement des terres de l'état pontifical près de Bologne et Ferrare, périodiquement inondées » [66]), décrit les difficultés de mesures de triangulation faites sur des points proches de son village natal (Perinaldo) du 7 au 9 novembre 1694 :

« une seule station suffiroit si les rayons visuels des objets éloignés s'etendoient en ligne droite comme l'on supposoit autrefois, mais cela n'arrive pas toujours a cause de la refraction qu'ils souffrent dans l'air qui les fait plier vers la Terre, et transformer en des lignes courbes [...] Il faudroit pouvoir connoitre la nature de ces courbes [...] » [67, 68].

Tel est bien le nœud du problème, mais celui-ci était inabordable dans toute sa rigueur à l'époque, faute de disposer des outils mathématiques appropriés. De plus, notons que ci-dessus Cassini a écrit « pas toujours », comme si, l'idée de courbure des rayons étant trop nouvelle, il n'était pas encore vraiment convaincu que c'est la règle générale dans l'atmosphère — dans [3, sous-paragraphe 7.1.4], on voit qu'ils n'y sont rectilignes que si le gradient thermique  $dT/dr$  vers le haut vaut  $-34 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ . Il faudra attendre 1715, avec la parution du livre de Taylor en Angleterre (voir le sous-paragraphe 2.3), et juin 1716 en France, avec la lecture à l'Académie, par le père jésuite Pierre Varignon (1654–1722), d'un mémoire sur les différentes densités de l'air où il cite Taylor et utilise le calcul différentiel et intégral, pour que l'usage du calcul infinitésimal commence à se répandre. Bouguer profitera de cet intérêt nouveau, qui relativise l'importance du débat sur la « matière réfractive ». Par la suite, P.-L. Moreau de Maupertuis (1698–1759) commencera, après son élection à la *Royal Society* en 1728, puis sa rencontre à Bâle en 1729 avec Jean Bernoulli (1657–1748), à jouer un rôle dans la diffusion du calcul infinitésimal en France [63]. En attendant, Jacques Cassini croit avoir prouvé que dans son modèle d'atmosphère à profil de densité affine, les rayons lumineux sont rigoureusement des arcs de cercle, ce qui est faux ; mais en se servant de cela, il calcule (voir à ce propos les relations (5) et (7) de [69] dans ce numéro spécial) une nouvelle table de réfractions, qui s'accorde bien mieux aux observations proches de l'horizon que celle de son père, et il en déduit une hauteur totale d'atmosphère de 3,4 lieues — un résultat acceptable en terme de hauteur réduite (8 km environ, soit 2 lieues), qui pour le modèle à profil affine est la moitié de la hauteur totale — cependant cela le gêne encore car les autres estimations de son époque vont de 6,5 à 20 lieues [24, p. 65]. Il ne pouvait pas savoir que Newton avait calculé  $\chi_S$  avec ce même modèle (à profil affine) vingt ans auparavant, puis l'avait rejeté car il le trouvait mauvais lui aussi...

## 2.2. Isaac Newton (1642–1727)

John Flamsteed (1646–1719), premier *Astronomer Royal* de l'histoire anglaise, avait réalisé, 6 ans après sa nomination à ce poste créé en 1675 [70], une campagne de mesure exhaustive de la réfraction, en atteignant la précision inédite de 1'' ; il disposait donc de bonnes tables observationnelles de  $\chi_S$ . Il appelait de ses vœux une bonne théorie pour l'expliquer, sans pouvoir la formuler lui-même car il était expérimentateur ; en 1694, il écrivit à Newton pour le solliciter à cette fin.

Pour simplifier la présentation du travail de Newton, nous commettons l'anachronisme d'utiliser l'indice de réfraction  $n$  — car à l'époque on parlait plutôt du « rapport des sinus », et en 1772 Lagrange l'appelait « raison de réfraction » [71]. Newton sera le premier à traiter analytiquement le cas d'une atmosphère continue, avec une masse volumique  $\mu$  proportionnelle à son « pouvoir réfringent »  $n^2 - 1$  [72] (ou sa « puissance réfractive » [73–75]), et une constante de proportionnalité uniforme car il suppose la composition de l'air uniforme (cas de l'atmosphère ou de l'air dit « bien mélangé »). Il n'a pas publié son étude théorique de la réfraction astronomique, réalisée de novembre 1694 à mars 1695, mais on peut s'en faire une idée d'après ses lettres [76] (voir notamment la Lettre 474, du 11 octobre 1694) à Flamsteed — sa correspondance avec Newton ayant été publiée intégralement (contre l'avis des disciples du Maître !) en 1835 par Francis Baily, président de la *Royal Astronomical Society* [26].

La proportionnalité entre  $n^2 - 1$  et  $\mu$  était conjecturée empiriquement par Newton dès 1694, mais il ne la publia qu'en 1704 dans son *Opticks* ; nous verrons qu'elle n'a été remise en cause qu'à partir du milieu du XIX<sup>e</sup> siècle. Entretemps, cette conjecture a été publiée par le Révérend John Lowthorp (qui écrivait, dès 1699 : « it would be more than probable that the Refractive Powers of the Atmosphere are every where, at all heights above the Earth, proportional to it's Densities and Expansions. And here it would be no difficult matter to trace the Light through it » [77] — noter le caractère téméraire de la dernière phrase !

Newton cherche donc à traiter la réfraction par un modèle plus fin que celui de Ptolémée–Kepler–Cassini, en considérant des rayons courbes, mais toujours dans un milieu à symétrie sphérique de centre  $C$  : pour une longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  fixée, l'indice de réfraction  $n(r)$  de l'air en un point  $M$  ne varie qu'avec la distance  $r := CM$ . Son travail a été reconstitué par Christian Kramp [78], puis Jean-Baptiste Biot [72, 79], et plus récemment par Derek Whiteside [80] et par Waldemar Lehn [81]. Dans le cadre de sa théorie corpusculaire (appelée autrefois « système de l'émission »), où la vitesse des « molécules de lumière » est proportionnelle à  $n$ , Newton étudie le mouvement à force centrale de ces molécules. En lui appliquant la loi des aires il trouve l'invariant dit de Bouguer

$$I_B := nr \sin \alpha = n_S r_S \sin Z', \quad (7)$$

et en déduit approximativement la réfraction  $\chi_S$ , sous forme de l'intégrale [81]

$$\chi_S \cong \int_1^{n_S} dn / \sqrt{\left(\frac{nr}{n_S r_S \sin Z'}\right)^2 - 1}. \quad (8)$$

Newton considère d'abord un modèle d'atmosphère de composition uniforme et de hauteur totale  $H_A$ , où la masse volumique  $\mu$  de l'air varie avec l'altitude  $z := r - r_S$  (d'origine en  $S$ ) de façon affine, i.e. où

$$\mu(z) = \left(1 - \frac{z}{H_A}\right) \mu_S \quad (9)$$

(on met systématiquement l'indice  $S$  pour désigner la valeur prise par une grandeur en  $S$ ). On sait *a posteriori* qu'il s'agit, dans l'approximation où  $g$  est uniforme, d'un modèle polytropique d'indice  $j = 1$ , i.e. où la pression  $P$  varie avec  $z$  proportionnellement à  $\mu^{1+(1/j)}$ . D'autres modèles polytropiques seront très étudiés au XIX<sup>e</sup> siècle, mais avec  $j > 1/(\gamma - 1) \cong 5/2$  (où  $\gamma \cong 7/5$  est le coefficient adiabatique de l'air), car on sait que l'atmosphère est instable (vis-à-vis de la

convection) sinon ; et on voit que l'atmosphère homogène du modèle de Cassini serait instable aussi (comme la première atmosphère de Newton ci-dessus), puisqu'à la limite c'est un modèle polytropique d'indice 0 — à l'opposé de l'atmosphère isotherme, qui est à la limite un modèle polytropique d'indice infini. En fait, dans la troposphère standard  $j \cong 4,26$ . On peut penser [81] que Newton n'a vraisemblablement pas calculé numériquement l'intégrale (8), mais qu'il a utilisé une expression littérale approchée, obtenue en commençant par développer  $nr$  à l'ordre 1 en  $(z/r_S, \eta, \eta_S)$ , ce qui donne

$$\chi_S \cong \int_0^{\eta_S} d\eta / \sqrt{\left(\frac{1+Y}{\sin Z'}\right)^2 - 1} \quad \text{où } Y := \frac{z}{r_S} + \eta - \eta_S ; \quad (10)$$

puis en appliquant cela avec le profil affine de  $\mu$ , et donc aussi de  $\eta$  car  $n^2 - 1$  se confond avec  $2\eta$  à l'ordre 1 en  $\eta$ , il vient

$$\begin{aligned} \chi_S &= -\frac{\eta_S}{H_A} \int_{H_A}^0 dz / \sqrt{\left\{ \frac{1}{\sin Z'} \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_S} - \frac{\eta_S}{H_A} \right) z \right] \right\}^2 - 1} \\ &= \frac{\eta_S}{H_A} (\sin Z') \left( \frac{1}{r_S} - \frac{\eta_S}{H_A} \right)^{-1} \left[ \operatorname{argch} \left\{ \frac{1}{\sin Z'} \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_S} - \frac{\eta_S}{H_A} \right) z \right] \right\} \right]_0^{H_A} \end{aligned} \quad (11)$$

— où nous avons mis = au lieu de  $\cong$  car nous n'avons pas introduit de nouvelle approximation depuis l'expression (10). Mais si, compte tenu de la petitesse de  $Y$ , on approxime  $(1+Y)^2$  par  $1+2Y$  (ainsi que Newton l'a très probablement fait [81]), l'intégration est encore plus simple :

$$\begin{aligned} \chi_S &\cong -\frac{\eta_S}{H_A} (\sin Z') \int_{H_A}^0 dz / \sqrt{\left[ 1 + 2 \left( \frac{1}{r_S} - \frac{\eta_S}{H_A} \right) z \right] - \sin^2 Z'} \\ &= \eta_S \frac{\sin(2Z')}{2} \left( \frac{H_A}{r_S} - \eta_S \right)^{-1} \left[ \sqrt{1 + \frac{2}{\cos^2 Z'} \left( \frac{H_A}{r_S} - \eta_S \right) z} - 1 \right] \\ &= \eta_S (\sin Z') \left( \frac{H_A}{r_S} - \eta_S \right)^{-1} \left[ \sqrt{\cos^2 Z' + 2 \left( \frac{H_A}{r_S} - \eta_S \right) z} - \cos Z' \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Les expressions finales de (11) et (12) ne divergent pas en  $Z' = 90^\circ$ , contrairement à l'approximation qu'on en verra au paragraphe 4. La valeur de  $r_S$  étant connue précisément depuis 1670, il restait à déterminer les valeurs des deux paramètres  $\eta_S$  et  $H_A$  du modèle affine. Newton se sert alors de deux valeurs mesurées de la réfraction ; pour obtenir sa table printemps-automne, il a l'intention d'utiliser des données observationnelles de Flamsteed qu'il modifie un peu [81] :  $\chi_S \cong 33'20''$  (au lieu de  $33'30''$ ) pour  $Z' = 90^\circ$ , et  $\chi_S \cong 13'40''$  (au lieu de  $14'00''$ ) pour  $Z' = 87^\circ$  — et finalement il en a visiblement pris d'autres qui nous sont inconnues, mais il a dû trouver  $\eta_S$  entre  $2,51 \times 10^{-4}$  et  $2,57 \times 10^{-4}$ ,  $H_A$  entre 10,1 km et 11,6 km [81]. Pour des distances zénithales supérieures à  $60^\circ$ , Newton donne aussi une table pour l'été et une pour l'hiver, déduites de sa table printemps-automne par multiplication par 16/17 et 18/17 respectivement [81] ; un siècle plus tard, on savait théoriquement [82–84], et expérimentalement grâce aux mesures de James Bradley (1693–1762, *Astronomer Royal* de 1742 à 1762) vers 1750 reprises par Nevil Maskelyne [85] (1732–1811, *Astronomer Royal* de 1765 à 1811), et Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) [86], puis Friedrich Wilhelm Argelander (1799–1875) en 1820–1821 [87] et le Révérend Robert Main (1808–1878) vers 1850 [88], que ce n'est pas du tout correct théoriquement, surtout pour les astres en-dessous de  $2\text{--}3^\circ$  de hauteur, même si les profils de réfractivité pour les différentes saisons étaient proportionnels entre eux [3, paragraphes 8 et 9.2]. Il envoie le tout à Flamsteed le 17/11/1694, avec qui il commençait une querelle qui durera jusqu'au décès de ce dernier [89, p. 57–60] ; mais il ne veut pas publier, car il trouve ses propres tables imprécises (lettre du 4/12/1694) et son modèle irréaliste (lettre du 15/01/1695) [26] ; en plus, il a donné  $\chi_S \cong 33'20''$  pour  $Z' = 90^\circ$ , mais

nous avons déjà dit qu'il a probablement utilisé une valeur de référence différente pour faire ses calculs, qui ne devaient pas redonner  $\chi_S \cong 33'20''$  pour  $Z' = 90^\circ$  [81].

Alors il reprend ces calculs pour un profil de  $\mu$  allusivement indiqué (et déjà donné dans ses *Principia* [90, Prop. 22]) qu'il justifie en s'appuyant sur la proportionnalité de  $\mu$  à  $P$  dans le cas isotherme — loi de Boyle (1662) et Mariotte (1676). Robert Hooke (1635–1703) avait trouvé le même profil de façon plus simple [91, p. 227], mais jamais Newton n'utilise ni ne cite sa démonstration : c'est habituel avec Newton, qui « ne fait d'ailleurs jamais aucune référence à aucun autre que lui, sauf si c'est absolument inévitable » [89, p. 50] ; en plus, Newton s'était aussi querellé avec Hooke de 1671 à la mort de celui-ci, et juste avant la parution de ses *Principia* il en avait effacé toute mention dans son manuscrit, car l'idée d'une force gravitationnelle en  $1/r^2$  lui venait de Hooke [89, p. 48–52]. Le modèle isotherme était privilégié à cette époque, où la loi de Charles concernant la dilatation des gaz (donc la variation de  $\mu$  avec  $T$  à  $P$  constant) n'était pas connue, ni la valeur du gradient thermique atmosphérique vertical (il faudra attendre l'ascension de Joseph Louis Gay-Lussac en ballon, le 16 septembre 1804, jusqu'à 7 016 m d'altitude, pour savoir qu'il est proche de  $-6^\circ\text{C} / \text{km}$ ). En 1695, Newton déduit de son nouveau profil de  $\mu$  une nouvelle table qu'il donne à Flamsteed. Cependant, Newton n'est toujours pas vraiment satisfait par sa nouvelle table, car il n'arrive pas à retrouver simultanément deux valeurs de référence tirées des observations de Flamsteed [53, sous-paragraphe 5.1] ; de plus, il sait que le profil thermique de l'atmosphère a son importance, mais il ne pouvait pas le mettre en équations et personne n'en avait la moindre idée à son époque. C'est vraisemblablement pour ces raisons que Newton ne consacre que très peu de pages à la réfraction astronomique dans son *Opticks* (1704), où il traite seulement le modèle de la Terre plate avec une atmosphère stratifiée :

« The Refraction [ $n_S = 3201/3200$ ] of the Air [...] is determin'd by that of the Atmosphere observed by Astronomers. For, if Light pass through many refracting Substances or Mediums gradually denser and denser, and terminated with parallel Surfaces, the Sum of all the Refractions will be equal to the single Refraction which it would have suffer'd in passing immediately out of the first Medium into the last. And this holds true, though the Number of the refracting Substances be increased to Infinity [...] » [92, Prop. X de la part. III du second livre].

C'est le dévoué Halley, que Flamsteed exérait, qui s'empresse de publier en 1721, dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society* [93], cette fameuse table que Newton lui a communiquée sur le tard.

Comme Newton a gardé secrètes les valeurs numériques des paramètres du profil de réfractivité qu'il utilise pour bâtir sa nouvelle table, Kramp a cherché à le reconstituer [78], et Biot a fait de même à son tour — d'ailleurs à cette occasion il a republié cette table pour la rendre plus accessible [72]. Ils ont trouvé qu'apparemment Newton a assez vite négligé la variation de la norme  $g$  du champ de pesanteur (qu'il mettait initialement en  $1/r^2$ ), et a utilisé l'expression classique

$$\eta(z) = \eta_S \exp(-z/H_1) \quad (13)$$

dont ils ont déterminé les paramètres :  $\eta_S$ , et  $H_1$  qui se confond avec la hauteur réduite au sens de Cassini (devenu classique). Reprenant ce travail avec le logiciel MATLAB, en 2008 Lehn a proposé [81] un meilleur ajustement des valeurs de la nouvelle table de Newton, obtenu en jouant sur plus de degrés de liberté. Leurs résultats sont regroupés dans la Table 1.

La loi de Charles n'ayant été découverte qu'en 1787, Newton ne pouvait pas relier quantitativement  $H_1$  à la température absolue  $T_S$  en  $S$ , contrairement à Kramp qui trouve que la valeur numérique de  $H_1$  qu'il a reconstituée correspond à une température de  $18$  et  $2/3$  degrés Réaumur ( $23,3^\circ\text{C}$ ), ce qui est bien trop élevé pour une température moyenne en Angleterre et lui pose question : « il faudra se demander d'abord, pourquoi *Newton* a-t-il supposé dans le calcul de sa table,



**TABLE 1.** Paramètres du profil exponentiel de réfractivité utilisé par Newton pour sa nouvelle table

	Ajustement selon Kramp [78]	Ajustement selon Biot [79]	Ajustement selon Lehn [81]
$\eta_S$	$2,618 \times 10^{-4}$	$2,625\ 068 \times 10^{-4}$	$2,677 \times 10^{-4}$
$H_1$	4 377 toises $\cong$ 8,531 km	8,597 78 km	8,725 km

la température de 18 degrés, préférablement à toute autre ? » [78, p. 20] En fait, notre connaissance actuelle des constantes physiques nous fait dire que les valeurs de  $H_1$  reconstituées par Kramp et Lehn correspondent à 18 °C et 25 °C respectivement : le problème soulevé par Kramp persiste, malgré l'écart avec la température déduite par Kramp (désaccord largement imputable à l'état des connaissances sur les constantes physiques à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, en particulier celle du zéro absolu des températures — comme en témoignent les 9 valeurs du coefficient de dilatation de l'air citées par Kramp, qui vont de 1/266 °R à 1/165 °R).

Quant à  $\eta_S = n_S - 1$ , il est apparu clairement que Newton n'a pas utilisé la valeur  $n_S = 3201/3200 = 1 + 3,125 \times 10^{-4}$  qu'il a publiée ultérieurement dans son *Opticks*, mais une valeur sous-estimée pour s'ajuster aux deux mesures de  $\chi_S$  pour des hauteurs angulaires apparentes  $\psi'$  proches de 0° qu'il a prises comme valeurs de référence.

La procédure de Newton donne automatiquement un assez bon ajustement entre ses valeurs de  $\chi_S$  calculées et celles mesurées au voisinage de l'horizon, où deux conditions ont pu être satisfaites en adaptant les valeurs des deux paramètres  $\eta_S$  et  $H_1$ . Il faudrait plus de paramètres ajustables et indépendants pour ajuster les valeurs de  $\chi_S$  calculées et celles mesurées plus loin de l'horizon, mais dans ce domaine  $\chi_S$  est plus petit et Newton espérait sans doute que les défauts de son modèle soient moins visibles. La comparaison des valeurs de  $\chi_S$  entre la table d'Ivory (établie explicitement pour 10 °C, soit 283,15 K) et celle de Newton montre que, pour  $Z'$  compris entre 30° et 60°, les valeurs de celle-là sont en moyenne 9 % plus grandes ; non seulement cet excès relatif n'a aucune raison d'être égal à l'excès relatif de température absolue pour 25 °C par rapport à 10 °C, mais en plus il lui est nettement supérieur...

Dans [3, paragraphe 8] nous reviendrons sur le parti qu'on peut tirer du paramètre  $H_1$ .

### 2.3. Brook Taylor (1685–1731)

Mathématicien, il met en place, dans son traité de mathématiques de 1715 en latin [94], des outils fondamentaux : les séries de Taylor, et le théorème d'intégration par parties. Il consacre à la réfraction les onze dernières pages de son livre, mais quelles pages ! Thomas Young (1773–1829) les citera en ces termes : « Taylor, who first applied to the problem of atmospherical refraction his very useful theorem for "integration by parts," as the process is sometimes now called » [95]. Précisons qu'en fait Young, ainsi qu'Ivory avec qui il aura une controverse (comme nous le verrons au sous-paragraphe 6.3), parlent effectivement de réfraction astronomique quand bien même ils disent « atmospherical refraction ».

Taylor démontre le profil exponentiel de  $\mu$  dans le modèle de l'atmosphère isotherme, dont il a longtemps été considéré comme l'inventeur, puisque Newton n'a jamais laissé publier ses études de 1694–1695 sur la réfraction — sauf sa seconde table, imprimée six ans après la sortie du traité de Taylor. Ce dernier déduit que l'atmosphère serait étendue à l'infini, ce qui le soucie : selon l'historien des mathématiques Clifford A. Truesdell (1919–2000), « if the atmosphere of the earth extends far enough that heavenly bodies encounter it, the success of the system of the world calculated by the theory of motions in vacuo becomes puzzling. » [63] Car à l'époque, ni plus tard du temps d'Euler, on n'avait pas encore pleinement réalisé que l'exponentielle décroît plus vite que toute fonction puissance ; nous comprenons alors la gêne des chercheurs du moment face

au modèle isotherme, et la raison de la conclusion réservée de Taylor, disant que l’atmosphère est contenue dans des limites finies [94, p. 105].

Il trouve aussi (p. 108 ss) l’expression différentielle de la réfraction (voir l’article [56] dans ce numéro spécial), et il dit tout de suite que pour l’intégrer il faudra recourir aux séries qu’il vient de formuler. Nous verrons aux paragraphes 4 et 6.3 combien cette injonction sera suivie, par d’autres que lui.

Alors il ne calcule pas  $\chi_S$  : à son époque, dans le modèle de l’atmosphère isotherme, on ne savait le faire que numériquement. Mais à la dernière page de son traité il obtient une valeur numérique très intéressante :  $\kappa_S \cong 1/5$  « ad superficiem Terræ », que nous allons expliquer tout de suite.

### 3. Les géodésiens expérimentateurs

En géodésie, afin de tenir compte des effets de la réfraction terrestre, on se sert du coefficient de réfraction de l’atmosphère en  $S$  : c’est le quotient  $\kappa_S$  de la courbure des rayons horizontaux en  $S$  par la courbure méridienne de la Terre — en moyenne 0,14 pour les géodésiens, car leurs mesures se font souvent par de belles après-midi chaudes et ensoleillées en des lieux relativement élevés [3, sous-paragraphe 7.1.4]. Mais quand on veut déterminer avec précision la latitude par la méthode astronomique, on doit prendre aussi en compte la réfraction astronomique. Comme la connaissance concrète de ce phénomène était encore peu précise et lacunaire, des progrès étaient nécessaires pour remplir correctement les objectifs visés.

Or au XVIII<sup>e</sup> siècle la géodésie était mise à l’honneur, pour trancher les controverses de l’époque sur la forme de la Terre : est-elle aplatie comme une mandarine selon les partisans de la physique de Newton ainsi que Huygens, ou allongée selon l’axe des pôles comme un citron — ainsi que l’écrivaient les tenants de la physique de Descartes, mais aussi Jacques Cassini à partir de 1713 puis son fils César-François Cassini de Thury sur la période 1735–1740 [96] ? La mesure de la méridienne de l’Observatoire de Paris, initiée par Picard en 1669–1670, avait été prolongée sur ordre de Louis XIV en 1683, vers le nord de Paris par La Hire et vers le sud par Jean-Dominique Cassini, mais arrêtée à la mort de Colbert en septembre de cette même année, puis reprise par Jean-Dominique et Jacques Cassini en 1700–1701 où ils atteignirent le Roussillon ; ces mesures leur ont fait croire que la longueur d’un degré de méridien croissait du nord au sud. Or elle est proportionnelle au rayon de courbure du méridien terrestre, et non pas à la distance au centre de la Terre comme l’a pensé implicitement J.-D. Cassini ; alors, à cause de ces deux erreurs, celui-ci annonça en 1701 que la Terre est aplatie aux pôles [96] — ce qui s’avèrera exact. En 1713 à l’Académie des sciences, Jacques corrigea sans mot dire l’erreur de raisonnement de son père, puis Fontenelle le fit explicitement la même année (en tant que Secrétaire perpétuel) : d’après ces mesures, la Terre devrait être étirée aux pôles, donc J. Cassini changea l’opinion familiale sur plus de vingt ans, confirmant son revirement en 1718, 1720 et 1723 [55,96], et nourrissant ainsi la controverse dans le monde scientifique et au sein de l’Académie quant à la « figure de la Terre ».

Deux expéditions furent donc montées [97, 98] pour préciser la forme de la Terre, en déterminant la longueur d’un degré de méridien proche de l’équateur (Godin-La Condamine en Amérique du sud de 1735 à 1745) et aussi en haute latitude — Maupertuis en Laponie de 1736 à 1737. Dès le retour rapide de celui-ci, et à sa grande fierté, l’idée de l’aplatissement de la Terre lui semblait acquise, et l’Académie des sciences convaincue. Ces campagnes géodésiques dans des conditions inhabituelles de froid ou d’altitude donneront l’occasion de voir ce que devient la réfraction dans ces conditions, où elle réservera quelques surprises obligeant à corriger les idées théoriques de l’époque. C’est à la seconde expédition que font référence les vers célèbres de Voltaire :

Courriers de la physique, argonautes nouveaux,  
 Qui franchissez les monts, qui traversez les eaux,  
 Ramenez des climats soumis aux trois couronnes  
 Vos perches, vos secteurs et surtout deux Laponnes,  
 Vous avez confirmé dans ces lieux pleins d'ennui  
 Ce que Newton connut sans sortir de chez lui.

(*Discours en vers sur l'homme — IV. De la modération en tout*)

En attendant confirmation de l'aplatissement terrestre par l'expédition plus lointaine de La Condamine, la conclusion de Maupertuis fut à l'origine d'opérations de vérification concernant le territoire français. Ainsi en 1739 Le Monnier (qui faisait partie de l'expédition de Maupertuis) reprit *seulement* les repérages astraux de Picard, en tenant compte *incomplètement* de la réfraction que celui-ci négligeait (et de la nutation et de l'aberration qu'il ignorait), ce qui fit passer le « degré de Picard » (1670) de 57 060 à 57 183 toises (bon exemple de l'importance des effets de réfraction sur ces mesures !); mais le « degré de Laponie » (1737) lui restait nettement supérieur, étant estimé à 57 438 toises [96]. Puis Cassini de Thury, consacrant les années 1739–1740 à une vaste opération de la méridienne de l'Observatoire de Paris sur toute la France, modifia encore le degré de Picard (57 074 toises) et reconnu dès 1740 qu'en fait les degrés de méridien décroissent du nord au sud de la France [99].

Pierre Bouguer (1698–1758) a participé, en tant qu'astronome, à l'expédition de La Condamine [97, 98, 100, 101]. Il avait obtenu bien auparavant trois prix successifs de l'Académie des sciences, dont celui de 1729, suite au concours qu'elle avait lancé sur la détermination en mer de la hauteur vraie des astres. Dans le livre publiant son travail [27] (et que nous présentons dans ce numéro spécial [56]), Bouguer montre très clairement la nécessité, pour la navigation astronomique, de tenir compte de corrections dues à  $\chi_S$  d'une part et  $\kappa_S$  d'autre part (même s'il n'introduit pas ce coefficient). De même que Newton, mais indépendamment de lui et sans l'approximation qu'il a faite, Bouguer écrit rigoureusement  $\chi_S$  comme une intégrale qui fait intervenir l'invariant  $I_B$  qu'il a trouvé aussi de son côté. Pour un rayon lumineux (R) plan et arrivant en S (depuis le point extra-atmosphérique A concerné à l'infini — voir la Figure 1), Bouguer trouve la dernière des trois formes ci-dessous :

$$\chi_S = \int_1^{n_S} \frac{\tan \alpha}{n} dn = n_S r_S (\sin Z') \int_1^{n_S} \frac{n^{-1}}{\sqrt{n^2 r^2 - (n_S r_S \sin Z')^2}} dn = \int_{n_S^{-1}}^1 \frac{I_B}{\sqrt{r^2 - (n^{-1})^2 I_B^2}} dn^{-1} \quad (14)$$

où  $\alpha$  est l'angle entre le rayon lumineux et **grad**  $n$  — pour une démonstration moderne de (14), voir [3, paragraphes 2 et 5] (mais rappelons déjà que cette intégrale suppose que  $\tan \alpha$  soit une fonction non équivoque de  $n$ , donc que sur le rayon lumineux (R) considéré,  $r$  ne passe pas par un extrémum). La deuxième forme de (14) deviendra un point de passage traditionnel de beaucoup d'auteurs dont Laplace [102, p. 469], Ivory [84, p. 420], Radau [44, p. B.2], etc., et on voit que l'intégrale (8) traitée par Newton en diffère par le facteur  $n^{-1}$  qu'il a omis au numérateur.

Puis Bouguer, en proposant — comme Giacomo Filippo Maraldi (1665–1729) puis Jean-Dominique et Jacques Cassini avant lui — l'idée de l'existence d'une « matière réfractive » mêlée de façon inhomogène à l'air de l'atmosphère, se permet de considérer que dans l'atmosphère  $n$  est proportionnel à  $r^{-q}$  (et au passage il déduit de son invariant  $I_B$  l'existence de rayons en spirale logarithmique quand  $q = 1$ ). Grâce à son exploitation des propriétés géométriques des rayons dans un tel modèle d'atmosphère (de hauteur totale  $H$  au-dessus de l'observateur), il construit une nouvelle table de  $\chi_S(\psi')$ , en ajustant (comme Newton) les deux seuls paramètres indépendants ajustables de son modèle,  $q$  et  $h_r := H/r_S$ , à deux valeurs de référence :  $\chi_S(0^\circ) \cong 33'$  d'après les observations, et  $\chi_S(26^\circ) \cong 2'12''$  d'après les tables de La Hire. Malheureusement la table de Bouguer (qui correspond à  $q \cong 0,1281 \cong 1/7,805$ ) donne des valeurs en moyenne 10 %

trop élevées, sauf aux faibles hauteurs ; corrélativement, la valeur de référence tirée de la table de La Hire ( $2'12''$ ) est 11 % plus forte que la valeur correspondante donnée par la table d'Ivory ( $\chi_S(26^\circ) \cong 1'59,22''$ ) [84].

Dans un rapport à l'Académie des sciences [103] pendant l'expédition, il est dit que Bouguer « a découvert un autre fait formellement contraire à ce qui paroissoit bien établi », et qui trouble aussi son lointain collègue Le Gentil : sur les pentes du volcan Pichincha proche de Quito, à 527 toises au-dessus de cette capitale (qui est déjà à 1 466 toises = 2 857 m d'altitude), « On y respiroit à peine à cause de la grande subtilité de l'Air à cette hauteur, & le froid y étoit extrême », mais  $\chi_S$  était plus faible qu'à plus basse altitude, contrairement à ce que donne le calcul de Jean-Dominique Cassini qui supposait uniforme la réfractivité de l'air, et prévoyait une décroissance de  $\chi_S$  en fonction de l'altitude  $H_1$  du sommet de l'atmosphère par rapport à  $S$  — voir les expressions (4)–(6) — or  $H_1$  baisse lorsque l'observateur s'élève, et la variation de  $\chi_{Sh}$  en fonction de  $H_1$  devient critique — voir (3) — quand ce paramètre est au voisinage de  $\eta_S r_S$ , i.e. proche de 1,8 km (aussi en accord avec la valeur numérique de l'autre paramètre de J.-D. Cassini). Apparemment Bouguer n'a pas remarqué que d'après ces données du modèle de Jean-Dominique Cassini (et contrairement à ce que lui auraient prédit les données numériques du modèle de Jacques Cassini), avec l'horizon dégagé dont il devait jouir à 527 toises au-dessus de Quito, à cette altitude inférieure de quelques centaines de mètres seulement à celle du sommet de l'atmosphère selon Jean-Dominique, il aurait dû observer systématiquement dans le ciel une bande occultant par réflexion totale les astres sur un petit degré de part et d'autre de l'horizon astronomique — ce que l'on appelle maintenant la « bande vide de Wegener » (voir le document [104] associé à l'article [3], et [8, paragraphe 3], dans ce numéro spécial). Trop imprégné des idées de Jean-Dominique et pas assez de celles de Jacques, Bouguer ne voit pas le lien causal entre les baisses de pression  $P_S$  en  $S$ , de  $\eta_S$  et de  $\chi_S$  — alors que Halley l'avait deviné dès 1720.

Dans un article suivant [105] publié aussi en 1741 mais reprenant sa lettre de Quito du 24 juillet 1737, Bouguer réfléchit à la contradiction avec le modèle de Cassini, et alors il prévoit l'effet modérateur, sur la baisse de  $\chi_S$  avec l'altitude, de la baisse de température : en altitude « le froid, [...] en condensant l'air, peut faire une espece de compensation, & rendre l'inégalité moins considérable. » Pour étudier cette décroissance de  $\chi_S$  en fonction de l'altitude il concentre ses mesures de  $\chi_S$  vers une hauteur de  $15^\circ$  au-dessus de l'horizon, car « Au-dessous, les Réfractions sont trop variables, & au-dessus trop petites, pour pouvoir être saisies avec précision. » Mais il n'identifie pas explicitement la cause de cette décroissance : la baisse de réfractivité  $\eta_S$  au niveau de l'observateur. Par ailleurs, il estime que  $n$  décroît, dans l'atmosphère supposée limitée, en  $1/r^q$  avec  $1/q \cong 7$  — cohérent avec la valeur de  $\kappa_S$  généralement adoptée par les marins et les géodésiens.

Dans un mémoire publié en 1753 [106], soit neuf ans après son retour d'expédition, Bouguer s'interroge sur « la matière qui cause la réfraction & qui est répandue dans l'air [...] Il se pourroit fort bien qu'il n'y eût point de matière réfractive, & que les réfractions répondissent, non pas aux dilatations de l'air grossier, mais à une certaine fonction de ces dilatations » : c'est exact, et il l'avait déjà dit en 1729 [56, paragraphe 2]. Il rappelle aussi l'invariant qu'il avait déjà trouvé [27] pour un rayon dans un milieu continu à symétrie sphérique ; il redit que si  $n$  variait en  $1/r^q$  avec  $q = 1$  le rayon serait une spirale logarithmique, et qu'il serait possible qu'un tel rayon suive une courbe qui « s'étendrait circulairement tout autour de la Terre, & elle ne seroit bornée que par l'Observateur même, qui se verroit de dos. » Il comprend que  $q$  supérieur à 1 produirait la suppression d'une bande de l'image usuelle du ciel au-dessus de l'horizon astronomique car l'observateur serait dans un chenal optique (notion définie dans le document [104]) ; cette bande est un avatar de la bande vide de Wegener, dans un cas particulier qui correspondrait à la vision d'une mer concave par effet *hillingar* (ou « mirage arctique ») [107, 108] — ce qui a déjà été

observé concrètement [8, paragraphe 3], y compris sur le Lac Léman [109, p. 541]. Il revient, par plusieurs méthodes expérimentales, sur l'estimation de  $q$  donnée dans l'article précédent, et trouve  $1/q = 1/\kappa_S$  compris entre  $7 + (5/8)$  et  $9 + (1/8)$ , donc supérieur à 7 ; ceci peut s'expliquer par l'altitude des Andes, car à  $(dT/dr)_S$  fixé,  $1/\kappa_S$  est [3, sous-paragraphe 7.1.4] proportionnel à  $T_S^2/P_S$ . La dispersion de ses résultats ne doit pas nous surprendre : d'une part il y a les erreurs de mesure, mais d'autre part  $q$  est un paramètre associé à un modèle d'atmosphère très éloigné de la réalité, donc la valeur de  $q$  peut très bien différer selon la propriété du modèle qui est confrontée à la réalité. Bouguer montre que, avec son atmosphère de hauteur totale relative  $h_\tau$ , la réfraction horizontale  $\chi_{Sh}$  varie avec  $q$  environ comme  $\sqrt{q}$ , l'indice  $n_S$  au niveau de l'observateur étant fixé ; cela s'explique grâce à l'expression (24) de [56], qui s'écrit

$$\chi_{Sh} \cong \sqrt{\eta_S \frac{2q}{1-q}} = \sqrt{\eta_S \frac{2\kappa_S}{1-\kappa_S}} \cong \eta_S \sqrt{\frac{2}{h_\tau - \eta_S}} \quad (15)$$

et montre effectivement que, à  $\eta_S$  fixé,  $\chi_{Sh}$  est quasiment proportionnel à  $\sqrt{q}$  puisque  $q \ll 1$ . Quand on verra l'expression approchée suivante (16) de  $\chi_{Sh}$  donnée par un autre modèle, on notera sa ressemblance avec (15) ; quant aux différences, nous les commenterons au paragraphe 4. Bouguer s'inquiète, par ailleurs, de l'effet sur  $\chi_S$  de l'aplatissement terrestre : « La courbure de la circonférence de la Terre se trouvant plus grande dans le sens du méridien que dans celui du premier vertical, » i.e. vers l'est (ou l'ouest),  $\chi_S$  doit être plus grand pour celui-ci — mais cet effet est ordinairement négligeable. De plus, un effet notable attire l'attention de Bouguer : à des hauteurs inférieures à  $8^\circ$ , la variation journalière de la réfraction. Il constate pour les valeurs de  $\chi_S$  (à une hauteur inférieure à  $7^\circ$ ) un accroissement relatif la nuit entre  $1/6$  et  $1/7$  :

« Sans doute qu'elles ne sont jamais portées plus loin que quelque temps avant le lever du Soleil : c'est alors que le froid est le plus grand ; l'atmosphère plus condensée doit avoir perdu le plus de sa hauteur, au moins par sa partie inférieure, & il n'est guère vrai-semble que la matière réfractive ne participe aussi un peu à cette altération. »

Cette explication reste dans le cadre du modèle de Cassini, alors qu'à ce sujet elle est quantitativement très insuffisante ; il est dommage que Bouguer n'ait pas effectué de mesure de température (absolue) au sol : sa baisse nocturne relative est inférieure à  $1/6$  ! Et il invoque (à tort, comme beaucoup) l'effet de la vapeur d'eau...

Mais un article non signé (probablement écrit par le Secrétaire perpétuel), publié la même année, contient une phrase ambiguë plus proche de l'interprétation correcte : « Les variations diurnes des réfractions ne sont probablement dûes qu'à la dilatation des couches les plus basses de l'atmosphère » [28]. Peu avant, il estime aussi (p. 154) la hauteur totale de l'atmosphère réfractive à 5 158 toises — une valeur inférieure à celle donnée par Jacques Cassini. Cependant ce texte anonyme s'achève sur un constat plein d'humilité, qui ne nous rend que plus attachant son auteur : « Combien de choses inconnues sur une matière aussi importante, & qui avoit été déjà traitée tant de fois ! »

Les premières études des variations diurnes, qualitatives, remonteraient à Jean Picard (1669) puis Pierre Perrault (1674) [22]. Christian Huygens (1629–1695) indiquait en 1690 un moyen simple de les constater, le plus manifestement, en observant au voisinage de l'horizontale :

« il y a une expérience qui rend cette réfraction fort visible ; qui est qu'en fixant une lunette d'approche en quelque endroit, en sorte qu'elle regarde un objet éloigné de demi lieuë ou plus, comme un clocher ou une maison, si on y regarde à des heures différentes du jour, la laissant toujours attachée de mesme, l'on verra que ce ne seront pas les mesmes endroits de l'objet qui se presenteront au milieu de l'ouverture de la lunette, mais que d'ordinaire le matin & le soir,

lorsqu'il y a plus de vapeurs près de la Terre, ces objets semblent monter plus haut » [23, p. 42–43].

En 1798 Woltmann indique que  $\kappa_S$  est plus grand le matin que le soir [110]. Bessel était très au courant de ces variations diurnes, et conscient du fait que la cause de celles qui sont vues près de l'horizon réside dans les modifications des couches limites proches de l'observateur [111] ; c'était d'ailleurs l'un des rares astronomes considérant que la réfraction mérite d'être étudiée pour elle-même, et pas comme une simple correction. Les études systématiques les plus récentes sont dues à Hellerich [112], Schaeffer et Liller [113], Sampson *et al.* [114], et enfin Tschudin [115].

En fait, il s'installe souvent la nuit une inversion de température depuis le sol (*surface-based inversion layer*), car celui-ci, en l'absence de rayonnement solaire incident, se refroidit par rayonnement infrarouge, puis par contact il refroidit l'air, dont la faible conductivité thermique permet à celui situé assez haut de rester plus chaud. L'épaisseur est usuellement 100 à 500 m pour la couche d'inversion, au sommet de laquelle l'accroissement de température par rapport au sol est fort, valant 5 à 15 K ; il y a un changement important dans la couche limite. La première mention claire de l'existence de cette inversion semble due à Brandes en 1806 [116], confirmée par les mesures de l'astronome et météorologue James Glaisher (1809–1903) prises lors de son ascension en ballon du 2 octobre 1865 [117]. Elle sera étudiée par Egon von Oppolzer [118].

Quand on observe les astres assez loin de l'horizon, pour tenir compte du changement de réfraction au cours de la nuit il suffit de tenir compte des variations de  $T_S$  et  $P_S$  : la composante périodique de celles de  $T_S$  est due au cycle jour-nuit, mais pour  $P_S$  elle est due aux marées atmosphériques dont l'amplitude est beaucoup moins importante en valeur relative — de l'ordre de  $10^{-3}$  atm. Mais pour la réfraction horizontale  $\chi_{Sh}$ , l'influence de  $(dT/dz)_S$  est sensible, et son changement de signe à l'entrée de la nuit, i.e. l'apparition de l'inversion de température nocturne, augmente  $\kappa_S$ , ce qui a des effets plus importants que ceux de la diminution de  $T_S$ . L'expression approchée

$$\chi_{Sh} \cong \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\eta_S \kappa_S}{1 - \kappa_S}} \cong \eta_S \sqrt{\frac{\pi}{2(h_1 - \eta_S)}} \quad (16)$$

due à Kramp [3, Eq. (87)], dont nous parlerons au paragraphe 4 (en précisant que  $\kappa_S \cong \eta_S/h_1$ ), permet, malgré ses défauts que nous signalerons, de le comprendre facilement. À  $P_S$  constant, si du jour à la nuit  $T_S$  passe de 15 °C à 0 °C, cela produit une multiplication de  $\chi_{Sh}$  par  $\sqrt{288,15 \text{ K}/273,15 \text{ K}} \cong 1,027$  ; et si en plus  $(dT/dz)_S$  passe de sa valeur standard  $-6,5 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$  à  $+5 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ , alors  $\kappa_S$  passe de sa valeur standard 1/5,9 à 1/3,8 d'après l'ensemble des données de [3, sous-paragraphe 7.1.4], ce qui fait subir à  $\chi_{Sh}$  une nouvelle multiplication par 1,14, donc explique qu'il manquait à  $\chi_{Sh}$  quelques minutes d'angle quand on le calculait à partir de la valeur diurne de  $\kappa_S$ . Avec  $T_S$  correspondant à 0 °C et  $(dT/dz)_S = 20 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ , on trouve  $\chi_{Sh} \cong 59'$  ; à Edmonton des valeurs supérieures à 1° ont été observées dans 3 % des cas [114]. En exploitant les différences entre les valeurs de  $\chi_S$  de la table de Kramp et de celle d'Argelander–Bessel (basée sur les mesures de l'observatoire de Königsberg) pour les hauteurs apparentes 0,5° et 1° relevées par Ivory [119], il serait possible de caractériser l'inversion de température nocturne moyenne à Königsberg ; cette étude a été effectivement réalisée par Tschudin en 2019 [115]. L'augmentation de  $\chi_S$  est moindre dès que l'astre est à 1° au-dessus de l'horizon astronomique, mais elle atteint couramment 5–10' à l'aube ; il reste que, dans ces circonstances, l'accroissement de  $\chi_S$  est plus dû à la variation de  $(dT/dz)_S$  qu'à celle de  $T_S$ , ce qui pose un grave problème de réduction des observations :  $(dT/dz)_S$  n'est pas indiqué par un thermomètre fixe dans l'observatoire ! C'est l'une des causes d'incertitude des observations d'Arthur Eddington *et al.* pour tester la théorie de la relativité générale lors de l'éclipse de 1919 (déplacement de 1,75" au bord du Soleil). Pour des raisons similaires, Carl Friedrich Gauss avait déjà compris la difficulté de tester la courbure

de l'espace lors de sa tentative de 1820 avec le grand triangle géodésique Brocken–Inselsberg–Hohen Hagen (somme des angles mesurés :  $179^{\circ} 59' 59,32''$ ).

Pierre Charles Le Monnier (1715–1799) renchérit sur les variations temporelles de la réfraction : il retrouve qu'elles présentent une composante saisonnière liée à l'évolution de la température moyenne (ce que savaient déjà les Cassini ainsi que Halley), et que c'est, comme d'habitude, très sensible dans la réfraction horizontale ; il détaille ses observations devant l'Académie des sciences [120], où il explique les causes de divergences entre tables dues à différents auteurs. Il écrit :

« [...] il sembleroit néanmoins, d'après quelques essais intéressans, publiés dans nos Mémoires en 1749, par M. Bouguer, que ce seroit en vain, ou qu'on auroit tort d'expliquer par des différentes élévations du sol au-dessus du niveau de la Mer, les grandes différences qu'on trouve dans les Tables des réfractions de Picard, Cassini & de Flamstéed [...] ces Tables ne paroissent avoir été construites que conditionnellement & pour un état de température moyenne, puisqu'on trouve [...] des preuves suffisantes qu'ils ne doutoient nullement qu'on n'eût besoin de Tables différentes pour les diverses saisons du froid & du chaud. [...] Les] réfractions qui conviennent à l'horizon [...] ne sont pas les mêmes l'hiver que l'été, j'en ai déjà publié les différences dans l'*Histoire céleste* & ailleurs, d'après mes propres observations [...] ».

Il cite beaucoup de valeurs, y compris celles dues à Picard, montrant des réfractions horizontales hivernales supérieures de  $12'$  ou  $13'$  aux valeurs estivales, « d'où il est aisé de reconnoître que les différentes densités de l'air, [...] n'influe[nt] considérablement qu'aux approches de l'horizon [...] » (p. 91) Il cite encore les observations de Picard, « qui ont échappé à Flamstéed » et qui montrent, pour le 20 janvier 1675, une réfraction horizontale de  $46' 14'' \frac{1}{2}$  et  $50' 33''$  pour les limbes solaires, et le diamètre apparent vertical du Soleil réduit à  $19' 52''$  [120]. En 1956, Sugawa poursuivra les investigations sur ces variations saisonnières [121], tout en se penchant sur l'effet d'inclinaison des isopycnes de l'air (i.e. de ses surfaces d'égale masse volumique) :  $1$  à  $2'$  en moyenne,  $10'$  maximum. L'erreur produite sur les mesures de latitude ne dépasse pas  $0,2''$ .

Les variations de réfraction ont été étudiées de manière systématique, sur toutes les heures du jour et toutes les saisons, pas Carl Max von Bauernfeind (1818–1894) — [122, Steindrucktafel II], [123, 124] — et par Alexander Thom [125].

L'abbé Nicolas-Louis de La Caille (1713–1762) — soit Lacaille pour la suite, car il signait ainsi — trouvait les tables de Cassini excellentes, de  $15$ – $23^{\circ}$  de hauteur jusqu'au zénith, et meilleures que celle de Newton calibrée seulement par des mesures proches de l'horizon. Lacaille avait construit en 1757 sa table (pour  $10^{\circ}\text{C}$  et une pression de 28 pouces de mercure) en comparant les positions apparentes d'étoiles qu'il avait observées à Paris et pendant sa mission de 3 ans au Cap, donc de façon complètement empirique. Elle a été publiée par *La Connaissance des Mouvemens célestes* de 1760 à 1765 (aux côtés de celle de J.-D. Cassini). Mais l'arc de son sextant était affligé d'une erreur de graduation : il surestimait ses  $64^{\circ}$  de  $10$ – $12''$ , comme l'ont vu Bradley et Mayer — d'où une controverse orageuse entre celui-ci et Lacaille, dont la table donnait  $66,5''$  de réfraction moyenne à  $45^{\circ}$  de hauteur, alors que celle de Bradley (construite à partir de la formule (19)) donnait  $56,9''$ . Joseph Jérôme Lalande (1732–1807), en charge de *La Connaissance des Mouvemens célestes*, décida alors — cas unique en la matière — de proposer provisoirement pour 1766 les valeurs des deux tables, dans deux colonnes voisines.

Des conclusions incongrues sont parfois tirées de la comparaison de tables : c'est le cas avec Leonhard Euler (1707–1783), qui en 1754 a comparé [126] la table *calculée* par Jean-Dominique Cassini selon le modèle de Ptolémée (atmosphère homogène) avec la table *observationnelle* de

Flamsteed. Trouvant que les résultats de Cassini s'accordent mieux avec son modèle d'atmosphère à gradient thermique, et ceux de Flamsteed mieux avec un modèle d'atmosphère isotherme, il en déduit qu'il « semble qu'en Angleterre le degré de chaleur de l'atmosphère en montant diminuë moins qu'à Paris. » En effet, on sait que le modèle de Cassini correspond à  $\kappa_S = 0$ , donc (d'après [3, Eq. (56)]) à  $(dT/dz)_S \cong -34 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$  indépendamment de  $(T_S, P_S, \lambda_0)$ , alors que dans l'atmosphère standard  $(dT/dz)_S = -6,5 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$  ; il est vrai que  $-6,5$  est plus proche de 0 que  $-34\dots$

#### 4. Les Classiques

Après l'avancée théorique que représentent les formes (14) de l'intégrale de réfraction dans un milieu à symétrie sphérique, et par lesquelles repasseront quasiment tous les auteurs concernés du XVIII<sup>e</sup> siècle, les efforts vont se concentrer pour tenter de cerner, avec les outils mathématiques usuels et diverses approximations, la fonction de  $Z'$  donnée par cette intégrale de réfraction. Disons tout de suite qu'actuellement on dispose de très bons ajustements numériques pour les conditions standard (15 °C et 1 atm en S), comme celui donné par

$$\chi_S \cong 59,861'' \tan \tilde{Z} - 0,023\,739'' \tan^3 \tilde{Z} + 7,4749 \times 10^{-6}'' \tan^5 \tilde{Z} \quad \text{où } \tilde{Z} = 0,9917Z' \quad (17)$$

exact à mieux que 4'' pour  $Z' \in [0^\circ, 89^\circ]$  ; et il y en a un autre, exact à mieux que 1'' mais seulement pour  $Z' \in [0^\circ, 88^\circ]$  [127, p. 635]. À ce degré de précision, il faut savoir que si S n'est plus dans les conditions standard, les trois premiers coefficients numériques de (17) doivent être changés, et pas de manière proportionnelle, comme l'aurait déjà signalé à leur façon Brinkley en 1818 [82, p. 171], puis Ivory [83, 84]. Quant à l'usage de la variable  $\tilde{Z}$  proportionnelle à  $Z'$ , il n'est pas issu de considérations théoriques ; il sera donc absent des productions des auteurs que nous allons présenter dans la suite de cet article.

Dans son recueil d'essais mathématiques de 1743 [128], Thomas Simpson (1710–1761) prouve une formule approximative simple, acceptable pour des astres pas trop proches de l'horizon :

$$\chi_S \cong \eta_S \tan Z'. \quad (18)$$

Et dans le même recueil, Simpson expose une méthode améliorée d'estimation numérique d'une intégrale ; elle sera justement utilisée pour calculer des réfractions, notamment par Biot — voir le paragraphe 5. En ce qui concerne la précision de la formule (18), dite de Simpson, Maskelyne écrit : « This rule is exact enough for the purpose of the calculation of the longitude from observations of the distance of the Moon from stars at sea as low down as the altitude of  $10^\circ$ , for there the error is only  $10''$  from the truth. » [85] En 1754 Leonhard Euler (1707–1783) était plus exigeant [126] (ce qui est normal pour l'astronomie) : il considérait que cette formule est bonne jusqu'à une distance zénithale de  $70^\circ$ . Pour S dans les conditions normales de température ( $T_S \cong 273,15 \text{ K}$ ) et de pression ( $P_S \cong 1013,25 \text{ hPa}$ ), avec de l'air sec à 400 ppmv de  $\text{CO}_2$  (gazeux), et pour  $\lambda_0 \cong 588 \text{ nm}$ , on a  $\mu \cong 1,293 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  et  $\eta_S \cong 2,924 \times 10^{-4}$  ; cela correspond, en passant des radians aux secondes d'arc, à  $60,31''$ . On tient compte aussi, mais seulement pour des études d'astrométrie fine, des changements du taux d'humidité et de  $\text{CO}_2$  : car à  $\lambda_0 \cong 588 \text{ nm}$ ,  $20^\circ \text{ C}$  et 1 atm, la variation relative de  $n_S - 1$  entre l'air sec et l'air à 100 % d'humidité est seulement  $-0,3\%$  (voir [129, paragraphe 3] associé à ce présent article).

Mais la variation quantitative de composition de l'air avec l'altitude (surtout en ce qui concerne sa teneur en vapeur d'eau) ne change rien à la validité de la formule de Simpson (18). Ainsi montre-t-il que, sauf à moins de  $10^\circ$  de l'horizon et pour  $\eta_S$  fixé, les valeurs de  $\chi_S$  ne dépendent guère du profil de densité ; telle est la « loi de Simpson » — déjà entrevue par Flamsteed, par Newton [92], et redite par Euler en 1754 [126]. Cette loi est rigoureuse dans le cadre d'un modèle de Terre plate avec une atmosphère stratifiée ; dans un modèle à symétrie sphérique c'est une bonne approximation, sauf pour des distances zénithales trop proches de  $90^\circ$ .



Cette propriété plonge ses racines dans un résultat approximatif plus profond : le « théorème » d'Oriani (1787) qui stipule (moyennant des hypothèses précisées dans [3, sous-paragraphe 4.1]) que  $\chi_S$  ne varie concrètement qu'avec  $Z'$ ,  $\lambda_0$ ,  $T_S$  et  $P_S$  ; mais ce résultat n'est en fait qu'approximatif, d'où la présence des guillemets que nous rajoutons à son appellation traditionnelle de « théorème » [3, sous-paragraphe 5.1]. Quoiqu'il en soit, cette loi rend deux grands services : à ceux qui calculaient les premières tables de  $\chi_S$  d'une part, elle a permis de prendre n'importe quel modèle d'atmosphère à symétrie sphérique où l'indice passe de 1 à  $n_S$  entre l'infini et  $S$ , mais de trouver quand même des valeurs satisfaisantes jusqu'à 80° de distance zénithale environ ; aux observateurs d'autre part, elle permet de déduire  $Z$  à partir de la mesure de  $Z'$  (supposé inférieur à 80° et fixé) en ne s'inquiétant que des variations de température et de pression au niveau de  $S$ .

Auprès de l'horizon, Simpson compare les résultats prédits par un profil de réfractivité exponentiel et un profil affine ; pour ce dernier il arrive par approximation à la même loi que son prédécesseur Bouguer transposée en [56, Eq. (12)], dont il ajuste les paramètres correspondant à  $\eta_S$  et  $H_A$  aux valeurs de  $\chi_S$  pour  $Z' = 90^\circ$  et  $60^\circ$ . Il trouve que les résultats du modèle affine sont plus proches des observations, alors que c'était le modèle qui satisfaisait le moins Newton — ce que Simpson ne pouvait qu'ignorer puisque les calculs littéraux de Newton sur la réfraction n'étaient pas publiés.

En 1758, Johann Heinrich Lambert (1728–1777) publie un petit livre dans lequel il prétend liquider l'une des rares choses qui seraient restées incomplètement traitées en optique géométrique : la réfraction astronomique ou terrestre [57]. Il met l'intégrale de réfraction sous sa forme la plus compacte de (14) en faisant apparaître la fonction tangente, puis il la transforme sans profiter explicitement de l'invariant de Bouguer [56]. Comme Euler quelques années auparavant [126], et semble-t-il indépendamment, il utilise la série binomiale  $(1+x)^m$  pour évaluer l'intégrale de réfraction (14), avec  $m = -1/2$  ; mais en plus, il fait entrevoir la différence de vitesse de convergence de deux séries pour  $\chi_S$  [58].

Dans la même publication que celle où il commentait la formule de Simpson en 1764, Maske-lyne présente la formule

$$\chi_S \cong B \tan(Z' - w\chi_S) - \text{avec } w \cong 3 - \quad (19)$$

(trouvée par James Bradley, qui ne publiait guère) en ces termes : « the refraction is =  $57'' \times$  tangent of the apparent zenith distance lessened by three times the corresponding refraction taken out of any common table. » [85] Lalande fait de même en 1771 : « la réfraction est comme la tangente de la distance apparente au zénith diminuée de trois fois la réfraction. » [130] Bradley tenait de Simpson lui-même l'idée de changer  $Z'$  en  $Z' - w\chi_S$  dans la formule de Simpson, et la relation (19) donne des valeurs numériques très proches de celles que donne le résultat de l'intégrale (12) ; il s'attache à déterminer avec précision la valeur du paramètre  $B$  qu'il estime à  $57,036''$  pour une température de  $50^\circ\text{F} = 10^\circ\text{C}$  en  $S$  et une pression de 29,6 pouces anglais de mercure (environ 752 torr), et en déduit une table de réfraction qui sera largement et durablement utilisée, occultant les travaux de ses successeurs immédiats qui utiliseront, comme Kramp, le profil de réfractivité exponentiel au lieu du profil affine. Au siècle suivant, Mathieu dira que  $w$  est paramétré par  $T_S$  et  $P_S$  (cf. infra) ; et Laugier considérera que pour améliorer la formule de Bradley il faut faire varier  $w$  avec  $Z'$  [131]... Avant d'en arriver là, il reste que cette formule est très intéressante pour étudier la non-linéarité de  $\chi_S$  par rapport à  $\eta_S$ , pour une valeur de  $w$  donnée (qui dépend de la forme du profil de réfractivité) [3, paragraphe 8]. Et comme l'a vu Simpson mais sans le publier, cette formule (19) se déduit [56, sous-paragraphe 3.5] du modèle de Bouguer [27], qui est numériquement très proche du modèle à profil affine.

Le modèle de réfractivité affine aura donc une belle postérité jusqu'à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle. Il a été repris par Mayer qui calcule des tables en suivant une relation correspondant à (12), mais

en indiquant aussi des corrections pour les variations de  $T_S$  et  $P_S$  (ce que n'avaient jamais fait ni Simpson ni Bradley) ; ce travail sera publié à titre posthume [39], et s'avèrera très utile.

En 1772 Joseph Louis Lagrange (1736–1813) marche sur les traces de Bouguer, en étudiant le cas d'une atmosphère limitée où  $n$  décroît en  $r^{-q}$  ; mais il est le premier [71] à écrire la formule (appelée loi de Bouguer–Simpson [56, Eq. (12)]) traduisant le résultat rigoureux que Bouguer avait donné pour  $\chi_S$  sous forme géométrique, et le premier à montrer que cette formule conduit aussi à celle de Bradley. Son étude permet de voir que [56, sous-paragraphe 3.5]

$$B \cong \eta_S \left(1 - \frac{\eta_S}{2}\right) \quad \text{et} \quad w = \frac{1-q}{2q} \quad \text{avec} \quad 1/q \cong h_T/\eta_S \quad (20)$$

donc que  $w = 3$  correspond à  $1/q = 7$  (légèrement plus petit que les dernières estimations de Bouguer vues au paragraphe 3).

Pour 1789, la table publiée par *La Connaissance des Temps* est justement calculée d'après cette formule de Bradley (19). Ce sera le cas jusque pour 1808, malgré les erreurs de  $10''$  à  $15''$  dues à cette formule vers  $Z' = 86^\circ$  et mises en évidence par Borda et Delambre.

Christian Kramp (1760–1826), dans son traité de 1799 sur les réfractions astronomique et terrestre [78], effectue des percées mathématiques remarquables, devançant parfois Euler sur son propre terrain. En effet, nous verrons dans [3, paragraphe 8] que pour la réfraction au voisinage de l'horizon astronomique, et moyennant diverses approximations, on a

$$\chi_S \cong \frac{\eta_S}{\sqrt{2}H_1} \int_0^\infty e^{-z/H_1} \left[ \left( \frac{1}{r_S} - \frac{\eta_S}{H_1} \right) z + \frac{\tan^2 \psi'}{2} \right]^{-1/2} dz \quad (21)$$

dans le cas d'un modèle d'atmosphère où  $\mu(z) = \mu_S \exp(-z/H_1)$ , adopté par Kramp, Bessel, etc. [78, 86]. Avec ces auteurs il ne s'agit pas [44, p. B.27] du modèle de l'atmosphère dite isotherme, dont la hauteur d'échelle (en supposant que l'air est un gaz parfait de masse molaire  $M_a$ ) est  $H_T = RT_S/(M_a g)$  ( $R$  désignant la constante des gaz parfaits), ce qui donne  $H_T \cong 7,990$  km sous nos latitudes dans les conditions normales avec les estimations actuelles des constantes (mais Laplace prenait 7,974 km, et 6 366 km pour le rayon moyen terrestre au lieu de 6 371 km [37, chap. 1], [102, p. 476]) ; selon Radau [44, p. B.27], Kramp et Bessel prennent plutôt  $H_1 = (1 + \varepsilon)H_T$ , avec  $\varepsilon \cong 2/11$  pour Kramp et  $\varepsilon \cong 1/27$  pour Bessel, ce qui donne

$$\frac{dT}{dz}(0) = - \left( \frac{1}{H_T} - \frac{1}{H_1} \right) T_S = -\varepsilon \frac{T_S}{H_1} = -\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{M_a g}{R} \quad (22)$$

valant respectivement  $-5,3 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$  et  $-1,2 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ . En fait, pour Kramp ce modèle est déjà une approximation, car au départ il adopte une loi de variation de  $T$  avec  $z$  qui n'est pas cohérente avec  $\mu(z)$  exponentiel, et initialement il tenait compte de la variation de la pesanteur avec l'altitude ; mais il était rompu aux calculs avec le profil exponentiel, puisqu'il avait montré que c'est celui qu'a utilisé Newton. De plus, comme le fait remarquer Simon Newcomb [132, p. 186–187], la distribution hydrostatique des pressions dans un fluide impose (en négligeant la variation de  $g$  avec l'altitude)

$$\int_0^\infty \mu(z) g dz = P_S = \mu_S g H_1, \quad (23)$$

et pour un gaz parfait, avec la classique hauteur d'échelle isotherme  $H_T$  on a

$$P_S = \mu_S R T_S / M_a := \mu_S g H_T, \quad (24)$$

donc  $H_1$  et  $H_T$  sont égaux, ce qui est contradictoire avec tout profil de  $\mu$  exponentiel où  $\varepsilon \neq 0$ . C'est pourtant un tel profil que Bessel a utilisé (avec  $\varepsilon \cong 1/27$  selon Radau) pour ses *Tabulae Regiomontanae* [133] de 1830, qui corrigent les importantes erreurs de ses tables précédentes [86] au-delà de  $86^\circ$  en utilisant les mesures d'Argelander ; ces nouvelles tables ont été d'un usage très répandu, de 1830 au début du xx<sup>e</sup> siècle : elles sont publiées en Espagne dans l'*Almanaque Nautico*, en Amérique en 1906 [134, p. 571–575], etc. Car les paramètres du profil (13) peuvent être ajustés autrement que ne l'a fait Newton : d'abord on prend  $\eta_S$  déduit des mesures de  $T_S$

et  $P_S$ , ce qui doit assurer un bon ajustement entre les valeurs calculées de  $\chi_S(\psi')$  et les valeurs réelles pour  $\psi' \in [0^\circ, 60^\circ]$  ; puis, sachant que si on prenait ensuite  $H_1 = H_T$  on aurait  $\kappa_S$  trop grand donc  $-\mathrm{d}\chi_S/\mathrm{d}\psi'(0)$  aussi d'après le théorème de Biot, on peut jouer alors sur le paramètre petit  $\varepsilon := [MagH_1/(RT_S)] - 1$  pour trouver un compromis entre l'obtention de la bonne valeur de  $\mathrm{d}\chi_S/\mathrm{d}\psi'(0)$  et de celle de  $\chi_{Sh}$ . Sachant que  $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z(0) = -6,5 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$  dans la troposphère standard, l'application numérique faite juste après la relation (22) montre que  $\varepsilon \cong 2/11$  (Kramp) doit donner une valeur de  $-\mathrm{d}\chi_S/\mathrm{d}\psi'(0)$  plus proche (quoiqu'encore un peu trop grande) de sa valeur standard que  $\varepsilon \cong 1/27$  (Bessel).

Quoiqu'il en soit, on voit qu'en plus de  $\eta_S$  il intervient aussi, à cause de la courbure des surfaces équii-indice, un second paramètre petit fondamental, à savoir  $h_1 := H_1/r_S$  valant  $(1 + \varepsilon) 1,25 \times 10^{-3}$  dans les conditions normales ; le premier conditionne l'existence de la réfraction, le second la module subtilement. Avec  $\mu(z)$  exponentiel, [3, Eq. (54)] montre que ces deux paramètres fondamentaux sont reliés au coefficient de réfraction par

$$\eta_S/\kappa_S \cong h_1. \quad (25)$$

Confronté au genre d'intégrale intervenant dans l'expression approximative (21), Kramp utilise la fonction *gamma* (inventée par Euler en 1729 [135] et notée  $\Gamma$  par Legendre en 1811) ; il prouve  $\Gamma(1/2) = 2 \int_0^\infty e^{-X^2} \mathrm{d}X = \sqrt{\pi}$  (qu'on appelle aussi l'intégrale de Gauss), et l'utilise pour montrer que la réfraction horizontale peut être développée en puissances demi-entières de  $\kappa_S$  ([78, p. 119 ss] ; voir aussi [102, p. 480–488]) :

$$\chi_{Sh} = \sqrt{\pi\eta_S\kappa_S/2} \left[ 1 + \left( \sqrt{2} - 1 \right) \kappa_S + \left( 3^{3/2} - 2 \cdot 2^{3/2} + 1 \right) \kappa_S^2/2! + \left( 4^{5/2} - 3 \cdot 3^{5/2} + 3 \cdot 2^{5/2} - 1 \right) \kappa_S^3/3! + \dots \right]; \quad (26)$$

il jubile de cette trouvaille qu'Euler n'avait pas réalisée ! Laplace ira plus loin en mettant cette expression sous la forme d'une fraction continue [102, p. 490–493]. Ivory donnera une présentation plus simple [136]. À partir de sa formule, Kramp effectue une application numérique [78, p. 120–121] : avec le profil de densité exponentiel il obtient  $\log \kappa_S = -1 + 0,3704479$  (soit  $\kappa_S \cong 1/4,26$ , ce qui est très correct pour son atmosphère isotherme) en se basant sur le fait que le « citoyen Laplace dans l'*Exposition du système du monde*, a supposé  $[H_1] = 24\,080$  pieds », i.e.  $H_1 = 7,822 \text{ km}$  ; de plus, il assimile  $\eta_S$  (qu'il n'appelait pas ainsi) à la valeur de  $\chi_S(45^\circ)$  en radians, et pour une température de  $0^\circ\text{R}$  et une pression « de 28 pouces de hauteur barométrique », i.e. 758 torr car un pouce est un douzième de pied (qui était, pour sa dernière année, le pied-de-roi défini par Colbert en 1668 et correspondant à 324,839 mm), il prend donc  $\eta_S = 2,874 \times 10^{-4}$  (ce qui est un peu faible pour les valeurs de  $T_S$  et  $P_S$  indiquées), et alors il conclut que « la réfraction horizontale sera égale à 7 307 secondes de la nouvelle division [soit  $39' 27''$ ] » ; ce qui se trouve parfaitement conforme au calcul du citoyen Laplace [qui avait trouvé 7 300 au lieu de 7 307]. » Eu égard aux tables actuelles, cette valeur de  $\chi_{Sh}$  est trop forte de  $4'$  pour les valeurs de  $T_S$  et  $P_S$  indiquées ; d'ailleurs  $\chi_{Sh}$  sera systématiquement en excès dans les calculs numériques de Kramp, ainsi que  $-\mathrm{d}\chi_S/\mathrm{d}\psi'(0)$ , le tout à cause du gradient de température troposphérique qu'il ignore et qui lui a fait prendre  $\kappa_S$  trop fort ( $\kappa_S \cong 1/4,26$  au lieu de  $\kappa_S \cong 1/6$ ). Il est vrai que, si on augmente arbitrairement  $H_1$  de  $\varepsilon \cong 2/11$  en valeur relative tout en conservant  $\mu(z)$  exponentiel, on diminue  $\kappa_S$  et on trouve par les formules de Kramp des valeurs de  $\chi_{Sh}$  et  $-\mathrm{d}\chi_S/\mathrm{d}\psi'(0)$  meilleures, mais elles restent encore un peu trop fortes ; il faudrait prendre plus que  $2/11$ , mais on a déjà compris qu'*a priori* il n'existe pas de valeur de  $\varepsilon$  donnant  $\chi_{Sh}$  et  $\mathrm{d}\chi_S/\mathrm{d}\psi'(0)$  simultanément corrects. En fait, à  $\eta_S$  et  $h_1$  correctement fixés, abandonner le profil de  $\mu$  exponentiel permettra de changer  $\kappa_S$  et l'expression (26) devenue évidemment obsolète (d'autant plus si le nouveau profil de  $\mu$  fait intervenir plus de deux paramètres) ; d'où la possibilité de corriger les excès des valeurs de Kramp sans tomber dans l'incohérence mécanique, signalée par Newcomb, des cas où  $\varepsilon \neq 0$ .

Celui-là montre quelques pages plus loin [78, p. 148–149] qu’une approximation de la somme de sa série donne l’expression (16), que nous démontrons d’une autre façon dans [3, paragraphe 8]. Cette expression approchée, quand on la compare avec l’expression voisine (15) pour le modèle de Bouguer et avec ce que donne pour  $Z' = 90^\circ$  la formule (6) du modèle de Cassini, illustre élégamment la dépendance de  $\chi_{Sh}$  par rapport au profil de  $\mu$  à  $\eta_S$  et  $h_1$  fixés. En effet, pour le modèle exponentiel de Kramp,  $\chi_{Sh}$  vaut quasiment  $\eta_S \sqrt{\pi/[2(h_1 - \eta_S)]}$  ; pour le modèle de Bouguer qui débouche sur la formule de Bradley avec  $w \cong (h_\tau - \eta_S)/(2\eta_S)$  [56, sous-paragraphe 3.5], comme  $h_\tau \ll 1$ , le profil de réfractivité de ce modèle est quasiment le même que le profil affine de Newton–Simpson–Mayer qui s’annule au sommet de l’atmosphère, donc sa hauteur réduite relative est  $h_1 \cong h_\tau/2$  et, d’après les relations (15) et (20),  $\chi_{Sh}$  s’écrit  $\eta_S \sqrt{2/(2h_1 - \eta_S)} \cong \sqrt{\eta_S/w} \cong \sqrt{B/w}$  ; pour le modèle de Cassini, la formule (6) pour  $Z' = 90^\circ$  donne  $\eta_S[1 - (\eta_S/2)]/\sqrt{2h_1 - \eta_S}$ , ce qui est notablement plus petit. Pour la raie d’*alias*  $D_3$  (de l’hélium), donc à 588 nm (longueur d’onde standard actuelle pour indiquer ordinairement l’indice de réfraction d’un milieu transparent), et dans les conditions normales de température et de pression en  $S$ ,  $\eta_S \cong 2,924 \times 10^{-4}$ ,  $h_1 \cong 1,25 \times 10^{-3}$ , alors ces trois expressions donnent respectivement  $\chi_{Sh} \cong 41'$ ,  $30'$  et  $21'$ , tandis que de nos jours la valeur usuellement admise dans ces conditions est  $35'$ . Ces résultats n’auraient pas surpris John Brinkley (1766–1835), qui écrivait en 1818 : « It is admitted, that the true refraction is always less than that computed on the hypothesis of an uniform temperature, and greater than that obtained by supposing the density to decrease uniformly » [82, p. 166]. Mais avec les valeurs de Bradley pour  $10^\circ\text{C}$  et 752 torr ( $w \cong 3$  et  $B \cong 2,7652 \times 10^{-4}$  rad, ce qui d’après (20) correspond à  $\eta_S \cong 2,7656 \times 10^{-4}$  et donc à  $\lambda_0 \cong 816$  nm) la 2<sup>e</sup> expression donne bien  $33,00'$ , comme il le voulait pour construire sa table ; la longueur d’onde correspondante étant dans l’infrarouge proche, on voit clairement que la valeur de  $B$  choisie par Bradley ne traduit pas les propriétés physiques de l’air, mais l’ajustement recherché pour donner une valeur correcte de valeur  $\chi_{Sh}$  à  $10^\circ\text{C}$  et 752 torr avec sa formule qui ne donne pas une expression juste de  $\chi_{Sh}$  et lui donne donc  $\chi_S$  un peu trop fort aux distances zénithales pas trop grandes. D’autres ajustements avec la formule de Bradley seront recherchés par Brinkley, Groombridge, Piazzini, et Mathieu (cf. infra), mais sans forcément vouloir rendre compte de  $\chi_{Sh}$  car, dans la pratique, les astronomes n’observent plus les astres trop bas sur l’horizon.

La contribution de Kramp ne s’est pas limitée aux formules donnant  $\chi_{Sh}$  : il a introduit en plus la fonction transcendante  $K$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  et tabulée par lui [78, p. 195–202] — suivi de Bessel [86, p. 36–37] et de Radau qui complète [137], avec une variante — telle que

$$K(u) := \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(v+u^2)} dv / \sqrt{v+u^2}. \quad (27)$$

On voit que celle-ci, grâce au changement de variable  $X := \sqrt{v+u^2}$ , est liée à la fonction d’erreur erf (inconnue en 1799) définie par

$$\text{erf}(X) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X e^{-v^2} dv ; \quad (28)$$

en effet,  $\text{erf}(\infty) = \Gamma(1/2)/\sqrt{\pi} = 1$  et

$$K(u) = \int_u^\infty e^{-X^2} dX = \int_0^\infty e^{-X^2} dX - \int_0^u e^{-X^2} dX = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \text{erf}(u)] \quad (29)$$

[78, p. 132–149].

Kramp comprend, comme Bouguer, que des rayons pourraient faire le tour de la Terre au niveau de la mer ; il dit que cela exigerait, de la part d’un profil exponentiel,  $H_1 \cong 1\,880$  toises i.e. 3,664 km (mais cette valeur est erronée, peut-être à cause d’une méconnaissance de la constante des gaz parfaits ou de l’origine des températures absolues, car il faudrait  $H_1 \cong 1,862$  km pour avoir  $\kappa_S = 1$  !), et il ajoute que « souvent nous [...] aurions [ce cas] dans nos climats, si les vapeurs dont l’air est chargé, ne nous empêchoient pas alors de discerner les objects éloignés. » Il a raison, au sens où le phénomène de mirage supérieur [1, sous-paragraphe 2.2] n’est pas rare, et se

produit quand  $\kappa$  dépasse 1 dans une couche d'air au-dessus de l'observateur, mais cette couche ne peut pas encercler toute la Terre — pour la prise en compte d'un effet lié à cette limitation, voir l'article [10] dans ce numéro spécial.

Avant de passer aux travaux classiques du siècle suivant, signalons aux lecteurs avides de plus de détails l'excellente et unique synthèse sur les recherches du XVIII<sup>e</sup> siècle : celle de Carl Bruhns [54].

Dans son monument de physique mathématique du début du XIX<sup>e</sup> siècle qu'est le *Traité de Mécanique Céleste*, l'éminent Pierre Simon de Laplace (1749–1827) aborde aussi le sujet de la réfraction astronomique [37, chap. 1], de la réfraction terrestre [37, chap. 2], et de l'extinction [37, chap. 3], dans le livre 10 (*Sur des sujets généraux relatifs au système du Monde*) du tome 4. Laplace est ici souvent difficile à lire, car il saute des éléments de démonstration, et omet quelques termes d'ordre supérieur pointés par Bemporad dans l'étude de l'absorption. Jean-Baptiste Biot (1774–1862), jeune professeur de mathématiques à Beauvais en 1797–1800, s'était proposé pour relire les épreuves d'imprimerie ; il rendit alors souvent visite à Laplace, en lui signalant les difficultés qu'il rencontrait à la lecture du texte. « Une fois, dit-il, je le vis passer ainsi près d'une heure à tâcher de ressaisir la chaîne de raisonnements qu'il avait cachée sous ce mystérieux symbole : *il est aisé de voir* » [138]. Pour exprimer les angles, Laplace utilise les unités de la Révolution française, à savoir les grades, les minutes « de la nouvelle division » ( $10^{-2}$  grade) et les secondes « de la nouvelle division » ( $10^{-4}$  grade). Le mathématicien américain Nathaniel Bowditch (1773–1838) acheva en 1818 une traduction des 4 premiers volumes de la *Mécanique Céleste*, dans laquelle il a revu toutes les démonstrations, et inséré toutes les explications manquantes dans des notes de bas de page, dont certaines ne laissent au texte traduit que 2–3 lignes en haut de page, voire occupent elles-mêmes 2 ou 3 pages. Cette adaptation fort utile [102, 139–141] a été publiée en retard, de 1829 à 1839, notamment à cause de son coût.

Au chap. 1 du livre 10 Laplace traite de la réfraction, dans le cadre mécaniste de la théorie corpusculaire de la lumière ; il relie l'invariant  $I_B$  de Bouguer à la constante des aires pour le mouvement à force centrale des « molécules de lumière ». Il démontre mieux (quoiqu'encore non rigoureusement) le théorème d'Oriani, par un développement astucieux de la deuxième forme de (14) — voir [3, sous-paragraphe 5.1] — donnant sa célèbre formule [102, p. 521–527]

$$\chi_S \cong \left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) \eta_S \tan Z' - \left(\frac{H_1}{r_S} - \frac{\eta_S}{2}\right) \eta_S \tan^3 Z', \quad (30)$$

qui étend donc sa validité bien au-delà du modèle basique de Cassini avec lequel nous l'avons déjà rencontrée (au sous-paragraphe 2.1) ; cela explique la longévité (1685–1765) des tables de Cassini dans *La Connaissance des Temps*. Numériquement, le terme en  $\tan^3 Z'$  vaut 12,18'' pour  $Z' = 80^\circ$ , ce qui est cohérent avec la remarque de Maskelyne cité ci-dessus en ce qui concerne la fiabilité de la formule de Simpson. On notera qu'avec le modèle moins basique de Simpson (celui rejeté par Newton, avec son profil de  $\mu$  affine), on a rigoureusement

$$H_1 = H_A/2 \quad (31)$$

et que si on effectue un développement binomial, à l'ordre 2, de  $\sqrt{1 + (2/\cos^2 Z')[(H_A/r_S) - \eta_S]}$  dans le résultat (12) de Newton–Mayer, on obtient

$$\begin{aligned} \chi_S &\cong \eta_S \frac{\sin(2Z')}{2} \left(\frac{H_A}{r_S} - \eta_S\right)^{-1} \left[ \frac{1}{\cos^2 Z'} \left(\frac{H_A}{r_S} - \eta_S\right) - \frac{1}{2\cos^4 Z'} \left(\frac{H_A}{r_S} - \eta_S\right)^2 \right] \\ &= \eta_S (\tan Z') \left[ 1 - \left(\frac{H_1}{r_S} - \frac{\eta_S}{2}\right) - \left(\frac{H_1}{r_S} - \frac{\eta_S}{2}\right) \tan^2 Z' \right] \\ &\cong \eta_S \tan \left[ Z' - \left(\frac{h_1}{\eta_S} - \frac{1}{2}\right) \chi_S \right]; \end{aligned} \quad (32)$$

cela ne redonne pas la formule de Laplace (30) à cause de l'approximation  $n^{-1} \cong 1$  déjà faite par Newton dans l'expression (8) [3, sous-paragraphe 5.1], mais rappelle — si besoin était après les relations (20) — que le coefficient  $w$  doit bien, à l'instar de  $h_1/\eta_S$ , dépendre de  $T_S$  et  $P_S$ , contrairement à ce que pensait Bradley [46, p. 792–794] : dans les conditions normales et pour la raie d,  $w \cong (h_1/\eta_S) - 0,5 \cong 3,79$ , alors que Bradley disait  $w \cong 3$ . Claude-Louis Mathieu (1783–1875), ayant travaillé avec Biot [8, paragraphe 3] puis édité un livre posthume de Delambre [46], utilise des approximations analogues à celles donnant la dernière expression de (32), et se sert des valeurs de  $\eta_S$  et  $h_1$  mesurées directement et exprimées en fonction de  $T_S$  et  $P_S$ , pour en déduire les expressions de  $B$  et  $w$  aussi en fonction de  $T_S$  et  $P_S$ , mais fondamentalement à partir des propriétés de l'air, et non plus comme Bradley à partir de valeurs de référence de  $\chi_S$ . Comme attendu, cela lui fait réviser nettement à la hausse la valeur de  $w$  (dans les conditions de température et de pression prises par Bradley). Mathieu considère que la démarche approximative utilisée pour passer de la formule de Laplace (30) à celle de Bradley (19) est valable « jusqu'à [ $Z' =$ ]75° ; elle peut même s'étendre plus loin, car elle [Eq. (19)] s'accorde avec la table du Bureau des Longitudes jusque vers 82° ; et à 86°, où les réfractions varient accidentellement d'une vingtaine de secondes, elle donne des réfractions qui ne diffèrent que d'environ 10''. Au-delà, elle conduit à des réfractions trop petites » [46, p. 793] : 30' au lieu de 35' pour  $Z' = 90^\circ$  dans les conditions normales, avec les nouvelles valeurs de  $B$  et  $w$  calculées pour 0 °C et 760 torr d'après ses formules (au lieu de 10 °C et 752 torr pour Bradley). On voit donc que Mathieu abandonne la référence  $\chi_{Sh}$  à 0 °C et 760 torr, où sa nouvelle valeur de  $B$  correspond à  $\eta_S \cong 2,93876 \times 10^{-4}$  (valeur adoptée aussi par Laplace) et donc à  $\lambda_0 \cong 512$  nm, ce qui n'est plus dans l'infrarouge !

Signalons qu'un rapport, présenté par Charles-Louis Largeteau (1791–1857) et François Arago (1786–1853) devant le Bureau des longitudes dans les années 1840, poussera à recalculer la réfraction à partir de la formule de Laplace, pour tenir compte des progrès des instruments astronomiques, des observations, et enfin de la connaissance des coefficients thermoélastiques du mercure et de l'air : nous avons vu au sous-paragraphe 2.2 combien la méconnaissance de ce dernier était grande en 1799, et en 1821 encore elle faisait qu'Ivory mettait à  $-250$  °C le zéro absolu, ce qui l'induisait nettement en erreur dans ses analyses sur la réfraction horizontale [48]. Vincent Caillet (1811–1887), examinateur de la Marine, s'est chargé de ce travail ; il change les coefficients de la formule de Laplace, et précise leur variation avec  $T_S$  et  $P_S$  [142, 143].

Mais revenons à Laplace lui-même. Il traite trois cas où le profil d'indice est donné directement (et non pas indirectement comme dans son 4<sup>e</sup> — et dernier — cas) : celui de Cassini qui est traitable rigoureusement [102, p. 473–477] ; celui de Newton isotherme (où il retrouve la série de Kramp (26) avec ses approximations préalables — [102, p. 477–497]) ; et celui de Bouguer qui est aussi traitable rigoureusement [102, p. 497–507].

Pour le voisinage de l'horizon astronomique, où la formule (30) n'est pas valable, Laplace appliquait une approximation fondamentale à la relation (14), la mettant sous la forme

$$\chi_S \cong \int_0^{\eta_S} d\eta / \sqrt{2Y + \tan^2 \psi'} \quad \text{où } Y := \frac{z}{r_S} + \eta - \eta_S \quad (33)$$

(voir [3, paragraphe 8]). Pour améliorer les modèles d'atmosphère précédents qui avaient des défauts opposés, il les combine linéairement dans l'espoir que leurs défauts se neutralisent mutuellement ; à cette fin il suppose [102, p. 497–521] qu'entre  $\eta$  et  $Y$  il y a la relation

$$\eta = (1 + \beta Y)\eta_S e^{-\xi Y} \quad (34)$$

où  $\beta$  et  $\xi$  sont deux constantes liées (par le biais de la définition de  $H_1$  et de sa variation avec la température) à  $\eta_S$  et  $T_S$  qui sont fixés, mais aussi à la température à une altitude de 7 km par exemple. Laplace exprime  $\chi_S$  à l'aide de la fonction  $K$ , et obtient la réfraction horizontale :

$$\begin{aligned}
\chi_{Sh} &= \eta_S \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{(\xi - \beta) + \beta \xi Y}{2\sqrt{Y}} e^{-\xi Y} dY \\
&= \eta_S \sqrt{2} \left\{ (\xi - \beta) \int_0^\infty \frac{e^{-\xi Y}}{2\sqrt{Y}} dY - \frac{\beta}{2} \left[ \sqrt{Y} e^{-\xi Y} \right]_0^\infty + \frac{\beta}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\xi Y}}{2\sqrt{Y}} dY \right\} \\
&= \eta_S \sqrt{2} \left[ (\xi - \beta) \frac{K(0)}{\sqrt{\xi}} + \frac{\beta}{2} \frac{K(0)}{\sqrt{\xi}} \right] = \eta_S \left( \xi - \frac{\beta}{2} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Pour  $T_S$  et  $\mu_S$  fixés, il reste un degré de liberté permettant à Laplace de trouver  $\beta$  et  $\xi$  qui ajustent son modèle à la valeur de  $\chi_{Sh}$  observée — mais, redisons-le, pas à  $d\chi_S/d\psi'(0)$  simultanément. Les valeurs numériques ont été calculées à partir de 1806 par Alexis Bouvard (1767–1843) et Arago — qui sera en mission géodésique en Espagne de 1806 à 1808. Les tables correspondantes ont été mises dans *La Connaissance des Temps* pour 1809, publiées dès 1807.

Dans son édition de l'année suivante, on ajouta pour la première fois des tableaux (calculés par Delambre) permettant de corriger les effets des variations de  $T_S$  et  $P_S$  [144, p. 155].

Au chap. 3 de son livre 10 [37], Laplace montre le lien avec l'extinction : la masse d'air  $Q_S := \int_{-\infty}^{s_S} \mu ds$  — où la variable  $s$  désigne l'abscisse curviligne sur (R) — est quasi proportionnelle, même pour  $\psi'$  proche de  $0^\circ$  ou  $90^\circ$ , à  $\chi_S / \cos \psi'$  dans une atmosphère à profil exponentiel [3, sous-paragraphe 7.4] ; et pour d'autres atmosphères cela reste une bonne approximation [43]. On sait maintenant que les corrections liées au retard temporel des signaux des satellites sont quasiment proportionnelles à  $Q_S$  [145, 146], et il est fondamental de connaître la variation de cette quantité, donc aussi de  $\chi_S$ , avec  $\psi'$  ; il existe des tables récentes et des formules approximatives (à trois paramètres) de  $Q_S$  en fonction de  $\psi'$  [147], ou de  $\psi$  (plus rares) [147, 148] — le passage précis des premières aux secondes nécessitant une bonne connaissance de  $\chi_S$ . On comprend donc une des motivations actuelles pour maîtriser la théorie de la réfraction astronomique, d'autant plus que les satellites GPS sont souvent vus bas sur l'horizon !

Au cours de la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle, le développement de nouvelles techniques (comme l'interférométrie [149]) et les progrès de l'instrumentation rendent possible une étude plus fine de l'indice de l'air, de sa variation avec la longueur d'onde, la température et la pression ; et la question de l'influence des « vapeurs », évoquées par tant d'auteurs à chaque fois qu'une réfraction paraissait anormalement forte, peut enfin être soumise au verdict de l'expérience.

## 5. Les géodésiens métrologistes

Par la loi du 30 mars 1791, la Révolution française décida de fonder un nouveau système d'unités, basé sur des grandeurs invariables et partagées par toute l'humanité : c'est ainsi que le mètre fut choisi comme étant la quarante millionième partie de méridien terrestre, dont la longueur avait été mesurée dans ce but lors de l'expédition géodésique de Jean-Baptiste Delambre (1749–1822) et Pierre Méchain (1744–1804) depuis Dunkerque jusqu'à Barcelone (1792–1799). Mais en 1794 Méchain constata un écart de  $3,2''$  entre ses mesures d'une même latitude à Barcelone ; à son grand dam, la guerre entre l'Espagne et la France révolutionnaire l'a empêché de revenir sur les lieux pour reprendre cette mesure. Le 25 juin 1795, jour de la présentation d'un rapport de l'Abbé Grégoire devant la Convention, celle-ci adopta la loi créant le Bureau des longitudes, dont Delambre et Méchain comptent, avec Laplace, Lagrange et Lalande, parmi les dix membres fondateurs. Une dizaine d'années après, Biot et Arago avaient rappelé à Laplace, qu'ils voyaient à tour de rôle, l'intérêt de prolonger la mesure du méridien jusqu'aux Baléares (voir [150, paragraphe 1] dans ce numéro spécial). Ce projet plut à Laplace, qui obtint de Napoléon son financement, et le 2 mai 1806, le Bureau des longitudes charge Biot et Arago de l'accomplir (il les élira astronomes adjoints en août 1806 et en juillet 1807 respectivement) ; ils partent pour la Catalogne le 3 septembre 1806. Cette campagne géodésique, prévue pour 6 mois au plus, durera jusqu'en

1808, où le début de la guerre d'Espagne perturbera grandement la dernière mesure souhaitée par Arago : celle du triangle Majorque–Ibiza–Formentera, permettant de tester la symétrie de révolution pour la Terre. Quoiqu'il en soit, cette expédition donne à Arago l'occasion de voir que le cercle répétiteur utilisé par Méchain avait, pour son plus grand malheur, une erreur systématique qu'il ignorait ; puis vers 1812–1828 l'amélioration des tables de réfraction, entre autres, permettra de réduire au niveau des incertitudes (0,2'') la triste erreur de 3,2'' de Méchain. Biot et Arago utilisent un cercle répétiteur de Fortin, modèle Borda (1784). Gradué au 10<sup>e</sup> de grade, il a des verniers au 40<sup>e</sup>, et procure par répétition des pointés une précision comparable à celle donnée par un grand cercle (0,1''). Leurs prédécesseurs Delambre et Méchain utilisaient des cercles de Le Noir, avec une optique de Lerebours ; leur précision était moindre (1''), mais déjà 15 fois meilleure que celle des instruments antérieurs.

Biot a une connaissance très approfondie des réfractions astronomiques et terrestres, à cause de sa relecture de Laplace. Nul doute que son esprit brillant, confronté à des observations fines permises par l'accroissement de précision, sera mis en branle et fera progresser la compréhension des phénomènes de réfraction astronomique et terrestre. Dans ce paragraphe, nous en verrons deux exemples, dus essentiellement à Biot et à Delambre. Et dans [150], qui est un commentaire d'un texte historique majeur de Biot [72] dans ce numéro spécial, nous verrons comment il apporte deux résultats importants : son changement de variable et son théorème, que nous exposons dans [3] (paragraphe 6 et 7.1 respectivement).

Voici comment Biot lui-même, avec son style toujours ample et subtil, met en valeur qualitativement son théorème, lors de la séance du 5/09/1836 à l'Académie des Sciences : « Outre la singularité inattendue de trouver un élément de la réfraction horizontale, indépendant de l'état des couches lointaines, et s'obtenant, dans tous les cas possibles, sans intégration ; outre la liaison qui en résulte entre l'accroissement de la réfraction près de l'horizon et les variations également observables du pouvoir réfringent à partir de la couche inférieure, le théorème que je viens d'énoncer aura encore d'autres applications utiles. » [72], [151, p. 243].

Il peut s'énoncer de manière très simple :

$$1 - \kappa_S = \gamma_{Sh} := \left[ \frac{d\psi}{d\psi'}(0) \right]^{-1} \quad (36)$$

où  $\gamma_{Sh}$  désigne le grandissement angulaire local vertical d'une image vue sur l'horizon astronomique. Cette formulation est encore plus compacte que l'énoncé équivalent donné par Biot.

Les applications utiles dont parle Biot sont surtout théoriques, notamment pour la construction des tables à partir de modèles dont il faut ajuster les paramètres : on peut obtenir directement une contrainte sur ces paramètres à partir de la valeur de  $\gamma_{Sh} = [1 - (d\chi_S/d\psi')(0)]^{-1}$ , comme par exemple la relation (36).

Quant à son changement de variable, il lui permet de transformer — sauf dans le cas où (R) traverse un chenal optique — l'intégrale de la réfraction (14), impropre pour les rayons arrivant en S horizontalement, en une intégrale ordinaire, même pour la réfraction horizontale (où  $Z' = \pi/2$ ) :

$$\chi_S = \int_0^{Z'} - \frac{d \ln n / d \ln r}{1 + (d \ln n / d \ln r)} d\alpha. \quad (37)$$

Avec 13 points Biot l'a estimée numériquement selon la méthode de Simpson — i.e., celle qui améliore la « méthode des trapèzes » en prenant, comme approximation du graphe de la fonction intégrée, une succession d'arcs de paraboles passant par trois points consécutifs de ce graphe, au lieu d'une succession de segments joignant deux points consécutifs. Biot a obtenu un résultat à 1'' d'écart du résultat d'Ivory pour la réfraction horizontale. Mais cette technique astucieuse n'a guère suscité d'écho au XIX<sup>e</sup> ; elle a été redécouverte par Auer et Standish en 1979 (qui l'ont mise en œuvre numériquement d'une manière différente de celle de Biot) mais sa publication a été refusée par le journal auquel ils l'ont soumise, alors ces auteurs ont diffusé leur travail



sous forme de polycopié du département d'astronomie de l'université de Yale [152] ; il a été tellement apprécié que leur méthode est devenue la méthode classique, recommandée depuis 1992 par l'*Explanatory supplement to the Astronomical Almanac* [153]. Finalement, le journal a fait amende honorable en 2000, et a publié le texte d'Auer et Standish [154] ! Mais, malgré la caution qu'elle a reçue, cette méthode ne doit pas être considérée comme universelle, car elle ne permet pas de traiter les cas où il y a un chenal optique : l'intégrande diverge pour, entre autres, la valeur de  $\alpha$  correspondant au bord supérieur du chenal.

Depuis les deux autres expéditions de géodésie du siècle précédent (et que nous avons évoquées au paragraphe 3), on a compris que les variations de  $\chi_S$  avec l'altitude (qui paraissaient mystérieuses et contraires aux idées prégnantes issues d'une exploitation abusive du modèle de Ptolémée–Kepler–Cassini), proviennent des changements de  $\mu_S$  causés par ceux de  $P_S$  et  $T_S$  qui (avec  $\lambda_0$ ) sont, dans la formule de Simpson (postérieure à ces deux expéditions), les seuls paramètres susceptibles de faire changer concrètement  $\chi_S(\psi')$ . Après ces expéditions est paru le théorème d'Oriani, qui étend le domaine de  $Z'$  où on peut dire que  $\chi_S$  ne varie concrètement qu'avec le quadruplet  $(Z', \lambda_0, T_S, P_S)$ .

Or voilà qu'un observateur expérimenté comme Delambre, qui avait réalisé la partie Dunkerque-Rodez de la campagne géodésique de 1792–1799 visant à définir le mètre, constate que d'une nuit à l'autre,  $\chi_S$  prend des valeurs différentes pour un même quadruplet ! Il accumule ce genre d'observations, et il les liste dans son traité d'astronomie de 1814. On y lit [41, p. 326] : « dans des circonstances qui étaient les mêmes en apparence, la réfraction variait de 15 à 20'' sans qu'on pût en soupçonner la cause ; mais les variations sont encore bien plus sensibles à l'horizon, on en jugera par le tableau suivant » qui cite, entre deux jours à même pression et température, des différences de réfraction à une distance zénithale donnée pour une même étoile : 35'' à 88° ; 45'' à 89°, etc. Brinkley publie des constatations similaires en 1815 : « the quantity of refraction varies so much from some unexplained cause, the heights of the barometer and thermometer remaining the same, that observations below 80° can be of little use » [155, p. 81]. Mathieu présente bien le caractère difficilement explicable de ce fait pour l'époque : il y a « des réfractions qui, dans des circonstances semblables en apparence, éprouvent des variations notables et souvent plus grandes que celles que l'on remarque entre les différentes théories proposées. » [46, p. 794]

D'autres observateurs ont signalé des réfractions horizontales atteignant plusieurs degrés, d'abord dans les contrées polaires (cas extrême : l'effet *Novaya Zemlya* [10]), mais aussi à Athènes, à San Diego, etc. Par exemple Kepler, dans *Ad Vitellionem paralipomena* [30], relate une observation de Vénus refusant de se coucher pendant 15 min jusqu'à ce que sa position réelle atteigne 2° sous l'horizon.

Voici donc un nouveau mystère à élucider, et une belle occasion de faire progresser la compréhension théorique fine de la réfraction.

Biot assurait déjà en 1806 que, d'après les mesures d'indice faites avec Arago [156], une variation à  $Z' = 75^\circ$  ne peut pas être due à la vapeur d'eau (i.e. au fait que l'air n'est pas bien mélangé et que cela violerait sensiblement une des hypothèses de la formule de Laplace mise sous la forme (18) de [3, sous-paragraphe 4.1]) : ils furent dans les premiers à mesurer l'indice de plusieurs gaz (voir le sous-paragraphe 6.1). En 1836 Biot insiste : « la variation des pouvoirs réfringents due à l'inégale distribution de vapeur aqueuse, ou à des mélanges d'autres gaz, [doit] être nécessairement supposée très petite, à cause de l'accord déjà si approché des réfractions réelles avec les tables qui ne l'admettent point [...] » [72, p. 6]. Après avoir dressé de cette question un bref historique qu'il fait commencer en 1796 [149, p. 329–331], Arago abonde dans le même sens : « Mes expériences d'interférences accusent bien une différence entre les pouvoirs réfringents de l'air sec et de l'air humide, mais la méthode si délicate, si sensible, que j'ai imaginée prouve que cette différence doit être négligée dans le calcul des réfractions astronomiques. » [149, p. 332]

En fait, les variations importantes de  $\chi_S$  relevées pour  $Z' > 80^\circ$  sont rendues possibles par le fait que la formule de Laplace (sur laquelle est fondé le théorème d'Oriani) ne s'applique plus car  $Z'$  est trop proche de  $90^\circ$  : alors  $\chi_S$  varie non seulement avec  $(Z', \lambda_0, T_S, P_S)$ , mais aussi avec la forme du profil de réfractivité — au paragraphe 4, la comparaison des formules (6), (15) et (16) nous en a fourni un bel exemple. Les variations observées à  $(Z', \lambda_0, T_S, P_S)$  fixé doivent donc venir de modifications de forme du profil ; lesquelles ? Sont-elles (comme le pensaient Ivory, Mathieu, Newcomb, etc.) localisées surtout dans la haute atmosphère, ce qui fait qu'elles échappaient facilement aux instruments météorologiques du XIX<sup>e</sup> ? Ou au contraire (selon Biot et Bessel) dans la basse atmosphère, voire dans la couche limite proche du sol (sur quelques centaines de mètres d'épaisseur) ? La question ne sera vraiment tranchée qu'au XXI<sup>e</sup> siècle [157] : la bonne réponse est la dernière.

Quant aux écarts mentionnés pour  $Z' \leq 80^\circ$ , ils doivent en grande partie résulter d'erreurs matérielles (notamment sur la mesure de  $T_S$  à quelques dixièmes de degré près) : la transition, entre la partie du ciel où  $\chi_S$  ne varie quasiment qu'avec  $n_S$ , et celle proche de l'horizon où  $\chi_S$  devient très sensible à la structure détaillée de l'atmosphère (ainsi qu'à sa composition), est plutôt abrupte et se trouve à 2–3° de hauteur.

## 6. Les continueurs

Avec le temps des métrologistes est venue la quête de données précises sur lesquelles fonder les prédictions tirées de la théorie. En ce qui concerne les rayons lumineux, puisque leur courbure est due à une variation de  $n$  le long de (R) — liée surtout à la variation de la pression  $P$  et de la température absolue  $T$  avec l'altitude  $z$  — il se pose alors la question de la loi de variation de  $n$  avec  $(T, P)$ , ou plus fondamentalement de  $n$  avec la masse volumique  $\mu$  de l'air. Nous avons vu (au sous-paragraphe 2.2) que Newton a publié dans son *Opticks* [92] une mesure ( $n \cong 3201/3200$ ) sans préciser pour quel couple  $(T, P)$  ; cinq années auparavant, était parue la mesure de Lowthorp [77] qui, avec un prisme, trouvait  $n \cong 1,00036$  (donc plus que Newton), et qui écrivait en substance la conjecture que Newton avait laissée implicite en 1694–1695 quand il étudiait la réfraction astronomique : le pouvoir réfringent  $n^2 - 1$  est proportionnel à  $\mu$ . Mais à partir du milieu du XIX<sup>e</sup>, cette question s'est avérée plus subtile que prévu, et de nombreux travaux y ont été consacrés jusqu'à ces dernières années, notamment pour les besoins de la spectroscopie de précision (où il faut convertir les longueurs d'onde  $\lambda$  mesurées dans l'air en longueurs d'onde dans le vide  $\lambda_0 = n\lambda$ ), puis de la télémétrie laser — avec la mesure précise de la distance Terre-Lune, etc. Pour les études actuelles impliquant une connaissance de la réfraction astronomique, la précision requise sur celle-ci est de 0,04 % [49], donc on peut encore se contenter de la loi empirique simple, dite de Gladstone–Dale [158] — selon laquelle la réfractivité  $\eta := n - 1$  (ou « excès de réfraction » [74, 75], ce qui n'est pas le pouvoir réfringent) d'un gaz de composition donnée est proportionnelle à  $\mu$  — alors que ce n'est pas une loi rigoureuse, et que les mesures de Gladstone et Dale portaient en fait sur des liquides ! Ainsi donc, vaut-il mieux dire que  $\mu$  est proportionnel à  $n - 1$  (comme Thomas Young — avant même l'article de Gladstone et Dale [158] — pour sa table de réfraction dans le *Nautical Almanac* de 1822, et sur la qualité de laquelle il a polémique avec Ivory), ou bien à  $n^2 - 1$  (comme Newton, puis Kramp, Laplace, Biot et Arago, Newcomb, etc.) — ce qui, selon Bruns en 1891 [159, p. 169 en note de bas de page], complique inutilement ? Nous verrons tout de suite quelle réponse, nuancée, donner à cette question.

Un autre point à prendre en compte est la dispersion de l'air, i.e. la variation de  $n$  avec  $\lambda_0$  [160] : elle donne encore lieu à divers travaux [161–163] (notamment pour élargir le domaine spectral de validité des relations de dispersion — voir le sous-paragraphe 6.2) ; elle produit des effets fameux comme le « rayon vert », mais aussi d'autres qui compliquent cependant les mesures [164] — voir [3, paragraphe 9].

Quant à la variation de  $n$  avec le degré hygrométrique [165–167], il est amusant de savoir que son rôle dans la réfraction a été très surestimé dès l'antiquité (voir par exemple [11–13, 22–28]) alors que, sauf pour les études actuelles d'astrométrie fine, c'est un effet très négligeable [149, 156] et allant en sens contraire de ce qu'on l'on imaginait jusqu'au XIX<sup>e</sup> ! Nous détaillons cela dans [129, paragraphe 3].

### 6.1. *Discussion sur les lois régissant les variations d'indice de l'air avec la température et la pression*

Après la mesure unique de Lowthorp suivie de sa conjecture [77], des études avec plusieurs mesures ont été faites, de façon à dégager des lois. Et après un résultat contradictoire dû à Homberg (qui trouvait que la lumière n'est pas déviée lors de son passage du vide dans l'air) [61], Francis Hauksbee publie en 1709 des valeurs de la déviation des rayons traversant un prisme creux rempli d'air, montrant (à 5 % près) qu'elle est proportionnelle à sa densité [168]. Son résultat mettra longtemps à être admis, vu les doutes de l'époque.

Biot et Arago, en 1806, suivent la même méthode que Hauksbee, mais avec un meilleur prisme — celui de Borda, qui avait commencé cette expérience avant eux, mais que la mort avait emporté avant qu'il ne la mène à bien. Ils reprennent aussi de Borda un cercle répétiteur, car il augmente la précision des mesures de déviations. Ils prennent le temps de réaliser l'expérience avec plusieurs gaz — car Biot, professeur au Collège de France dès 1800 et académicien dès 1803, était en 1804 détaché à l'Observatoire de Paris pour effectuer, à la demande de Laplace, une étude de la réfraction astronomique (voir [150, paragraphe 1] dans ce numéro spécial). Celui-ci déclare, à la séance du 22 mars au Bureau des longitudes : « Les quantités qui résultent de ces nouvelles expériences s'accordent [pour l'air] singulièrement bien avec celles que Mrs Delambre et Ramond ont trouvé [cette même année] par les observations astronomiques et barométriques » [138, p. 108].

La première mesure interférentielle de l'indice de l'air a été effectuée par Jamin en 1857, ainsi que celle d'autres gaz [169].

Redisons que Laplace, et à sa suite Kramp, Biot, Ivory, Radau, etc., utilisaient une « loi » plus ancienne que celle de Gladstone–Dale, parue en 1863 : pour ceux-là, ce n'est pas  $(n - 1)/\mu$  qui est indépendant de  $(T, P)$  avec un gaz, mais  $(n^2 - 1)/\mu$  qu'on appelait en français son « pouvoir réfringent spécifique » — cette propriété étant liée, de manière assez naturelle, à des *a priori* de la théorie corpusculaire de la lumière. Cette ancienne loi est encore utilisée par Newcomb [132] au début du XX<sup>e</sup> siècle ! En 1913, dans un article d'encyclopédie [170], Azeglio Bemporad (1875–1945) et Pierre Puiseux (1855–1928) dressent un inventaire des auteurs sur la réfraction, et précisent lesquels utilisent la constance de  $(n - 1)/\mu$  ou bien celle de  $(n^2 - 1)/\mu$  [170] ; en utilisant la même technique de développement limité que pour celui mis en œuvre dans [129, paragraphe 2], on peut voir que le second choix est environ 4 fois plus éloigné de la réalité que le premier — et Radau note que « les expériences de M. Mascart tendent à prouver que [cette loi-là] est plus exacte [que celle-ci] ; mais, pour les calculs relatifs à la réfraction atmosphérique, on pourra conserver l'ancienne formule sans avoir à craindre une différence appréciable dans les résultats » [44, p. B.2]. Bemporad et Puiseux en tirent une conséquence intéressante pour l'époque : « On devra donc, dans les théories de la réfraction et de l'extinction, choisir la formule la plus avantageuse au point de vue analytique » [170, p. 17].

En 1815 Arago continua ses mesures d'indices de fluides avec Petit, et observa que pour un même composé chimique le pouvoir réfringent spécifique du liquide n'est pas le même que celui de sa vapeur [73] ; ceci fut confirmé par Jamin en 1856, et dès lors on se mit à penser que l'intérêt du pouvoir réfringent spécifique avait été mal fondé par les idées newtoniennes. En cette seconde moitié du XIX<sup>e</sup> apparurent les études de Mossotti [171], puis de Clausius [172,

p. 62–97], de Lorenz et Lorentz (voir par exemple [173, article III]) qui introduisirent la réfractivité moléculaire de l'air  $\frac{M_a}{\mu} \frac{n^2-1}{n^2+2}$  (appelée aussi « réfraction molaire ») et montrèrent que, dans le modèle du champ local de Lorentz, elle ne dépend que de  $\lambda_0$  et de la composition du milieu (plus ou moins humide ou chargé en  $\text{CO}_2$ ...), mais pas de son état (gazeux ou liquide) ni des conditions de température et de pression. On comprit donc que la hausse de pouvoir réfringent spécifique entre une vapeur et le liquide correspondant vient de l'augmentation de  $n^2 + 2$  lors de la liquéfaction — s'accompagnant d'un renforcement des influences électriques entre les dipôles des molécules voisines, ce qui permet alors à  $n^2 + 2$  de devenir notablement supérieur à 3. La conservation de la réfractivité moléculaire lors du passage de l'état liquide à l'état gazeux a été notée par Lorenz et Prytz, entre autres, mais elle n'est pas vérifiée par l'eau pure, car les corrélations d'orientation entre molécules d'eau à cause des liaisons H invalident le modèle du champ local de Lorentz ; cependant les liaisons H sont quasiment inexistantes dans l'air humide, et la loi de Clausius–Mossotti s'y applique [174, p. 63–68].

Mais puisqu'en première approximation [173, article IV]

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} \cong \frac{n^2-1}{3} \cong \frac{2(n-1)}{3} \quad (38)$$

(compte tenu de  $n \cong 1$ ), chacune des deux lois antérieures n'est qu'une version approchée de la loi de Clausius–Mossotti ou Lorentz–Lorenz. Pour les calculs de réfraction astronomique, les approximations faites en (38) sont tolérables [129, paragraphe 2], donc on peut « conserver l'ancienne formule sans avoir à craindre une différence appréciable dans les résultats ». De plus, cela laisse le choix entre trois expressions différentes, alors on peut en profiter pour choisir celle qui nous arrange le mieux, selon la parité de l'indice polytropique  $j$  par exemple [175, p. 403].

Avec le cas de l'eau [176] nous avons vu que la loi de Lorentz–Lorenz n'est pas valable pour tout diélectrique linéaire local isotrope ; à 1 atm, de 15 °C à 100 °C la réfractivité moléculaire de l'eau ne reste pas constante, mais varie de 0,2 % — alors que les variations de  $\mu$  et de  $n$  (à 588 nm) sont voisines de 4 % et 1 % respectivement. Cette variation résiduelle de réfractivité moléculaire vient des failles du modèle du champ local de Lorentz [174], qui sert à déduire certaines propriétés macroscopiques du diélectrique (comme  $n$ ) à partir de quelques-unes de ses caractéristiques microscopiques (comme la polarisabilité de ses entités chimiques). Autre problème pour cette relation de Lorentz–Lorenz : dans les mélanges le champ local est différent pour chaque constituant [177]. La loi qui relie le mieux  $n$  à  $\mu$  est « le 2<sup>e</sup> développement du viriel », qui exprime la réfractivité moléculaire comme une série entière de la masse volumique ; son second terme est perceptible aux hautes pressions (de l'ordre de 10 MPa), et n'est connu qu'à 10 % près environ [167].

Pour des études précises de la réfractivité de l'air en un point  $M$  (qui sont un préliminaire indispensable pour la spectroscopie de précision, la télémétrie laser-Lune, etc.), des écarts à la loi de Gladstone–Dale

$$\eta(T(M), P(M), \lambda_0) := n(T(M), P(M), \lambda_0) - 1 \cong C(\lambda_0, M) \mu(T(M), P(M)) \ll 1 \quad (39)$$

et à celle des gaz parfaits sont effectivement pris en compte. Certes, les pressions considérées dans l'air gazeux ne nécessitent pas l'utilisation du 2<sup>e</sup> développement du viriel [167], mais on ne se contente pas [162, 163, 165, 166, 173, 178, 179] de l'approximation (38) d'ordre 1 en  $\eta := n - 1$ . En outre, depuis les travaux d'Éleuthère Mascart (1837–1908) qui a mesuré, dans les années 1870, les variations de  $\eta$  avec  $P$  de manière interférentielle, on sait que celles-ci (à température et longueur d'onde fixées) sont non-linéaires [74, 75]. Mascart trouvait que la difficulté des mesures ne permettait pas de conclure à une non-proportionnalité de  $\eta$  et  $\mu$  quand  $P$  varie, au contraire, curieusement, du cas où  $T$  varie : il avait nettement observé que, quand  $T$  augmente, la décroissance relative de  $\eta$  est plus rapide que celle de  $\mu$ . On en déduisait que la non-linéarité de  $\eta$  vue en fonction de  $P$  (à  $T$  fixé) provient uniquement des écarts de l'air à la loi des gaz parfaits.

Mais Lorentz, en réanalysant en 1878 les données de Mascart sur les liquides, a montré [173, article II] que la constance de  $\eta/\mu$  est expérimentalement moins bien satisfaite que la constance de la réfractivité moléculaire — pour un historique plus détaillé, voir [165]. On dit maintenant que  $\eta$  n'est pas approximativement proportionnel à  $\mu$ , mais à un « facteur de densité », qui n'est pas non plus proportionnel à  $P/T$ . Tout cela complique la variation de la réfractivité de l'air avec la température Celsius  $t$  et la pression — voir les formules contemporaines et précises de Barrell et Sears [165], Edlén [178], Owens [179], Jones [162], Bönsch et Potulski [166] (en ordre chronologique). À la fin de [129, paragraphe 2], on montre comment, en suivant Bönsch et Potulski, on trouve (avec  $t := T - T_0 := T - 273,15$  K)

$$\eta(T, P, \lambda_0) \cong \left[ 1 + \frac{0,5953 - (0,009\,876\, t/^{\circ}\text{C}) P}{10^8\, \text{Pa}} \right] \frac{M_a C(\lambda_0, M)}{RT_0} \frac{P}{1 + (0,003\,6610\, t/^{\circ}\text{C})}. \quad (40)$$

Notons que le site internet du NIST fournit des calculateurs en ligne (voir leurs adresses URL dans [129, paragraphe 5]), donnant la valeur numérique de l'indice de réfraction, en fonction de celles des divers paramètres (y compris le degré hygrométrique dont nous discutons l'influence dans [129, paragraphe 3]) ; nous achevons la présente discussion en rappelant que les raffinements que nous venons de voir sont utiles pour la spectroscopie de précision, mais pas pour l'étude de la réfraction astronomique, où une précision de 0,04 % suffit. Aussi, pour cette dernière, on considère encore actuellement que le terme entre crochets dans la relation (40) est constant (ses variations ayant des effets bien plus faibles que ceux des erreurs de mesure de  $T_S$  et  $P_S$ ), ce qui revient à adopter la loi de Gladstone–Dale et celle des gaz parfaits. C'était déjà la conclusion de Bemporad et Puisseux [170, p. 17], et c'est ce que nous ferons pour toute la suite de notre étude, ainsi que dans [3].

## 6.2. Dispersion chromatique dans l'air

Le mathématicien Augustin Louis Cauchy (1789–1857) postulait que les gaz ne présentent pas de dispersion chromatique ; cela lui attira les foudres d'Arago à l'Académie des sciences en 1836 [180, 181], car celui-ci rappelle qu'il l'avait mesurée pour l'air (par deux méthodes d'optique géométrique, la première en 1812 et la seconde en 1815, comme le montrent ses registres d'observation [182, p. 738–741]) puis pour d'autres gaz, et que ce travail a donné lieu à l'article inaugural des *Annales de Chimie et de Physique* [73], mais que la dispersion avait été entrevue par Bouguer dès 1748 [56, paragraphe 1], puis par Euler en 1754, Lemonnier en 1761, Dollond en 1779, ainsi qu'Herschel en 1783, 1785 et 1805 ! Arago aurait pu rajouter Bessel à sa liste [183, p. XIV]...

La première mesure interférentielle de la dispersion de l'air a été effectuée par Ketteler en 1865, également avec un interféromètre de Jamin [184].

Avec une erreur maximale de 0,001 % sur la réfractivité de l'ancien air normal (i.e. sec, à 15 °C et 1 atm, avec 330 ppmv de CO<sub>2</sub> [129, paragraphe 1]) de l'ultraviolet (0,23 μm) à l'infrarouge proche (1,69 μm), on a, d'après Peck et Reeder en 1972 [161] :

$$10^8 \eta \cong \frac{5\,791\,817\, \mu\text{m}^{-2}}{238,0185\, \mu\text{m}^{-2} - \lambda_0^{-2}} + \frac{167\,909\, \mu\text{m}^{-2}}{57,362\, \mu\text{m}^{-2} - \lambda_0^{-2}}. \quad (41)$$

Cette formule garantit donc, quant à la dispersion de l'ancien air normal, la précision de 0,04 % requise pour l'estimation de la réfraction en astrométrie fine. D'autres travaux ont été publiés depuis, pour mettre en équations le rôle des constituants mineurs de l'air, pour accroître la précision, et pour étendre le domaine de validité ; parmi eux, ceux qui font le plus autorité sont les trois articles consécutifs de Ciddor [163, 167, 185]. Notons que le titre moyen de CO<sub>2</sub> en avril 2021 était 415 ppmv — d'où, par rapport à 330 ppmv, un accroissement relatif de réfractivité de

0,0045 % dans le visible. Dans [129, paragraphe 4], on évoque le comportement de la réfractivité de l'infrarouge jusqu'aux ondes radio.

Les phénomènes de réfraction atmosphérique peuvent donc être accompagnés d'effets chromatiques, comme les liserés rouge et bleu découverts (et correctement interprétés) en 1748 par Bouguer, avec son héliomètre, sur deux bords opposés de l'image du Soleil (respectivement en bas et en haut si elle est redressée [56, paragraphe 1]) ; tel est l'effet usuel de la dispersion atmosphérique, dont nous détaillerons les conséquences (avec la forme basique du fameux « rayon vert ») dans [3, paragraphe 9].

Dans des cas non standard, on enregistre parfois des effets curieux, encore partiellement inexpliqués, comme les observations télescopiques de Devaux en 1928 sur Vénus et Jupiter au Pic du Midi [186] :

« Parfois même il y a renversement complet des couleurs, renversement qui ne dure en général qu'un instant. Mais le 8 février, il y eut renversement complet pendant plus d'une minute ; le rouge occupait nettement la partie supérieure du disque de Vénus, avec cependant des oscillations marquées. [...] Le 11 février, le même phénomène s'est reproduit, mais moins nettement, et pendant moins longtemps ».

Probablement des ondes de gravité dans l'atmosphère sont intervenues dans ce cas. Il y a aussi une intrigante observation ancienne de Bessel, en 1842 :

« [...] quoique l'air parût être parfaitement clair, le rouge et le bleu du spectre étaient seuls visibles, de manière que l'étoile ressemblait en quelque sorte à une étoile double, composée d'une étoile rouge et d'une bleu » [187] ;

elle ressemble fortement à celle de Bauer et Danjon :

« Le 24 août 1922, pendant un séjour à l'observatoire Vallot au Mont Blanc, à l'altitude de 4 347 m, ces deux savants ont été témoins du phénomène suivant : La planète Vénus était près de l'horizon, pendant une bonne période de visibilité, et l'un des observateurs l'examinait à l'aide d'une lunette (objectif de 0,090 m ; grossissement 150), tandis que l'autre observateur la suivait à la jumelle. La planète paraissait *double* : l'une de ses images, celle du bas, était rouge, l'autre était verte. Un intervalle obscur, assez large, séparait les deux images. [...] le spectroscopie montre alors que, dans ce cas, le spectre se compose de deux bandes, l'une dans le vert, l'autre dans le rouge, avec suppression complète du jaune et de l'orangé. Le bleu est supprimé par la diffusion atmosphérique. [...] Quand la planète fut très rapprochée de l'horizon, l'observateur à la lunette vit, tout à coup, l'image rouge s'éteindre, puis quelques secondes après, ce fut le tour de l'image verte ! Le phénomène fut perçu par l'autre observateur, qui ne pouvait, à la jumelle, séparer les deux images, de la manière suivante : Vénus lui apparaissait comme un gros point orangé qui, brusquement, tourna au vert et garda cette teinte jusqu'au coucher définitif. » [188]

### 6.3. La prolifération des modèles d'atmosphère et des développements en série

Dans le premier quart du XIX<sup>e</sup> siècle, on manque toujours de connaissances sur la haute atmosphère, mais des outils mathématiques puissants et une connaissance de plus en plus précise des propriétés de l'air sont disponibles. On voit donc se perfectionner les approches analytiques de l'intégrale de réfraction, avec des profils de réfractivité plus variés mais sans qu'il soit possible de contrôler leur adéquation avec la physique atmosphérique ; c'est l'époque de prédilection pour une approche mathématique pure.

En 1823, Ivory proposera dans la foulée de Laplace un modèle exploitant une idée similaire à celle du quatrième modèle étudié par ce dernier (cf. paragraphe 4), mais qui évite d'être fondé sur la variable  $Y$  dont la signification physique n'est pas basique : il combine linéairement [84, p. 453] la relation fondamentale du modèle isotherme (où  $P$  varie proportionnellement à  $\mu$ ), avec celle du modèle polytropique d'indice  $j = 1$  (où  $P$  varie proportionnellement à  $\mu^2$ ) qui a aussi un défaut opposé à la précédente (l'une donne des réfractions trop fortes, et l'autre trop faibles). Ce modèle est élégant, mais Biot y pointera cependant quelques faiblesses [72], et le calcul de l'intégrale de réfraction n'est pas simple même avec les approximations traditionnelles [84, p. 458–475] — cependant il ne fait pas intervenir de fonction transcendante.

La nouvelle table de Bessel (1830) [133], évoquée au paragraphe 4, a une erreur inférieure à 1'' jusqu'à 80° de distance zénithale. De 80° à 88°, les nombres de la table française (celle de Laplace) dépassent ceux de l'allemande (de Bessel), de 4'' pour 88°, et 2' 44'' pour 90°. La valeur de  $\chi_{Sh}$  selon Delambre (33' 46'') est mise en doute ;  $\chi_{Sh}$  sert de test permettant de départager les diverses théories. Mais les tables de Laplace sont maintenues dans *La Connaissance des Temps*, probablement sous l'influence d'Arago (entré au Bureau des longitudes dès 1802) qui privilégiait les travaux français.

D'autres modèles d'atmosphère ont encore été proposés : par exemple, en 1865 celui de Hugo Gylden (1841–1896), où  $T(z)$  est un polynôme de degré 2 ; les modèles d'Ivory ou Kowalski, avec  $1 - (T/T_S)$  proportionnel à  $1 - (\mu/\mu_S)$  ou  $[1 - (\mu/\mu_S)]^{5/7}$  respectivement ; les lois des atmosphères polytropiques [189] d'indice  $j$  égal à environ 4 selon Ivory [48, 190, 191] ou 5 selon Bauernfeind [192] (elles impliquent que  $T$  est proportionnel à  $r^{-1}$  et  $\mu$  à  $r^{-j}$ ). Pour intégrer  $\chi_{Sh}$  dans le cas de l'atmosphère polytropique, Ivory part d'une expression approchée voisine de (33), effectue un changement de variable au profit de  $T/T_S$ , puis un développement en série binomial (en fonction d'un paramètre de l'ordre de  $\eta_S$ ), facilement intégrable terme à terme moyennant un changement de variable... Le dernier modèle à utiliser une intégrale donnée par la fonction  $K$  de Kramp — définie par (27) — est probablement celui d'Esclangon [193] : il montre qu'en supposant  $\ln(\eta/\eta_S)$  proportionnel à  $n_S^2 r_S^2 - n^2 r^2$ , ce qui est bien vérifié dans l'atmosphère jusqu'à 13 km d'altitude au moins, l'intégrale approximative de Newton (8) s'exprime facilement à l'aide de  $K$ .

À titre de dernier exemple de calcul littéral avec la fonction  $K$ , citons l'hypothèse

$$\eta = \eta_S [(1 + \beta)e^{-\xi Y} - \beta e^{-2\xi Y}] \quad (42)$$

proposée par Radau [44, p. B.26] car, à partir de la forme approximative fondamentale (33) pour le voisinage de l'horizon astronomique, elle conduit à une expression qui s'accorde alors mieux avec l'expérience :

$$\begin{aligned} \chi_S &= \frac{\sqrt{2}\eta_S \xi}{2} \int_0^\infty [(1 + \beta)e^{-\xi Y} - 2\beta e^{-2\xi Y}] dY \Big/ \sqrt{Y + \frac{\tan^2 \psi'}{2}} \\ &= \sqrt{2}\eta_S \sqrt{\xi} \left[ (1 + \beta) \exp\left(\xi \frac{\tan^2 \psi'}{2}\right) K\left(\sqrt{\frac{\xi}{2}} \tan \psi'\right) - \sqrt{2}\beta \exp(\xi \tan^2 \psi') K\left(\sqrt{\xi} \tan \psi'\right) \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Mais Radau lui-même critique cet usage des relations entre  $\eta$  et  $Y$  probablement initié par Laplace, et qui masque la structure de l'atmosphère considérée ; dans la pratique, il est plus réaliste d'utiliser directement les données de  $T$  et  $P$  en fonction de  $z$  (et on admet que celle de  $\mu$  en découle par la loi des gaz parfaits), ou des relations empiriques entre deux de ces trois fonctions, en plus de la loi de l'hydrostatique

$$dP/dz = -\mu g. \quad (44)$$

Avec ses deux mémoires de 1882 et 1889 [44, 194], primés par l'Académie des sciences, Rodolphe Radau (1835–1911) nous livre un concentré du type de calculs effectués à l'époque,

et notamment les développements en série. Dans [3, sous-paragraphe 5.2] (complété par [195] qui est un commentaire historique dans ce numéro spécial) on montre en termes modernes le cheminement de Radau : il met l'intégrale (14) de la réfraction sous la forme

$$\chi_S = n_S r_S (\tan Z') \int_1^{n_S} n^{-2} r^{-1} [1 + F(n, Z')]^{-1/2} dn \quad (45)$$

où on a posé, en tenant compte de la relation entre  $r$  et  $n$  à  $Z'$  fixé,

$$F(n, Z') := \left(1 - \frac{n_S^2 r_S^2}{n^2 r^2}\right) \tan^2 Z'; \quad (46)$$

et, en considérant implicitement le domaine des directions d'observation usuelles, donc telles que  $|F(n, Z')| < 1 \quad \forall n \in ]1, n_S]$ , il développe en série le crochet de (45) — sans se soucier de la légitimité de permuter l'intégration et la sommation infinie ! — ce qui le conduit à admettre

$$\chi_S = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p \tan^{2p+1} Z' \quad (47)$$

avec

$$a_p = r_S \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \int_1^{n_S} n_S n^{-2} r^{-1} \left(1 - \frac{n_S^2 r_S^2}{n^2 r^2}\right)^p dn \quad (48)$$

où  $N!$  et  $N!!$  désignent respectivement la factorielle et la double factorielle de  $N$ .

Ensuite, Radau estime les coefficients  $a_p$  en utilisant l'approximation fondamentale présente aussi dans (33), ainsi que diverses techniques (dont d'autres développements en série occultant la physique du phénomène !). En approximant par 1 le préfacteur  $n_S n^{-2}$  dans l'équation (48), il trouve

$$a_0 \cong (n_S - 1) [1 - (H_1 / r_S)], \quad (49)$$

ce qui confirme le premier terme de la formule de Laplace (30). Avec cette formule, en l'appliquant au cas du modèle de Cassini (sous-paragraphe 2.1) on retrouve une propriété identique à celle que Bouguer a prise en défaut [103] : quand l'observateur s'élève,  $n_S$  restant constant mais  $H_1$  diminuant dans ce modèle,  $\chi_S$  augmenterait un tout petit peu...

Moyennant une approximation faite uniquement à titre pédagogique [3, sous-paragraphe 5.2.1] mais ne changeant rien à la conclusion générale de ce calcul, nous trouvons, pour une atmosphère à profil de réfractivité exponentiel,

$$\chi_S \cong (n_S - 1) \left[ \left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p (2p-1)!! \left(\frac{H_1}{r_S} \tan^2 Z'\right)^p \right] \tan Z' \quad (50)$$

et on voit que cette série diverge, même violemment puisque  $\lim_{p \rightarrow \infty} (2p-1)!! [(H_1 / r_S) \tan^2 Z']^p = \infty$ . Radau obtient une expression similaire [44, p. B.14], et dit qu'elle donne une excellente approximation jusqu'à  $Z' = 80^\circ$  ; le caractère alterné de la série (47), et impair (évident par symétrie) favorise l'obtention d'une bonne approximation. Mais pour  $Z' = \arctan 10 \cong 84,3^\circ$  « la série diverge à partir » de  $p = 5$  — tel que  $a_5 \tan^{11} Z' \cong 10''$  [44, p. B.15]. Radau ne dit jamais explicitement (ni dans son mémoire ultérieur de 1889 sur le même sujet [194]) que la série approchée obtenue finalement pour  $\chi_S(\tan Z')$  est semi-convergente, ni que  $\lim_{p \rightarrow \infty} a_p \tan^{2p+1} Z' = \infty$  aussi petits que soient  $H_1$  et même  $\tan Z'$  (non nuls) ! Nous expliquons dans [3, sous-paragraphe 5.2.2], et plus en détail dans [195], d'où vient ce paradoxe gênant, qui nous fait toucher du doigt les limites de l'approche par développement en puissances de  $\tan Z'$ . Malgré cela, les tables de Radau ont été publiées dans *La Connaissance des Temps*, pour 1860 ; avec une constante légèrement modifiée, elles continuent à être utilisées de nos jours dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes* — alors que l'usage de la formule de Laplace a disparu définitivement de *La Connaissance des Temps* (nouvelle série depuis 1980) à partir de 1995.



Ce type d'approche de la réfraction astronomique était très répandu aux XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles, où de nombreuses études visant à approcher  $\chi_S$  ainsi ont été effectuées. Malheureusement elles sont très lourdes : pour calculer les intégrales donnant les coefficients des développements, des méthodes subtiles d'intégration ont été parfois utilisées, notamment avec un théorème de Lagrange ([44, p. B.40], [196, p. 237]) ; nous avons vu aussi (au début de ce même sous-paragraphe) le cas d'une atmosphère polytropique, pour laquelle la méthode d'Ivory donne les coefficients de la série exprimant  $\chi_S$  eux-mêmes sous la forme de séries, d'où une série double — la dernière en date semblant être celle de Garfinkel en 1967 [196]. Un exemple paroxystique est le travail de Bauernfeind publié en 1864 [192], qui mène les calculs jusqu'à l'ordre 28 en sec  $Z'$  pour une atmosphère polytropique d'indice 5... Quant à Ivory, son plus grand mérite n'est pas d'avoir étudié aussi une atmosphère polytropique [48, 190, 191], ni d'avoir proposé un modèle d'atmosphère supplémentaire en 1823 [84], mais d'être le premier à montrer ([84, p. 467], [197]) que les développements de son époque sont seulement des développements limités pour une distance zénithale au voisinage de 0, et que ce ne sont pas des séries convergentes ; on dit dans ce cas que les développements sont semi-convergentes. Par chance leur divergence est lente, et ils ont quand même pu fournir des tables numériques d'assez bonne qualité pour une distance zénithale allant de 0° à 82°. Cet avertissement de 1821 resta en général ignoré, même par Newcomb, et valut à Ivory une controverse de 1821 à 1825 avec un Thomas Young indûment sarcastique [95, 198–200] ; les premiers qui retrouvèrent sérieusement cette idée furent Theodor von Oppolzer (1841–1886) [201, p. 18] puis Bruns en 1891 [159, p. 180]. Ivory était trop en avance sur ses collègues ! La notion de semi-convergence était nouvelle (et peu familière aux astronomes) : elle serait due aux *Exercices de Calcul Intégral* de Legendre [202, p. 267 et 294], où il discute des séries « demi-convergentes » dont le terme général décroît en valeur absolue (« converge ») puis croît (« diverge »).

Ivory est moins lucide sur les variations de réfraction horizontale (comparer [84, p. 424] et [84, p. 436]) : ses calculs montrent que la structure de la haute atmosphère influe peu, mais il déclare le contraire par ailleurs — comme s'il avait du mal à les croire ! Cela peut s'expliquer par le fait qu'en valeur absolue, les termes d'ordre plus élevé de (50) croissent plus vite avec  $Z'$  que les termes d'ordre inférieur, d'où l'idée fautive suivie par Ivory, Mathieu, Newcomb, etc. : que les moments d'ordre élevé de la dérivée de diverses puissances de  $\mu$  [195, sous-paragraphe 3.1.2], et donc la structure de la haute atmosphère, joueraient un rôle important dans la réfraction près de l'horizon — dont on pourrait déduire cette structure ; c'est tout le contraire, comme l'avaient deviné Bessel, Biot, etc. Le caractère alterné de (50) fait que les évolutions des termes d'ordre élevé se compensent partiellement.

L'écriture sous forme de série, qui a connu tant de succès en mécanique céleste au XIX<sup>e</sup>, a été suivie aussi pour la réfraction astronomique et a freiné la compréhension de ses propriétés — d'où l'idée fautive d'Ivory, suivi de Newcomb (et l'insatisfaction avouée par celui-ci dans son livre). En fait, aucun des profils d'atmosphère envisagés à cette époque n'est pleinement satisfaisant, puisqu'aucun ne correspond au profil réel. Mais au XIX<sup>e</sup> siècle, en l'absence de moyens de calculs numériques puissants, c'était un pis-aller dont Newcomb écrivait en 1906 : « There is, perhaps, no branch of practical astronomy on which so much has been written as on this and which is still in so unsatisfactory a state » [132, p. 223] ; c'était quand même intéressant tant qu'on n'allait pas trop loin dans la somme de la série. C'est pourquoi Bemporad et Puiseux, dans leur article de synthèse sur les calculs de réfraction, notamment ceux de Bessel et Radau, écrivent : « Quand on réfléchit à la peine qu'ont demandée les développements analytiques des théories de la réfraction, et notamment les plus complets de ces développements élaborés par *H. Gylden* et *R. Radau*, on a le droit de penser que la réfraction astronomique s'obtiendra plus aisément par un simple calcul numérique (quadrature mécanique), qui tiendra compte directement des données de la physique de l'atmosphère. » [170, p. 37] En effet, lorsque les calculs littéraux,

même à grand renfort d'approximations, deviennent trop volumineux et utilisent des notions très sophistiquées, l'avantage qu'ils devaient apporter en termes de gain en compréhension et en temps s'amenuise, et le recours à une étude purement numérique perd son caractère frustrant.

#### 6.4. *Autres observations ; passage aux calculs informatisés*

Rodolphe Radau était lié au *gentleman scientist* [203] Antoine d'Abbadie (1810–1897) — voir l'introduction de [195]. Celui-ci voulait étudier les changements d'azimut apparent dus à la réfraction — ce qui serait important pour les mesures géodésiques comme celles qu'il a faites lors de son exploration de l'Abyssinie et pour son établissement de la première cartographie de ce pays. Dès le début de la construction (1864–1870) de son château néo-gothique *Abbadia* dans le Pays Basque, il avait prévu des ouvertures dans les murs pour y installer les composants d'une lunette d'une vingtaine de mètres de focale visant le sommet de La Rhune. Mais cette expérience fut un échec, probablement par défaut de qualité des images. Au lieu de faire boucher ces ouvertures par la suite, d'Abbadie les a laissées apparentes, et a mis autour de l'une d'elles une pierre monumentale gravée d'une devise écrite par lui en basque : « *Ez ikusi, ez ikasi* » (« Je n'ai rien vu, je n'ai rien appris »).

D'Abbadie n'était pas le seul à s'intéresser à cette *réfraction latérale*. Sur ce terrain, il a été rejoint en 1880 par Bauernfeind, qui n'a rien trouvé non plus [122, p. 226–243]. Dans son manuel de géodésie de 1950, Gossett consacre une page à ce sujet, et dit : « The errors caused by horizontal [i.e., lateral] refraction may be of considerable size. Night observations have occasionally been found to be in error by five or six seconds because of horizontal refraction and daylight observations by two or three times that amount » [204, p. 135–136] ; mais cela semble exagéré. Le cas exceptionnel de réfraction latérale sur le lac Léman, décrit par Jurine et Soret pour le 17 septembre 1818, semble relever d'une erreur d'interprétation d'après Forel [109, p. 561–565]. En 1959, Danton considérait encore qu'à ce sujet il n'y a toujours rien de prouvé [205]. On en est au même point actuellement : « the rare reports of such sightings undoubtedly arose from misinterpretations of observations. » [206]

À l'époque de la parution des mémoires de Radau, apparaît un progrès dans les méthodes de mesure de  $\chi_S$ , dû à Maurice Loewy (1833–1907), directeur de l'Observatoire de Paris de 1896 à 1907. Auparavant, pour permettre à un observateur d'observer à la lunette le ciel entier sans quitter son siège, Loewy avait inventé l'équatorial coudé, qu'il utilisa de 1883 à 1886 à Paris pour mesurer des positions d'astéroïdes, de comètes et de nébuleuses. Puis en 1886, Loewy tente de mesurer plus précisément, avec cet équatorial, la réfraction astronomique. Pour cela il place devant l'objectif un prisme d'angle  $45^\circ$  dont les faces sont argentées, de façon à superposer les images d'objets angulairement distants de  $90^\circ$ . En choisissant d'observer ainsi une paire d'étoiles qui sont initialement à la même hauteur, et en notant la variation d'écart vertical entre leurs images jusqu'à ce que l'une d'elles arrive à l'horizon, on en déduit des mesures précises de la réfraction. Loewy n'a pas publié ses résultats, mais en 1905 il réfléchissait encore à de nouvelles mesures, empêchées par son décès brutal.

À la fin de l'époque classique, deux principales voies d'étude s'offraient pour traiter de la réfraction astronomique : celle des intégrations plus ou moins rigoureuses de (14), mais avec des profils  $n(r)$  non réalistes (comme ceux de Simpson–Mayer ou de Bouguer) ; celle des développements, qui malheureusement ne sont que semi-convergens (Ivory, Bauernfeind, Radau, Newcomb), mais donnent par chance des valeurs numériques satisfaisantes à condition de les tronquer à des termes d'ordre pas trop élevé.

De nos jours, il n'est plus nécessaire de choisir entre ces deux voies analytiques, car les moyens informatiques permettent un recours massif aux méthodes purement numériques. Nous détaillons dans [150, sous-paragraphe 3.1] l'histoire de la méthode de Biot–Auer–Standish [72, 152]

implémentée par Hohenkerk et Sinclair [207] pour le modèle du *Royal Greenwich Observatory* [208] reprenant celui de Garfinkel [196] et Saastamoinen [145] (une troposphère polytropique d'indice 4,256 surmontée d'une stratosphère isotherme) ; on a vu que c'est devenu la technique classique, recommandée par l'*Explanatory supplement to the Astronomical Almanac* depuis 1992.

Malgré cette caution, elle a ses faiblesses [150, sous-paragraphe 3.1], alors elle est concurrencée par la méthode de Kivalov et Young [209] ; et il existe d'autres modèles, comme ceux d'une atmosphère polytropique par morceaux [210].

Mais à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, les propriétés de l'indice de l'air étant connues avec une précision suffisante pour la réfraction astronomique, on butait sur le problème des séries semi-convergentes et sur la méconnaissance de la structure de la haute atmosphère. Des ouvertures dans ces directions étaient attendues ; nous en mentionnerons deux.

## 7. Les ouvreurs

La première ouverture est purement théorique, due à Ernst Kummer (1810–1893). Il renouvelle l'étude traditionnelle de  $\chi_S(\psi')$  en ayant l'idée [211], rare dans ce contexte, d'exploiter une méthode d'usage courant en mécanique : la discussion graphique d'une quadrature. Il montre ainsi que, dans des cas académiques de milieux à symétrie sphérique qui n'ont malheureusement pas d'existence matérielle, les rayons lumineux peuvent avoir des formes surprenantes. Son modèle peut quand même servir de première approche pour comprendre certains aspects de l'image de l'horizon. Or celle-ci est impliquée dans une des corrections qu'il faut appliquer aux mesures angulaires de position des astres utilisées pour la navigation astronomique ; on imagine l'embarras des sobres marins lorsqu'ils doivent faire le point mais qu'ils observent que l'horizon est double [212] — voir par exemple la photographie de [8, Figure 2]. Nous réservons cet article [8] aux mathématiques des corrections optiques indispensables en navigation astronomique, en lien avec la réfraction et l'analyse proposée par Kummer. Malheureusement, son travail fut trop original par rapport à ce qu'utilisaient les astronomes ; il a sombré dans l'oubli.

Une trentaine d'années plus tard, un autre mathématicien, Félix Hausdorff, s'intéresse, dans sa thèse [213–215] puis son habilitation [175], à la détermination de la structure de l'atmosphère (et surtout de sa partie haute, inaccessible à son époque) à partir de la réfraction puis de l'extinction : bel exemple de problème inverse, à l'historique duquel est consacré [53] dans ce numéro spécial. Bouguer et Biot considéraient à tort l'atmosphère bornée, mais ils savaient à juste titre que l'influence de la structure de ses parties hautes est infime sur la réfraction — [150, sous-paragraphe 3.3] dans ce numéro spécial.

Hausdorff retrouve cela... Bien des recherches au XIX<sup>e</sup>, sur ce problème mal posé, ont ainsi été menées en pure perte !

En contrepartie, Hausdorff découvre de belles propriétés mathématiques de l'intégrale de réfraction, au moyen de changements de variable astucieux essentiellement [214]. À la suite de son professeur Heinrich Bruns (qui était lui-même élève de Kummer), il propose des développements en série plus rigoureux, reliant la réfraction à la structure de l'atmosphère ; dans son habilitation [175] il fait de même avec l'extinction, dont on sait (grâce au théorème de réfraction-extinction de Laplace) qu'elle est intrinsèquement liée à la réfraction. Ses expressions témoignent d'une grande virtuosité mathématique. Malheureusement elles ne sont pas plus utiles que les développements antérieurs ; et Hausdorff montre que les mesures de l'extinction n'étaient pas assez précises pour permettre de déduire la structure de l'atmosphère. Ce travail, n'ayant donc pas eu de suite, est tombé dans l'oubli. Hausdorff traite aussi du très faible effet de l'aplatissement de la Terre, ce qui témoigne encore de sa virtuosité ; puis il abandonnera ce sujet pour se tourner, avec bonheur, vers la topologie...

## 8. Conclusion

L'histoire ne s'arrête pas là...

Dans les années 1920, Harzer effectue le premier calcul numérique à partir de données météorologiques, où il tient compte de la saison, l'heure du jour, la vitesse du vent, etc. Les astronomes restent réticents : « The astronomer with long routine experience with meridian observations may be unpleasantly impressed by such an array of new factors to be considered... » [216, p. 226]

L'usage des ordinateurs n'a pas tari l'intérêt pour des formules empiriques : il paraît toujours des articles qui en proposent ou en font la synthèse [127, p. 635–636], [217] ; la plupart d'entre elles sont données avec un jeu unique de valeurs numériques de leurs coefficients, variables seulement dans les conditions et le profil d'atmosphère standard. Le calculateur en ligne <http://wise-obs.tau.ac.il/~eran/Wise/Util/Refraction.html> de l'Observatoire israélien Wise (dans le désert du Néguev) utilise l'une d'elles pour les hauteurs angulaires inférieures à 15° ; malheureusement, elle a le défaut déjà dénoncé théoriquement par Ivory en 1823 et que nous avons exposé au sous-paragraphe 2.2 — voir aussi [3, paragraphes 8 et 9.2].

Quant au problème inverse, dans un milieu à symétrie sphérique, il a été prouvé que c'est un problème mal posé au-dessus de l'observateur, mais bien posé au-dessous : il y a unicité de la solution [218], grâce à un argument de symétrie permettant d'éliminer l'effet de l'atmosphère située au-dessus de l'observateur [53, sous-paragraphe 9.2].

Les motivations actuelles pour étudier finement la réfraction sont de deux types. En géodésie-géophysique, elle conditionne les performances des mesures par VLBI, orbitographie satellitale, et GPS (les satellites utilisés étant souvent vus bas sur l'horizon, et la correction de célérité étant liée à la valeur de la réfraction) [146]. En astronomie-astrophysique, elle sert pour le pointage correct des télescopes et l'astrométrie, pour le bon usage des corrections de mesures photométriques ; selon Stone [49] la précision requise dans les mesures astrométriques fines est 0,05'' à plus de 20° de hauteur (où la réfraction est 147''), 1'' près de l'horizon (la réfraction horizontale étant 35' = 2 100'' dans les conditions normales), soit 0,04 % d'erreur tolérable. La réfraction astronomique est responsable de plusieurs effets indirects qui sont autant de problèmes pour l'astrométrie fine. Par exemple, la dispersion de l'air jointe à l'effet Purkinje (i.e. le passage du maximum de sensibilité de l'œil humain de 555 nm en vision photopique à 507 nm en vision scotopique [219, p. 68–69]), entraîne lors de ce passage une augmentation de 0,2'' de la hauteur apparente effective  $\psi'_e$  des étoiles vues à 45° du zénith [164]. Et  $\psi'_e$  varie aussi avec le type spectral, car le spectre de l'étoile en dépend (ainsi que de la classe de luminosité, mais moins) :  $\psi'_e$  varie de  $-(0,022'' \pm 0,003'')$  tan  $Z'$  quand on avance d'un type spectral dans la classification, d'après van Herk [220].

La précision des tables actuelles est 0,3 % ; si on en veut une meilleure, il faut tenir compte de l'aplatissement terrestre, donner la température mieux qu'à 1 °C près, etc. ; des calculs personnalisés sont possibles, mais non tabulés. L'implémentation numérique traditionnelle d'Auer-Standish-Hohenkerk-Sinclair fonctionne bien pour les cas standard, mais reste à améliorer pour certains autres (voir la fin de [150, sous-paragraphe 3.1]).

Les télescopes spatiaux sont, certes, affranchis des effets de la réfraction ; mais leur nombre reste très limité par leur coût. Dans l'utilisation des techniques spatiales, la prise en compte précise de la réfraction est indispensable aussi, comme nous venons de le rappeler, pour la précision du GPS ainsi que de l'orbitographie satellitale. Quant aux exigences de l'astrométrie fine contemporaine, elles n'incitent guère à reléguer l'étude de la réfraction au musée des considérations dépassées.

## Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

## Remerciements

L'auteur exprime ses vifs remerciements au Dr. Andrew Young pour la mise à disposition de sa fastidieuse bibliographie en ligne (<https://aty.sdsu.edu/bibliog/bibliog.html>), et pour de très nombreux échanges scientifiques depuis l'an 2000 ; au Dr. Siebren van der Werf pour ses indications bibliographiques sur Kepler ; au Dr. François Mignard, pour son signalement de certaines sources historiques ; à Justine Fabre (Directrice du Patrimoine et des ressources scientifiques — Académie des sciences), pour son aide à la présentation correcte des listes de références de tous les articles de ce numéro spécial ; et au Prof. Michel Chastang, pour sa traduction d'un texte latin de Tycho Brahe.

## Références

- [1] L. Dettwiller, « Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 103-132.
- [2] A. T. Young, « Did Monge really explain inferior mirages? », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 467-481.
- [3] L. Dettwiller, « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 63-102.
- [4] National Geospatial-Intelligence Agency, *American Practical Navigator BOWDITCH 2017 edition*, vol. 1, Paradise Cay 2033 Publications, Arcata (Californie), 2018.
- [5] National Geospatial-Intelligence Agency, *American Practical Navigator BOWDITCH 2017 edition*, vol. 2, Paradise Cay 2033 Publications, Arcata (Californie), 2018.
- [6] P. Brassier, *Navigations astronomique*, Vuibert, Paris, 1999, nouvelle édition.
- [7] UK Hydrographic, *Nautical Almanac 2020*, Paradise Cay Publications, Arcata (Californie), 2019.
- [8] L. Dettwiller, « La discussion par Kummer d'une quadrature sur la réfraction astronomique : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 503-525.
- [9] Regiomontanus, *Scripta Clarissimi Mathematici M. Ioannis Regiomontani*, Ioannem Montanum et Vlicum Neuberger, Nuremberg, 1544, édité par J. Schöner.
- [10] S. van der Werf, « Novaya Zemlya effect and Fata Morgana – Raytracing in a spherically non-symmetric atmosphere », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 365-389.
- [11] Cleomède, *Cleomedis de Motu Circulari Corporum Caelestium, Libri Duo*, B. G. Teubner, Leipzig, 1891, Édité par H. Ziegler.
- [12] H. E. Ross, « Cleomedes (ca. 1<sup>st</sup> century A.D.) on the celestial illusion, atmospheric enlargement, and size–distance invariance », *Perception* **29** (2000), n° 7, p. 863-871.
- [13] A. I. Sabra, « Psychology vs mathematics : Ptolemy and Alhazen on the moon illusion », in *Mathematics and its Applications to Science and Natural Philosophy in the Middle Ages* (E. Grant, J. E. Murdoch, eds.), Cambridge University, Cambridge, 1987.
- [14] M. Hershenson (éd.), *The Moon illusion*, LEA, Hillsdale (New Jersey), 1989.
- [15] H. Ross, C. Plug, *The Mystery of The Moon Illusion*, Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [16] F. Risner (éd.), *Opticae thesaurus. Alhazeni Arabis libri septem, nuncprimum editi. Eiusdem liber De Crepusculis et nubium ascensionibus. Item Vitellonis Thuringopoloni libri X*, Johnson Reprint Corp., New York, 1972, [réimpr. de l'édition originale de 1572].
- [17] T. Brahe, *Astronomiae instauratae progymnasmata*, Typis inchoata Vraniburgi Daniae, Prague, 1602 (J. Kepler, éd.).
- [18] J.-D. Cassini, *Specimen Observationum Bononiensium*, H. H. de Ducis, Bologne, 1656.
- [19] J. Le Rond d'Alembert, « Réfraction », in *Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, vol. XIII, Samuel Faulche & Cie, Neuchâtel, 1765, p. 892b-900a.
- [20] A. Koestler, *Les Somnambules – Essai sur l'histoire des conceptions de l'Univers*, Les Belles Lettres, Paris, 2010.
- [21] H. Chardak, *Tycho Brahé – L'homme au nez d'or*, Presses de la Renaissance, Paris, 2004.
- [22] P. Perrault, *De l'origine des fontaines*, Le Petit, Paris, 1674.
- [23] C. Huygens, *Traité de la Lumière*, Pierre Van der Aa, Leyde, 1690.
- [24] « Sur les réfractions astronomiques », *Hist. Acad. Roy. Sci. année 1714* (1717), p. 61-67.
- [25] J. Cassini, « Des réfractions astronomiques », *Mem. Acad. Roy. Sci. année 1714* (1719), p. 42-67, [réimpression à Amsterdam de la publication originale : Paris, *Mém. Acad. Roy. Sci. année 1714* (1717), p. 33-54].
- [26] F. Baily, *An Account of the Revd. John Flamsteed*, Lords Commissioners of the Admiralty, Londres, 1835.
- [27] P. Bouguer, *De la Méthode d'Observer Exactly sur Mer la Hauteur des Astres*, Claude Jombert, Paris, 1729.
- [28] « Sur les réfractions », *Hist. Acad. Roy. Sci. année 1749* (1753), p. 152-157.
- [29] W. H. Lehn, S. van der Werf, « Atmospheric refraction : a history », *Appl. Opt.* **44** (2005), p. 5624-5636.

- [30] J. Kepler, *Ad Vitellionem paralipomena, quibus Astronomiae pars optica traditur*, Claudium Marnium & Hæredes Ioannis Aubrii, Francfort, 1604.
- [31] J. Kepler, *Tabulae Rudolphinae*, J. Saurus, Ulm, 1627.
- [32] C. Scheiner, *Sol ellipticus : hoc est, novum et perpetuum Solis contrahi soliti phaenomenon quod noviter inventum Strenae loco*, Typis Christophori Magii, Augsburg, 1615.
- [33] L. Dettwiller, « La photométrie des éclipses de Lune, vue par František Link : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 537-555.
- [34] R. Descartes, *Les Principes de la Philosophie*, Le Gras, Paris, 1647.
- [35] E. Maignan, *Perspectiva horaria*, Rubei, Rome, 1648.
- [36] J. Arnould, *La Terre d'un clic – Du bon usage des satellites*, Odile Jacob, Paris, 2010.
- [37] P. S. Laplace, *Traité de Mécanique Céleste*, t. 4, livre 10, J. B. M. Duprat, Paris, 1805.
- [38] G. D. Cassini, « correspondance sur la réfraction », in *Ephemerides Novissimæ Motuum Coelestium Marchionis Corneli Malvasiae*, ex typographia Andreae Cassiani, Mvtinae impensis avthoris, 1662.
- [39] T. Mayer, *Tabulae motuum Solis et Lunæ novæ et correctæ*, Typis Gulielmi et Johannis Richardson, Londres, 1770.
- [40] C. Wolf, *Histoire de l'Observatoire de Paris de sa fondation à 1793*, Gauthier-Villars, Paris, 1902.
- [41] J.-B. Delambre, *Astronomie Théorique et Pratique*, t. I, Courcier, Paris, 1814.
- [42] J. Lequeux, *L'Observatoire de Paris – 350 ans de science*, Gallimard / Observatoire de Paris, Paris, 2012.
- [43] A. T. Young, « Understanding astronomical refraction », *Observatory* **126** (2006), p. 82-115.
- [44] R. Radau, « Recherches sur la théorie des réfractions astronomiques », *Annales de l'Observatoire de Paris* **16** (1880), p. B.1-B.114.
- [45] J.-B. Delambre, *Histoire de l'astronomie moderne*, t. 2, Courcier, Paris, 1821.
- [46] J.-B. Delambre, *Histoire de l'Astronomie au Dix-Huitième Siècle* (C.-L. Mathieu, éd.), Bachelier, Paris, 1827.
- [47] E. Halley, « Some remarks on a late essay of Mr. Cassini, wherein he proposes to find, by observation, the parallax and magnitude of Sirius », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **31** (1720), p. 1-4.
- [48] J. Ivory, « On the atmospherical refraction », *Phil. Mag.* **57** (1821), p. 321-325.
- [49] R. C. Stone, « An accurate method for computing atmospheric refraction air », *Publ. Astron. Soc. Pac.* **108** (1996), p. 1051-1058.
- [50] I. B. Riccioli, *Astronomiæ Reformatæ Tomi Duo*, Ex Typographia Hæredis Victorij Benatij, Bologne, 1665.
- [51] G. D. Cassini, « De solis hypothesibus, & de refractionibus siderum ad dubia A. R. P. Io. Baptistæ Riccioli Soc. Iesu », in *Epistolæ Duæ Astronomicæ* (G. Montanari, éd.), Typographia Ferroniana, Bologne, 1666, p. 31-52.
- [52] J.-D. Cassini, « De solaribus hypothesibus et refractionibus epistolætres », in *Miscellanea italica physico-mathematica* (G. Roberti, éd.), Typographia Pisariana, Bologne, 1692, p. 281-340.
- [53] A. T. Young, « Relations among atmospheric structure, refraction, and extinction », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 179-212.
- [54] C. Bruhns, *Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwicklung*, Voigt & Günther, Leipzig, 1861.
- [55] J. Cassini, *Traité de la grandeur et de la figure de la Terre*, Pierre de Coup, Amsterdam, 1723.
- [56] L. Dettwiller, « L'invariant de Bouguer et ses conséquences : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 415-452.
- [57] J. H. Lambert, *Les propriétés remarquables de la route de la lumière*, H. Scheurleer F. Z. & Compagnie, La Haye, 1758.
- [58] L. Dettwiller, « Les développements de Lambert : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 453-465.
- [59] G. Le Gentil, *Voyage dans les mers de l'Inde*, vol. 1, Impr. royale, Paris, 1779.
- [60] P. de la Hire, « Remarques sur les observations des refractions, tirées du Livre intitulé, *Refractio Solis inoccidui in Septentrionalibus oris, jussu Caroli XI. Regis Suevorum, &c.* à Joanne Bilberg Holmiæ. 1695 », *Mem. Acad. Roy. Sci.* (1700), p. 37-38.
- [61] « Sur les refractions », *Hist. Acad. Roy. Sci. année 1700* (1761), p. 112-116.
- [62] « Sur les refractions », *Hist. Acad. Roy. Sci. année 1706* (1731), p. 101-103.
- [63] A. Mayrargue, « Air, lumière et matière réfractive », *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie* **44** (2009), p. 47-60.
- [64] J.-P. Maraldi, « Expériences du barometre faites sur diverses montagnes de France », *Mem. Acad. Roy. Sci.* **1703** (1720), p. 229-237.
- [65] J.-D. Cassini, « Des irregularitez de l'abaissement apparent de l'horizon de la mer », *Mem. Acad. Roy. Sci.* **1707** (1730), p. 195-197.
- [66] A. Cassini, « Perinaldo, pays d'astronomes : à la recherche des lieux cassiniens », in *Sur les traces des Cassini – Astronomes et observatoires du sud de la France* (P. Brouzeng, S. Débarbat, éd.), Éditions du CTHS, Paris, 2001, p. 33-42.
- [67] J.-D. Cassini, J. Cassini, « Observations astronomiques faites dans les voyages de France et d'Italie en 1694, 95, 96 », manuscrit numérisé de la Bibliothèque de l'Observatoire de Paris, B4/3 (128). Bibliothèque numérique - Observatoire de Paris, consulté le 11 août 2022, <https://bibnum.obspm.fr/ark:/11287/2pB4l>.
- [68] J.-D. Cassini, J. Cassini, « Observations astronomiques faites dans les voyages de France et d'Italie en 1694, 95, 96 », *Mém. Acad. Roy. Sci.* **VII** (1729), p. 463-533.

- [69] F. Mignard, « Les tables de réfraction astronomique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 133-178.
- [70] A. J. Perkins, « King Charles and the Founding of the Royal Observatory », in *The History of Celestial Navigation – Rise of the Royal Observatory and Nautical Almanacs* (P. Kenneth Seidelmann, C. Y. Hohenkerk, éd.), Springer Nature, Cham (Suisse), 2020, p. 21-67.
- [71] J.-L. la Grange, « Sur les réfractions astronomiques », *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres (Berlin), Année MDCCLXXII [1772]* (1774), p. 259-282.
- [72] J.-B. Biot, « Sur les réfractions astronomiques », *Additions à la Connaissance des Temps* **1839** (1836), p. 3-114.
- [73] F. Arago, T. Petit, « Sur les puissances réfractives et dispersives de certains liquides et des vapeurs qu'ils forment », *Ann. Chim. Phys.* **1** (1816), p. 1-9.
- [74] E. Mascart, « Sur la réfraction des gaz », *C. R. Acad. Sci. Paris* **78** (1874), p. 617-621.
- [75] E. Mascart, « Sur la réfraction des gaz », *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris* **6** (1877), p. 9-78.
- [76] J. F. Scott (éd.), *The Correspondence of Isaac Newton*, vol. IV, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- [77] J. Lowthorp, « An experiment of the refraction of the air made at the command of the Royal Society, Mar. 28. 1699 », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **21** (1699), p. 339-342.
- [78] C. Kramp, *Analyse des Réfractions Astronomiques et Terrestres*, Dannbach, Strasbourg, an VII – et Schwikkert, Leipzig, 1799.
- [79] J.-B. Biot, « Analyse des Tables de Réfraction construites par Newton, avec l'indication des procédés numériques par lesquels il a pu les calculer », *J. Savants* **1836** (1836), p. 735-754.
- [80] D. T. Whiteside, « Kepler, Newton and Flamsteed on refraction through a 'regular aire': the mathematical and the practical », *Centaurus* **24** (1980), p. 288-315.
- [81] W. Lehn, « Isaac Newton and the astronomical refraction », *Appl. Opt.* **47** (2008), p. H95-H105.
- [82] J. Brinkley, « A method of computing astronomical refractions for objects near the horizon », *Trans. Roy. Irish Acad.* **13** (1818), p. 165-173.
- [83] J. Ivory, « On Mayer's formula for the astronomical refraction », *Phil. Mag.* **58** (1821), p. 341-347.
- [84] J. Ivory, « On the astronomical refractions », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **113** (1823), p. 409-495.
- [85] N. Maskelyne, « Concise rules for computing the effects of refraction and parallax in varying the apparent distance of the Moon from the Sun or a star », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **54** (1764), p. 263-276.
- [86] F. W. Bessel, *Fundamenta astronomiæ pro anno MDCCLV: deducta ex observationibus per annos 1750-1762 institutis viri incomparabilis James Bradley in specula astronomica Grenovicensi*, F. Nicolovium, Regiomonti (Königsberg), 1818.
- [87] F. W. Bessel, *Astronomische Beobachtungen auf der Universitäts-Sterwarte zu Königsberg*, vol. 8, 1822.
- [88] R. Main, « On the Value of the Constant of Refraction, as determined from Zenith Distance Observations of Stars near the North and the South Horizon, at the Royal Observatory, Greenwich, in the Years from 1836 to 1854 », *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **26** (1858), p. 45-130.
- [89] Y. Nazé, *Astronomie de l'étrange – Individus singuliers – Objets bizarres – Idées insolites*, Belin, Paris, 2021.
- [90] I. Newton, *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, vol. II, Royal Society, Londres, 1687.
- [91] R. Hooke, *Micrographia or Some Physiological Descriptions of Minute Bodies*, John Martyn and James Allestry, Londres, 1665.
- [92] I. Newton, *Opticks*, Royal Society, Londres, 1704.
- [93] E. Halley, « Some remarks on the allowances to be made in astronomical observations for the refraction of the air », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **31** (1721), p. 169-172.
- [94] B. Taylor, *Methodus Incrementorum directa & inversa*, Gul. Innys, Londres, 1715.
- [95] « An extension of the inverse series for the computation of refraction, together with a direct solution of the problem », *Quart. J. Sci. Lit. & Arts* **16** (1823), p. 139-148.
- [96] J. Gapaillard, « Pierre Bouguer, Lacaïlle et la mesure du méridien », in *Éprouver la science : Pierre Bouguer et le premier XVIII<sup>e</sup> siècle, Actes du colloque Nantes-Le Croisic, 6-7 juin 1998*, S & TP, II<sup>e</sup> série, vol. 3, 1999, p. 233-252.
- [97] A. Simaan, *La science au péril de sa vie – Les aventuriers de la mesure du monde*, Vuibert / ADAPT, Paris, 2001.
- [98] J.-P. Luminet, *Histoires extraordinaires et insolites d'astronomes*, Buchet / Chastel, Paris, 2022.
- [99] C.-E. Cassini de Thury, *La Méridienne de l'Observatoire royal de Paris, Vérifiée dans toute l'étendue du Royaume par de nouvelles Observations*, Guérin, Paris, 1744.
- [100] F. Trystram, *Le procès des étoiles*, Seghers, Paris, 1979.
- [101] P. Murdin, *Full Meridian of Glory*, Springer, New York, 2009.
- [102] N. Bowditch, *Mécanique Céleste. By the Marquis de La Place, translated, with a commentary*, vol. IV, Little and Brown, Boston, 1839.
- [103] « Sur les réfractions astronomiques année 1739 », *Hist. Acad. Roy. Sci.* (1741), p. 45-48.
- [104] L. Dettwiller, « Properties of optical ducts, their chromatism and its effects on astronomical refraction », *preprint*, 2022, <https://arxiv.org/abs/2204.02605>.
- [105] P. Bouguer, « Sur les réfractions astronomiques dans la Zone Torride », *Mém. Acad. Roy. Sci. année 1739* (1741), p. 407-423.

- [106] P. Bouguer, « Second mémoire sur les réfractions astronomiques, observées dans la Zone Torride ; avec diverses remarques sur la manière d'en construire les Tables », *Mém. Acad. Roy. Sci. année 1749* (1753), p. 75-112.
- [107] H. L. Sawatzky, W. H. Lehn, « The Arctic mirage and the early North Atlantic », *Science* **192** (1976), p. 1300-1305.
- [108] L. Dettwiller, « Some theorems on "arctic mirages" : *hillingar* effect and superior mirages », *J. Opt. Soc. Am. A* **36** (2019), p. 1997-2004.
- [109] F.-A. Forel, *Le Léman — Monographie limnologique*, t. 2, F. Rouge, Lausanne, 1895.
- [110] R. Woltmann, « Bemerkungen über ein Katoptrisches Phänomen, welches an den Gegenständen nahe am Horizont nicht selten sichtbar ist », *Neuere Abhandlungen der königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften* **3** (1798), p. 69-97.
- [111] F. W. Bessel, « Auszug aus einem Schreiben des Herrn Professors und Ritters Bessel an den Herausgeber », *Astron. Nachr.* **2** (1823), p. 381-386.
- [112] J. Hellerich, « Beobachtung der Strahlenbrechung in der Nähe des Horizontes », *Astr. Nachr.* **232** (1928), p. 57-66.
- [113] B. E. Schaeffer, W. Liller, « Variability in the astronomical refraction of the rising and setting Sun », *Publ. Astron. Soc. Pac.* **102** (1990), p. 796-805.
- [114] R. D. Sampson, E. P. Lozowski, A. E. Peterson, D. P. Hube, « Variability in the astronomical refraction of the rising and setting Sun », *Publ. Astron. Soc. Pac.* **115** (2003), p. 1256-1261.
- [115] M. E. Tschudin, « Refraction near the horizon – An empirical approach. Part 2 : variability of astronomical refraction at low positive altitude (LPAAR) », *Observatory* **139** (2019), p. 29-68.
- [116] D. Brandes, « Einige kritische Bemerkungen zu den in den Annalen befindlichen Aufsätzen über die irdische Strahlenbrechung, und Nachricht von der Vollendung seiner Refractions-Beobachtungen », *Gilb. Ann. Physik* **23** (1806), p. 380-393.
- [117] J. Glaisher, « An account of meteorological and physical observations in three balloon ascents made in the years 1865 and 1866 », *Report of the Thirty-Sixth Meeting of the British Association for the Advancement of Science* (1867), p. 367-401.
- [118] E. von Oppolzer, « Strahlenbrechung », in *Handwörterbuch der Astronomie* (W. Valentiner, éd.), vol. IIIb, Verlag von Eduard Trewendt, Breslau, 1901, p. 548-601.
- [119] J. Ivory, « Note on the astronomical refractions », *Astr. Nachr.* **12** (1835), p. 109-114.
- [120] P. C. le Monnier, « Examen des causes générales, des principes de Physique, & de ce qui a porté les Observateurs au siècle précédent, à publier des Tables des Réfractions qui diffèrent les unes des autres pour les mêmes hauteurs », *Mémoires Math. Phys. Acad. Roy. Sci.* (1780), p. 87-93.
- [121] C. Sugawa, « On the effect of the anomalous refraction on the latitude observations », *Publ. Astron. Soc. Jpn.* **8** (1956), p. 27-39.
- [122] C. M. von Bauernfeind, « Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion. Erste Mittheilung enthaltend die Feststellung von Thatsachen », *Abhandlungen der II. [math.-phys.] Classe d. k. bayer. Akad. Wiss. München* **13** (1880), p. 179-310.
- [123] C. M. von Bauernfeind, « Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion. Zweite Mittheilung enthaltend weitere Thatsachen und ihre Erklärung », *Abhandlungen der II. [math.-phys.] Classe d. k. bayer. Akad. Wiss. München* **15** (1886), p. 1-102.
- [124] C. M. von Bauernfeind, « Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion », *Abhandlungen der II. [math.-phys.] Classe d. k. bayer. Akad. Wiss. München* **16** (1888), p. 517-567.
- [125] A. Thom, « An empirical investigation of atmospheric refraction », *Emp. Surv. Rev.* **14** (1958), p. 248-262.
- [126] L. Euler, « De la réfraction de la lumière en passant par l'atmosphère selon les divers degrés tant de la chaleur que de l'élasticité de l'air », *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin Année MDCCLIV* (1756), n° 10, p. 131-172.
- [127] F. Mignard, V. Brumberg, « Corrections pour la réduction des observations optiques », in *Introduction aux éphémérides et phénomènes astronomiques – Supplément explicatif à la Connaissance des Temps* (J. Berthier, P. Descamps, F. Mignard, éd.), IMCCE / EDP Sciences, Paris, 2021, p. 597-643.
- [128] T. Simpson, *Mathematical Dissertations on a Variety of Physical and Analytical Subjects*, T. Woodward, Londres, 1743.
- [129] L. Dettwiller, « Short review on the refractive index of air as a function of temperature, pressure, humidity and ionization », *preprint*, 2022, <https://arxiv.org/abs/2204.02603>.
- [130] J. Lalande, *Astronomie*, vol. 2, La Veuve Desaint, Paris, 1771.
- [131] Laugier, « Note sur la formule proposée par M. Faye pour calculer les réfractions astronomiques », *C. R. Acad. Sci.* **39** (1854), p. 521-524.
- [132] S. Newcomb, *A Compendium of Spherical Astronomy*, Macmillan, New York, 1906.
- [133] F. W. Bessel, *Tabulae Regiomontanae reductionum observationum astronomicarum ab anno 1750 usque ad annum 1850 computatae*, Borntraeger, Regiomonti Prussorum (Königsberg), 1830.
- [134] W. Chauvenet, *Manual of Spherical and Practical Astronomy*, vol. 2, Lippincott, Philadelphie, 1906.
- [135] A. Warusfel, *Euler – Les mathématiques et la vie*, Vuibert, Paris, 2009.



- [136] J. Ivory, « Calculation of the horizontal refraction in an atmosphere of uniform temperature », *Phil. Mag.* **59** (1822), p. 90-93.
- [137] R. Radau, « Tables de l'intégrale  $\psi(Z) = e^{Z^2} \int_Z^\infty e^{-t^2} dt$  », *Ann. Obs. Paris* **18** (1885), p. B.1-B.25.
- [138] J.-P. Poirier, *Jean-Baptiste Biot (1774-1862) Un savant méconnu*, Hermann, Paris, 2011.
- [139] N. Bowditch, *Mécanique Céleste. By the Marquis de La Place, translated, with a commentary*, vol. I, Hilliard, Gray, Little, and Wilkins, Boston, 1829.
- [140] N. Bowditch, *Mécanique Céleste. By the Marquis de La Place, translated, with a commentary*, vol. II, Hilliard, Gray, Little, and Wilkins, Boston, 1832.
- [141] N. Bowditch, *Mécanique Céleste. By the Marquis de La Place, translated, with a commentary*, vol. III, Hilliard, Gray, Little, and Wilkins, Boston, 1834.
- [142] F. Arago, J.-B. Biot, C.-L. Largeteau, « Rapport fait au Bureau des longitudes – Sur des Tables de réfractions astronomiques calculées, d'après la théorie de Laplace, par M. Caillet, Examineur de la Marine », *Additions à la Connaissance des Temps* **1851** (1848), p. 3-8.
- [143] V. Caillet, *Tables de réfractions astronomiques, calculées par M. V. Caillet, précédées d'un rapport fait au Bureau des longitudes, par M. Largeteau*, Mallet-Bachelier, Paris, 1854.
- [144] Bureau des longitudes, *Connaissance des Temps* **1810** (1808).
- [145] J. Saastamoinen, « Contributions to the theory of atmospheric refraction. Part II. Refraction corrections in satellite geodesy », *Bull. Géodésique* **47** (1973), p. 13-34.
- [146] Í. Rapp-Arrará, J. M. Domingo-Santos, « Extinction, refraction, and delay in the atmosphere », *J. Geophys. Res.* **113** (2008), article n° D20116.
- [147] F. Kasten, A. T. Young, « Revised optical air mass tables and approximation formula », *Appl. Opt.* **28** (1989), p. 4735-4738.
- [148] A. T. Young, « Air mass and refraction », *Appl. Opt.* **33** (1994), p. 1108-1110.
- [149] F. Arago, « Mémoire sur la méthode des interférences appliquée à la recherche des indices de réfraction », in *Œuvres complètes* (J.-A. Barral, éd.), Gide, Paris, 1858, t. 10, p. 312-334.
- [150] L. Dettwiller, « Le théorème de Biot et le changement de variable de Biot–Auer–Standish : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 483-501.
- [151] J.-B. Biot, « Sur les réfractions astronomiques », *C. R. Acad. Sci.* **3** (1836), p. 237-244.
- [152] L. H. Auer, E. M. Standish, *Astronomical Refraction : Computational Method for all Zenith Angles*, Yale University Astronomy Dept., 1979.
- [153] P. K. Seidelmann, *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, University Science Books, Mill Valley (Californie), 1992.
- [154] L. H. Auer, E. M. Standish, « Astronomical refraction : computational method for all zenith angles », *Astron. J.* **119** (2000), p. 2472-2474.
- [155] J. Brinkley, « Analytical investigations respecting astronomical refractions and the application thereof to the formation of convenient tables together with the results of observations of circumpolar stars, tending to illustrate the theory of refractions », *Trans. Roy. Irish Acad.* **12** (1815), p. 77-118.
- [156] J.-B. Biot, F. Arago, « Mémoire sur les affinités des corps pour la lumière, et particulièrement sur les forces réfringentes des différens gaz », *Mém. Inst.* **7** (1806), p. 39-66.
- [157] A. T. Young, « Sunset Science. IV. Low-Altitude Refraction », *A. J.* **127** (2004), p. 3622-3637.
- [158] J. H. Gladstone, T. P. Dale, « Researches on the refraction, dispersion, and sensitiveness of liquids », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **153** (1863), p. 317-343.
- [159] H. Bruns, « Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung », *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Classe* **43** (1891), p. 164-227.
- [160] B. Edlén, « The dispersion of standard air », *J. Opt. Soc. Am.* **43** (1953), p. 339-344.
- [161] E. R. Peck, K. Reeder, « Dispersion of air », *J. Opt. Soc. Am.* **62** (1972), p. 958-962.
- [162] F. E. Jones, « The refractivity of air », *J. Res. NBS* **86** (1981), p. 27-32.
- [163] P. E. Ciddor, « Refractive index of air : new equations for the visible and near infrared », *Appl. Opt.* **41** (1996), p. 1566-1573.
- [164] R. C. Stone, « The effect of differential color refraction on declinations determined in meridian circle programs », *Astron. Astrophys.* **138** (1984), p. 275-284.
- [165] H. Barrell, J. E. Sears, « The refraction and dispersion of air for the visible spectrum », *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A* **238** (1939), p. 1-64.
- [166] G. Bönsch, E. Potulski, « Measurement of the refractive index of air and comparison with modified Edlén's formulae », *Metrologia* **35** (1998), p. 133-139.
- [167] P. E. Ciddor, « Refractive index of air : 3. The roles of CO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O, and refractivity virials », *Appl. Opt.* **41** (2002), p. 2292-2298.
- [168] F. Hauksbee, *Physico-Mechanical Experiments on Various Subjects*, R. Brugis, Londres, 1709.
- [169] J. Jamin, « Mémoire sur la mesure des indices de réfraction des gaz », *Ann. Chim. Phys.* **49** (1857), p. 282-303.

- [170] A. Bemporad, P. Puiseux, « Réfraction et Extinction », in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées. T. 7 – Astronomie*, vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1913, p. 14-67.
- [171] O. F. Mossotti, « Azioni e deformazioni nei dielettrici », *Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle Scienze Residente in Modena* **24** (1850), p. 49-74.
- [172] R. Clausius, *Die Mechanische Wärmetheorie*, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1879.
- [173] H. A. Lorentz, « Concerning the relation between the velocity of propagation of light and the density and composition of media », *Verh. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam* **18** (1878), p. 1-119, in *Collected papers*. t. 2, Nijhoff, La Hague, 1936.
- [174] M. Bertin, J.-P. Faroux, J. Renault, *Électromagnétisme 4 – milieux diélectriques et milieux aimantés*, Dunod Université, Paris, 1984.
- [175] F. Hausdorff, « Ueber die Absorption des Lichtes in der Atmosphäre », *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Classe* **47** (1895), p. 401-482.
- [176] A. B. Djurišić, B. V. Stanić, « Modeling the temperature dependence of the index of refraction of liquid water in the visible and the near-ultraviolet ranges by a genetic algorithm », *Appl. Opt.* **38** (1999), p. 11-16.
- [177] C. J. F. Böttcher, *Theory of Electric Polarisation*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1952.
- [178] B. Edlén, « The refractive index of air », *Metrologia* **2** (1966), p. 71-80.
- [179] J. C. Owens, « Optical refractive index of air: dependence on pressure, temperature and composition », *Appl. Opt.* **6** (1967), p. 51-59.
- [180] F. Arago, « Correspondance », *C. R. Acad. Sci.* **3** (1836), p. 233.
- [181] F. Arago, « Réclamation de M. Arago au sujet de la lettre de M. Cauchy à M. Libri, insérée dans le Compte Rendu de la séance du 3 octobre », *C. R. Acad. Sci.* **3** (1836), p. 459-462.
- [182] F. Arago, « Sur les pouvoirs dispersifs », in *Œuvres complètes. Tome 11* (J.-A. Barral, éd.), vol. 2, Gide, Paris, 1859, p. 733-748.
- [183] F. W. Bessel, « Strahlenbrechungen nahe am Horizonte », in *Astronomische Beobachtungen auf der Königlich Universitäts-Sternwarte in Königsberg*, Achte Abtheilung, Universitäts-Buchhandlung, Königsberg, 1823, p. IX-XVI.
- [184] E. Ketteler, « Ueber die Dispersion des Lichts in den Gasen », *Ann. Phys. (Leipzig)* **200** (1865), p. 390-406.
- [185] P. E. Ciddor, R. J. Hill, « Refractive index of air : 2. Group index », *Appl. Opt.* **38** (1999), p. 1663-1667.
- [186] J. Devaux, « Sur le "rayon vert" », *L'Astronomie* **42** (1928), p. 384-389.
- [187] F. W. Bessel, « Sur la réfraction astronomique », *C. R. Acad. Sci.* **15** (1842), p. 181-185.
- [188] E. Touchet, « Sur le "rayon vert" », *La Nature (Paris)* **53** (1925), p. 358-366.
- [189] J.-C.-E. Schmidt, *Theorie der Astron. Strahlenbrechung*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1828.
- [190] J. Ivory, « Letter on the astronomical refractions », *Phil. Mag.* **63** (1824), p. 418-427.
- [191] J. Ivory, « On the constitution of the atmosphere », *Phil. Mag.* **66** (1825), p. 81-93, 241-250.
- [192] C. M. Bauernfeind, « Die atmosphärische Strahlenbrechung », *Astron. Nachr.* **62** (1864), p. 209-252.
- [193] E. Esclangon, « Sur la réfraction astronomique », *C. R. Acad. Sci.* **216** (1943), p. 100-103.
- [194] R. Radau, « Essai sur les réfractions astronomiques », *Annales de l'Observatoire de Paris* **19** (1889), p. G.1-G.90.
- [195] L. Dettwiller, « Les développements de Radau et leur divergence : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 527-536.
- [196] B. Garfinkel, « Astronomical refraction in a polytropic atmosphere », *Astron. J.* **72** (1967), p. 235-254.
- [197] J. Ivory, « On the new method proposed by Dr. Young for calculating the atmospherical refraction », *Phil. Mag.* **58** (1821), p. 161-168.
- [198] T. Young, « Apology for the Postscript on Refraction, in answer to Mr. Ivory's remarks », *Quart. J. Sci. Lit. & Arts* **12** (1822), p. 390-396.
- [199] T. Young, « The variation of the Temperature of the atmosphere deduced from the mean Refraction », *Quart. J. Sci. Lit. & Arts* **12**, p. 396-398.
- [200] T. Young, « Historical sketch of the various solutions of the problem of atmospherical refraction, from the time of Dr. Brook Taylor, to that of the latest computations », *Quart. J. Sci.* **18** (1825), p. 347-378.
- [201] Th. v. Oppolzer, « Über die astronomische Refraction », *Denkschriften kaiserl. Akademie der Wiss., Wien, Math.-Naturwiss. Cl.* **53** (1887), p. 1-52.
- [202] A.-M. Legendre, *Exercices de Calcul Intégral, sur divers ordres de Transcendentes et sur les quadratures*, Courcier, Paris, 1811-1817.
- [203] J.-P. Poirier, *Antoine d'Abbadie Voyageur et physicien du globe au XIX<sup>e</sup> siècle*, Hermann, Paris, 2009.
- [204] F. R. Gossett, *Manual of Geodetic Triangulation (U.S. Dept. of Commerce Special Pub. No. 247)*, Government Printing Office, Washington, DC, 1950.
- [205] A. Danjon, *Astronomie générale – Astronomie sphérique et éléments de mécanique céleste*, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1986, 2<sup>e</sup> éd., nouveau tirage, 1<sup>e</sup> éd. 1959.
- [206] T. S. Glickman, *Glossary of Meteorology*, 2<sup>e</sup> éd., American Meteorological Society, Boston, 2000.
- [207] C. Y. Hohenkerk, A. T. Sinclair, « The Computation of Angular Atmospheric Refraction at Large Zenith Angles », *Nautical Almanach Office Tech. Note* (1985), article n° 63.

- [208] A. T. Sinclair, « The effect of atmospheric refraction on laser ranging data », *Nautical Almanach Office Tech. Note* (1982), article n° 59.
- [209] S. N. Kivalov, A. T. Young, « Horizontal magnification of finite-sized celestial objects », *Appl. Opt.* **49** (2010), p. 2720-2727.
- [210] S. Mikkola, « Refraction in a piecewise polytropic atmosphere », *Astron. & Astrophys.* **94** (1981), p. 20-24.
- [211] E. E. Kummer, « Mémoire sur la réfraction atmosphérique par M. Kummer », *Ann. Chim. Phys.* **61** (1861), p. 496-507, traduit par É. Verdet de "Über atmosphärische Strahlenbrechung", *Monatsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* **5** (1860), p. 405-420.
- [212] H. C. Freiesleben, « Luftspiegelung nach oben », *Ann. Hydrog. u. Maritimem Met.* **62** (1934), p. 426.
- [213] F. Hausdorff, « Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung », *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-phys. Classe* **43** (1891), p. 491-566.
- [214] F. Hausdorff, « Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung », *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-phys. Classe* **45** (1893), p. 120-162.
- [215] F. Hausdorff, « Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung », *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-phys. Classe* **45** (1893), p. 758-804.
- [216] G. C. Comstock, « The atmospheric refraction », *Pop. Astron.* **37** (1929), p. 222-231.
- [217] A. D. Wittmann, « Astronomical refraction: formulas for all zenith distances », *Astron. Nachr.* **318** (1997), p. 305-312.
- [218] W. D. Bruton, G. W. Kattawar, « Unique temperature profiles for the atmosphere below an observer from sunset images », *Appl. Opt.* **36** (1997), p. 6957-6961.
- [219] Y. Le Grand, *Optique physiologique. t. 2 Lumière et couleurs*, 2<sup>e</sup> éd., Masson, Paris, 1972.
- [220] A. van Herk, « The influence of the spectral type of a star on its declination as derived from meridian-circle observations », *Bull. Astron. Inst. Netherlands* **11** (1952), p. 489-493.



---

Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

# Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique

*Remarkable properties of astronomical refraction in a spherically symmetric atmosphere*

Luc Dettwiller<sup>Ⓢ</sup>\*, <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School,

Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France

Courriel: [dettwiller.luc@gmail.com](mailto:dettwiller.luc@gmail.com)

**Résumé.** On expose les propriétés théoriques générales et diverses formules approximatives pour l'angle  $\chi_S$  de réfraction astronomique en  $S$ , commençant par son expression fondamentale avec l'intégrale de réfraction et débouchant aussitôt sur la formule de Simpson. En supposant dorénavant l'atmosphère à symétrie sphérique, beaucoup de résultats supplémentaires émergent : en premier, le « théorème » d'Oriani, et l'équation de Bouguer. De celle-ci, on tire une forme particulière usuelle de l'intégrale de réfraction. On montre comment une approximation fondamentale permet d'en déduire la formule de Laplace, puis les développements en série qui la généralisent mais sont divergents — à cause de l'approximation fondamentale, pour une atmosphère isotherme. Il subsiste de vrais théorèmes, exempts de toute approximation : celui de Biot (qui se démontre facilement avec son changement de variable fort utile par ailleurs pour des calculs numériques), et celui de Biot–Sang–Meyer–Fraser–White. On voit ensuite le lien approximatif avec l'extinction (trouvé par Laplace), et l'étude approchée de la réfraction horizontale  $\chi_{Sh}$  (i.e. la valeur de  $\chi_S$  pour des points vus sur l'horizon astronomique). Puis on calcule les effets chromatiques sur  $\chi_S$ ,  $\chi_{Sh}$  — ainsi que (dans un document associé à cet article) sur diverses caractéristiques de chenaux optiques considérés dans l'air — et on introduit (dans l'Annexe B) le « coefficient de distorsion angulaire verticale locale », dont on donne une expression originale sur l'horizon.

**Abstract.** The general theoretical properties and various approximate formulas for the angle  $\chi_S$  of astronomical refraction at  $S$  are presented, beginning with its fundamental expression by the refraction integral and immediately leading to the Simpson formula. Assuming a spherically symmetric atmosphere, many additional results show up, starting with Oriani's "theorem" and Bouguer's equation. From these, an usual form of the refraction integral is derived. A fundamental approximation follows to deduce the Laplace formula, then the series expansions that generalize it but are divergent for an isothermal atmosphere—because of the approximation made. Two results, free from any approximation, exist and are presented: Biot's and Biot–Sang–Meyer–Fraser–White's theorems. It leads to an approximate link with extinction, as found by Laplace,

---

\* Auteur correspondant.

and an approximation of the refraction  $\chi_{Sh}$  for points on the astronomical horizon. We compute the chromatic effects on  $\chi_S$ ,  $\chi_{Sh}$ —and (in a document associated with this article) on various characteristics of optical ducts considered in air—and an original expression of the “local vertical angular distortion coefficient” on the horizon (in Annexe B).

**Mots-clés.** Réfraction astronomique, Formule de Laplace, Théorème d’Oriani, Accourcissement, Théorème de Biot–Sang–Meyer–Fraser–White, Théorème de réfraction–extinction de Laplace, Coefficient de distorsion angulaire verticale locale.

**Keywords.** Astronomical refraction, Laplace’s formula, Oriani’s theorem, Flattening, Biot–Sang–Meyer–Fraser–White’s theorem, Laplace’s refraction–extinction theorem, Local vertical angular distortion coefficient.

*Published online: 8 March 2023, Issue date: 11 August 2023*

« It is nice to know that the computer understands the problem, but I would like to understand it too. »

Attribué à Eugène Wigner (prix Nobel de physique 1963) et cité par H. M. Nussenzveig, *Diffraction Effects in Semiclassical Scattering*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992, p. 37.

## 1. Introduction

La compréhension d’un phénomène physique complexe ne se limite pas à la capacité de le reproduire numériquement. Pour comprendre, l’esprit humain a besoin d’une traduction en idées suffisamment simples pour être appréhendées et traduites en images mentales, qui donnent un support à la pensée, permettent d’articuler harmonieusement les différentes notions relatives au phénomène étudié, et soient susceptibles d’orienter la recherche ultérieure ainsi que le choix des calculs numériques toujours imparfaits demandés à un ordinateur — autrement dit, d’habiller les équations par un langage qui permet de communiquer du compréhensible et de donner confiance. Quand un modèle physique permet de rendre compte de l’essentiel du phénomène, on considère que celui-là en expose les ressorts fondamentaux. Il fournit alors un premier cadre de pensée, permettant d’appliquer aux observations une grille d’analyse susceptible de révéler d’éventuels écarts significatifs entre les prédictions du modèle et la réalité, pour mieux se concentrer ensuite sur la recherche des causes elucidant ces résidus inexplicables — que l’on classera dans les irrégularités, les anomalies, etc., et qui relèvent souvent de petits aménagements de la théorie, mais parfois d’un changement complet de paradigme. On élabore ainsi un nouveau modèle, par rapport auquel on réexamine les observations, éventuellement enrichies de nouvelles données expérimentales dont la quête a été suscitée par l’élaboration du second modèle. À chaque itération de ce processus, la compréhension du phénomène se précise, se corrige, s’affine et s’enrichit. L’intérêt de l’explication trouve son origine dans l’éternelle imperfection de la compréhension, qui lui confère un caractère intrinsèquement dynamique : René Thom souligne bien que prédire n’est pas expliquer [1].

Notre « panorama historique [...] » [2] dans ce numéro spécial a montré que, même en excluant la réfraction terrestre de notre propos initial, le corpus des faits d’observation concernant la réfraction astronomique est multiforme, foisonnant et parfois intrigant. Que l’on songe, d’après le paragraphe 5 de [2] par exemple, aux variations de  $35''$  pour une étoile à  $88^\circ$  de distance zénithale apparente  $Z'$ , et de  $45''$  à  $89^\circ$ , entre deux jours à même pression et température en un point  $S$  fixe, pour les valeurs relevées de sa réfraction  $\chi_S = \psi' - \psi$  (où  $\psi'$  et  $\psi$  sont les hauteurs apparente et vraie de l’étoile — une table des notations est donnée en fin d’article) ; ces variations peuvent s’expliquer dans le cadre du présent article où l’on étudie les propriétés des modèles à symétrie sphérique. Par contre, certains écarts faibles, notamment l’agitation d’une image stellaire (quantifiable par sa fonction de transfert de modulation [3]), ou le renversement du sens

des irisations de l'image de Vénus (invisibles à l'œil nu) [4] ne le pourront pas, ainsi que des écarts beaucoup plus importants et donc stupéfiants, comme ceux connus sous le nom d'*effet Novaya Zemlya*; ils relèvent de modèles différents, qui seront présentés respectivement par les articles [5, 6] dans ce numéro spécial.

En ce qui concerne la compréhension des effets de réfraction astronomique, la première itération consiste à les modéliser en considérant les trajets courbes des rayons lumineux dans une atmosphère supposée à symétrie sphérique; ce sera l'objet de cet article entier. Car, malgré le peu de mots nécessaires pour présenter le cadre de cette étude, nous verrons que la difficulté des problèmes soulevés appelle de longs développements, débouchant sur des effets variés, agrémentés de beaux résultats parfois subtils.

Notre progression ne suivra plus un ordre chronologique comme dans [2], mais un ordre logique. Nous serons bien sûr amenés à revoir diverses propriétés déjà énoncées dans [2], mais ce sera sous l'angle physique et non plus historique, pour en examiner les racines et en déduire la portée réelle. Ainsi verrons-nous, entre autres, que le soi-disant théorème d'Oriani (voir le paragraphe 4 de [2]) n'en est pas un, et qu'il confond la nature des développements de la réfraction possibles — limités ou en série, et par rapport à quelles variables?

Dans un premier temps, nous commencerons par rappeler l'expression classique de la réfraction  $\chi_S$  sous la forme d'une intégrale (dite « de réfraction »), en supposant que le rayon lumineux allant du point extra-atmosphérique  $A$  jusqu'à l'observateur  $S$  soit plan — ce qui est bien le cas avec une atmosphère à symétrie sphérique — et ne traverse pas de chenal optique (pour sa définition, voir le paragraphe 3 de [7]). Cette intégrale fait bien sûr intervenir le profil d'indice de réfraction de l'air en fonction de l'altitude, et pour un profil quelconque on ne sait en général pas l'intégrer : *a priori* il n'existe pas d'expression littérale *rigoureuse* de  $\chi_S$ , de même qu'il n'en existe pas qui donnent *rigoureusement* les profils de température, etc., dans l'air, dont dépend l'indice de réfraction.

Partant de cette constatation, si on veut éviter d'être intellectuellement asservi par le recours systématique aux méthodes purement numériques qui frustreraient Wigner cité en épigraphe (elles ont aussi leurs limites, même avec ordinateur, car des instabilités numériques affectent l'étude des rayons qui rasant la frontière supérieure d'un chenal optique), on se trouve dans l'obligation de tenter diverses approximations, tant sur le calcul de l'intégrale elle-même avec des techniques mathématiques variées, que sur les fonctions donnant le profil d'indice. La multiplicité des combinaisons possibles engendre beaucoup de modèles au sein de la catégorie « à symétrie sphérique », chacun débouchant sur une expression de  $\chi_S$ . Certaines approximations pourront sembler osées; mais quand elles donnent un résultat numérique assez précis pour le but visé, on apprécie le raccourci offert, par rapport au calcul numérique brut, par la formule littérale approchée obtenue. Toutes les formules que nous donnerons ont leurs qualités et leurs défauts, plus ou moins importants pour ces derniers, surtout au voisinage de l'horizon astronomique (i.e. l'ensemble des directions horizontales pour  $S$ ); alors on doit toujours relativiser les conséquences qu'on en tire et, si elles sont numériques (ce qui ne sera pas le propos de cet article, mais plutôt de l'article [8] dans ce numéro spécial), il faut être capable d'encadrer numériquement l'erreur. La démonstration de la première formule approximative que nous rencontrerons, celle de Simpson, est très simple, et nous verrons qu'elle apporte une préfiguration du « théorème d'Oriani ». Pour aller plus loin, il sera nécessaire d'utiliser l'invariant de Bouguer de tout rayon lumineux dans un milieu à symétrie sphérique. Après l'avoir démontré, nous montrerons comment on l'incorpore dans l'intégrale donnant  $\chi_S$ , que l'on essaye de calculer avec des approximations fort diverses, donnant un résultat (sous forme de développements en puissances de  $\tan Z'$ ) acceptable sauf auprès de l'horizon, comme celui de Laplace, ou vice-versa; sur ce sujet la littérature est si fournie, et les calculs souvent si lourds, qu'il est vain d'espérer en donner une présentation exhaustive. En contraste avec ce qui précède, nous citerons l'exemple d'un cas rigoureusement intégrable, et fa-

cilement au moyen d'un changement de variable fécond trouvé par Biot en 1839. De plus, celui-ci a prouvé un théorème remarquable, car rigoureusement valable pour tout modèle d'atmosphère à symétrie sphérique sans chenal; nous l'exposerons, ainsi que d'autres théorèmes, dont celui de Laplace (qui recèle cependant quelques approximations). Enfin, la variation d'indice de l'air avec la longueur d'onde (i.e. son caractère dispersif) n'étant pas négligeable (quoique moins fort que pour le verre ordinaire), il est nécessaire de s'enquérir des effets chromatiques pour la réfraction astronomique; ils sont systématiques et gênants, malgré leur petitesse, pour les dispositifs hypersensibles que sont les grands télescopes et les interféromètres astronomiques (voir l'article [9] sur la « correction de la dispersion atmosphérique dans l'imagerie par les grands télescopes [...] » dans ce numéro spécial), mais parfois ils sont esthétiques et visibles à l'œil nu, comme le fameux « rayon vert » dont nous détaillerons la forme la plus simple.

## 2. Expression intégrale de la réfraction

Depuis Brook Taylor en 1715 [10] (voir les paragraphes 2.3, 3 et 4 de [2]), il est connu que la réfraction  $\chi_S$  pour un observateur  $S$  s'écrit par essence sous la forme d'une intégrale fondamentale, dite « de réfraction » :

$$\chi_S = \int_1^{n_S} d\chi(n) \text{ avec } d\chi(n) = \frac{\tan \alpha}{n} dn \quad (1)$$

où  $n$  désigne l'indice de réfraction variable le long du rayon lumineux (R) supposé plan et arrivant en  $S$  (depuis le point extra-atmosphérique  $A$  concerné à l'infini), la borne  $n_S$  est l'indice de réfraction en  $S$ , et l'angle arithmétique  $\alpha$  est celui entre les vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{grad} n$  ( $\mathbf{u}$  étant unitaire tangent à (R), orienté dans le sens de la lumière). Historiquement, cette expression était démontrée en considérant l'atmosphère inhomogène comme un empilement de couches infinitésimales homogènes; il existe heureusement une démonstration plus rigoureuse en termes modernes. En considérant  $s$ , abscisse curviligne sur (R) et orientée comme  $\mathbf{u}$ , par définition du rayon de courbure  $\mathcal{R}$  conventionnellement positif le long de (R) on a,  $s_S$  désignant l'abscisse curviligne de  $S$ , l'angle de réfraction (compté positivement vers le haut) qui s'écrit, pour un rayon plan,

$$\chi_S = \int_{-\infty}^{s_S} \pm ds / \mathcal{R} \quad (2)$$

avec le signe + si la concavité du rayon est vers le bas.

Or, au moins depuis certains travaux de William H. Wollaston [11] on sait [12, p. 169], [13] que la courbure de (R) s'écrit

$$1/\mathcal{R} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} \ln n \quad (3)$$

où le vecteur unitaire normal  $\mathbf{n}$  est choisi dans le sens de la concavité du rayon, donc

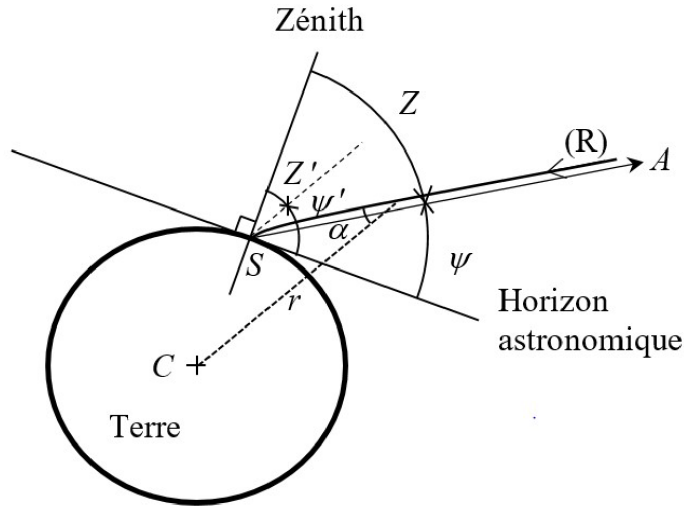
$$1/\mathcal{R} = \|\mathbf{grad} \ln n\| |\sin \alpha|. \quad (4)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \chi_S &= \int_{-\infty}^{s_S} \pm ds / \mathcal{R} = \int_{-\infty}^{s_S} \pm |\sin \alpha| \|\mathbf{grad} \ln n\| ds = \int_{-\infty}^{s_S} \pm |\tan \alpha| \frac{|\cos \alpha| \|\mathbf{grad} n\|}{n} ds \\ &= \int_{-\infty}^{s_S} \pm \frac{1}{n} \left| \tan \alpha \frac{dn}{ds} \right| ds \end{aligned} \quad (5)$$

Quand la concavité du rayon est vers le bas les signes  $\pm$  deviennent +, et on a soit ( $dn/ds \geq 0, \tan \alpha \geq 0$ ), soit ( $dn/ds \leq 0, \tan \alpha \leq 0$ ), donc de toute façon  $(\tan \alpha) dn/ds \geq 0$ ; quand la concavité du rayon est vers le haut les signes  $\pm$  deviennent -, et on a de toute façon  $(\tan \alpha) dn/ds \leq 0$ . Dans tous les cas, il vient

$$\chi_S = \int_{-\infty}^{s_S} \frac{\tan \alpha}{n} \frac{dn}{ds} ds, \quad (6)$$



**FIGURE 1.** Définition des distances zénithales vraie et apparente  $Z$  et  $Z'$  de  $A$ , et de ses hauteurs vraie et apparente  $\psi$  et  $\psi'$ , le tout pour l'observateur  $S$ . Le point  $C$  et la distance  $r$  ne seront définis qu'à partir du paragraphe 4, où nous entrerons dans l'étude des cas à symétrie sphérique (de centre  $C$ ).

d'où l'expression annoncée (1), en passant à la variable  $n$  (qui présente l'avantage de supprimer toute borne infinie), mais seulement à condition que  $\tan \alpha$  soit une fonction non-équivoque de  $n$ , ce qui exige que  $n$  soit une fonction strictement monotone de  $s$ ; si tel n'était pas le cas, il faudrait repartir de l'expression (6) — par exemple, dans l'étude de la réfraction des ondes radio due à une couche ionosphérique.

On voit que l'hypothèse de symétrie sphérique du milieu, utilisée dans d'autres démonstrations [14–17], n'est pas nécessaire.

Cette expression générale (6) comporte trois difficultés importantes derrière son apparente simplicité : les relations donnant  $\alpha(s)$  et  $n(s)$  ne sont en général pas connues, elles donneraient des intégrales incalculables analytiquement, et en plus l'intégrale de l'expression (1) est impropre pour les rayons arrivant en  $S$  horizontalement. De ces difficultés découlent les innombrables études, tant numériques qu'analytiques, menées depuis le XVIII<sup>e</sup> siècle, dans le but de connaître — mieux qu'avec le modèle de Cassini (1662) — la valeur de  $\chi_S$  en fonction de la distance zénithale apparente  $Z'$  du point  $A$  de l'astre, et sa variation en fonction de différents paramètres pratiques : l'indice  $n_S$  (qui dépend de la température absolue  $T_S$  et de la pression  $P_S$  en  $S$ ), et quelques renseignements apportant plus de précisions sur la structure de l'atmosphère (par exemple, différentes échelles de hauteur que nous introduirons le moment venu).

### 3. Formule de Simpson (1743)

L'approximation la plus radicale consiste à dire que, vu la petite différence entre  $n_S$  et 1,  $\tan \alpha/n \cong \tan Z'$  (voir la Figure 1 pour un rappel de la définition de  $Z'$ ) sur tout le domaine d'intégration  $[1, n_S]$  de l'équation (1), sauf quand  $\alpha$  devient trop proche de  $90^\circ$  car les petites variations de  $\alpha$  peuvent engendrer une variation non négligeable de  $\tan \alpha$ .

Avec cette restriction, mais même si  $n$  n'est pas une fonction monotone de  $s$ , on obtient la formule de Simpson

$$\chi_S = \tan Z' \int_{-\infty}^{s_S} \frac{dn}{ds} ds = \tan Z' \int_1^{n_S} dn = (n_S - 1) \tan Z' \quad (7)$$



(où nous avons mis = au lieu de  $\cong$  car nous n'avons pas introduit de nouvelle approximation en plus de celle indiquée au début de ce paragraphe 3); au paragraphe 4 de [2] nous avons rappelé son domaine de validité tout en donnant des valeurs numériques précises. Mais grossièrement, pour  $S$  dans les conditions normales ( $0^\circ\text{C}$  et  $1\text{ atm}$ ),  $\chi_S \cong 1'$  avec  $Z' = 45^\circ$ , et cela quel que soit le profil de densité de l'air en fonction de l'altitude : cette indifférence constitue la loi de Simpson, qui est approximative ici, mais s'avère rigoureuse dans le cadre d'un modèle de Terre plate avec une atmosphère stratifiée (voir le paragraphe 4 de [2]), même si pour ce dernier modèle l'expression (7) n'est qu'une approximation d'ordre 1 en  $n_S - 1$ .

Comme annoncé aussi dans [2], cette loi de Simpson plonge ses racines dans un résultat approximatif plus profond, appelé exagérément « théorème » d'Oriani et que nous présentons dès maintenant. Il nécessite cependant l'hypothèse d'une atmosphère à symétrie sphérique de centre  $C$ , que nous adoptons pour toute la suite de cet article : dorénavant, pour une longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  fixée, l'indice de réfraction  $n(r)$  de l'air en un point  $M$  ne varie qu'avec la distance  $r := CM$ ; alors on pose  $r_S := CS$  et on a  $n_S := n(r_S)$  — le symbole  $:=$  indiquant une définition ou une notation.

## 4. Deux propriétés fondamentales avec une atmosphère à symétrie sphérique

### 4.1. « Théorème » d'Oriani (1787)

Supposons que  $\chi_S$  en fonction de  $\tan Z'$  admette un développement en série entière. La formule de Simpson suggère que le coefficient de son terme d'ordre 1 est la réfractivité  $\eta_S := n_S - 1$  de l'air en  $S$ . Et dans une atmosphère à symétrie sphérique de centre  $C$ , la symétrie de révolution du faisceau de rayons arrivant en  $S$  fait que tous les termes d'ordre pair de ce développement sont nuls. Barnaba Oriani (1752–1832, astronome à Milan) affirme [18, 19] que les coefficients des termes d'ordre 1 et 3 ne font pas intervenir tous les détails du profil d'indice  $n$  de l'air en fonction de l'altitude  $z := r - r_S$  (d'origine en  $S$ ), mais seulement  $\eta_S$  et la hauteur

$$H_1 := \frac{1}{\eta_S} \int_1^{n_S} z \, dn \quad (8)$$

dite « d'atmosphère homogène » (ou « hauteur réduite »). Au final, ces coefficients ne peuvent varier concrètement qu'avec  $\lambda_0$ ,  $T_S$  et  $P_S$ .

À ce stade, on utilise la loi empirique de Gladstone–Dale [20, p. 175], [21]. Nous avons rappelé, au sous-paragraphe 6.1 de [2], que c'est une conséquence approximative d'une relation théorique qui offre un meilleur accord avec l'expérience : la relation de Clausius–Mossotti ou Lorentz–Lorenz [22]; mais nous avons montré que l'approximation que représente la loi de Gladstone–Dale est suffisante pour couvrir les besoins de l'étude de la réfraction astronomique, avec la précision actuellement requise (0,05 %). Cette loi empirique est simple : elle donne, en un point  $M$  d'un gaz de composition quantitativement uniforme (i.e. indépendante de  $M$ ), sa réfractivité en fonction de la température  $T$  et de la pression  $P$  sous la forme

$$\eta(\lambda_0, T(M), P(M)) := n(\lambda_0, T(M), P(M)) - 1 \cong C(\lambda_0)\mu(T(M), P(M)) \ll 1, \quad (9)$$

donc quasi proportionnelle à sa masse volumique  $\mu$ , la constante de proportionnalité ne variant qu'avec  $\lambda_0$ ; cette constante  $C(\lambda_0)$  est une des caractéristiques de la composition du gaz. Certes, la composition quantitative de l'air est uniforme en dioxygène et diazote sur toute la troposphère, mais il n'en est pas de même pour sa teneur en vapeur d'eau : on dit que l'atmosphère ou l'air n'est pas bien mélangé, et alors dans l'équation (9) il faut remplacer  $C(\lambda_0)$  par  $C(M, \lambda_0)$ ; Biot avait déjà très nettement conscience de ce problème (voir l'introduction du paragraphe 3 de l'article [23] dans ce numéro spécial). Heureusement, nous avons annoncé au début du paragraphe 6 de [2] que l'influence de l'hygrométrie est très faible sur  $n_S - 1$ , et elle l'est encore plus sur  $\mu$ . Dorénavant

nous négligerons les variations spatiales de  $C(M, \lambda_0)$  dans tout cet article, où nous considérerons toujours que l'air est bien mélangé, donc que l'on peut utiliser  $C(\lambda_0)$  qui a la même valeur en tout point; on en déduit

$$\eta = n - 1 = (n_S - 1)\mu/\mu_S = \eta_S \mu/\mu_S \quad (10)$$

(nous mettons l'indice  $S$  à une grandeur pour désigner sa valeur en  $S$ ).

Alors  $H_1$  est susceptible d'interprétations diverses. D'une part,

$$H_1 = \frac{1}{\mu_S} \int_0^{\mu_S} z d\mu = -\frac{1}{\mu_S} \int_0^\infty z \frac{d\mu}{dz} dz; \quad (11)$$

cela veut dire que  $H_1$  est le moment réduit, d'ordre 1, du profil  $-\eta'(z)$ , mais aussi du profil  $-\mu'(z)$ . D'autre part, une intégration par parties donne

$$\mu_S H_1 = \int_\infty^0 z \frac{d\mu}{dz} dz = [z\mu(z)]_\infty^0 - \int_\infty^0 \mu(z) dz = \int_0^\infty \mu(z) dz. \quad (12)$$

Cela veut dire que  $H_1$  est, dans le cadre d'un modèle de Terre plate, la hauteur d'une colonne d'atmosphère fictive homogène dont la masse volumique prendrait la valeur réelle du niveau de l'observateur, et qui aurait la même masse totale que la colonne de même section d'atmosphère située au-dessus de l'observateur. Avec la norme  $g$  du champ de pesanteur uniforme dans un modèle de Terre plate, et avec l'hypothèse des pressions hydrostatiques dans un fluide quelconque, on a

$$H_1 = \frac{1}{\mu_S g} \int_0^\infty \mu(z) g dz = \frac{P_S}{\mu_S g}. \quad (13)$$

Dans les conditions normales en  $S$ , cela donne  $H_1 \cong 101\,325 \text{ Pa} / (1,293 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \times 9,807 \text{ N}\cdot\text{kg}^{-1}) \cong 7,990 \text{ km}$  sous nos latitudes. En fait, on utilisera plutôt sa valeur relative  $h_1 := H_1/r_S \cong 1,25 \times 10^{-3}$  ramenée à la valeur  $r_S$  — proche du rayon moyen terrestre  $6\,371 \text{ km}$ . Et la relation (17) ci-dessous montre que l'expression de  $h_1$  se simplifie encore, si l'on suppose en plus que l'air en  $S$  est un gaz parfait.

Nous présenterons le cheminement conduisant à ce « théorème » d'Oriani au sous-paragraphe 5.1, dont la problématique est plus ambitieuse; mais nous verrons que le raisonnement n'est pas mathématiquement rigoureux, donc que la dénomination traditionnelle de « théorème » s'avère, pour les résultats d'Oriani, inadéquate. En attendant, nous donnons l'expression des coefficients des ordres 1 et 3, apparaissant dans la formule de Laplace (que nous démontrerons au sous-paragraphe 5.1) :

$$\begin{aligned} \chi_S &\cong \eta_S \left[ (1 - h_1) - \left( h_1 - \frac{\eta_S}{2} \right) \tan^2 Z' \right] \tan Z' \\ &= C \mu_S \left[ \left( 1 - \frac{P_S}{\mu_S g r_S} \right) - \left( \frac{P_S}{\mu_S g r_S} - \frac{C \mu_S}{2} \right) \tan^2 Z' \right] \tan Z'; \end{aligned} \quad (14)$$

on voit que le coefficient conjecturé au début de ce sous-paragraphe à partir de la formule de Simpson est légèrement surévalué, en valeur relative, de  $h_1$ . D'ailleurs, avec l'expression rigoureuse de  $\chi_S$  donnée par le modèle de Cassini (voir le sous-paragraphe 2.1 de [2]), on trouve que le terme d'ordre 1 de son développement en tant que fonction de  $\tan Z'$  est  $\eta_S (\tan Z') / (1 + h_1)$ , tandis qu'en fonction de  $\eta_S$  c'est  $\eta_S (\sin Z') / \sqrt{\cos^2 Z' + 2h_1 + h_1^2}$  qui permet (contrairement au développement précédent) d'estimer la réfraction horizontale  $\chi_{Sh}$  (i.e. la valeur de  $\chi_S$  pour  $Z' = 90^\circ$ ) :

$$\chi_{Sh} \cong \eta_S / \sqrt{2h_1 + h_1^2}; \quad (15)$$

une approximation d'ordre supérieur en  $\eta_S$  (voir le sous-paragraphe 2.1 de [2]) fournit

$$\chi_S \cong \eta_S \left( 1 - \frac{\eta_S}{2} \right) \sin Z' / \sqrt{2 \left( h_1 - \frac{\eta_S}{2} \right) + \cos^2 Z'}. \quad (16)$$

Avec la raie d (*alias* D<sub>3</sub>) — de l'hélium, celle actuellement standardisée pour donner ordinairement l'indice de réfraction d'un milieu transparent ( $\lambda_0 \cong 588 \text{ nm}$ ) — et avec S dans les conditions normales, ces deux approximations et le calcul rigoureux donnent respectivement  $\chi_{Sh} \cong 5,837 \times 10^{-3} \text{ rad} \cong 20'4''$  ou  $6,211 \times 10^{-3} \text{ rad} \cong 21'21''$  et  $21'24''$  au lieu des 35' observées (voir la figure de la référence [24], qui suppose une température de 15 °C au lieu de 0 °C), et la formule de Laplace donne  $\chi_S \cong 60,14'' \tan Z' - 0,0668'' \tan^3 Z'$ . Notons que son premier paramètre  $\eta_S$  varie avec  $T_S$ ,  $P_S$  et  $\lambda_0$ ; il n'en est pas de même pour son second paramètre  $h_1$  qui ne varie pas avec  $\lambda_0$  pour un air bien mélangé, et qui ne peut varier concrètement qu'avec  $T_S$ , indépendamment du reste du profil thermique de l'atmosphère, si on suppose que  $g$  est uniforme, que la distribution verticale de pression est hydrostatique, et que l'air en S est un gaz parfait — car ce second paramètre s'écrit alors

$$h_1 = \frac{P_S}{\mu_S g r_S} = \frac{RT_S}{M_a g r_S} \quad (17)$$

où  $M_a$  est la masse molaire de l'air et  $R$  la constante des gaz parfaits. Avec toutes ces hypothèses, la formule de Laplace se réécrit

$$\chi_S = C(\lambda_0) \frac{M_a P_S}{RT_S} \left\{ \left( 1 - \frac{RT_S}{M_a g r_S} \right) - \left[ \frac{RT_S}{M_a g r_S} - \frac{C(\lambda_0) M_a P_S}{2 RT_S} \right] \tan^2 Z' \right\} \tan Z'. \quad (18)$$

D'ores et déjà, nous livrons une application intéressante du théorème d'Oriani : si le gradient troposphérique de température se conservait dans la stratosphère, puisque le théorème d'Oriani s'y applique même pour la réfraction horizontale pour S au sol, celle-ci ne changerait que de 2'', alors que la réfraction horizontale est due pour 1/8 à la stratosphère !

En effet, toujours dans le cas de la réfraction horizontale, pour un point  $P$  sur la tropopause standard à la distance  $r_P = r_S + 11 \text{ km}$  où (à 226,32 hPa et  $-56,5 \text{ °C}$ ) l'indice à 550 nm vaut  $n_P \cong 1,000078$  sur un rayon arrivant de l'infini dans un milieu à symétrie sphérique, l'angle du rayon par rapport à la direction radiale en  $P$  vaut  $\alpha_P$ , et avec l'invariant de Bouguer  $I_B := n r \sin \alpha$  (justifié dès le sous-paragraphe suivant) on trouve

$$\alpha_P = \arcsin \frac{n_S r_S}{n_P r_P} \cong 86,8^\circ; \quad (19)$$

ceci est suffisamment inférieur à  $90^\circ$  pour que la réfraction, partielle car observée en  $P$  et non en S, soit nettement moins sensible (en vertu de la loi de Simpson) à la façon dont l'indice tend vers 1 au-dessus de  $P$ , à partir de sa valeur imposée par les conditions de pression et de température en  $P$ .

Cette quasi-indépendance par rapport à la structure de la haute atmosphère, même pour la réfraction horizontale, avait déjà été soulignée par Biot [25, p. 112], Bemporad [26], etc.

#### 4.2. Équation de Bouguer (1729)

Dans [2], nous avons vu que Bouguer a compris que, dans un milieu à symétrie sphérique de centre  $C$ , les rayons lumineux sont dans des plans passant par  $C$ , et que la grandeur

$$I_B := n r \sin \alpha \quad (20)$$

est invariante le long d'un rayon; l'équation de Bouguer consiste à écrire que  $I_B$  est une constante, ce qui donne une équation différentielle régissant le rayon [27], [28, Livre 10]. Bouguer a compris que certains rayons peuvent être circulaires de centre  $C$ .

Dans le présent sous-paragraphe, nous rappelons que l'invariant de Bouguer se démontre instantanément à partir de l'analogie cinématique valable pour les rayons lumineux en milieu continu, dans l'approximation de l'optique géométrique : la détermination d'un rayon lumineux se ramène à celle de la trajectoire d'une particule  *fictive*  de vitesse  $v_0 n \mathbf{u}$  (et non  $v_0 \mathbf{u}/n$  !) dans un champ d'accélération  $v_0^2 \mathbf{grad} n^2/2$  (où  $v_0$  est une vitesse arbitraire constante).

Cette analogie, qui était déjà entrevue par Newton, puis enrichie par Wollaston (avec son expression de « refracting force » [11]) permet de réutiliser bien des résultats de la cinématique du point. Entre autres, dans le cas d'un milieu à symétrie sphérique, la particule fictive suit un mouvement à accélération centrale. On en déduit d'abord la planéité de sa trajectoire, comprise par Bouguer, ainsi que l'existence de la classique constante des aires qui n'est autre que  $v_0^2 I_B$  ici.

## 5. Principe de deux développements classiques

Le principe de tous les développements est de partir de l'intégrale de réfraction (vue au paragraphe 2)

$$\chi_S = \int_1^{n_S} (\tan \alpha) dn/n, \quad (1)$$

ce qui suppose que sur le rayon lumineux (R) considéré, ni  $n$  ni  $r$  ne passent par un extrémum ou ne restent constants sur un domaine; pour l'atmosphère cela impose  $dn/dr \leq 0$ , mais aussi (voir notamment le paragraphe 3 de [7])  $df/dr \geq 0$  où  $f(r) := r n(r)$ . Alors on transforme (1) en

$$\chi_S = \int_1^{n_S} \frac{nr \sin \alpha}{\sqrt{n^2 r^2 - (nr \sin \alpha)^2}} \frac{dn}{n} \quad (21)$$

où apparaît l'invariant de Bouguer

$$nr \sin \alpha = n_S r_S \sin Z'; \quad (22)$$

ainsi obtient-on

$$\chi_S = n_S r_S (\sin Z') \int_1^{n_S} \frac{n^{-1}}{\sqrt{n^2 r^2 - (n_S r_S \sin Z')^2}} dn \quad (23)$$

qui est depuis Bouguer [27] l'expression traditionnellement utilisée par beaucoup d'auteurs, à quelques variantes près.

### 5.1. Développement à l'ordre 1 en fonction des variations d'indice avec l'altitude; formule de Laplace

Une première idée d'approximation serait d'effectuer un développement limité de l'intégrande de l'équation précédente, à l'ordre 1 par rapport à l'altitude  $z$  au voisinage de 0, car la hauteur utile de l'atmosphère est très petite devant  $r_S$ . Mais il faut dire d'emblée que certains aspects de cette approximation sont intolérables : ils reviennent à supposer que les petites variations de  $n(r)$  ou de  $r n(r)$  sont quasi affines sur toute la hauteur utile de l'atmosphère, ce qui est bien trop grossier.

C'est pourquoi on procède plus finement, en introduisant plusieurs infiniment petits d'ordre 1, comme  $z/r_S \ll 1$  sur toute la hauteur utile de l'atmosphère, mais aussi la réfractivité  $\eta$ , ainsi que

$$\Delta n := n - n_S = \eta - \eta_S \quad (24)$$

et

$$\frac{\Delta(nr)}{n_S r_S} := \frac{(r_S + z)n - r_S n_S}{n_S r_S} = \left(1 + \frac{z}{r_S}\right) \frac{1 + \eta}{1 + \eta_S} - 1 \cong \frac{z}{r_S} + \eta - \eta_S := Y \quad (25)$$

(en reprenant la notation  $Y$  du paragraphe 2 de [2]); l'obtention de  $Y$  revient à assimiler la petite variation relative de  $nr$  à sa différentielle logarithmique à l'ordre 1 (en  $z/r_S$  et  $\Delta n$  et  $\eta_S$ ) — cette technique fondamentale d'approximation se trouve promise à une (trop) large diffusion. Nous écrivons l'intégrande de l'expression (23) sous la forme de son terme d'ordre 0, i.e. sa valeur en

S, plus sa petite variation assimilée à une différentielle d'ordre 1 (au sens précisé ci-dessus) que nous calculons par différentiation logarithmique. Cela donne

$$\begin{aligned}\chi_S &\cong n_S r_S (\sin Z') \int_1^{n_S} \frac{n_S^{-1}}{\sqrt{(n_S r_S)^2 - (n_S r_S \sin Z')^2}} \left[ 1 - \frac{\Delta n}{n_S} - \frac{1}{2} \frac{2 n_S r_S \Delta(nr)}{(n_S r_S)^2 - (n_S r_S \sin Z')^2} \right] dn \\ &\cong \frac{\tan Z'}{n_S} \int_0^{\eta_S} \left[ 1 - (\eta - \eta_S) - \frac{Y}{\cos^2 Z'} \right] d\eta \\ &= \frac{\tan Z'}{1 + \eta_S} \left\{ \int_0^{\eta_S} \left[ 1 - (\eta - \eta_S) \left( 1 + \frac{1}{\cos^2 Z'} \right) \right] d\eta - \frac{1}{r_S \cos^2 Z'} \int_0^{\eta_S} z d\eta \right\};\end{aligned}\quad (26)$$

mais la présence du préfacteur  $1/\cos^2 Z'$  dans le terme d'ordre 1 de ce développement limité en  $z/r_S$  et  $\Delta n$  et  $\eta_S$  (voir notamment la deuxième des trois expressions précédentes) fait que la validité de l'approximation ci-dessus n'est plus assurée quand  $Z'$  approche trop de  $90^\circ$ . Par ailleurs, la première des intégrales de la dernière ligne vaut

$$\left[ \eta - \frac{(\eta - \eta_S)^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{\cos^2 Z'} \right) \right]_0^{\eta_S} = \eta_S + \frac{\eta_S^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{\cos^2 Z'} \right); \quad (27)$$

la seconde intégrale vaut  $\eta_S H_1$  par définition — équation (8). Alors on trouve

$$\chi_S = \frac{\tan Z'}{1 + \eta_S} \left[ \eta_S + \frac{\eta_S^2}{2} \left( 1 + \frac{1}{\cos^2 Z'} \right) - \frac{\eta_S H_1}{r_S \cos^2 Z'} \right]. \quad (28)$$

Puis, avec  $1/\cos^2 Z' = 1 + \tan^2 Z'$ , on trouve la formule de Laplace [28, Livre 10, chap. 1], [29, p. 521–527] déjà donnée au sous-paragraphe 4.1 du présent article :

$$\chi_S \cong \eta_S \tan Z' \left[ (1 - h_1) - \left( h_1 - \frac{\eta_S}{2} \right) \tan^2 Z' \right]. \quad (14)$$

Notons que si, à l'instar de Newton et Simpson, on avait fait l'approximation  $n^{-1} \cong 1$ , pour  $\chi_S$  on aurait trouvé  $(\tan Z') \left\{ \int_0^{\eta_S} [1 - (\eta - \eta_S)/\cos^2 Z'] d\eta - 1/(r_S \cos^2 Z') \int_0^{\eta_S} z d\eta \right\}$ , i.e. le résultat moins bon (32) de [2].

Quoiqu'il en soit, ces résultats montrent l'indépendance approximative de  $\chi_S$  par rapport à la structure fine de l'atmosphère. Mais surtout, rappelons d'une part que pour arriver à la formule (14), nous n'avons pas fait un développement en série entière de  $\chi_S$  en fonction de  $\tan Z'$ , mais un développement limité à l'ordre 1 en  $(z/r_S, \Delta n, \eta_S)$  de l'intégrande de l'équation (23); ceci correspond donc, après intégration, à un développement limité à l'ordre 2 pour  $\chi_S$ , puisque l'intégrale de (23) est celle d'une fonction de  $n$ , et c'est cohérent avec le développement de la formule de Cassini montré au paragraphe 2 de [2]. D'autre part, si nous avions poussé le développement limité de l'intégrande à l'ordre 2, il faudrait remplacer l'équation (26) par une expression plus compliquée, où il y aurait entre autres un terme  $\int_0^{\eta_S} (z/\cos^2 Z')^2 d\eta$  qui, puisque  $1/\cos^4 Z' = 1 + 2 \tan^2 Z' + \tan^4 Z'$ , rajouterait à chacun des coefficients  $(1 - h_1)$  et  $-[h_1 - (\eta_S/2)]$  de la formule de Laplace (14) un terme ne s'exprimant ni en fonction de  $\eta_S$ , ni en fonction de  $H_1$  — mais en fonction de  $H_2$  (voir le sous-paragraphe 5.2.1). Chacune de ces deux dernières remarques suffit pour montrer que le contenu de ce sous-paragraphe 5.1 n'est donc aucunement une preuve rigoureuse du « théorème » d'Oriani, dont l'énoncé repose sur une confusion entre les variables par rapport auxquelles on développe.

## 5.2. Une méthode systématique de développement de $\chi_S(\tan Z')$ en série entière

Pour obtenir plus directement un développement en série entière de  $\chi_S(\tan Z')$ , d'autres manipulations de l'expression (23) sont possibles; pour illustrer les enseignements à tirer de ces diverses manipulations, il suffit que nous en présentions une seule : celle de la partie IV de l'article de 1882 de Rodolphe Radau [30]. Elle réécrit l'intégrale (23) sous la forme

$$\chi_S = n_S r_S (\sin Z') \int_1^{n_S} \frac{n^{-1}}{nr \cos Z'} \left[ \frac{1}{\cos^2 Z'} - \frac{n_S^2 r_S^2}{n^2 r^2} \tan^2 Z' \right]^{-1/2} dn, \quad (29)$$

d'où les expressions utiles

$$F(n, Z') := \left( 1 - \frac{n_S^2 r_S^2}{n^2 r^2} \right) \tan^2 Z' \quad (30)$$

(où on tient compte de la relation entre  $r$  et  $n$  à  $Z'$  fixé) et

$$\chi_S = n_S r_S (\tan Z') \int_1^{n_S} n^{-2} r^{-1} [1 + F(n, Z')]^{-1/2} dn. \quad (31)$$

### 5.2.1. Intervention des moments réduits d'ordre quelconque dans le développement de $\chi_S(\tan Z')$ en série entière

Radau développe  $[1 + F(n, Z')]^{-1/2}$  en série entière de  $F(n, Z')$ . Sans se soucier de la légitimité de permuter l'intégration et la sommation infinie (cette question délicate mais nécessaire étant renvoyée à l'Annexe A), ceci le conduit à admettre

$$\chi_S = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p \tan^{2p+1} Z' \quad (32)$$

avec (en reprenant à la fin la technique d'approximation déjà utilisée au sous-paragraphe précédent sur la hauteur utile de l'atmosphère, et en y admettant que  $n_S n^{-2} r^{-1} \cong r_S^{-1}$ , ce qui majore un peu)

$$a_p = r_S \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \int_1^{n_S} n_S n^{-2} r^{-1} \left( 1 - \frac{n_S^2 r_S^2}{n^2 r^2} \right)^p dn \cong \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \int_1^{n_S} (2Y)^p dn \quad (33)$$

où  $N!$  et  $N!!$  désignent respectivement la factorielle et la double factorielle de  $N$ ; la grandeur sans dimension  $Y$  a été introduite par la relation (25).

En nous appuyant sur le modèle d'atmosphère isotherme de hauteur d'échelle  $H_T$ , avec lequel (à 15 °C et  $P_S = 1$  atm)  $|(\eta - \eta_S)/(z/r_S)| \cong \eta_S/(H_T/r_S) \cong 1/4,8$  pour  $z > 0$  (voir le sous-paragraphe 7.1.4), nous faisons ici, dans un but de simplification uniquement pédagogique, la grossière approximation supplémentaire  $Y \cong z/r_S$  — mais dans l'article [31] de ce numéro spécial nous expliquons la méthode usuelle permettant de dépasser cette approximation. Nous obtenons ainsi (voir le sous-paragraphe 3.1.2 de [31]) une expression représentative de celles traditionnellement produites dans grand nombre de travaux du XIX<sup>e</sup> siècle et du début du XX<sup>e</sup> [30, 32, 33] :

$$\chi_S \cong (n_S - 1) \left[ \left( 1 - \frac{H_1}{r_S} \right) + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{(2p-1)!!}{p!} \left( \frac{H_p}{r_S} \tan^2 Z' \right)^p \right] \tan Z' \quad (34)$$

où intervient la hauteur caractéristique  $H_p$  qui est la racine  $p$ -ième du moment réduit d'ordre  $p$  de  $-\eta'(z)$ , utilisée en substance par Newcomb [33, p. 214], et donnée (pour  $p \geq 1$ ) par

$$\eta_S H_p^p := - \int_0^{\infty} z^p \eta'(z) dz = \int_0^{\eta_S} z^p d\eta. \quad (35)$$

Ici les coefficients  $a_p$  apparaissent sous une forme explicite, car ils ont été simplifiés grâce aux approximations; mais souvent, ils restaient exprimés eux-mêmes par d'autres développements en série, occultant la physique du phénomène de réfraction ! Signalons enfin que l'approximation

obtenue avec  $p = 0$  et 1 (soit quasiment la formule de Laplace) est bien moins bonne que ce que donne le modèle de Cassini (voir le paragraphe 2 du chap. 1), à toute distance zénithale !

### 5.2.2. Semi-convergence

Dans le cas de l'atmosphère bien mélangée et satisfaisant la loi de Gladstone–Dale, supposée en plus constituée d'un mélange idéal de gaz parfaits de température uniforme, avec une distribution verticale de pression hydrostatique dans le champ de pesanteur radial et de norme  $g$  considérée uniforme, on a un profil de réfractivité exponentiellement décroissant

$$\eta(z) = \eta_S e^{-z/H_T} \text{ avec } H_T = \frac{RT}{M_a g} \quad (36)$$

qui est l'échelle de hauteur de cette atmosphère dite isotherme. Alors  $H_p$  se déduit de  $H_T$  à l'aide de la fonction *gamma* (voir le paragraphe 4 de [2]) :

$$H_p^p := - \int_0^\infty z^p [\eta'(z)/\eta_S] dz = \int_0^\infty z^p e^{-z/H_T} dz / H_T = \Gamma(p+1) H_T^p = p! H_T^p \quad \forall p \in \mathbb{N}. \quad (37)$$

La pointe de ce sous-paragraphe consiste à remarquer que l'ensemble des résultats obtenus donne

$$\chi_S = (n_S - 1) \left[ \left( 1 - \frac{H_T}{r_S} \right) + \sum_{p=1}^\infty (-1)^p (2p-1)!! \left( \frac{H_T}{r_S} \tan^2 Z' \right)^p \right] \tan Z' \quad (38)$$

et que la série diverge, même violemment puisque  $\lim_{p \rightarrow \infty} (2p-1)!! ((H_T/r_S) \tan^2 Z')^p = \infty$  aussi petits que soient  $H_T = H_1$  et même  $\tan Z'$  (non nuls) ! Avec un modèle voisin de celui de l'atmosphère isotherme, Radau obtient une expression voisine de (38), mais avec  $H_1 - (\eta_S/2)r_S$  comme hauteur d'échelle au lieu de  $H_T$  (voir le sous-paragraphe 3.1.2 de [31]); il dit que son expression approchée donne une excellente approximation jusqu'à  $Z' = 80^\circ$ , mais que pour  $Z' = \arctan 10 \cong 84,3^\circ$  « la série diverge à partir » de  $p = 5$  — tel que  $a_5 \tan^{11} Z' \cong 10''$  [30, B. 15]. En effet, on montre que la suite des  $(2p-1)!! ((H_T/r_S) \tan^2 Z')^p$  est décroissante, comme on s'y attendait, mais de  $p = 1$  jusqu'à seulement  $p$  voisin de  $r_S / (2H_T \tan^2 Z')$  — tant que ce nombre est assez grand devant 1 (donc tant que  $Z'$  n'est pas trop proche de  $90^\circ$ ) — et pour toutes les valeurs suivantes de  $p$  cette suite est croissante vers l'infini. . .

Comment en est-on arrivé là ?

L'Annexe A montre que l'erreur ne provient pas de l'interversion du développement en série et de l'intégrale — voir les relations (31)–(33). Elle ne provient pas non plus de nos approximations pédagogiques — Radau se heurte à la même incohérence. Dans le cas d'une atmosphère théoriquement illimitée comme celle du modèle isotherme, c'est l'approximation fondamentale majeure, consistant à assimiler  $1 - [n_S^2 r_S^2 / (n^2 r^2)]$  à  $2Y = 2[n - n_S + (z/r_S)]$  dans l'intégrale de l'expression de  $a_p$ , qui est maligne car elle semble très acceptable sur la hauteur utile de l'atmosphère, mais au-delà, son effet pour  $p$  grand est très sensible et désastreux, même avec un profil de  $\eta$  à décroissance aussi rapide qu'une exponentielle : la divergence vient du terme  $z/r_S$  introduit avec  $Y$  qui diverge à l'infini et ruine la convergence pour tout  $Z'$  non nul, en introduisant les moments réduits  $H_p^p$  qui croissent trop vite avec  $p$  (à cause de  $p!$ ) par rapport à  $r_S^p$  (voir le sous-paragraphe 3.1.3 de [31]); comme  $\eta - \eta_S$  ne diverge pas, prendre en compte ce terme dans  $Y$  en renonçant à notre approximation pédagogique ne change rien à la divergence de la série ainsi obtenue pour  $\chi_S$ .

Mais pour une atmosphère limitée (comme celle du modèle polytropique) la suite des moments réduits relatifs  $h_p^p := (H_p/r_S)^p$  est décroissante tendant vers zéro, et la série alternée approchée obtenue avec notre approximation pédagogique converge pour  $Z'$  assez petit, tel que la suite des  $((2p-1)!!/p!2^p)(2h_p \tan^2 Z')^p$  soit aussi décroissante tendant vers 0; dans le cas polytropique  $h_p^p$  est analytiquement calculable par une « intégrale bêta » [34, p. 209], i.e. une intégrale eulérienne de première espèce — voir le sous-paragraphe 3.1.2 de [31].

En fait les développements ainsi obtenus, à cause de ces approximations, sont devenus seulement « semi-convergens », au sens où ce ne sont plus des développements de  $\chi_S(\tan Z')$  en série entière, mais des développements limités (avec des approximations dans leurs coefficients) au voisinage de 0 — mais pour l'étude de la réfraction au voisinage de l'horizon astronomique il aurait mieux valu que ce soient des développements asymptotiques pour  $\tan Z'$  au voisinage de l'infini. Au XIX<sup>e</sup>, rares étaient les astronomes conscients de ce problème, à l'exception de James Ivory (1765–1842). Sur le plan pratique, cette méthode de calcul de  $\chi_S$  était une impasse qui a fait son temps (voir le sous-paragraphe 6.3 de [2]). On se sort de ces difficultés en utilisant une méthode d'intégration numérique efficace, dont Biot est le précurseur très remarquable — comme nous allons le voir dès maintenant.

## 6. Changement de variable de Biot; quelques applications

Afin d'éviter l'inconvénient dû au caractère impropre, quand  $Z' = 90^\circ$ , de l'intégrale de réfraction

$$\chi_S = \int_1^{n_S} \frac{\tan \alpha}{n} dn, \quad (1)$$

Jean-Baptiste Biot (1774–1862) dès 1836 [25], puis indépendamment Auer et Standish en 1979 [35], ont exploité l'idée d'effectuer le changement de variable utilisant  $\alpha$ , ce qui donne en substance :

$$\chi_S = \int_0^{Z'} \frac{\tan \alpha}{n} \frac{dn}{d\alpha} d\alpha. \quad (39)$$

Dans une atmosphère à symétrie sphérique, en utilisant  $f(r) := r n(r)$  et en dérivant logarithmiquement l'équation de Bouguer (voir le sous-paragraphe 4.2) par rapport à  $\alpha$ , on en tire une expression de  $\tan \alpha$  qu'on injecte dans (39), et il vient alors

$$\chi_S = \int_0^{Z'} \frac{d \ln n}{d\alpha} \left( -\frac{d \ln f}{d\alpha} \right)^{-1} d\alpha. \quad (40)$$

Dans le cas de la réfraction des astres vus sur l'horizon astronomique, on a  $Z' = \pi/2$ , et cette expression pose encore un problème puisqu'usuellement la limite de  $(d \ln n / d\alpha)(-d \ln f / d\alpha)^{-1}$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $\pi/2$  est de la forme  $\infty/\infty$ . Mais pour lever l'indétermination il suffit de noter que

$$\chi_S = \int_0^{Z'} -\frac{d \ln n}{d \ln f} d\alpha = \int_0^{Z'} -\frac{d \ln n / d \ln r}{1 + (d \ln n / d \ln r)} d\alpha, \quad (41)$$

où intervient (sous réserve d'existence, donc en l'absence de chenal optique) l'application exprimant la dérivée de  $\ln n$  par rapport à  $\ln f$  non en fonction de  $\ln f$  mais en fonction de  $\alpha$ , moyennant

$$\ln f = \ln I_B - \ln \sin \alpha, \quad (42)$$

ou bien l'application exprimant la dérivée de  $\ln n$  par rapport à  $\ln r$  non en fonction de  $\ln r$  mais en fonction de  $\alpha$ , moyennant l'inversion de l'équation de Bouguer pour avoir  $r$  en fonction de  $\alpha$ ; et même en  $\alpha = \pi/2$  les intégrandes de (41) ne divergent généralement pas. Par contre, si (R) traverse un chenal, elles divergent pour, entre autres, la valeur de  $\alpha$  correspondant au bord supérieur du chenal; dans ce cas, il vaut mieux exploiter l'intégrale traditionnelle.

Nous avons déjà dit [2] que ce changement de variable permet de mettre en œuvre des schémas de calcul numérique efficaces, et dans [23] dans ce numéro spécial nous présentons le texte historique de Biot correspondant, en donnant les références de son implantation sur ordinateur; nous y montrons aussi des prolongements théoriques intéressants, qui exploitent un cas où l'intégrale de réfraction est calculable rigoureusement et très facilement grâce à ce changement de variable — les expressions littérales obtenues aident à débuser certaines idées fausses sur la dépendance de  $\chi_{Sh}$  par rapport à  $\eta_S$  (voir le paragraphe 8 du présent article).



## 7. Théorèmes pour une atmosphère à symétrie sphérique

Plusieurs propriétés intéressantes concernent la relation entre la « hauteur (angulaire vraie) »  $\psi$  d'un objet à l'infini, et sa « hauteur apparente »  $\psi' = 90^\circ - Z' = \psi + \chi_S$  — i.e. celle de sa pseudo-image vue par l'observateur  $S$ .

Le préfixe *pseudo* rappelle qu'en fait il n'y a pas stigmatisme par l'atmosphère pour un point objet  $A$  extra-atmosphérique : les tangentes, sur la pupille d'entrée du système optique de l'observateur, à tous les rayons courbes du pinceau venant de  $A$ , forment un pinceau *astigmaté* muni de ses deux traditionnelles focales de Sturm. Dans le cadre du modèle de Cassini (voir le sous-paragraphe 2.1 de [2]), l'écart entre ces focales est facilement calculable, en fonction de la distance zénithale, par les formules classiques (21)–(22) du sous-paragraphe 4.6 du traité [13] par exemple. Une étude plus fine, avec un gradient thermique atmosphérique uniforme, est l'objet de la thèse de Friedrich Dobe [36] en 1911. Il confirme l'ordre de grandeur que donne le calcul avec le modèle de Cassini : la distance focale tangentielle (donc ici, celle qui concerne les rayons situés dans le plan vertical contenant  $S$  et  $A$ ) est positive, de l'ordre de millions de kilomètres pour  $\psi' = 45^\circ$ , plus courte que la distance focale sagittale ; mais pour  $A$  proche de l'horizon la distance focale tangentielle devient de l'ordre de quelques centaines de kilomètres, et la distance focale sagittale quelques milliers de fois plus longue. L'effet de cet astigmatisme, sur la figure lumineuse due à  $A$  au voisinage du foyer du système d'observation, est largement dominé par la diffraction.

Notons que pour un objet donné il peut y avoir plusieurs pseudo-images, mais que dans une atmosphère donnée, pour une valeur de  $\psi'$  il n'y a qu'une seule valeur de  $\psi$  possible ; c'est pourquoi on définit la « courbe de transfert » comme étant le graphe de la fonction  $\psi$  de la variable  $\psi'$  pour l'observateur  $S$ . Nous étudions des exemples de telles courbes dans [7].

### 7.1. Théorème de Biot (1836)

#### 7.1.1. Notions préliminaires

**Grandissement angulaire.** On définit  $\gamma_S := d\psi'/d\psi$ , qui est appelé le « grandissement angulaire vertical local » (pour l'observateur  $S$ ) ; c'est l'inverse de la pente de la courbe de transfert. On note  $\gamma_{Sh}$  sa valeur pour une pseudo-image sur l'horizon astronomique (i.e. pour  $\psi' = 0$ ).

**Coefficient de réfraction.** On définit aussi le « coefficient de réfraction de l'atmosphère » supposée à symétrie sphérique (de centre  $C$ ) : à une distance  $r$  du centre de la Terre, c'est  $\kappa(r) := r C_h(r)$  où  $C_h(r)$  désigne la courbure d'un rayon lumineux (R) en un point  $H$  où il a une tangente horizontale à une distance  $r$  du centre  $C$  de la Terre ; cette courbure est comptée positivement lorsque la concavité du rayon est tournée vers le bas — ce qui est la situation usuelle. Compte tenu de cette convention, et de la relation (3) en  $H$  où  $\mathbf{n}$  est vertical, on a

$$\kappa = -r \frac{d \ln n}{dr} = -\frac{d \ln n}{d \ln r} = -\frac{r}{n} \frac{dn}{dr} = 1 - \frac{1}{n} \frac{d}{dr}(nr) = -\frac{d\chi}{d\theta} \quad (43)$$

— la dernière expression venant de la relation (9) de [37] dans ce numéro spécial.

On note  $\kappa_S := \kappa(r_S)$  la valeur du coefficient de réfraction en  $S$ . Si  $S$  est au niveau de la mer, avec l'atmosphère standard US1976,  $\kappa_S \cong 1/5,9$  (pour des explications sur les autres valeurs possibles, voir le sous-paragraphe 7.1.4) ;  $\kappa_S > 0$  permet de voir, pour l'observateur  $S$  à une élévation  $E := r_S - r_0$  au-dessus du niveau de la mer (où l'indice de l'air vaut  $n_0$ ), un horizon marin plus éloigné que si les rayons étaient rectilignes, presque comme si dans ce cas  $r_S$  était changé en une valeur apparente plus grande

$$r_a = r_S(1 - \kappa_S)^{-1} \cong 1,20r_S \quad (44)$$

(voir le sous-paragraphe 4.2 de l'article [38] dans ce numéro spécial).

### 7.1.2. Énoncé du théorème

Le théorème de Biot fait intervenir cette grandeur  $\kappa_S$ , si importante pour la pratique, et la relie à  $\gamma_{Sh}$  par une expression générale, très simple et rigoureuse (de façon *a priori* inattendue, par contraste avec le paragraphe 5) :

$$\gamma_{Sh} = 1 - \kappa_S. \quad (45)$$

Comme le montrera la démonstration présentée ci-dessous, ce résultat ne suppose pas l'atmosphère bien mélangée; ayant conscience de la non-uniformité de l'hygrométrie en fonction de l'altitude, et dans le doute concernant l'apparition d'autres constituants de l'air à des altitudes encore non atteintes à l'époque de Biot, celui-ci privilégiait la recherche de lois indépendantes de l'uniformité de la composition de l'atmosphère. Notons aussi que le théorème de Biot (45) est indépendant de la relation adoptée entre  $n$  et  $\mu$  (loi de Gladstone–Dale, ou bien de Clausius–Mossotti — voir le sous-paragraphe 6.1 de [2]), ainsi que de la relation entre  $\mu$  et  $(T, P)$  — i.e. l'équation d'état. Par contre, l'expression de  $\kappa_S$  en fonction de  $(dT/dr)_S$ , etc., dépend de ces lois.

### 7.1.3. Démonstration

Nous connaissons trois démonstrations, en termes modernes, de ce théorème; celle que nous proposons ici est la plus proche de l'esprit de celle de Biot [25] (voir [23]).

La relation (41) se met sous la forme

$$\chi_S(\psi') = \int_0^{(\pi/2)-\psi'} g(\alpha, \psi') d\alpha \text{ où } g(\alpha, \psi') := -\frac{d \ln n}{d \ln f} (\ln f(r(\alpha, \psi'))), \quad (46)$$

l'expression  $r(\alpha, \psi')$  étant donnée implicitement par l'équation de Bouguer (voir le sous-paragraphe 4.2)

$$f(r) \sin \alpha(r, \psi') = n_S r_S \cos \psi'. \quad (47)$$

Les propriétés de dérivation d'une fonction composée avec une intégrale donnent

$$\frac{d\chi_S}{d\psi'}(\psi') = \int_0^{(\pi/2)-\psi'} \frac{\partial g}{\partial \psi'}(\alpha, \psi') d\alpha - g\left(\frac{\pi}{2} - \psi', \psi'\right). \quad (48)$$

Cette expression compliquée se simplifie sur l'horizon de  $S$ : dans ce cas on a  $\psi' = 0$ , et surtout  $\partial g / \partial \psi'(\alpha, 0) = 0$  car le théorème des fonctions implicites, appliqué à la relation (47), donne

$$\frac{\partial r}{\partial \psi'}(\alpha, \psi') = -n_S r_S \frac{\sin \psi'}{f'(r(\alpha, \psi')) \sin \alpha} \quad (49)$$

qui s'annule en  $\psi' = 0$ ; alors

$$\frac{d\chi_S}{d\psi'}(0) = -g\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \left(\frac{d \ln n}{d \ln f}\right)_S = \frac{\frac{r_S}{n_S} \left(\frac{dn}{dr}\right)_S}{1 + \frac{r_S}{n_S} \left(\frac{dn}{dr}\right)_S} \quad (50)$$

car le point correspondant à  $\alpha = \pi/2$ , pour le rayon tel que  $\psi' = 0$ , est le point  $S$  — ce que rappelle l'indice  $S$  dans l'expression de la dérivée ci-dessus. Tel est, en substance (voir le sous-paragraphe 3.2 de [23]), le résultat obtenu par Biot. On le relie immédiatement au coefficient de réfraction  $\kappa_S := -(r_S/n_S)(dn/dr)_S$  (quand l'indice  $S$  est mis aux autres grandeurs cela désigne leur valeur au niveau de l'observateur), ce qui donne

$$\frac{d\chi_S}{d\psi'}(0) = \frac{-\kappa_S}{1 - \kappa_S}. \quad (51)$$

Enfin, on en déduit le résultat encore plus compact concernant  $\gamma_{Sh}$ , annoncé au début de ce sous-paragraphe : comme  $\psi' = \psi + \chi_S$ , par dérivation il vient

$$1 = \frac{d\psi}{d\psi'}(\psi') + \frac{d\chi_S}{d\psi'}(\psi') = \frac{1}{\gamma_S(\psi')} + \frac{d\chi_S}{d\psi'}(\psi') \quad (52)$$

et donc, en utilisant l'indice  $h$  pour désigner les valeurs des dérivées pour  $\psi' = 0$ ,

$$\frac{1}{\gamma_{Sh}} = 1 - \frac{d\chi_S}{d\psi'}(0) = 1 + \frac{\kappa_S}{1 - \kappa_S} \quad (53)$$

d'où finalement le résultat annoncé (45).

On voit que des propriétés de symétrie jouent un rôle essentiel dans l'obtention de ce résultat : ici, c'est la parité de la fonction cosinus qui intervient dans la relation (47). En utilisant des conséquences de cette symétrie, on peut proposer d'autres démonstrations. Dans l'Annexe B, nous en montrons une autre qui permet facilement d'aller encore plus loin, par le passage à la dérivée seconde, et d'obtenir ainsi une propriété de la distorsion angulaire verticale locale d'une image centrée sur l'horizon astronomique.

#### 7.1.4. Discussion des valeurs du coefficient de réfraction

Dans une atmosphère à symétrie sphérique, d'après la relation (43) où  $r/n \cong r$ , le coefficient de réfraction est donné par

$$\kappa \cong -r \frac{dn}{dr}. \quad (54)$$

En supposant l'atmosphère bien mélangée, avec la loi de Gladstone–Dale (9) et celle des gaz parfaits que l'on dérive toutes les deux logarithmiquement, on trouve facilement l'expression de  $dn/dr$ , et il vient

$$\kappa = (n-1)r \left( \frac{\mu g}{P} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \right) \quad (55)$$

en admettant que  $dP/dr$  vaut  $-\mu g$ , i.e. que la distribution verticale de pression est hydrostatique. Dans le domaine visible, l'essentiel du coefficient de réfraction  $\kappa_S$  au niveau de l'observateur  $S$  est dû au gradient vertical de pression, qui change peu ; mais on observe fréquemment de grands écarts à la moyenne de  $\kappa_S$ , dus à la grande variabilité du gradient thermique  $(dT/dr)_S$  au niveau de l'observateur, d'où le coefficient de réfraction en  $S$  :

$$\kappa_S = \eta_S \frac{r_S}{T_S} \left[ \frac{T_S}{H_T} + \left( \frac{dT}{dr} \right)_S \right] \cong \frac{34 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1} + (dT/dr)_S}{150 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}}. \quad (56)$$

Dans le cadre des hypothèses ci-dessus concernant l'atmosphère et l'indice de l'air, le facteur numérique du numérateur de la formule (56) est indépendant de la longueur d'onde, la température et la pression : c'est l'opposé de la valeur de  $dT/dr$  qui permet aux rayons d'avoir un point d'inflexion ou un point méplat (ou à la limite d'aller en ligne droite dans l'atmosphère), et qui coïncide avec celles calculées par Everett en 1873 [39, p. 169], Emden en 1916 [40], Wegener en 1918 [41]. Par contre, le facteur numérique du dénominateur est, pour une longueur d'onde donnée, proportionnel à  $T_S^2/P_S$  (voir une autre forme de (56) donnée par la relation (3) de [42]) ; la valeur  $150 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$  est valable, pour  $\lambda_0 \cong 588 \text{ nm}$ , dans l'air à  $3,1 \text{ }^\circ\text{C}$  et  $1 \text{ atm}$  — les variations de 0 à 100 % du taux d'humidité, ainsi que celles de 0 à 1 000 ppmv de  $\text{CO}_2$ , ne sont pas perceptibles sur le 3<sup>e</sup> chiffre significatif du dénominateur. Dans des conditions stables  $(dT/dr)_S > -9,8 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ , donc  $\kappa_S > 1/6,7 > 0$  à  $15 \text{ }^\circ\text{C}$  et  $1 \text{ atm}$ . L'effet du gradient thermique  $(dT/dr)_S$  négatif contrebalance seulement un peu celui du gradient de pression vertical ; cela donne  $\kappa_S \cong 0,17 \cong 1/5,9$  dans l'atmosphère standard US1976 au niveau de la mer (donc non pas à  $3,1 \text{ }^\circ\text{C}$  mais à  $15 \text{ }^\circ\text{C}$  avec  $(dT/dr)_S = -6,5 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1} < 0$ ), en accord avec les indications ci-dessus — à comparer avec la valeur notée  $\kappa_{ST}$  que donnerait une atmosphère isotherme à  $15 \text{ }^\circ\text{C}$ , et  $1 \text{ atm}$  en  $S$  :  $\kappa_{ST} = \eta_S/(H_T/r_S) \cong 1/4,8$ , qui est le rapport des deux paramètres petits fondamentaux vus au paragraphe 4 de [2], et adaptés au cas isotherme. Noter que  $(dT/dr)_S$  présente des variations diurnes, et que la valeur standard  $-6,5 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$  est la mieux approchée au coucher du Soleil [43]. La prise en compte de cette courbure relative  $\kappa_S$  est très importante dans les mesures géodésiques, pour lesquelles on prend plutôt  $\kappa_S \cong 0,14$  en moyenne, car ces mesures se

font souvent par de belles après-midi chaudes et ensoleillées en des lieux relativement élevés — ces faits allant tous les deux dans le sens d'une augmentation du dénominateur de l'expression numérique de (56). On note que le gradient minimum de guidage, caractérisé par  $\kappa_S = 1$ , est  $(dT/dr)_S \cong +116 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$  d'après nos valeurs numériques; les estimations d'autres auteurs vont de  $112,7 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$  [44] à  $117 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$  [33] — pour plus de valeurs, voir [45].

Dans une situation proche du guidage au voisinage de  $S$ , on a  $\kappa_S \cong 1$  et  $(dT/dr)_S \cong +116 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$  d'après (56). Cela ne peut être réalisé que dans une couche d'inversion de température, i.e. une couche où la température  $T$  croît avec  $r$  au lieu de décroître comme dans la troposphère standard. Alors la pseudo-image du Soleil sur l'horizon est très aplatie, et cet aplatissement anormalement fort permet d'estimer plus finement le gradient de température en  $S$ .

Si  $\kappa_S \geq 1$ , la bande vide de Wegener (voir le paragraphe 4 de [7], et le paragraphe 3 de [38]) empêche de voir sur l'horizon astronomique l'image d'un objet extra-atmosphérique, donc  $\gamma_{Sh}$  n'existe plus.

#### 7.1.5. Déformation apparente d'un objet extra-atmosphérique étendu

Puisque  $\chi_S$  varie avec  $\psi'$ , la courbe de transfert n'est pas rectiligne, et l'image que  $S$  voit d'un objet étendu extra-atmosphérique est déformée.

Il est bien connu que la pseudo-image du Soleil ou de la Lune sur l'horizon astronomique est comprimée dans le sens vertical : son diamètre horizontal est quasiment  $32'$  alors que son diamètre vertical devient  $26'$  environ dans le cas standard (phénomène d'accourcissement). Conformément au théorème de Biot, cette valeur  $\gamma_{Sh} \cong 26'/32' \cong 0,81$  s'accorde à 2 % près avec la valeur standard  $\kappa_S \cong 0,17$ .

Il est moins connu que la largeur angulaire horizontale (aussi bien suivant un almicantrat que suivant un arc de grand cercle de la sphère céleste) est aussi rapetissée : cet effet, beaucoup plus faible, est dû au fait que la réfraction déplace les points le long des « sùmuts » (cercles verticaux) vers le zénith, où ils convergent. Des formules rigoureuses de Kivalov et Young [46] nous déduisons que, pour un objet dont le centre a la distance zénithale vraie  $Z$  et un petit diamètre angulaire horizontal  $D_h$ , celui de sa pseudo-image est

$$D'_h \cong (1 - \chi_S \cotan Z) D_h \quad (57)$$

vu que  $\chi_S \ll 1$  rad; ce résultat est intuitif puisque sur l'horizon astronomique les tangentes aux sùmuts sont verticales, donc parallèles entre elles. Pour  $Z$  pas trop proche de  $90^\circ$ , on obtient une bonne approximation du grandissement angulaire horizontal  $D'_h/D_h$  en utilisant la formule de Simpson, avec en plus  $Z' \cong Z$ , et nous trouvons

$$D'_h/D_h \cong 1 - \eta_S ; \quad (58)$$

cela reste encore évidemment valable quand  $Z = 0$  (malgré la divergence de  $\cotan Z$ ), car le rayon angulaire de l'objet est multiplié par  $1 - \eta_S$  environ — mais la notion de direction horizontale n'a plus de sens dans ce cas. Nous voyons que l'effet de *contraction* horizontale est très petit (de l'ordre de 0,03 % dans les conditions normales) et quasi uniforme sur la majeure partie du ciel, sauf au voisinage de l'horizon : car quand  $Z$  tend vers  $90^\circ$  par valeurs inférieures,  $\chi_S$  croît moins vite que  $\tan Z$  et reste fini, donc  $1 - \chi_S \cotan Z$  passe de  $1 - \eta_S$  à 1; ainsi, contrairement à l'opinion courante erronée, le diamètre horizontal apparent de l'image à l'approche de l'horizon ne reste pas constant théoriquement, mais augmente — car sa contraction horizontale (due à la forme des sùmuts et à  $\chi_S$ ) disparaît au voisinage de l'horizon.

## 7.2. Théorème de Biot–Sang–Meyer–Fraser–White

### 7.2.1. Présentation

Ce théorème a été découvert par Jean-Baptiste Biot le premier en 1810 [47], puis oublié et redécouvert plusieurs fois de suite : par Edward Sang en 1884 [48], Rudolf Meyer en 1935 [49], Alistair Fraser en 1975 [50], Robert White en 1979 [51]...

Il stipule que la fonction  $\psi'$  de la variable  $\psi$  est strictement croissante pour  $\psi' \in [0^\circ, 90^\circ]$ , avec une dérivée non nulle quand  $\psi' = 0$  : les images situées au-dessus de l'horizon astronomique sont forcément droites pour un objet extra-atmosphérique, et ne peuvent avoir un grandissement angulaire local vertical qui serait nul sur l'horizon astronomique. Ce théorème impose donc  $\gamma_{Sh} > 0$ .

Attention : pour les pseudo-images d'objets à distance finie, les propriétés changent — car ce cas ne relève pas de la réfraction astronomique, mais de la réfraction terrestre.

### 7.2.2. Démonstration

Profitions de la planéité du rayon pour le définir par son équation en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . Comme

$$\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta}, \quad (59)$$

et que

$$1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad (60)$$

on en déduit l'équation différentielle du rayon sous la forme d'une quadrature :

$$\left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = r^2 \left[ \frac{f^2(r)}{I_B^2} - 1 \right] := h(r, I_B) \text{ avec } I_B = f(r_S) \cos \psi'. \quad (61)$$

Choisissons judicieusement l'origine des angles, en sorte que  $\theta = 0$  au point S. Dans le cas où  $\psi' \geq 0$ , et de façon que  $r$  varie de façon monotone sur le rayon entre  $r_S$  et l'infini, il vient

$$\frac{\pi}{2} - \psi = \int_{r_S}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{h(r, I_B)}} \text{ donc } -\frac{d\psi}{d\psi'} = \int_{r_S}^{\infty} \frac{\partial h^{-1/2}}{\partial I_B} \frac{dI_B}{d\psi'} dr. \quad (62)$$

Or

$$\frac{\partial h^{-1/2}}{\partial I_B} = -\frac{1}{2} h^{-3/2} \times \frac{-2r^2 f^2(r)}{I_B^3} > 0 \quad (63)$$

et, strictement au-dessus de l'horizon astronomique,

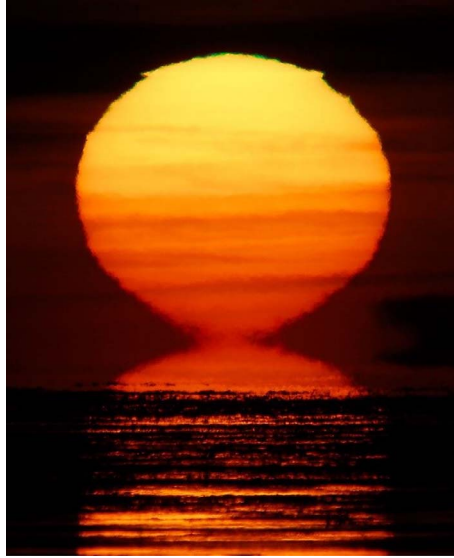
$$\frac{dI_B}{d\psi'} = -f(r_S) \sin \psi' < 0; \quad (64)$$

dans ce cas, on en déduit

$$d\psi'/d\psi = 1/(d\psi/d\psi') > 0. \quad (65)$$

On complète l'étude en regardant si cela tient toujours sur l'horizon astronomique, i.e. en se demandant si  $\gamma_{Sh}$  est strictement positif. Mais on sait (voir le sous-paragraphe 7.1.4) que si  $\kappa_S \geq 1$ ,  $\gamma_{Sh}$  n'existe plus. En conséquence,  $\kappa_S < 1$  quand  $\gamma_{Sh}$  existe; et  $\gamma_{Sh} > 0$  d'après le théorème de Biot.

Dans [2, 37, 38], nous présentons d'autres applications intéressantes de l'équation (61) : comme toute quadrature, sa discussion donne sur la fonction inconnue  $r$  de la variable  $\theta$  des informations rigoureuses, quantitatives ou qualitatives [52, p. 132–145] particulièrement fécondes dans le cas d'un chenal optique, dont nous détaillons les propriétés dans [7].



**FIGURE 2.** Soleil en oméga © Photo : Pekka Parviainen. Au lever « [...] c'étoit comme si deux soleils se fussent détachés l'un de l'autre, l'un avoit monté pendant que l'autre descendoit » [53, p. 230]; il « retournoit du côté de l'horizon & n'a disparu que 5 à 6 secondes après s'être détaché du véritable. » [54, p. 401].

### 7.2.3. Conséquences

Le théorème de Biot–Sang–Meyer–Fraser–White a une conséquence pratique pour la navigation astronomique : si au travers d'une atmosphère à symétrie sphérique on voit une image renversée d'un objet à l'infini (par exemple, le pied du « Soleil en oméga » — Figure 2) on sait que non seulement l'horizon astronomique n'est pas l'horizon sensible (en bas du « pied »), mais qu'il est même strictement au-dessus du haut de ce « pied ».

Le diamètre horizontal de cette image donne l'échelle angulaire :  $32'$ . L'erreur angulaire sur la position de l'horizon astronomique peut facilement excéder quelques minutes d'angle...

Une autre conséquence résulte de  $\chi_{Sh} > 0$ . Pour une atmosphère stable vis-à-vis de la convection, donc où  $-(dT/dr)_S < 9,8 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ , nous savons que  $\kappa_S > 0$  — voir le sous-paragraphe 7.1.4. Alors, grâce à la relation (51), on en déduit que  $-d\chi_S/d\psi'(0) > 0$ . On prouve donc ce que Pierre Bouguer avait constaté sur les sommets péruviens, et que Leonhard Euler a redécouvert au bout de sa plume une dizaine d'années après [55] :  $\chi_S$  est plus grand juste sous l'horizon astronomique qu'au-dessus de lui.

Par contre, avec une couche d'air produisant un mirage inférieur car son support la chauffe de quelques degrés sur quelques décimètres (et il y a aussi une seconde longueur caractéristique, millimétrique [56]),  $-dT/dr$  y dépasse  $9,8 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$  donc cette couche est instable (ce qui explique l'aspect dentelé de la limite inférieure du mirage — voir la Figure 2), et même  $-dT/dr > 34 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$  donc  $\kappa(r) < 0$  (voir le sous-paragraphe 7.1.4). Par exemple, à l'ombre sur la laisse de basse mer à Dunkerque le 22 mars 1809, Biot et Mathieu ont relevé les températures suivantes :  $11,0^\circ\text{C}$  sur le sable;  $9,5^\circ\text{C}$  à 3 cm au-dessus;  $7,0^\circ\text{C}$  à 15 cm;  $6,3^\circ\text{C}$  à 65 cm;  $6,1^\circ\text{C}$  à 93 cm [47, p. 31]. Dans cette situation, non seulement  $-d\chi_S/d\psi'$  s'annule assez bas sous l'horizon astronomique, mais en plus il devient inférieur à  $-1$  encore plus bas, là où on voit une image renversée (du Soleil par exemple, cf. Figure 2); cependant  $\chi_S$  ne devient jamais négatif dans les cas concrets. Au lieu de relever l'horizon comme dans le cas standard (où la concavité des rayons qui

en forment l'image est vers le bas), la réfraction l'abaisse (car dans la couche chauffée la concavité des rayons est vers le haut); il se forme une image renversée du ciel — et du bas du Soleil, déjà signalée sur la Figure 2.

### 7.3. Équation différentielle du second ordre pour les rayons lumineux

Nous venons de voir que les rayons lumineux sont régis par la quadrature (61), qui donne facilement des résultats qualitatifs intéressants par une discussion graphique [7], car c'est une équation différentielle du premier ordre — ce qui est analytiquement un avantage. Par contre, son intégration numérique est informatiquement délicate : il faut discuter le signe de  $dr/d\theta$ . Avec l'informatique, il est rentable d'esquiver ce problème en remplaçant la quadrature par une équation différentielle équivalente, du second ordre, pour laquelle il n'y a plus de signe à discuter [57]. La procédure est très classique : on considère que l'équation (61) écrit, pour un rayon quelconque donné et donc pour  $I_B$  fixé, l'égalité de deux fonctions dérivables de  $\theta$ , alors il y a égalité de leurs dérivées :

$$2 \frac{dr}{d\theta} \frac{d^2 r}{d\theta^2} = \frac{dr}{d\theta} \frac{\partial h}{\partial r}. \quad (66)$$

Après calcul de  $\partial h/\partial r$  (compte tenu de la définition de  $f = rn$  vue au paragraphe 6) et simplification par  $2dr/d\theta$ , on trouve

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} = r \left( \frac{f^2}{I_B^2} - 1 \right) + r^2 \frac{f}{I_B^2} \frac{df}{dr} = \frac{r^3 n}{I_B^2} \left( 2n + r \frac{dn}{dr} \right) - r. \quad (67)$$

Cette équation se prête facilement à une intégration numérique.

### 7.4. Théorème de réfraction–extinction de Laplace (1805)

#### 7.4.1. Présentation

Considérons la « profondeur optique »  $\mathcal{P}$  de l'atmosphère le long d'un rayon (R) — reliant un astre  $A$  à l'observateur  $S$  — i.e. l'opposé du logarithme népérien du facteur d'extinction le long de (R) : si on suppose l'atmosphère bien mélangée,  $\mathcal{P}$  est proportionnel à l'intégrale de la masse volumique  $\mu$  de l'air le long de (R), appelée masse (optique) d'air absolue (introduite par Bouguer [58]) et notée ici  $Q_S := \int_{-\infty}^{s_S} \mu ds$ . Avec les mêmes hypothèses que celles de la relation (13) on trouve que, lorsque  $P_S = 1$  atm sous nos latitudes, cette intégrale vaut  $1,0350 \text{ kg}\cdot\text{cm}^{-2}$  pour un rayon vertical (i.e. pour  $Z' = 0$ ). Il est intéressant de savoir comment cette quantité varie avec  $Z'$  : les corrections liées au retard temporel des signaux GPS sont quasiment proportionnelles à  $Q_S$  [59], comme le sont pour la photométrie les corrections de magnitude dues à l'extinction lors de la traversée de l'atmosphère.

Grâce à la loi de Gladstone–Dale dans une atmosphère à symétrie sphérique et bien mélangée (9), l'intégrale (6) devient, en supposant la symétrie sphérique et  $(\tan \alpha)/n \cong \tan \alpha$ ,

$$\chi_S \cong C \int_{-\infty}^{s_S} \frac{d\mu}{ds} \tan \alpha ds = -C \int_{-\infty}^{s_S} \frac{d\mu}{dr} \sin \alpha ds \quad (68)$$

où  $\tan \alpha$  est positif (resp. négatif) si le rayon provenant de l'infini se rapproche (resp. s'éloigne) de la Terre.

En admettant le profil classique de  $\mu$  exponentiel avec l'échelle de hauteur  $H_1$ , on a

$$\chi_S \cong -C \int_{-\infty}^{s_S} -\frac{\mu}{H_1} \sin \alpha ds. \quad (69)$$

On peut donc noter tout de suite que, comme ce théorème n'est valable que pour une forme donnée de profil de  $\mu$ , il ne sera pas possible de transposer à  $Q_S$  le théorème d'Oriani. Enfin, comme

$\sin Z' \cong \sin \alpha$  là où  $\mu$  n'est pas négligeable, on obtient le théorème de réfraction–extinction de Laplace [28, Livre 10, chap. 3], [29, p. 551–556], [60, 61]

$$\chi_S \cong C \frac{Q_S}{H_1} \sin Z'. \quad (70)$$

Cette approximation est assez bonne même pour des astres sur l'horizon ( $\sin \alpha \cong 1$  sur toute la hauteur utile de l'atmosphère) ; ceci est minutieusement discuté par Schoenberg [60]. De plus, comme l'essentiel de la réfraction est dû à la portion de l'intégrale (6) correspondant à quelques kilomètres seulement au-dessus du sol, où la variation relative de température absolue est de quelques dixièmes seulement, l'approximation isotherme est d'assez bonne qualité pour l'atmosphère réelle [45]. Ainsi le théorème de Laplace permet-il de relier assez fidèlement les variations de  $Q_S$  avec  $Z'$  à celles de  $\chi_S$  dans la plupart des cas. Une des exceptions est celui où les rayons traversant (ou approchant par le dessus), de manière rasante, une couche d'inversion créant un chenal optique, le long de laquelle ils peuvent parcourir un trajet de plusieurs kilomètres où on a (par dérivation logarithmique de la loi de Gladstone–Dale)

$$-\frac{d\mu}{dr} \cong \frac{n}{n-1} \frac{\mu}{r} \cong 4 \frac{\mu}{H_1} \quad (71)$$

et donc où le coefficient devant  $\mu$  et mis par Laplace est sous-estimé d'un facteur 4 — sans oublier que cette sous-estimation est usuellement aggravée, dans l'expression de la profondeur optique en fonction de la distribution de  $\mu$ , par le fait que dans la couche d'inversion l'air est relativement plus chargé en aérosols qui le rendent plus diffusant (donc la profondeur optique n'est plus proportionnelle à  $Q$ ). En outre, l'erreur sur  $Q$  déduit de  $\chi$  par les approximations de Laplace serait encore plus grande si le rayon pour lequel on cherche  $Q$  avait un point d'inflexion ( $d\mu/dr$  changerait de signe !).

Si on utilise pour  $\chi_S$  l'approximation de Simpson classique (7), on retrouve un fait bien connu [58, 61–64] : pour des distances zénithales pas trop proches de  $90^\circ$ ,  $Q_S$  varie proportionnellement à  $1/\cos Z'$ , ce qui est son approximation la plus basique [58]. Cette propriété classique, valable aussi pour d'autres modèles d'atmosphère que le modèle isotherme, et même dans le cas où la composition de l'air varierait avec l'altitude seulement, permet d'estimer la profondeur optique au zénith par la pente de la droite de Bouguer [58] — critiquée cependant par Bemporad [64]. Mais le théorème de Laplace donne encore d'autres renseignements plus intéressants.

#### 7.4.2. Application

Un prolongement intéressant consiste à en estimer la « masse d'air relative » pour l'observateur  $S$  et à l'horizon astronomique,  $m_{Sh} := Q_{Sh}/Q_{S0}$ , où  $Q_{Sh}$  (resp.  $Q_{S0}$ ) est la valeur de l'intégrale  $Q_S$  pour des rayons arrivant en  $S$  avec  $Z' = 90^\circ$  (resp.  $0^\circ$ ). Pour cela, on part de

$$\frac{\chi_S}{\sin Z'} \cong C \frac{Q_S}{H_1} \cong \frac{\eta_S}{\cos Z'} \quad (72)$$

(approximation valable tant que  $Z'$  n'est pas trop proche de  $90^\circ$ ), et en considérant cette égalité pour  $Z' \rightarrow 0$  on trouve

$$\eta_S = C Q_{S0}/H_1, \quad (73)$$

ce qui redonne au passage, à une distance zénithale apparente quelconque mais pas trop proche de  $90^\circ$ , la masse d'air relative (pour  $S$ )

$$m_S := Q_S/Q_{S0} = 1/\cos Z'; \quad (74)$$

mais cette approximation classique ne peut donner  $m_{Sh}$ . Avec une atmosphère isotherme, on contourne cette difficulté en appliquant le théorème de réfraction–extinction à l'horizon astronomique, qui conduit à

$$\chi_{Sh} = C Q_{Sh}/H_1; \quad (75)$$



la comparaison de  $\chi_{Sh}$  et  $\eta_S$  dans le cas isotherme fournit donc

$$m_{Sh} = \chi_{Sh}/\eta_S. \quad (76)$$

Dans les conditions normales en  $S$  ( $0^\circ\text{C}$  et 1 atm),  $\chi_{Sh} \cong 1,02 \times 10^{-2}$  en radians (soit  $35'$  environ) et  $\eta_S \cong 2,924 \times 10^{-4}$  pour  $\lambda_0 \cong 588$  nm, donc  $m_{Sh} \cong 35$  quand on est proche du cas de l'atmosphère isotherme — mais quand on est proche de situations de guidage, on peut avoir  $m_{Sh} \cong 80$ . Sachant qu'au niveau de la mer la profondeur optique  $\mathcal{P}_{S_0}$  de l'atmosphère au zénith vaut en moyenne  $0,15$  vers  $0,55 \mu\text{m}$  (donc dans le vert) si l'air est pur (i.e. sans aérosols, ni vapeur d'eau ni ozone, qui rajoutent environ  $0,08$  à la profondeur optique), cela donne pour lui la profondeur optique à l'horizon  $\mathcal{P}_{Sh} \cong 35 \times 0,15 \cong 5$ ; donc dans les conditions normales la luminance apparente du disque solaire sur l'horizon doit être au moins  $\exp \mathcal{P}_{Sh} / \exp \mathcal{P}_{S_0} = \exp[(m_{Sh} - 1)\mathcal{P}_{S_0}] \sim 10^2$  fois moins forte qu'au zénith. Dans la pratique elle est de l'ordre de  $10^4$  fois moins forte qu'au zénith ! Cela est dû à l'influence de constituants minoritaires qui ne sont pas bien mélangés à l'air pur et restent plus près du sol, notamment les aérosols et la vapeur d'eau dont la hauteur d'échelle est  $H_v \sim 2$  km. Or on peut montrer que, si on applique à la vapeur d'eau l'hypothèse d'une distribution isotherme, sa masse d'air relative est de l'ordre de  $\sqrt{r_S/H_v} \sim 70$ ; à cause de cela, sa contribution à  $Q$  est multipliée par  $70$  (et non pas  $35$ , car  $H_v \sim H_1/4$ ) en passant du zénith à l'horizon; il en est de même pour les aérosols, et ces effets sur l'extinction deviennent aussi importants que ceux dus à l'air pur, la valeur de  $\mathcal{P}_{Sh}$  atteint  $10$  et cela suffit à expliquer la baisse de luminance d'un facteur  $10^4$  — ou encore plus si une couche d'inversion de température est présente à basse altitude, ce qui rend ces facteurs dus aux aérosols ou à la vapeur d'eau extrêmement variables d'un moment à l'autre et relativement imprévisibles. La contribution de l'ozone à  $\mathcal{P}_{S_0}$  est de l'ordre de  $0,03$  à  $0,05$  au maximum de l'absorption de ses bandes de Chappuis (dans l'orange, donc pas à  $0,55 \mu\text{m}$ ), mais à cause de la haute altitude ( $20$ – $25$  km) de la couche d'ozone, cette contribution n'est multipliée que par  $10$  en passant du zénith à l'horizon [65] donc elle reste minoritaire dans  $\mathcal{P}_{Sh}$ , de l'ordre de  $0,4$ .

## 8. Réfraction au voisinage de l'horizon

Il s'agit du problème le plus délicat, où butent les approximations de Simpson, de Laplace, de Radau, etc. — mais pas celle de Bradley (voir le sous-paragraphe 3.5 de [37]). Son étude, la plus sensible au profil de réfractivité en fonction de l'altitude, nécessite un autre angle d'attaque. La difficulté à appréhender physiquement l'ensemble de ce phénomène vient de ce qu'il y a deux paramètres petits fondamentaux,  $\eta_S$  et  $h_1$ ; le premier conditionne l'existence de la réfraction, le second ne fait que la moduler subtilement et de façon pas du tout négligeable car il est (dans le cas d'un profil de réfractivité exponentiel)  $5$  fois plus grand que le premier. Autant dire qu'aucune approximation simple ne fonctionnera, et cette étude nécessite des calculs lourds.

Un point de départ classique consiste à dire que, d'après la relation (23),

$$\chi_S = n_S r_S (\cos \psi') \int_1^{n_S} \frac{n^{-1}}{\sqrt{n^2 r^2 - (n_S r_S \cos \psi')^2}} dn = \int_1^{n_S} n^{-1} \left[ \left( \frac{nr}{n_S r_S} \right)^2 (1 + \tan^2 \psi') - 1 \right]^{-1/2} dn. \quad (77)$$

En réutilisant la méthode approximative de développement du radical déjà vue au sous-paragraphe 5.1, et en admettant que  $n^{-1} \cong \sqrt{2/(1+n_S^2)}$  — approximation de Laplace [29, p. 478], revenant à prendre au numérateur  $n$  uniforme très proche de la moyenne de  $1$  et  $n_S$  — voire  $n^{-1} \cong 1$  (la variation du numérateur ayant beaucoup moins d'effet que celle de la racine carrée, car celle-ci devient très petite pour  $n \cong n_S$  vu qu'on suppose  $\psi'$  petit), on obtient — toujours en notant  $Y$  l'approximation de  $\Delta(nr)/n_S r_S$  —

$$\chi_S \cong \int_1^{n_S} \left[ 2 \frac{\Delta(nr)}{n_S r_S} + \left( \frac{nr}{n_S r_S} \tan \psi' \right)^2 \right]^{-1/2} dn \cong \int_1^{n_S} (2Y + \tan^2 \psi')^{-1/2} dn \quad (78)$$

d'où, grâce à (25) et à la loi de Gladstone–Dale,

$$\chi_S \cong \frac{C}{\sqrt{2}} \int_0^{\mu_S} \left[ \frac{z}{r_S} + C(\mu - \mu_S) + \frac{\tan^2 \psi'}{2} \right]^{-1/2} d\mu. \quad (79)$$

Dans le cas particulier où  $\psi' = 0$ , on retrouve l'intégrale impropre classique rappelée par František Link pour ses études sur l'éclairement et la couleur de la Lune lors de ses éclipses [66, 67] — qui réalisent un des souhaits de Kepler (voir le paragraphe 1 de [2]). Grâce à un changement de variable astucieux, Link a transformé — voir les équations (5)–(10) de [68] dans ce numéro spécial — cette intégrale de façon à la rendre non-impropre pour  $\psi' = 0$  (comme Biot [25] — voir le paragraphe 6 du présent article, et le sous-paragraphe 3.1 de [23]), et à l'estimer numériquement pour l'atmosphère réelle (d'après une table donnant les valeurs de  $\mu$  tous les kilomètres, de 0 à 80 km d'altitude). Bouguer avait envisagé [69] d'utiliser les éclipses de Lune pour préciser le profil d'indice dans son modèle d'atmosphère — et surtout la valeur de son exposant  $q$  (voir le paragraphe 3 de [2]).

Notons au passage que

$$Q_S = \int_0^\infty \frac{\mu}{\cos \alpha} dz = \int_0^\infty \mu \frac{nr}{\sqrt{n^2 r^2 - I_B^2}} dz \quad (80)$$

s'écrit, avec à la fin les mêmes approximations que pour obtenir l'expression (79),

$$\begin{aligned} Q_S &= \int_0^\infty \mu(z) \frac{nr}{\sqrt{n^2 r^2 - (n_S r_S \cos \psi')^2}} dz = \int_0^\infty \mu(z) \left[ 1 - \left( \frac{n_S r_S}{nr} \right)^2 + \left( \frac{n_S r_S}{nr} \sin \psi' \right)^2 \right]^{-1/2} dz \\ &\cong \int_0^\infty \mu(z) \left[ 2Y + \left( \frac{n_S r_S}{nr} \right)^2 \sin^2 \psi' \right]^{-1/2} dz \\ &\cong \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \mu(z) \left[ \frac{z}{r_S} + C(\mu - \mu_S) + \frac{\tan^2 \psi'}{2} \right]^{-1/2} dz \end{aligned} \quad (81)$$

compte tenu de la petitesse de  $\psi'$ . Et toujours dans le cas particulier où  $\psi' = 0$ , cette dernière expression est aussi celle donnée par Link [66] en parallèle avec l'expression de la réfraction.

Dans le cas d'un profil de  $\mu$  exponentiellement décroissant, d'échelle de hauteur  $H_1 = (1 + \varepsilon) H_T$ , avec  $\varepsilon \cong 2/11$  pour Kramp et  $1/27$  pour Bessel selon Radau [30, B. 27], la comparaison des expressions (79) et (81) nous montre immédiatement que

$$\chi_S / \cos \psi' = C Q_S / H_1 \quad (82)$$

conformément au théorème de réfraction–extinction de Laplace, même pour  $\psi'$  très petit. De plus, l'expression (79) devient

$$\chi_S = \frac{\eta_S}{\sqrt{2} H_1} \int_0^\infty e^{-z/H_1} \left[ \frac{z}{r_S} - \eta_S (1 - e^{-z/H_1}) + \frac{\tan^2 \psi'}{2} \right]^{-1/2} dz; \quad (83)$$

comme d'après la relation (54)  $\eta_S / H_1 \cong \kappa_S / r_S \sim \eta_S / H_T \cong \kappa_{ST} / r_S \ll 1 / r_S$  car  $\kappa_{ST} \cong 0,23 \ll 1$ , une approximation supplémentaire est acceptable :

$$\begin{aligned} \chi_S &\cong \frac{\eta_S}{\sqrt{2} H_1} \int_0^\infty e^{-z/H_1} \left[ \frac{z}{r_S} - \eta_S \frac{z}{H_1} + \frac{\tan^2 \psi'}{2} \right]^{-1/2} dz \\ &= \frac{\eta_S}{\sqrt{2} H_1} \int_0^\infty e^{-z/H_1} \left[ \frac{z}{r_S} (1 - \kappa_S) + \frac{\tan^2 \psi'}{2} \right]^{-1/2} dz. \end{aligned} \quad (84)$$

Ici  $\chi_S(\psi')$  s'exprime à l'aide de la fonction transcendante  $K$ , tabulée, telle que (voir le paragraphe 4 de [2])

$$K(u) := \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(v+u^2)} dv / \sqrt{v+u^2} = \int_u^\infty e^{-X^2} dX = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \operatorname{erf}(u)]; \quad (85)$$

tous calculs faits, on trouve

$$\chi_S = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\eta_S \kappa_S}{1 - \kappa_S}} \exp\left(\frac{\kappa_S}{1 - \kappa_S} \frac{\tan^2 \psi'}{2\eta_S}\right) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\kappa_S}{2(1 - \kappa_S)\eta_S}} \tan \psi'\right)\right] \quad (86)$$

ce qui est aussi un résultat voisin de la formule donnée par Oppolzer sans démonstration [70].

Sachant que  $d\operatorname{erf}/dX(0) = 2/\sqrt{\pi}$ , on vérifie que l'expression (86) redonne une version du théorème de Biot — la relation (51).

On déduit de (86) une expression approchée de la réfraction horizontale, que Kramp avait trouvée d'une autre façon [71, p. 148–149] :

$$\chi_{Sh} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\eta_S \kappa_S}{1 - \kappa_S}} = \eta_S \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{r_S}{(1 - \kappa_S)H_1}} = \eta_S \sqrt{\frac{\pi}{2(h_1 - \eta_S)}}; \quad (87)$$

dans le cas de l'atmosphère isotherme, elle donne  $0,0012 \text{ rad} \cong 41'$  sur le visible dans les conditions normales,  $40'$  avec  $\varepsilon \cong 1/27$ , et  $37'$  avec  $\varepsilon \cong 2/11$ . Mais la valeur moyenne de  $\chi_{Sh}$  pour l'atmosphère réelle est  $35'$ , dans les conditions normales en  $S$ ; l'écart entre  $35'$  et  $41'$  vient surtout de l'inadéquation du profil de  $\mu$  exponentiel, et seulement un peu de l'approximation majorante  $1 - e^{-z/H_1} \cong z/H_1$ . D'ailleurs, avant de montrer l'expression (87), Kramp n'a pas fait cette approximation permettant de passer de la relation (83) à (84) : plus savamment, il a effectué un développement qui lui permet d'obtenir  $\chi_{Sh}/\sqrt{\pi\eta_S\kappa_S/2}$  sous la forme d'une série entière de  $\kappa_S$  dont le début est numériquement  $1 + 0,41\kappa_S$  (voir le paragraphe 4 de [2]) alors que le début de celui déduit de l'expression (87) est  $1 + 0,50\kappa_S$ ; Kramp effectue les calculs numériques de sa série et montre qu'il faut retrancher environ  $1'$  aux trois valeurs calculées ci-dessus, ce qui les ramène à  $40'$ ,  $39'$  et  $36'$  respectivement, et permet de préciser la discussion menée au paragraphe 4 de [2] sur l'inanité du paramètre  $\varepsilon$ .

Intéressons-nous à la variation de  $\chi_{Sh}$  avec  $(T_S, P_S)$ . En admettant la loi de Gladstone–Dale et celle des gaz parfaits, on sait que  $\eta_S$  est proportionnel à  $P_S/T_S$ , et on a vu au sous-paragraphe 7.1.4 qu'à  $(dT/dr)_S$  fixé (donc à  $\varepsilon$  fixé d'après la relation (22) de [2]),  $\kappa_S$  est proportionnel à  $P_S/T_S^2$  et  $h_1$  à  $T_S$ ; donc le premier terme de la série de Kramp, i.e.  $\sqrt{\pi\eta_S\kappa_S/2} = \eta_S\sqrt{\pi/(2h_1)}$ , est proportionnel à  $P_S/T_S^{3/2}$ . À  $P_S$  fixé, pour adapter une table de réfraction à une nouvelle température, il est donc faux de multiplier cette table par l'ancienne valeur de  $T_S$  sur la nouvelle, contrairement à une pratique usuelle initiée avant le XIX<sup>e</sup> siècle. Dès 1818, John Brinkley (1763–1835) pointait cette erreur commise dans des tables françaises [72, p. 171]; à partir de 1821, James Ivory renchérisait, car il était conscient du fait que  $\chi_{Sh}$  est quasiment proportionnel à  $T_S^{-3/2}$  [73], [32, p. 448 et 479]; en notre siècle cette faute subsiste encore [74, p. 562 et 709 Tables 27–28].

Une approche plus parlante du calcul de  $\chi_{Sh}$  consiste à se fixer, pour une longueur d'onde donnée, une forme  $p(r)$  de profil de réfractivité  $\eta(r) = \eta_S p(r)$  — en posant  $p(r_S) = 1$  — et à exprimer, à cette longueur d'onde et pour ce profil fixés, la dérivée de  $\chi_{Sh}$  par rapport à  $\eta_S$  en  $\eta_S = 0$ . Comme le théorème d'Oriani ne s'applique pas dans le cas de la réfraction horizontale, il faut s'attendre à ce que le résultat dépende de la forme du profil, caractérisée par la fonction  $p$  — voir la comparaison des expressions (15) et (16) de [2]. On repart de l'expression intégrale (23), où l'on effectue le changement de variable de  $n$  à  $r$  :

$$\chi_{Sh} = \eta_S \int_{\infty}^{r_S} n_S r_S \frac{n^{-1}}{\sqrt{n^2 r^2 - (n_S r_S)^2}} \frac{dp}{dr} dr. \quad (88)$$

Comme  $\eta_S$  est en facteur devant l'intégrale, celle-ci est donc la dérivée que nous cherchons, quand on y prend  $\eta_S = 0$ , ce qui implique  $n(r) = 1$  sur tout le domaine d'intégration; en effet,

$$\lim_{\eta_S \rightarrow 0} \frac{\chi_{Sh}}{\eta_S} = \int_{\infty}^{r_S} r_S \frac{1}{\sqrt{r^2 - r_S^2}} \frac{dp}{dr} dr. \quad (89)$$

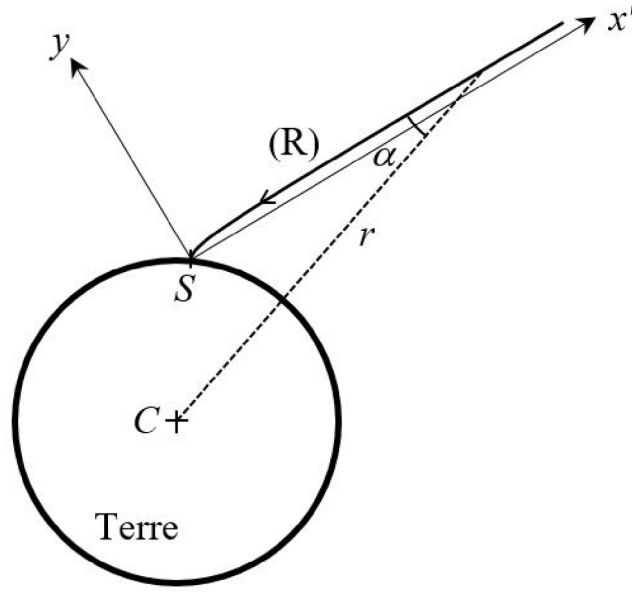


FIGURE 3. Axes permettant une interprétation géométrique du calcul simplifié de  $\chi_{Sh}$ .

Avec le changement de variable  $x := -\sqrt{r^2 - r_S^2}$ , il vient

$$\lim_{\eta_S \rightarrow 0} \frac{\chi_{Sh}}{\eta_S} = \int_{-\infty}^0 r_S \frac{1}{\sqrt{x^2}} \frac{dp}{dr} \frac{x}{\sqrt{r_S^2 + x^2}} dx = \int_{-\infty}^0 -\frac{dp}{dr} \frac{r_S}{\sqrt{r_S^2 + x^2}} dx. \quad (90)$$

Ce résultat est susceptible d'une interprétation géométrique simple (cf. Figure 3), car à la limite où  $\eta_S$  tend vers 0, le rayon lumineux (R) tend vers une ligne droite, sur laquelle on met l'axe  $Ox'$  avec  $O$  en  $S$ ; c'est la *straight line approximation*, très utile pour interpréter les courbes de lumière enregistrées lors des occultations — voir le sous-paragraphe 5.1 de l'article [75] dans ce numéro spécial.

Alors on trouve facilement le résultat ci-dessus en exprimant, pour la vitesse finale de la particule fictive, le rapport de sa composante perpendiculaire à  $Ox'$  sur sa composante parallèle à  $Ox'$ . Cette technique sert aussi à étudier la petite déviation gravitationnelle d'un rayon lumineux rasant le Soleil, dans le formalisme semi-classique qui donne  $0,875''$  (la moitié du résultat prévu par la relativité générale).

La petitesse de la hauteur réduite de l'atmosphère par rapport à  $r_S$  permet l'approximation suivante :

$$\lim_{\eta_S \rightarrow 0} \frac{\chi_{Sh}}{\eta_S} \cong \int_{-\infty}^0 -\frac{dp}{dr} dx. \quad (91)$$

Dans le cas d'un profil de  $\eta$  exponentiel, cela donne

$$\lim_{\eta_S \rightarrow 0} \frac{\chi_{Sh}}{\eta_S} = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{H_1} \exp\left(-\frac{\sqrt{r_S^2 + x^2} - r_S}{H_1}\right) dx \cong \int_{-\infty}^0 \frac{1}{H_1} \exp\left(-\frac{x^2}{2r_S H_1}\right) dx. \quad (92)$$

Sachant que  $2 \int_0^\infty e^{-v^2} dv = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ , on en déduit l'expression approximative correspondante :

$$\lim_{\eta_S \rightarrow 0} \frac{\chi_{Sh}}{\eta_S} = \sqrt{\frac{\pi}{2h_1}} = \sqrt{\frac{\pi \kappa_S}{2 \eta_S}} \quad (93)$$

qui est bien, à  $p$  fixé (donc  $h_1$  aussi), cohérent avec l'expression (87) comme avec les autres de Kramp. Malheureusement, la petitesse de  $\eta_S$  ne suffit pas pour dire que, dans le domaine de ses valeurs usuelles,  $\chi_{Sh}$  serait une fonction quasi linéaire de  $\eta_S$  à  $p$  fixé, contrairement à une opinion très répandue; en effet, à  $p$  fixé,  $\chi_{Sh}$  diverge pour une valeur de  $\eta_S$  qui est petite aussi, comme  $h_1$  — voir la relation (87). Et en fait, la non-linéarité de  $\chi_S$  en fonction de  $\eta_S$  est déjà bien sensible avec  $Z' > 70^\circ$ .

On peut préciser cela facilement dans le cadre du modèle d'atmosphère de Bouguer (rapidement présenté au paragraphe 3 de [2], et détaillé dans le sous-paragraphe 3.5 de [37]) où  $n(r) = K/r^q$  (avec  $q$  positif différent de 1) tant que  $n$  décroît de  $n_S$  à 1, puis

$$n(r) = 1 \text{ pour } r \geq r_S + H = r_S n_S^{1/q} \quad (94)$$

avec  $H$  la hauteur « totale » de cette atmosphère; on a vu au paragraphe 3 de [2] que Bouguer a cherché des valeurs numériques de  $q$ . Son modèle, qui utilise des rayons courbes et a (comme ceux de Simpson–Mayer et de Newton) deux paramètres indépendants ajustables (ici,  $h := H/r_S \ll 1$  qui est la hauteur totale relative de son atmosphère, et  $q \cong \eta_S/h$ ), donne (tant que la formule ci-dessous fournit une valeur positive, ce qui exclut le cas où  $h - \eta_S$  et  $\psi'$  sont tous deux négatifs — or  $h - \eta_S < 0$  équivaut à  $q > 1$  à cause de la relation précédente)

$$\chi_S \cong \frac{\eta_S}{h - \eta_S} \left[ \sqrt{2(h - \eta_S) + \psi'^2} - \psi' \right] = \frac{2\eta_S}{\sqrt{2(h - \eta_S) + \psi'^2} + \psi'} \text{ et } \left( \frac{\partial^2 \chi_S}{\partial \eta_S^2} \right)_{\psi'} > 0 \quad (95)$$

(voir le sous-paragraphe 3.5 de [37]). On en déduit

$$\psi = \psi' - \chi_S = \frac{h\psi' - \eta_S \sqrt{2(h - \eta_S) + \psi'^2}}{h - \eta_S} = \frac{\psi' - q \sqrt{2(1 - q)h + \psi'^2}}{1 - q} \quad (96)$$

qui s'inverse moyennant quelques calculs, donnant

$$\psi' = \frac{h\psi + \eta_S \sqrt{2(h + \eta_S) + \psi^2}}{h + \eta_S} \quad (97)$$

puis

$$\chi_S = \psi' - \psi = \frac{\eta_S}{h + \eta_S} \left[ \sqrt{2(h + \eta_S) + \psi^2} - \psi \right] = \frac{2\eta_S}{\sqrt{2(h + \eta_S) + \psi^2} + \psi} \quad (98)$$

et  $(\partial^2 \chi_S / \partial \eta_S^2)_{\psi} < 0$ .

La réfraction dépend alors du profil de réfractivité en fonction de l'altitude; dans le modèle que nous avons adopté, cela se voit par le biais de  $h$ . Pour une forme de profil donnée qui fixe  $h$ , et pour  $\psi$  fixé,  $\psi'$  et  $\chi_S$  en fonction de  $\eta_S$  ne divergent pas; ceci est intéressant, car à  $h$  et  $\psi$  fixés, leur variation avec la longueur d'onde n'est due qu'à celle de  $\eta_S$ , quasi proportionnelle à celle de  $q$  d'après l'équation (94).

Mais, à  $h$  et  $\psi' \leq 0$  fixés (et non pas  $\psi$ ), d'après les expressions (95)–(96)  $\chi_S$  et  $\psi$  divergent lorsque  $\eta_S$  tend vers  $h$  par valeurs inférieures : par chance, les diverses approximations conduisant à cette conclusion se compensent relativement et cette divergence existe bien avec certains profils d'indice, le trajet du rayon qui arrive en  $S$  avec une direction donnée sous l'horizon astronomique tend à spiraler sous l'observateur, comme l'a prédit Bouguer pour  $q = 1$  — car la relation (94) montre que  $\lim_{\eta_S \rightarrow h} q = 1$ ; quand  $\eta_S$  se rapproche de  $h$  par valeurs inférieures, le rayon effectue (idéalement comme une spirale) un nombre de tours aussi grand que l'on veut en se raccordant à sa partie rectiligne venant de l'extérieur de ce modèle d'atmosphère limitée. Si  $\eta_S > h$  (i.e.  $q > 1$ ), aucune image de la voûte céleste n'est visible avec  $\psi' < \sqrt{2(\eta_S - h)} = \sqrt{2(q - 1)h}$ ; on est dans un cas d'observation d'une mer (ou d'un grand lac) qui paraît concave — voir le paragraphe 3 de [38]. L'absence de divergence pour  $\psi' > 0$  n'est pas naturelle : c'est l'un des artefacts dus au point anguleux du profil d'indice.

En  $S$  et à un instant donné,  $\eta_S$  varie avec  $\lambda_0$  à profil  $p$  fixé; cela engendre du chromatisme, dont un des effets est le fameux « rayon vert » visible à l'œil nu au lever ou au coucher du Soleil — ou de la Lune... Pour son étude, comme  $Z' > 70^\circ$ , on ne peut pas passer sous silence la non-linéarité de  $\chi_S$  en fonction de  $\eta_S$ .

## 9. Effets chromatiques de la réfraction; application à une forme restreinte de « rayon vert »

La dispersion existe pour tout milieu matériel, y compris les gaz (contrairement à ce que croyait Cauchy encore en 1836–1842 — cf. le sous-paragraphe 6.2 de [2]). Le pouvoir dispersif de l'air est  $(n_F - n_C)/(n_d - 1)$ , où  $n_F$  et  $n_C$  désignent les indices respectifs pour les raies F bleue (à  $\lambda_0 \cong 486$  nm) et C rouge (à 656 nm) de l'hydrogène, et  $n_d$  celui pour la raie d (de l'hélium, à 588 nm), tous les trois pour le même couple  $(T, P)$ ; la constringence (ou « nombre d'Abbe ») est son inverse, indépendant de  $(T, P)$  si on admet la loi de Gladstone–Dale, et valant 89,4 pour l'air — valeur plutôt moyenne, entre les deux extrêmes que sont 230 pour l'hélium et 26 pour le soufre gazeux. Notons que si on considérait la raie H (de  $\text{Ca}^+$ ) à 397 nm au lieu de la raie F, et la raie tellurique B (de  $\text{O}_2$ ) à 687 nm au lieu de la raie C — comme l'a fait Lord Rayleigh dans son étude de 1893 sur la scintillation — alors pour l'air 89,4 serait changé en 39,6 (d'après les données actuelles).

Les phénomènes de réfraction atmosphérique peuvent donc être accompagnés d'effets chromatiques. Pour l'observation visuelle à basse résolution, l'astronomie définit la longueur d'onde effective, comme étant celle qui correspond à l'effet moyenné sur l'ensemble du spectre visible. Quand  $Z'$  augmente, le rougissement apparent par extinction sélective dans l'atmosphère (déjà causé par la diffusion Rayleigh) augmente la longueur effective de l'astre observé, donc fait varier la valeur correspondante de  $n$ , et par contrecoup celle de  $\chi$ ; on peut en tenir compte dans son calcul, de même qu'on tient compte de l'influence du type spectral d'une étoile, ainsi que de la différence de sensibilité spectrale de l'œil humain entre les visions photopique, mésopique et scotopique (effet Purkinje) [76, p. 68–69], [77].

À plus haute résolution, le caractère dispersif de l'air est systématiquement gênant en astronomie : lorsqu'on observe une étoile (de distance zénithale vraie  $Z$ ) dans un instrument achromatique, elle apparaît sous l'aspect d'un petit spectre étalé verticalement. La dispersion de l'air dans le visible étant normale,  $n$  décroît avec la longueur d'onde, donc  $\chi$  aussi dans l'atmosphère standard; pour le spectre observé, le rouge est en bas (raie C) et le bleu en haut (raie F) lorsque l'image est redressée. Cet effet, quoique faible, reste très gênant dans la mise en œuvre des dispositifs hypersensibles que sont les grands télescopes et les interféromètres astronomiques — voir l'article [9] dans ce numéro spécial. Parfois l'observation de ce spectre révèle des faits surprenants et encore partiellement inexpliqués, comme ceux mentionnés par Bessel en 1842, Bauer et Danjon en 1922, Devaux en 1928 — voir le sous-paragraphe 6.2 de [2].

Nous nous proposons d'estimer ici l'étendue angulaire du spectre dans le cas standard, de la raie C à la raie F.

### 9.1. Cas des astres de hauteur angulaire pas trop petite

Commençons par le cas des valeurs de  $Z$  compatibles avec l'utilisation de la formule de Laplace (14). Nous la récrivons sous la forme suivante, qui fait intervenir  $Z$  et qui met en évidence les termes variant avec  $\lambda_0$  :

$$\chi_S(Z, T_S, P_S, \lambda_0) \cong \eta_S(T_S, P_S, \lambda_0) \left( 1 - \frac{H_1(T_S)}{r_S} \right) \tan(Z - \chi_S(Z, T_S, P_S, \lambda_0)) - \eta_S(T_S, P_S, \lambda_0) \left( \frac{H_1(T_S)}{r_S} - \frac{\eta_S(T_S, P_S, \lambda_0)}{2} \right) \tan^3(Z - \chi_S(Z, T_S, P_S, \lambda_0)). \quad (99)$$

En dérivant par rapport à  $\lambda_0$  à  $(Z, T_S, P_S)$  fixé, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_S}{\partial \lambda_0} = & \left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) \frac{\partial \eta_S}{\partial \lambda_0} \tan Z' - \left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) \eta_S \frac{\partial \chi_S / \partial \lambda_0}{\cos^2 Z'} \\ & - \left[ \left( \frac{H_1}{r_S} \frac{\partial \eta_S}{\partial \lambda_0} - \eta_S \frac{\partial \eta_S}{\partial \lambda_0} \right) \tan^3 Z' - \left( \frac{H_1}{r_S} - \frac{\eta_S}{2} \right) \eta_S \frac{3 \tan^2 Z'}{\cos^2 Z'} \frac{\partial \chi_S}{\partial \lambda_0} \right] \end{aligned} \quad (100)$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) \eta_S \frac{1}{\cos^2 Z'} - \left( \frac{H_1}{r_S} - \frac{\eta_S}{2} \right) \eta_S \frac{3 \tan^2 Z'}{\cos^2 Z'} \right] \frac{\partial \chi_S}{\partial \lambda_0} \\ & = \left[ \left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) - \left( \frac{H_1}{r_S} - \eta_S \right) \tan^2 Z' \right] \frac{\partial \eta_S}{\partial \lambda_0} \tan Z'. \end{aligned} \quad (101)$$

On en déduit une estimation de l'étendue de spectre  $\Delta \chi_S$ , due à la variation  $\Delta \eta_S$  de réfractivité au point  $S$  de la raie rouge de l'hydrogène à sa raie bleue en admettant (en première approximation)  $\partial \chi_S / \partial \lambda_0 \cong (\chi_S / \nu) / [(486-656) \text{ nm}]$  et  $\partial \eta_S / \partial \lambda_0 \cong (\eta_S / \nu) / [(486-656) \text{ nm}]$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \Delta \chi_S & \cong \frac{\left[ \left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) - \left( \frac{H_1}{r_S} - \eta_S \right) \tan^2 Z' \right] \tan Z' \eta_S}{1 + \left[ \left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) - 3 \left( \frac{H_1}{r_S} - \frac{\eta_S}{2} \right) \tan^2 Z' \right] \frac{\eta_S}{\cos^2 Z'}} \frac{\eta_S}{\nu} \\ & = \frac{\chi_S}{\nu} \frac{\left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) - \left( \frac{H_1}{r_S} - \eta_S \right) \tan^2 Z'}{\left\{ 1 + \left[ \left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) - 3 \left( \frac{H_1}{r_S} - \frac{\eta_S}{2} \right) \tan^2 Z' \right] \frac{\eta_S}{\cos^2 Z'} \right\} \left[ \left(1 - \frac{H_1}{r_S}\right) - \left( \frac{H_1}{r_S} - \frac{\eta_S}{2} \right) \tan^2 Z' \right]} \end{aligned} \quad (102)$$

Pour  $Z' = 80^\circ$ , et  $S$  au niveau de la mer dans les conditions normales ( $0^\circ \text{C}$  et  $1 \text{ atm}$ ) pour l'air sec, cela donne  $\Delta \chi_S \cong 0,996(\chi_S / \nu)$  (i.e. la variation relative de  $\chi_S$  est  $0,4\%$  plus petite que celle de  $\eta_S$ ), et finalement  $\Delta \chi_S \cong 0,996(5'29''/89,4) \cong 3,67''$ .

### *Liserés vert et rouge du Soleil*

Lorsque l'astre n'est pas très bas dans le ciel ( $Z < 70^\circ$ ) on peut utiliser l'approximation de Simpson (7) et estimer ce décalage  $\Delta \chi_S$  dû à la variation d'indice  $\Delta n_S$  valant  $\eta_S/89,4$  du rouge (C) au bleu (F) :

$$\Delta \chi_S / \chi_S \cong \Delta n_S / \eta_S \text{ et } \Delta \chi_S \cong \Delta n_S \tan Z \cong (2,92 \times 10^{-4} \text{ rad}/89,4) \tan Z \cong 0,67'' \tan Z' \quad (103)$$

qui est très en dessous de la limite de perception de l'œil pour  $Z' < 70^\circ$ , donc les liserés (bleu en haut et rouge en bas) ne peuvent être vus qu'au moyen d'un instrument. Cela fut observé, et correctement expliqué, par Bouguer [78, p. 93–94] dès ses premières observations en 1748 avec son héliomètre, inventé la même année, et servant à déterminer le diamètre apparent du Soleil (ne pas se laisser abuser par les titres des publications de Bouguer [78, 79], car à son époque le Soleil était encore mis dans la catégorie des planètes, au sens étymologique d'astre errant parmi les étoiles fixes) :

« cette apparence peu sensible, lorsqu'on se sert de lunettes de sept à huit pieds, telles qu'on les a jusqu'ici employées à la recherche du diamètre du Soleil, devient très-marquée dans l'héliomètre; & les couleurs même qu'on observe dans les deux bords, lui en ont indiqué la cause : on sait qu'un rayon qui nous vient du Soleil n'est pas un rayon simple, mais un composé de sept faisceaux de rayons de couleurs différentes, & tous différemment refrangibles. Le plus haut point du diamètre vertical sera donc vû par le faisceau de rayons bleus qui souffrira une plus grande réfraction, & qui par conséquent le fera paroître plus haut, & son extrémité la plus basse par le faisceau de rayons qui aura souffert la moindre réfraction, c'est-à-dire le faisceau de rayons rouges. [...] on observera toujours le bord supérieur terminé par un trait bleu, & l'inférieur par un

trait rouge, au lieu qu'on n'observera rien de pareil dans les bords latéraux, parce que la réfraction de leurs rayons se fait dans un plan vertical, & sans les déranger en aucune façon dans le sens du diamètre horizontal, dont elle ne peut par conséquent altérer ni la couleur, ni la netteté, ni la mesure. » [78, p. 93–94]

« Si le défaut continuel de netteté des bords supérieur & inférieur du Soleil, est très-capable d'embarrasser les Observateurs scrupuleux, il offre aussi un sujet de problème pour les Physiciens, qui ne manqueront pas d'en demander la solution : elle n'est pas difficile à trouver, & je crois pouvoir l'indiquer d'une manière sûre. Cette apparence ne peut venir que de la décomposition que souffre la lumière en traversant notre atmosphère; les rayons bleus ou violets qui partent en même temps que les rayons des autres couleurs, du haut du disque, sont sujets à un peu plus de réfraction que ces derniers, ils se courbent un peu davantage; ils nous paroissent donc venir d'un peu plus haut, en portant plus loin l'illusion ordinaire des réfractations. C'est tout le contraire si nous jetons la vûe sur le bord inférieur, nous devons le voir principalement par des rayons rouges qui souffrent un peu moins de courbure dans leur trajet; ces rayons, en se courbant moins, doivent frapper nos yeux comme s'ils partoient d'un point plus bas, & par conséquent faire paroître un peu en dessous la partie inférieure du disque qu'ils étendent, pendant que les rayons bleus & violets contribuent à étendre ce même disque par sa partie supérieure. » [79]

## 9.2. *Cas des astres proches de l'horizon*

Les applications numériques du sous-paragraphe précédent indiquent des largeurs de liserés de l'ordre de la seconde d'angle; quand l'astre s'approche plus de l'horizon, cette largeur peut s'approcher de la minute d'angle, mais normalement les liserés en eux-mêmes restent invisibles à l'œil nu [80]. Sur la photo montrée à la Figure 2 et prise au téléobjectif, on voit en haut de l'image principale du Soleil un fin liseré vert — et non pas bleu car, au niveau de la mer, la lumière parasite due à la diffusion par les aérosols masque usuellement le liseré bleu qui est déjà, compte tenu de la diffusion Rayleigh par l'atmosphère pure, beaucoup moins lumineux que le liseré vert. En ce qui concerne le Soleil, l'élargissement de son liseré supérieur au fur et à mesure de son coucher se trouve simulé sur la Figure 4.

Cependant, malgré la largeur angulaire du liseré vert toujours très inférieure à  $1'$ , il est possible d'en voir à l'œil nu une conséquence : pendant la seconde de temps où l'image rouge du Soleil est cachée derrière un obstacle lointain et à bord net, comme une crête montagneuse aride ou lointaine, mais que seules émergent les images vertes (et bleues, etc.), alors on voit un point lumineux vert (ou bleu, selon la pureté de l'air quant aux aérosols) sans largeur angulaire appréciable; telle est la forme élémentaire, et peu spectaculaire, du « rayon vert » — voir la Figure 5.

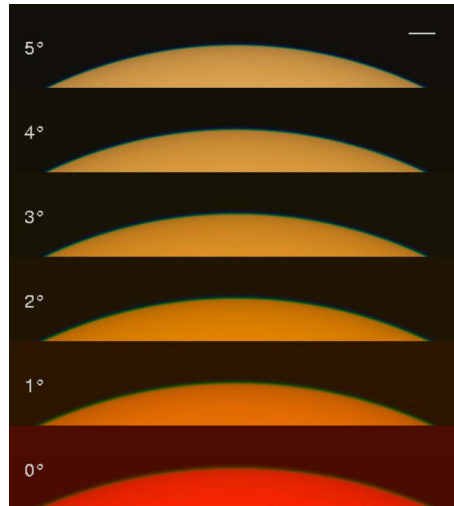
Mais quand un phénomène de mirage intervient, de façon à étirer verticalement ce liseré vert-bleu, alors la parcelle d'image de cette couleur peut avoir une largeur nettement perceptible à l'œil nu; selon le type de mirage qui exalte la dispersion chromatique, mais qu'il n'est pas possible de détailler ici, on distingue surtout deux types de « rayons verts » qui sont les plus couramment observés [82], puis quelques formes rares. La première publication scientifique sur l'observation d'un « rayon vert » daterait de 1852 [83], mais la prise de conscience de ce phénomène pourrait remonter à l'antiquité égyptienne [84].

D'après le même modèle d'atmosphère qui donnait l'expression (95) on tire, dans le cas où  $\psi' = 0$ , la valeur de la réfraction

$$\chi_{Sh} \cong \eta_S \sqrt{\frac{2}{h - \eta_S}}. \quad (104)$$

On voit que  $\chi_{Sh}$  est une fonction fortement convexe de  $\eta_S$ , sa convexité se manifestant déjà pour  $\eta_S$  de l'ordre de quelques dix millièmes puisque  $h$  est de l'ordre du millième. La variation





**FIGURE 4.** Simulation du liseré vert au bord supérieur de l'image du Soleil. En haut à droite, le segment horizontal indique l'échelle angulaire (1'). La hauteur angulaire indiquée à gauche est celle du liseré. Plus elle est faible, plus l'extinction est forte et le rougissement important, ce qui empêche de voir le bleu; mais en contrepartie la largeur angulaire du liseré vert augmente [80]. © Andrew T. Young, <https://aty.sdsu.edu/explain/simulations/std/rims.html>.



**FIGURE 5.** Séquence photographique prise depuis le Pic du Midi (2 877 m) et montrant le coucher du Soleil derrière une crête montagneuse lointaine, isolant aux derniers instants des fragments du liseré bleu. L'air était assez dépourvu d'aérosols pour rendre possible l'observation de ce liseré bleu; cela n'est pas rare en altitude, comme l'avait remarqué Lord Kelvin en 1899 dans les Alpes [81]. © Photos : Christophe Gervier

relative de  $\chi_{Sh}$  avec  $\eta_S$  est donc sensiblement différente de celle de  $\eta_S$ ; Euler l'a pressenti dès 1754 : « à moins que l'astre ne soit trop proche de l'horizon, la réfraction est assés exactement proportionnelle à la hauteur du barometre; & réciproquement proportionnelle à la hauteur du thermometre, ou plutôt au degré de chaleur. Mais, pour les hauteurs de l'astre fort petites, le changement causé par le barometre & le thermometre devient plus grand que selon lesdites raisons, & cela surtout à l'égard des changemens de la chaleur. » [55]

Précisons cette remarque dans le cas où la variation de  $\eta_S$  est due à celle de la longueur d'onde, à profil fixé. Comme la diffusion atmosphérique rend les images bleue et violette de l'astre sur l'horizon usuellement imperceptibles, on ne considérera ici que les images rouge et verte. Connaissant la variation relative de réfractivité de l'air au sol entre le rouge et le vert,  $\Delta\eta_S/\eta_S \cong 1/150$ , le décalage vertical  $\Delta\chi_{Sh1}$  entre des points objet dont les images rouge et verte se trouvent toutes deux sur l'horizon astronomique s'obtient approximativement par différenciation logarithmique de (104) :

$$\frac{\Delta\chi_{Sh1}}{\chi_{Sh}} \cong \frac{\Delta\eta_S}{\eta_S} - \frac{1}{2} \frac{(-\Delta\eta_S)}{h-\eta_S} = \frac{\Delta\eta_S}{\eta_S} \left[ 1 + \frac{\eta_S}{2(h-\eta_S)} \right] > \frac{\Delta\eta_S}{\eta_S} \quad (105)$$

( $h$  ne variant pas avec  $\lambda_0$  d'après la loi de Gladstone–Dale). On peut obtenir la même expression approximative (105) avec le profil uniforme du modèle de Cassini, sachant que  $h$  est quasiment le double de la hauteur réduite relative  $h_1$  (cf. le paragraphe 4 de [2]). On voit que la variation relative de  $\chi_{Sh}$  est supérieure à celle de  $\eta_S$ , contrairement à ce que beaucoup supposaient, comme Ranyard en 1889; il est probablement le premier à publier une estimation théorique de la largeur angulaire de l'image d'un point vu sur l'horizon : « To express it in numbers, the atmospheric dispersion from [the Fraunhofer line] B to [the line] G of the spectrum is about one-sixtieth of the atmospheric refraction. On the horizon at the sea-level, the horizontal refraction is about 34 minutes, and the length of the spectrum from B to G is 34''. » [85] La forte convexité de  $\chi_{Sh}$  en fonction de  $\eta_S$  vient du fait que  $Z' = 90^\circ$  correspond à une orientation locale du rayon telle que le gradient radial d'indice permette le plus facilement son guidage, et donc une variation de  $\chi_{Sh}$  qui ne peut être linéaire mais qui diverge. En prenant comme épaisseur relative d'atmosphère terrestre  $h \cong 10 \text{ km}/6,4 \times 10^3 \text{ km} \cong 1,6 \times 10^{-3}$  typique pour un tel modèle, on trouve  $\eta_S/[2(h-\eta_S)] \cong 11 \%$ . C'est justement ce qu'on observe expérimentalement : l'article de Banakhevich [86, Partie 3] regroupe des mesures de variations *relatives* de réfraction horizontale dues à des variations *relatives* de pression, à température fixée; il montre que celles-là excèdent de 10 % celles-ci. Rarissime publication où l'influence, sur le rayon vert, de la non-linéarité entre la réfraction et la réfractivité est prise en compte — alors qu'en dehors des cas trop proches de la réfraction horizontale, la formule de Laplace (14) montrait déjà une telle non-linéarité, mais seulement de  $-0,4 \%$  dans l'exemple du sous-paragraphe 9.1 où  $Z' = 80^\circ$  ! Donc  $\Delta\chi_{Sh1}/\chi_{Sh} \cong 1,11 \times 1/150 \cong 7,4 \times 10^{-3}$ , mais comme  $\chi_{Sh} \cong 35'$  on trouve  $\Delta\chi_{Sh1} \cong 16''$ . La vitesse angulaire apparente de rotation de la voûte céleste étant de  $15^\circ/h = 15''/s$ , cela explique que la durée des phénomènes de « rayon vert » au sens large est de l'ordre de la seconde.

Mais si le calcul de  $\Delta\chi_{Sh1}$  à  $\psi' = 0$  fixé permet de calculer la durée d'un flash de liseré vert vu sur l'horizon astronomique, il ne faut pas confondre avec la largeur  $\Delta\chi_{Sh2}$  de ce liseré quand le sommet de l'image rouge du Soleil se trouve sur l'horizon astronomique. En effet, à l'instant où  $\psi' = 0$  pour le rouge on a, d'après le théorème des fonctions implicites,

$$\frac{\Delta\chi_{Sh2}}{\Delta\eta_S} \cong \left( \frac{\partial\psi'}{\partial\eta_S} \right)_{\psi'} = - \left( \frac{\partial\psi}{\partial\eta_S} \right)_{\psi'} \left( \frac{\partial\psi'}{\partial\psi} \right)_{\eta_S} = \frac{\Delta\chi_{Sh1}}{\Delta\eta_S} \gamma_{Sh}; \quad (106)$$

or d'après le théorème de Biot,  $\gamma_{Sh} = 1 - q \cong (h - \eta_S)/h$  ici, donc

$$\frac{\Delta\chi_{Sh2}}{\chi_{Sh}} = \gamma_{Sh} \frac{\Delta\chi_{Sh1}}{\chi_{Sh}} = \frac{\Delta\eta_S}{\eta_S} \left[ 1 + \frac{\eta_S}{2(h-\eta_S)} \right] \frac{h-\eta_S}{h} = \frac{\Delta\eta_S}{\eta_S} \left( 1 - \frac{\eta_S}{2h} \right) < \frac{\Delta\eta_S}{\eta_S}. \quad (107)$$

Toujours avec  $\eta_S \cong 2,92 \times 10^{-4}$  et  $h \cong 1,6 \times 10^{-3}$ , on voit que la concavité de  $\psi'$  en fonction de  $\eta_S$  à  $\psi$  fixé diminue de  $\eta_S/(2h) \cong 9 \%$  la valeur de  $\Delta\chi_{Sh2}/\chi_{Sh}$  par rapport à celle que donnerait une fonction linéaire, et on trouve  $\Delta\chi_{Sh2} \cong 13'' \ll 1'$  donc la largeur angulaire verticale du dernier fragment vert du Soleil couchant est inappréciable à l'œil nu. Quand elle devient appréciable, c'est à cause d'un étirement vertical très important dû à des phénomènes de mirage, comme le



**FIGURE 6.** Liserés rouge en bas et vert en haut (mais pas bleu à cause de sa plus forte extinction sélective par diffusion Rayleigh) sur l'image des planètes Vénus (à gauche) et Mercure (à droite) vues très bas sur l'horizon ( $\psi' \cong 2^\circ$  pour chacune de ces planètes). Arago, utilisant une lunette astronomique et voyant donc des images renversées, a noté dans ses registres d'observation, pour le 9 mai 1811 : « Mars [...] était teint dans son bord supérieur apparent d'un rouge très-vif, tandis que le bord inférieur, au contraire, était bleu intérieurement et violet extérieurement, cette dernière couleur étant d'ailleurs un peu faible. » [87, p. 738] © Photos : Marcella Giulia Pace — APOD 30 mai 2020.

comprit Maggi (1809–1854) dès 1852 [83]; cela se produit lorsque la position de ce fragment du Soleil correspond à une portion quasi horizontale de la courbe de transfert.

Notons que tous les calculs de ce sous-paragraphe 9.2, basés sur le modèle de Bouguer, sont directement transposables au profil exponentiel, en remplaçant seulement  $h$  par  $h_1$ , à condition de partir du résultat approché (87) de Kramp.

## 10. Conclusion

L'étude de la réfraction astronomique dans une atmosphère idéale à symétrie sphérique plante le décor et fournit un cadre permettant de mieux observer les cas réels de réfraction, en testant la présence ou l'absence de propriétés subtiles du modèle à symétrie sphérique, ce qui permet d'affûter l'analyse des observations expérimentales. Le moment à partir duquel la théorie doit abandonner le modèle à symétrie sphérique apparaîtra donc plus nettement, et dépendra du degré de précision obtenu ou souhaité pour les observations et leur dépouillement.

Sachant que le coût des observations depuis le sol est, pour longtemps encore, bien inférieur à celui des observations effectuées depuis l'espace, la connaissance et la prise en compte des effets de réfraction astronomique ne sont pas près de se trouver mises au rebut. Il est donc nécessaire de poursuivre son étude en se penchant sur l'effet des brisures de symétrie sphérique dans l'atmosphère réelle [5, 6].

Enfin, pour maintenir une précision optimale dans les mesures en astronomie, la réfraction ne doit pas être considérée isolément, mais en parallèle avec l'extinction. Nous avons déjà évoqué, en présentant le théorème de réfraction-extinction de Laplace, le lien existant entre ces deux phénomènes. Traditionnellement dans les observations astronomiques, leur prise en compte était partagée entre deux communautés distinctes : la réfraction pour les astrométristes, l'extinction pour les photométristes. Mais sur le plan pratique aussi ces deux effets s'influencent mutuellement : les tables de masses d'air permettant de corriger de l'extinction atmosphérique sont données en fonction de  $Z'$ , alors que les éphémérides pour un astre permettent de calculer

$Z$  en fonction du temps, donc les photométristes doivent tenir compte de la réfraction  $\chi_S$  pour la retrancher à  $Z$  et effectuer la correction photométrique avec la masse d'air  $m_S$  correcte; en sens inverse, les astrométristes qui observent un astre et veulent remonter précisément à la connaissance de  $Z$  au cours du temps doivent tenir compte de l'extinction, car sa sélectivité (qui entraîne un rougissement — voir la Figure 6) varie avec  $Z'$ , ce qui modifie au cours du temps la longueur d'onde effective de l'astre, donc contribue à l'évolution de  $\chi_S$  en changeant un des paramètres qui le conditionnent, en plus de la variable  $Z'$ . Dorénavant, une prise en compte globale et fine de ces effets intriqués est donc requise dans l'astronomie observationnelle contemporaine. D'ailleurs, une nouvelle méthode de calcul des masses d'air [88] a pu être adaptée pour calculer la réfraction [46].

### Conflit d'intérêt

L'auteur n'a pas de conflit d'intérêts à déclarer.

### Remerciements

L'auteur exprime ses vifs remerciements au Dr. Andrew Young pour de très nombreux échanges scientifiques depuis l'an 2000. Il le remercie aussi pour son autorisation de réutiliser une de ses figures, ainsi que Pekka Parviainen, Christophe Gervier et Marcella Giulia Pace qui ont donné la permission de reproduire certaines de leurs photographies.

### Annexe A. Problèmes de convergence

La convergence dont Radau ne s'est pas souciée, en passant de (31) à (32)–(33), se justifie pour tan  $Z'$  assez petit, i.e. tel que

$$\sup_{n \in [1, n_S]} |F(n, Z')| := M(Z') < 1. \quad (\text{A1})$$

Dans ce cas en effet, le développement du crochet de (31) — dont le rayon de convergence est 1 (voir [89, p. 241–243]) — converge normalement (voir [89, p. 211–213]), et (32) aussi, car

$$\sup_{n \in [1, n_S]} \left| n^{-2} \frac{r_S}{r} \frac{(2p-1)!!}{p! 2^p} F(n, Z')^p \right| \leq \frac{(2p-1)!!}{p! 2^p} M(Z')^p \underset{\infty}{\sim} \frac{M(Z')^p}{\sqrt{\pi p}} \quad (\text{A2})$$

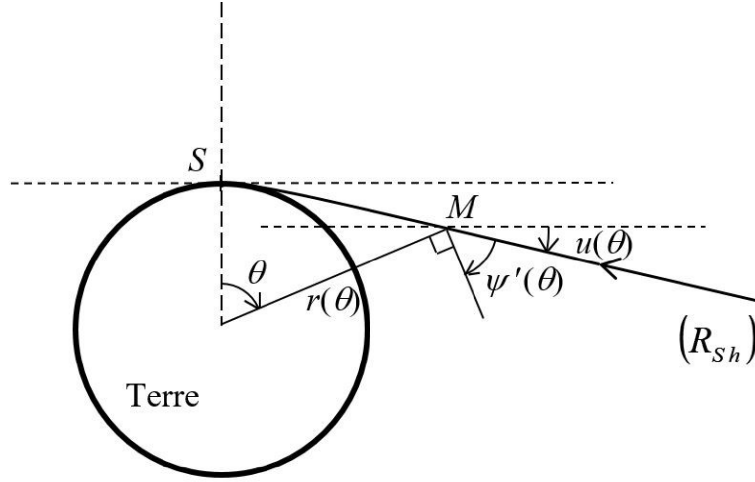
(où l'équivalent est obtenu grâce à la formule de Stirling [34, p. 2868]). On peut en déduire, comme l'intégrale (31) est définie (i.e. sur un domaine borné), que la série des fonctions  $(-1)^p a_p \tan^{2p+1} Z'$  converge absolument et uniformément [89, p. 212–213].

En outre, on voit que pour la série (32) la convergence n'est plus assurée au voisinage de l'horizon, i.e. quand  $Z'$  est trop proche de  $90^\circ$ , car dans ce cas  $M(Z') \geq 1$ . Malgré cela, l'espoir de remonter des observations de  $\chi_S(\tan Z')$  à la structure de l'atmosphère était tenace au XIX<sup>e</sup> siècle (voir l'article [90] dans ce numéro spécial), bien que les  $H_p$  pour  $p$  élevé ne soient sensibles qu'au voisinage de l'horizon — là où la série n'est plus utilisable.

### Annexe B. Coefficient de distorsion angulaire verticale locale

On considère l'expression  $\chi(r(\theta), \psi'(\theta))$  de la réfraction en  $M$  pour le rayon lumineux ( $R_{Sh}$ ) arrivant horizontal en  $S$ , et dont la direction de la tangente en  $M$  fait, avec la direction orthoradiale, l'angle  $\psi'(\theta) = \theta - u(\theta)$ . On voit que (Figure B1)

$$\chi(r(\theta), \psi'(\theta)) = \chi(r_S, 0) - u(\theta). \quad (\text{B1})$$



**FIGURE B1.** Notations utiles pour la deuxième démonstration du théorème de Biot, et son prolongement au second ordre; le sens positif pour les angles définis ici est le sens indirect, et sur cette figure  $\psi'(\theta)$  et  $\psi(\theta)$  sont positifs — ce signe étant cohérent avec ce qui précède dans le présent article.

Comme cette relation est vraie pour tout  $\theta$ , dans un premier temps on en déduit l'égalité des dérivées premières

$$\frac{d\chi}{d\theta} = \frac{\partial\chi}{\partial r} \frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial\chi}{\partial\psi'} \left(1 - \frac{du}{d\theta}\right) = -\frac{du}{d\theta} \quad (\text{B2})$$

et on va voir que cela nous fait retrouver le théorème de Biot. En effet, au point S tel que  $\theta := 0$  et  $r = r_S$ , on a  $dr/d\theta = 0$  (c'est la symétrie essentielle pour cette démonstration, qui découle de la symétrie de la loi de Bouguer exprimée avec la fonction cosinus); de plus, en S on a  $ds/d\theta = r_S$ , donc

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{ds} \frac{ds}{d\theta} = C_S r_S = \kappa_S \quad (\text{B3})$$

et alors

$$(1 - \kappa_S) \left( \frac{\partial\chi}{\partial\psi'} \right)_{Sh} = -\kappa_S. \quad (\text{B4})$$

Comme ici  $\kappa$  est de signe quelconque, ainsi que  $u$ , le résultat est valable aussi bien pour  $\psi' \rightarrow 0_+$  que pour  $\psi' \rightarrow 0_-$ ; cela montre que  $\chi$  et donc  $\psi$  sont dérivables par rapport à  $\psi'$  en  $\psi' = 0$ . On utilise encore  $\psi' = \psi + \chi$ , et par dérivation par rapport à  $\psi'$  il vient

$$1 = \frac{\partial\psi}{\partial\psi'} + \frac{\partial\chi}{\partial\psi'}; \quad (\text{B5})$$

donc sur l'horizon de S on a

$$\left( \frac{\partial\psi}{\partial\psi'} \right)_{Sh} = 1 - \left( \frac{\partial\chi}{\partial\psi'} \right)_{Sh} = 1 - \frac{-\kappa_S}{1 - \kappa_S} \quad (\text{B6})$$

et finalement on retrouve le résultat

$$\gamma_{Sh} = \left( \frac{\partial\psi}{\partial\psi'} \right)_{Sh}^{-1} = 1 - \kappa_S. \quad (\text{B7})$$

Dans un second temps, on déduit de (B1) l'égalité des dérivées secondes :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\chi}{d\theta^2} &= \left( \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} \frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial^2\chi}{\partial\psi'\partial r} \frac{d\psi'}{d\theta} \right) \frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial\chi}{\partial r} \frac{d^2r}{d\theta^2} \\ &+ \left( \frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial\psi'} \frac{dr}{d\theta} + \frac{\partial^2\chi}{\partial\psi'^2} \frac{d\psi'}{d\theta} \right) \frac{d\psi'}{d\theta} + \frac{\partial\chi}{\partial\psi'} \frac{d^2\psi'}{d\theta^2} = -\frac{d^2u}{d\theta^2} \end{aligned} \quad (B8)$$

où

$$\frac{d\psi'}{d\theta} = 1 - \frac{du}{d\theta} \text{ et } \frac{d^2\psi'}{d\theta^2} = -\frac{d^2u}{d\theta^2}. \quad (B9)$$

Au point S, beaucoup de termes disparaissent car on a, en plus de ce qui a été dit au début de cette Annexe,  $d^2u/d\theta^2 = 0$  car la fonction  $u$  de la variable  $\theta$  est impaire. Donc

$$\frac{\partial\chi}{\partial r}(r_S, 0) \frac{d^2r}{d\theta^2}(0) + \frac{\partial^2\chi}{\partial\psi'^2}(r_S, 0) \left[ 1 - \frac{du}{d\theta}(0) \right]^2 = 0. \quad (B10)$$

De l'expression de la courbure de  $(R_{Sh})$  en coordonnées polaires,

$$C = \left[ r^2 + 2 \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r \frac{d^2r}{d\theta^2} \right] / \left[ r^2 + \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{3/2}, \quad (B11)$$

dont on considère la valeur  $C_{Sh}$  en S, on tire

$$\frac{d^2r}{d\theta^2}(0) = r_S(1 - C_{Sh} r_S) = r_S(1 - \kappa_S). \quad (B12)$$

Et comme, d'après le théorème de Biot et (B2), on a

$$\frac{du}{d\theta}(0) = \kappa_S \quad (B13)$$

— voir (B3) — il vient

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial\psi'^2}(r_S, 0) = -\frac{r_S}{1 - \kappa_S} \frac{\partial\chi}{\partial r}(r_S, 0) \text{ noté } \left( \frac{\partial^2\chi}{\partial\psi'^2} \right)_{Sh} = -\frac{r_S}{1 - \kappa_S} \left( \frac{\partial\chi}{\partial r} \right)_{Sh}, \quad (B14)$$

donc

$$\left( \frac{\partial^2\psi}{\partial\psi'^2} \right)_{Sh} = \frac{r_S}{1 - \kappa_S} \left( \frac{\partial\chi}{\partial r} \right)_{Sh} \quad (B15)$$

car

$$\chi(r, \psi') = \psi' - \psi(r, \psi'). \quad (B16)$$

Enfin,

$$\left( \frac{\partial^2\psi'}{\partial\psi'^2} \right)_{Sh} = - \left( \frac{\partial^2\psi}{\partial\psi'^2} \right)_{Sh} / \left( \frac{\partial\psi}{\partial\psi'} \right)_{Sh}^3 = -\gamma_{Sh} \Delta_{Sh} = -r_S(1 - \kappa_S)^2 \left( \frac{\partial\chi}{\partial r} \right)_{Sh} > 0 \quad (B17)$$

où  $\Delta_{Sh}$  désigne la valeur en S, pour  $\psi' = 0$ , du coefficient d'asymétrie  $\Delta$  défini au sous-paragraphe 2.2.2 de l'article [91] dans ce numéro spécial; nous avons ainsi obtenu plusieurs expressions de  $(\partial^2\psi'/\partial\psi'^2)_{Sh}$  que nous appelons le « coefficient de distorsion angulaire verticale locale » sur l'horizon. Il dépend de tout le profil d'indice de l'atmosphère, contrairement à  $\gamma_{Sh}$  qui ne dépend que de  $n_S$  et  $(dn/dr)_S$ . La grandeur  $(\partial\chi/\partial r)_{Sh}$  à laquelle il est relié joue un grand rôle dans la théorie des éclipses et des occultations par les planètes [66, p. 92], [67, 68]; c'est celle que Link noterait  $(1/2)(d\omega/dh_0)$  (voir le paragraphe 3 de [68]). Sur la Figure 4 de l'article [91] de ce numéro spécial, la mesure de la différence des positions relatives des points haut et bas de l'image du Soleil couchant (par rapport aux points haut et bas du cercle pointillé respectivement) permet d'estimer, pour la hauteur angulaire vraie du centre du Soleil, la valeur du coefficient de distorsion angulaire verticale locale,  $\partial^2\psi'/\partial\psi'^2 \cong (0,24 \pm 0,08)^\circ$  alors que d'après la Table 1 de ce même article il devrait valoir  $0,06^\circ \dots$

TABLE 1. Grandeurs utilisées dans cet article

Symbole	Grandeur	Unités usuelles
$S$	Point de l'observateur	
$Z, Z'$	Distances zénithales vraie et apparente pour l'observateur $S$	°, ', ", rad
$\psi, \psi'$	Hauteurs (angulaires) vraie et apparente pour $S$	°, ', ", rad
$\chi_S = \psi' - \psi = Z - Z'$	(Angle de) réfraction (astronomique) pour $S$	°, ', ", rad
$n$	Indice de réfraction de l'air	
(R)	Rayon lumineux provenant de $A$ à l'infini et arrivant en $S$	
$\mathbf{u}$	Vecteur unitaire tangent à (R)	
$\alpha$	Angle entre $\mathbf{u}$ et <b>grad</b> $n$	°, ', ", rad
$s$	Abscisse curviligne sur (R) en un point courant $M$	km
$\mathcal{R}$	Rayon de courbure (positif) de (R) en $M$	km
$T$	Température absolue dans l'air	K
$P$	Pression dans l'air	atm
$\lambda_0$	Longueur d'onde dans le vide	$\mu\text{m}, \text{nm}$
$r := CM$	Distance entre $M$ et le centre de symétrie sphérique $C$	km
$\eta := n - 1$	Réfractivité de l'air	
$\mu$	Masse volumique de l'air	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
$C_h(r)$	Courbure de (R) en un point $H$ où il a une tangente horizontale à une distance $r$ de $C$	$\text{km}^{-1}$
$\kappa(r) := r C_h(r)$	Coefficient de réfraction de l'atmosphère, à une distance $r$ du centre $C$ de la Terre	
$C(M, \lambda_0)$	Constante de la loi empirique de Gladstone–Dale	$\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}$
$n_S, T_S, P_S, \eta_S, \mu_S, r_S, \kappa_S, C_{Sh}$	$n, T, P, \eta, \mu, r, \kappa, C_h$ en $S$	Divers
$z := r - r_S$	Altitude de $M$ par rapport à $S$	m, km
$H_T$	Échelle de hauteur de l'atmosphère isotherme	km
$\kappa_{ST}$	$\kappa_S$ pour une atmosphère isotherme	
$H_1$	Hauteur réduite de l'atmosphère, i.e. moment réduit d'ordre 1 de $-\eta'(z)$	km
$h_1 := H_1 / r_S$	Hauteur réduite relative	
$h_p^p := (H_p / r_S)^p$	Moments réduits relatifs d'ordre $p$ de $-\eta'(z)$	
$H_p$	Racine $p$ -ième du moment réduit d'ordre $p$ de $-\eta'(z)$	km
$\varepsilon$	Augmentation relative de $H_1$ par rapport à $H_T$	
$H$	Hauteur totale de l'atmosphère de Bouguer	km
$h$	Hauteur totale relative de l'atmosphère de Bouguer	
$H_v$	Hauteur d'échelle des aérosols et de la vapeur d'eau	km
$\gamma_S := d\psi' / d\psi$	Grandissement angulaire vertical local (pour l'observateur $S$ )	

(continued on next page)

TABLE I. (suite)

Symbole	Grandeur	Unités usuelles
$Q_S := \int_{-\infty}^{SS} \mu ds$	« Masse d'air » absolue le long de (R)	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$
$\gamma_{Sh}$	$\gamma_S$ pour $Z' = 90^\circ$	
$\chi_{Sh}$	Réfraction horizontale en S, i.e. $\chi_S$ pour $Z' = 90^\circ$	$^\circ, ', ''$ , rad
$\mathcal{P}_{S0}$	Profondeur optique de l'atmosphère au zénith	
$\mathcal{P}_{Sh}$	Profondeur optique à l'horizon astronomique	
$Q_{Sh}$ (resp. $Q_{S0}$ )	$Q_S$ pour des rayons arrivant en S avec $Z' = 90^\circ$ (resp. $0^\circ$ )	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$
$m_{Sh} := Q_{Sh}/Q_{S0}$	« Masse d'air » relative, à l'horizon astronomique	
$\Delta_{Sh}$	Valeur en S, pour $\psi' = 0$ , du coefficient d'asymétrie	$/'^\circ$
$R$	Constante des gaz parfaits	$\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
$M_a$	Masse molaire de l'air	$\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$
$g$	Norme du champ de pesanteur	$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
$r_P, n_P, \alpha_P$	$r, n, \alpha$ en P, sur la tropopause standard	Divers
$I_B := nr \sin \alpha$	Invariant de Bouguer	km
$v_0$	Vitesse arbitraire constante	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$\Delta n, \Delta(nr)$	Variation de $n$ , de $nr$ depuis $r_S$ jusqu'à $r$	Divers
$Y$	Approximation fondamentale linéaire de $\Delta(nr)/(nr_S)$	
$F(n, Z') := \left(1 - \frac{n_S^2 r_S^2}{n^2 r^2}\right) \tan^2 Z'$	Grandeur sous le radical donnant le développement binomial	
$M(Z')$	Borne supérieure de $ F(n, Z') $ pour $n \in [1, n_S]$	
$(-1)^p a_p \tan^{2p+1} Z'$	Terme général de la série usuelle donnant $\chi_S$	$^\circ, ', ''$ , rad
$f(r) := r n(r)$	Ordonnée du diagramme de Young-Kattawar	m
$r_a = r_S (1 - \kappa_S)^{-1}$	Rayon de courbure apparent d'un méridien terrestre	km
$D_h, D'_h$	Diamètres angulaires vrai et apparent d'un objet extra-atmosphérique	$^\circ, ', ''$ , rad
$h(r, I_B) := r^2 \left[ \frac{I_B^2(r)}{I_B^2} - 1 \right]$	Fonction pour l'étude de (R) par quadrature	$\text{m}^2$
$p(r)$	Profil de réfractivité normalisé par $p(r_S) = 1$	
$q$	Exposant du modèle de Bouguer	
$n_F, n_C$ , et $n_d$	Indices respectifs de l'air pour les raies F (486 nm), C (656 nm), et d (588 nm)	
$\nu := [(n_F - n_C)/(n_d - 1)]^{-1}$	Constringence	
$\Delta\chi_S$	Variation de $\chi_S$ due à la variation d'indice $\Delta n_S$	$^\circ, ', ''$ , rad
$\Delta\chi_{Sh1}$	Décalage angulaire vertical entre des points objet dont les images rouge et verte se trouvent toutes deux sur l'horizon astronomique	$^\circ, ', ''$ , rad
$\Delta\chi_{Sh2}$	Largeur angulaire verticale du liseré (de rouge à vert) quand le sommet de l'image rouge du Soleil se trouve sur l'horizon astronomique	$^\circ, ', ''$ , rad



## Références

- [1] R. Thom, *Prédire n'est pas expliquer – Entretiens avec Émile Noël*, coll. Champs Sciences; Flammarion, Paris, 1993.
- [2] L. Dettwiller, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 13-62.
- [3] G. Coupinot, J. Hecquet, « Résolution angulaire en astronomie optique », *J. Opt. (Paris)* **21** (1990), p. 27-33.
- [4] J. Devaux, « Sur le "rayon vert" », *L'Astronomie* **42** (1928), p. 384-389.
- [5] D. Bonneau, « Les effets optiques de la turbulence atmosphérique dans les images astronomiques », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 269-291.
- [6] S. van der Werf, « Novaya Zemlya effect and Fata Morgana. Raytracing in a spherically non-symmetric atmosphere », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 365-389.
- [7] L. Dettwiller, « Properties of optical ducts, their chromatism and its effects on astronomical refraction », 2022, *preprint*, <https://arxiv.org/abs/2204.02605>.
- [8] F. Mignard, « Les tables de réfraction astronomique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 133-178.
- [9] L. Koechlin, L. Dettwiller, « Correction de la dispersion atmosphérique dans l'imagerie par les grands télescopes et les interféromètres astronomiques », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 345-364.
- [10] B. Taylor, *Methodus Incrementorum directa & inversa*, Gul. Innys, Londres, 1715.
- [11] W. H. Wollaston, « On double images caused by atmospheric refraction », *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **90** (1800), p. 239-254.
- [12] J.-P. Pérez, *Optique géométrique et ondulatoire*, 4<sup>e</sup> éd., Masson, Paris, 1994.
- [13] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics – Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, 6<sup>e</sup> éd., Pergamon Press, Oxford, 1980.
- [14] J. H. Lambert, *Les propriétés remarquables de la route de la lumière*, H. Scheurleer F. Z. & Compagnie, La Haye, 1758.
- [15] H. Faye, *Leçons de cosmographie – rédigées d'après les programmes officiels*, Hachette, Paris, 1852.
- [16] A. Danjon, *Astronomie générale – Astronomie sphérique et éléments de mécanique céleste*, 2<sup>e</sup> éd., Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1986.
- [17] L. K. Kristensen, « Astronomical refraction and airmass », *Astron. Nachr.* **319** (1998), p. 193-198.
- [18] B. Oriani, « De refractionibus astronomicis », in *Ephemerides astronomicae Anni Intercalaris 1788*, Joseph Galeatium, Milan, 1787, p. 164-277.
- [19] B. Oriani, « De refractionibus astronomicis », in *Opuscula Astronomica ex Ephemeridibus Mediolanensibus ad annos 1788 & 1789 excerpta*, Joseph Galeatium, Milan, 1787, p. 44-107.
- [20] F. Hauksbee, *Physico-Mechanical Experiments on Various Subjects*, R. Brugis, Londres, 1709.
- [21] J. H. Gladstone, T. P. Dale, « Researches on the refraction, dispersion, and sensitiveness of liquids », *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **153** (1863), p. 317-343.
- [22] H. A. Lorentz, « Concerning the relation between the velocity of propagation of light and the density and composition of media », *Verh. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam* **18** (1878), p. 1-119, in *Collected papers*, t. 2, Nijhoff, La Haye, 1936.
- [23] L. Dettwiller, « Le théorème de Biot et le changement de variable de Biot–Auer–Standish : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 483-501.
- [24] A. T. Young, « The Cassini Model's Problem at the Horizon », 2013, [https://aty.sdsu.edu/explain/atmos\\_refr/models/Cass\\_hor.html](https://aty.sdsu.edu/explain/atmos_refr/models/Cass_hor.html) (Page consultée le 9 janvier 2022).
- [25] J.-B. Biot, « Sur les réfractions astronomiques », *Additions à la Connaissance des Temps* **1839** (1836), p. 3-114.
- [26] A. Bemporad, « La teoria della refrazione astronomica direttamente fondata sui risultati della fisica dell'atmosfera », in *Atti della Accademia gioenia di scienze naturali in Catania*, ser. 5, vol. 3, mem. V, C. Galàtola, Catane, 1910.
- [27] P. Bouguer, *De la Méthode d'Observer Exactly sur Mer la Hauteur des Astres*, Claude Jombert, Paris, 1729.
- [28] P. S. Laplace, *Traité de Mécanique Céleste*, t. 4, J. B. M. Duprat, Paris, 1805.
- [29] N. Bowditch, *Mécanique Céleste. By the Marquis de La Place, translated, with a commentary*, vol. VI, Little and Brown, Boston, 1839.
- [30] R. Radau, « Recherches sur la théorie des réfractions astronomiques », *Ann. l'Observatoire Paris* **16** (1882), p. B.1-B.114.
- [31] L. Dettwiller, « Les développements de Radau et leur divergence : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 527-536.
- [32] J. Ivory, « On the astronomical refractions », *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **113** (1823), p. 409-495.
- [33] S. Newcomb, *A Compendium of Spherical Astronomy*, Macmillan, New York, 1906.
- [34] E. W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, 2<sup>e</sup> éd., Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [35] L. H. Auer, E. M. Standish, *Astronomical Refraction: Computational Method for all Zenith Angles*, Yale University Astronomy Department, New Haven, 1979.
- [36] F. Dobe, *Astigmatismus bei der astronomischen Strahlenbrechung*, C. Schulze & Co., Gräfenhainichen, 1911.
- [37] L. Dettwiller, « L'invariant de Bouguer et ses conséquences : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 415-452.

- [38] L. Dettwiller, « La discussion par Kummer d'une quadrature sur la réfraction astronomique : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 503-525.
- [39] J. D. Everett, « On the optics of mirage », *Philos. Mag.* **45** (1873), p. 161-172.
- [40] R. Emden, « Beiträge zur Thermodynamik der Atmosphäre. 1. Mitteilung : Über polytrophe Atmosphären », *Met. Zs.* **33** (1916), p. 351-360.
- [41] A. Wegener, « Elementare Theorie der atmosphärischen Spiegelungen », *Ann. Phys.* **57** (1918), p. 203-230.
- [42] R. D. Sampson, E. P. Lozowski, A. E. Peterson, « Comparison of modelled and observed astronomical refraction of the setting Sun », *Appl. Opt.* **42** (2003), p. 342-353.
- [43] M. E. Tschudin, « Refraction near the horizon – An empirical approach. Part 2: variability of astronomical refraction at low positive altitude (LPAAR) », *Observatory* **139** (2019), p. 29-68.
- [44] W. H. Lehn, « Exact temperature profile for the *hillingar* mirage », *Am. J. Phys.* **69** (2001), p. 598-600.
- [45] A. T. Young, « Understanding astronomical refraction », *Observatory* **126** (2006), p. 82-115.
- [46] S. N. Kivalov, A. T. Young, « Horizontal magnification of finite-sized celestial objects », *Appl. Opt.* **49** (2010), p. 2720-2727.
- [47] J.-B. Biot, « Recherches sur les réfractions extraordinaires qui ont lieu près de l'horizon », in *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France, Année 1809*, Garnery, Paris, 1810, p. 1-266.
- [48] E. Sang, « On the impossibility of inverted images in the air », *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **12** (1884), p. 129-136.
- [49] R. Meyer, « Atmosphärische Strahlenbrechung », in *Handbuch der Geophysik : Physik der Atmosphäre I* (F. Linke, F. Möller, édés.), vol. 8, Gebr. Borntraeger, Berlin, 1942, article 13, p. 769-821.
- [50] A. B. Fraser, « The Green Flash and clear air turbulence », *Atmosphere* **13** (1975), p. 1-10.
- [51] R. White, « A new theory of the green flash », *J. Meteorol.* **4** (1979), p. 270-277.
- [52] V. Arnold, *Équations différentielles ordinaires*, 4<sup>e</sup> éd., Mir, Moscou, 1988.
- [53] G. Le Gentil, « Extrait d'un mémoire sur des observations astronomiques faites sur les réfractions, en 1786, 1787 et 1788 », *Mém. Acad. Roy. Sci. année 1789* (1793), p. 224-236.
- [54] G. Le Gentil, *Voyage dans les mers de l'Inde*, vol. 1, Impr. royale, Paris, 1779.
- [55] L. Euler, « De la réfraction de la lumière en passant par l'atmosphère selon les divers degrés tant de la chaleur que de l'élasticité de l'air », *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, Année MDCCLIV* **10** (1756), p. 131-172.
- [56] A. T. Young, « Inferior mirages: an improved model », *Appl. Opt.* **54** (2015), p. B170-B176.
- [57] F. Mignard, V. Brumberg, « Corrections pour la réduction des observations optiques », in *Introduction aux éphémérides et phénomènes astronomiques – Supplément explicatif à la Connaissance des Temps* (J. Berthier, P. Descamps, F. Mignard, édés.), IMCCE / EDP Sciences, Paris, 2021, p. 597-643.
- [58] P. Bouguer, *Essai d'Optique sur la Gradation de la Lumière*, Claude Jombert, Paris, 1729.
- [59] Í. Rapp-Arrará, J. M. Domingo-Santos, « Extinction, refraction, and delay in the atmosphere », *J. Geophys. Res.* **113** (2008), article n° D20116.
- [60] E. Schoenberg, « Theoretische Photometrie », in *Handbuch der Astrophysik* (G. Eberhard, A. Kohlschütter, H. Ludendorff, édés.), vol. II/1, Springer, Berlin, 1929.
- [61] A. T. Young, « Air mass and refraction », *Appl. Opt.* **33** (1994), p. 1108-1110.
- [62] J. H. Lambert, *Photometria, sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae*, Eberhard Klett, Augsburg, 1760.
- [63] J. D. Forbes, « On the transparency of the atmosphere and the law of extinction of the solar rays in passing through it », *Phil. Trans.* **132** (1842), p. 225-273.
- [64] A. Bemporad, « Zur Theorie der Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre », *Mitt. Grossherzoglich. Sternwarte, Heidelberg* (1904), n° 4, p. 1-78.
- [65] A. T. Young, « Observational technique and data reduction », in *Methods of Experimental Physics, vol. 12. Astrophysics, Part A: Optical and Infrared* (N. Carleton, éd.), Academic Press, New York, 1974, p. 123-192.
- [66] F. Link, « Théorie photométrique des éclipses de Lune », *Bull. Astron.* **8** (1933), p. 77-108.
- [67] F. Link, *Eclipse Phenomena in Astronomy*, Springer, New York, 1969.
- [68] L. Dettwiller, « La photométrie des éclipses de Lune, vue par František Link : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 537-555.
- [69] P. Bouguer, « Second mémoire sur les réfractions astronomiques, observées dans la Zone Torride; avec diverses remarques sur la manière d'en construire les Tables », *Mém. Acad. Roy. Sci. année 1749* (1753), p. 75-112.
- [70] T. von Oppolzer, « Vorläufige Mittheilung über eine neue Refractionsformel », *Astron. Nachr.* **89** (1877), p. 365-368.
- [71] C. Kramp, *Analyse des Réfractions Astronomiques et Terrestres*, Dannbach, Strasbourg, an VII — et Schwikkert, Leipzig, 1799.
- [72] J. Brinkley, « A method of computing astronomical refractions for objects near the horizon », *Trans. Roy. Irish Acad.* **13** (1818), p. 165-173.
- [73] J. Ivory, « On Mayer's formula for the astronomical refraction », *Philos. Mag.* **58** (1821), p. 341-347.
- [74] National Imaging and Mapping Agency, *The American Practical Navigator – An Epitome of Navigation – Originally by N. Bowditch – 2002 Bicentennial edition*, National Imaging and Mapping Agency, Bethesda, 2002.

- [75] B. Sicardy, « Study of atmospheres in the solar system, from stellar occultation or planetary transit », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 213-241.
- [76] Y. Le Grand, *Optique physiologique, t. 2, Lumière et couleurs*, 2<sup>e</sup> éd., Masson, Paris, 1972.
- [77] R. C. Stone, « The effect of differential color refraction on declinations determined in meridian circle programs », *Astron. Astrophys.* **138** (1984), p. 275-284.
- [78] « Sur la mesure du diamètre des plus grandes planètes », *Hist. Acad. Roy. Sci. année 1748* (1752), p. 87-94.
- [79] P. Bouguer, « De la mesure des diamètres des plus grandes planètes : Description d'un nouvel Instrument qu'on peut nommer Héliomètre, propre à les déterminer; & Observations sur le Soleil », *Mém. Acad. Roy. Sci. année 1748* (1752), p. 11-34.
- [80] G. Dietze, « Die Sichtbarkeit des "grünen Strahls" », *Zeitschr. Meteorol.* **9** (1955), p. 169-178.
- [81] Lord Kelvin, « Blue ray of sunrise over Mont Blanc », *Nature* **60** (1899), p. 411.
- [82] A. T. Young, « Green flashes and mirages », *Opt. Photon. News* **10** (1999), p. 31-37.
- [83] P. G. Maggi, « Sopra alcune apparenze del Sole presso all'orizzonte », *Atti delle Adunanze dell'I. R. Istituto Veneto Sci. Lett. Arti* **3** (1852), p. 186-189.
- [84] W. Groff, « La plus ancienne observation d'un phénomène naturel ou astronomique », *Bull. Inst. Égypt.* **4** (1893), p. 149-156.
- [85] A. C. Ranyard, « The blue ray [30424] », *English Mechanic and World of Science* **50** (1889), p. 116.
- [86] T. A. Banakhevich, « Tri eskiza po teorii refraktsii », *Ucheniya Zapiski [Kazan]* **82** (1915), p. 1-27.
- [87] F. Arago, « Sur les pouvoirs dispersifs », in *Œuvres complètes* (J.-A. Barral, éd.), t. 11, vol. 2, Gide, Paris, 1859, p. 733-748.
- [88] S. N. Kivalov, « Improved ray tracing air mass numbers model », *Appl. Opt.* **46** (2007), p. 7091-7098.
- [89] R. Couty, J. Ezra, *Analyse*, t. 2, 4<sup>e</sup> éd., A. Colin, Paris, 1976.
- [90] A. T. Young, « Relations among atmospheric structure, refraction, and extinction », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 179-212.
- [91] F. Mignard, « Images du Soleil et de la Lune à l'horizon, depuis le sol ou la Station spatiale internationale », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 391-414.



---

Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

# Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre

## *Phenomena of terrestrial atmospheric refraction*

Luc Dettwiller<sup>® a</sup>

<sup>a</sup> Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School,  
Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France  
*Courriel*: [dettwiller.luc@gmail.com](mailto:dettwiller.luc@gmail.com)

**Résumé.** Presque sans étude analytique, on propose une présentation ordonnée et illustrée des effets de réfraction *atmosphérique* (ou *terrestre*), i.e. affectant — par opposition à la réfraction *astronomique* — la vision de la forme et la position apparentes d'objets situés dans l'atmosphère. La classification adoptée (non exhaustive car il reste des cas atypiques mystérieux) repose surtout sur la forme des courbes de transfert et sur les valeurs du coefficient de réfraction  $\kappa$ . On commence par les mirages (i.e. les cas où il se forme une image renversée), dont on distingue quatre grands types : inférieur, supérieur, *Nachspiegelung* et pseudo-mirage, mirage multiple. On continue par le cas spécial des *Fata Morgana* : leur forme archétypale est un cas de transition dont la cause physique reste imparfaitement comprise, et leurs formes réelles sont plus complexes et variées, quoique souvent rattachées aux mirages supérieurs. Restent enfin les cas sans image renversée mais inhabituels : compression / étirement, disparition, surgissement, effet *hillingar* — i.e. surgissement fort ( $\kappa > 1$ ) donnant l'illusion qu'une surface horizontale (la mer par ex.) est concave.

**Abstract.** This article presents, almost without any analytical analysis, an orderly and illustrated presentation of the *atmospheric*—or *terrestrial*—refraction effects, i.e., affecting the vision of the apparent shape and position of objects located in the atmosphere, contrary to the case of *astronomical* refraction. The adopted classification, which is non-exhaustive as there are still mysterious atypical cases, is mostly based on the shape of the transfer curves and on the value of the refraction coefficient  $\kappa$ . Beginning with mirages, i.e. when an inverted image is formed, four main types are identified: inferior, superior, *Nachspiegelung* and mock-mirage, multiple mirage. Then comes the special case of *Fata Morgana*: their archetypal form is a transition case whose physical cause remains imperfectly understood, and their real forms are more complex and varied, although often linked to superior mirages. Finally remain the unusual cases without inverted image: stooping/stretching, sinking, looming, and finally *hillingar* effect—corresponding to a strong looming ( $\kappa > 1$ ) and giving the illusion that a flat horizontal surface, e.g., the sea, is concave.

**Mots-clés.** Mirage inférieur, Pseudo-mirage, Mirage supérieur, *Fata Morgana*, Étirement, Surgissement, Effet *hillingar*.

**Keywords.** Inferior mirage, Mock mirage, Superior mirage, *Fata Morgana*, Stretching, Looming, *Hillingar* effect.

*Published online: 21 February 2023, Issue date: 11 August 2023*

« Pour bien discerner le mirage, il faut non-seulement une vue longue et étendue, mais savoir observer des détails, et avoir l'habitude de l'horizon. Aux voyageurs, aux marins, aux météorologistes, cet exercice est devenu familier; le reste des hommes s'en doute à peine; vous leur montrerez le mirage et ils ne le verront pas, ou ils ne verront qu'un peu de brouillard et de fumée à l'extrême horizon. »

A. Bravais, « Notice sur le mirage », *Annuaire Météorologique de la France pour 1852* 4 (1853), p. 227-280.

## 1. Introduction

Dès l'antiquité, puis le Moyen-Âge, des précurseurs ont conjecturé l'existence de cas de réfraction dans l'atmosphère. Le livre d'Aristote, *Météorologiques*, semble être le premier document mentionnant un effet de réfraction atmosphérique (ou « réfraction terrestre » selon une appellation ancienne) : le surgissement et l'étirement vertical à l'horizon (voir les sous-paragraphes 4.2 et 4.3).

Dans cet article, nous nous limitons au cas où la réfraction considérée n'a pas lieu sur des interfaces : on omet la présence possible de gouttes d'eau (qui peuvent produire des arcs-en-ciel, des couronnes, des gloires) ainsi que de cristaux de glace (qui peuvent donner des halos). On raisonne donc avec une portion d'atmosphère monophasée, quoiqu'inhomogène à cause de la non-uniformité de la température absolue  $T$  et de la pression  $P$ ; elle forme un milieu continu d'indice  $n$ , où les rayons lumineux sont généralement courbes, à cause d'un effet de réfraction continue. Malgré l'absence de dioptries, nous verrons que l'on peut quand même avoir une quasi-réflexion totale (au sens d'Everett [1]), à distinguer d'une réflexion simple qui peut exister aussi en milieu continu, en un sens que nous spécifierons au sous-paragraphe 2.1.

Considérons une atmosphère supposée à symétrie localement sphérique de centre  $C$  — dans des études fines on tient compte du fait que ce n'est pas celui de la Terre, mais le centre de courbure de la section du géoïde terrestre par le plan moyen des rayons considérés (ceux-ci n'étant pas exactement des courbes planes, mais des courbes gauches, d'où une complication supplémentaire étudiée par Schiele dans sa thèse de 1935 [2]). Un paramètre utile est le coefficient de réfraction  $\kappa(r)$  à une distance  $r$  de  $C$  : il s'agit, par définition, du quotient de la courbure des rayons horizontaux (comptée positivement vers le bas) à cette distance, par  $1/r$ . Au sous-paragraphe 7.1 de notre exposé des « propriétés remarquables de la réfraction astronomique [...] » [3] dans ce numéro spécial, on montre, moyennant quelques approximations classiques, que

$$\kappa \cong (n-1)r \left( \frac{\mu g}{P} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \right) \quad (1)$$

où  $\mu$  désigne la masse volumique de l'air, et  $g$  la norme du champ de pesanteur. On note  $\kappa_S$  la valeur de  $\kappa$  au niveau de l'observateur  $S$ , qui est à la distance  $r_S$  de  $C$ . Sur Terre, avec  $S$  à 3,1 °C, 1 atm, et pour une longueur d'onde de 588 nm, il ne varie plus qu'avec le gradient vertical  $(dT/dr)_S$  de température en  $S$  :

$$\kappa_S \cong \frac{34 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1} + (dT/dr)_S}{150 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}}; \quad (2)$$

seul le dénominateur de cette expression dépend de la longueur d'onde ou de la température absolue  $T_S$  ou la pression en  $P_S$  en  $S$  — il est quasi proportionnel à  $T_S^2/P_S$  (voir le sous-paragraphe 7.1.4 de [3]). Dans l'atmosphère standard US1976 au niveau de la mer — donc à 15 °C avec  $(dT/dr)_S = -6,5 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1} < 0$  — on a  $\kappa_S \cong 0,17 \cong 1/5,9$ .

Avant d'entrer dans la classification des phénomènes au cœur de cet article, il est important de rappeler que l'utilisation des vocables « image droite » ou « image renversée », classique en optique atmosphérique, procède d'un double abus de langage.

Il commence par le fait qu'en réalité, il ne se forme que des pseudo-images; le préfixe « pseudo » rappelle qu'il n'y a généralement pas de stigmatisme approché (ni rigoureux) en réfraction atmosphérique, mais plutôt un astigmatisme fondamental qui se remarque aisément si on utilise une lunette ou un téléobjectif. Il est discuté par Wilhelm Hillers en 1914 [4, p. 42–44], mais déjà mentionné par Joseph David Everett en 1874 [5, p. 52]; notons que le terme « astigmatisme » n'est apparu en français qu'à partir de 1877, emprunté à l'anglais *astigmatism* (datant de 1817). Les équations différentielles régissant les rayons lumineux dans un milieu continu quelconque (et non plus seulement dans un milieu stratifié) sont données, dans le but d'étudier ultérieurement les mirages, par Joseph Diez Gergonne dans le premier article de sa paire de 1829 [6, 7]. L'astigmatisme dû à la réfraction atmosphérique passe inaperçu dans l'observation des pseudo-images à l'œil nu, à cause de la petitesse de sa pupille. Dans cette situation en effet, les rayons lumineux formant la pseudo-image simple  $A'$  (au sens de non-multiple) d'un point éloigné  $A$  ont leurs tangentes de directions assez voisines entre elles, en leurs points d'incidence respectifs  $K$  sur la cornée d'un œil de l'observateur; cela permet de considérer les focales de Sturm du faisceau de ces tangentes aux rayons en leurs points  $K$ , et de définir une position approximative pour  $A'$  : à mi-distance de ces focales. Comme les rayons ne sont pas rectilignes dans l'air à cause de la non-uniformité de la distribution de son indice de réfraction  $n$ , on ne peut voir que des pseudo-images, jamais les objets directement.

Ensuite, seule nous intéresse dans la pratique la position *apparente* de  $A'$ , i.e. la *direction* moyenne des tangentes considérées ci-dessus. Il en est de même dans la situation banale où un observateur emmétrope regarde avec un œil, au travers d'une loupe, une page d'écriture tenue un peu au-delà du plan focal objet de cette loupe : l'image de la page est réelle renversée, derrière l'œil qui ne peut donc accommoder sur elle; celui-ci ne voit qu'une « image apparente », plus ou moins floue, mais droite devant lui! Ce sont de telles « images » que l'on considère tout au long de cette étude.

Dans cet article, on restreint la discussion aux cas de réfraction atmosphérique, i.e. ceux dus à la courbure des rayons lumineux allant d'un objet terrestre à  $S$ . On exclut donc les cas de réfraction astronomique, où les rayons considérés vont d'un objet extra-atmosphérique à  $S$ . On l'étudie quantitativement grâce à la courbe de transfert, i.e. le graphe de la fonction de transfert qui donne, à une distance  $D$  de l'observateur et pour une élévation  $E$  de celui-ci, l'altitude  $h$  à laquelle passe un rayon correspondant à la hauteur apparente  $\psi'$  en  $S$  — i.e. l'angle de ce rayon avec l'horizontale au niveau d'un œil de l'observateur. Dans l'étude de la réfraction astronomique au contraire, la fonction de transfert donne la hauteur (angulaire) vraie  $\psi$  d'un point objet extra-atmosphérique  $A$  (considéré comme étant à l'infini) en fonction de sa hauteur apparente  $\psi'$  (i.e. celle de sa pseudo-image apparente). La distinction pratique entre la réfraction astronomique et la réfraction atmosphérique tient à cela : pour la première, on considère la fonction de transfert  $\psi' \mapsto \psi$ , qui est paramétrée par la longueur d'onde et se prête à de beaux théorèmes dans le cas d'une atmosphère à symétrie sphérique (voir le paragraphe 7 de [3]); pour la seconde, on considère la fonction de transfert  $\psi' \mapsto h$ , à laquelle on se restreint dorénavant — elle est encore paramétrée par la longueur d'onde (d'où un léger chromatisme parfois observé — voir le paragraphe 3), mais aussi par  $D$  qui joue un rôle important, car c'est un degré de liberté supplémentaire par rapport à la réfraction astronomique, et ses variations peuvent modifier beaucoup la fonction de transfert. Si  $D$  est assez grand, l'objet est au-delà de l'horizon, alors la borne inférieure du domaine de définition de la fonction de transfert est l'opposé de la dépression  $\delta$  de l'horizon marin (par exemple), donnée par

$$\delta \cong \sqrt{(1 - \langle \kappa \rangle) \frac{2E}{r_S}} \quad (3)$$

où  $\langle \kappa \rangle$  désigne la moyenne spatiale de  $\kappa$  entre le niveau de la mer (par ex.) et celui de l'observateur — nous démontrons cette formule au sous-paragraphe 4.2 de [8] dans ce numéro spécial.

Pour  $\psi'$  petit, dans le cas standard, le coefficient de réfraction sur tout le domaine utile des rayons lumineux considérés est quasi uniformément  $\kappa_S \cong 1/5,9 \neq 0$ . Alors on les approxime par des arcs de cercle, et des théorèmes de géométrie simples permettent de montrer divers résultats pratiques, disant : d'une part, que la distance de l'horizon est

$$L \cong \sqrt{2Er_a} \quad (4)$$

où  $1/r_a$  est la courbure apparente d'un méridien (passant par  $S$ ) par rapport à un rayon lumineux passant horizontalement par  $S$  (et parallèlement au méridien), et

$$\delta \cong \sqrt{1 - \kappa_S} \sqrt{2E/r_S} = \sqrt{2E/r_a} = L/r_a; \quad (5)$$

d'autre part, que pour  $D \ll r_S$ , la courbe de transfert est quasi rectiligne, d'équation

$$h \cong D \left( \psi' + \frac{D}{2r_a} \right) + E. \quad (6)$$

Sa pente est évidemment  $D/1 \text{ rad} \cong 2,91 \times 10^{-4} D/1'$  et, sans approximations supplémentaires, son ordonnée à l'origine s'écrit

$$E + \frac{D^2}{2r_a} = \frac{L^2 + D^2}{2r_a} = \frac{r_a}{2} \left( \delta^2 + \frac{D^2}{r_a^2} \right) \quad (7)$$

(dont la variation quadratique avec  $D$  est simplement due à la différence de courbure entre un méridien passant par  $S$  et les rayons quasi horizontaux). On voit aussi que le discriminant du trinôme en  $D$  du second membre de l'équation (6) est positif si et seulement si  $|\psi'| > \delta$ . Dans le cas standard il y a pour tout objet terrestre visible une image unique, standard (dorénavant nous omettons volontiers d'ajouter « pseudo » et « apparente »), quasi identique à l'objet modulo la translation verticale de  $\kappa_S[D^2/(2r_S)]$  vers le haut — voir aussi le théorème XXX de Lambert (présenté au paragraphe 2 de l'article [9] dans ce numéro spécial).

Nous classerons et nommerons les effets d'optique atmosphérique surtout d'après les modifications qu'ils apportent à la courbe de transfert, par rapport à la courbe standard; tous ne seront pas appelés mirages ! Il sera utile de réserver cette appellation à certains cas précis : suivant l'usage instauré par Pernter et Exner dans leur traité d'optique météorologique [10], puis par Humphreys [11], seulement les cas où il existe au moins une portion décroissante dans la courbe de transfert — ce qui correspond à une image renversée. Ces situations-là occupent la première partie de notre classification; selon la position et le nombre des portions décroissantes de la courbe de transfert, on distingue au moins quatre types de mirages, et il y toujours plusieurs images. La deuxième partie de notre classification est consacrée aux cas spéciaux que sont les *Fata Morgana*, *Fata Brumosa* et l'effet *hafgerdingar* : nous introduisons la « *Fata Morgana* archétypale » (faisant la charnière entre les configurations donnant une fonction de transfert non monotone et celles donnant une fonction monotone — donc croissante compte tenu de son comportement aux grandes valeurs de  $\psi'$  dans tous les cas); puis nous décrivons les observations pratiques et les variantes susnommées, qui la plupart du temps se classent encore parmi les cas de mirages supérieurs. La dernière partie traite des effets qui peuvent se produire avec une fonction de transfert monotone sans singularité, donnant donc une image unique, mais notablement différente de l'image standard. Précisons que cette classification ne saurait être exhaustive : la compréhension actuelle des phénomènes de réfraction atmosphérique reste lacunaire, des cas plus ou moins limites (comme certains qui ressemblent à des *Fata Morgana*, par exemple) échappent à l'analyse théorique précise, et des observations déroutantes témoignent de cas mystérieux restant non classifiés et inexpliqués — notamment certaines photos stupéfiantes de mirages au-dessus du lac Biwa [12].

## 2. Mirages

Les phénomènes de mirage sont donc les cas où il se forme usuellement de multiples images d'un objet, comportant d'habitude une image droite, plus une ou plusieurs autres images dont l'une au moins est renversée, par définition — conformément à l'étymologie du mot *mirage*, dérivé du verbe *mirer* au sens de refléter (1552), et dont la première occurrence remonte à 1753 [13, p. 136]. Une des premières descriptions écrites des mirages ainsi nommés fait clairement référence à cette étymologie : elle est due à Guillaume Le Gentil, qui en 1789 notait que « Les habitants des bords des côtes de Basse-Normandie, presque tous marins, appellent ces apparences *se mirer*. Ils disent qu'une isle *se mire*, qu'un rocher *se mire* » [14]. Mais, par ailleurs, Le Gentil niait la réalité de l'effet *Novaya Zemlya* — un cas très particulier de mirage (voir l'article [15] dans ce numéro spécial) — en l'assimilant à « l'histoire de la dent d'or, ou des levers et couchers échangés du soleil dans Hérodote. » [16, p. 692]

On distingue diverses catégories de mirages. La désignation actuelle des deux premières semble due à Auguste Bravais en 1853 [17], mais la distinction entre elles est déjà présente chez William Kelly en 1832 [18] et encore plus tôt chez William Hyde Wollaston, en 1800 [19].

### 2.1. *Mirage inférieur*

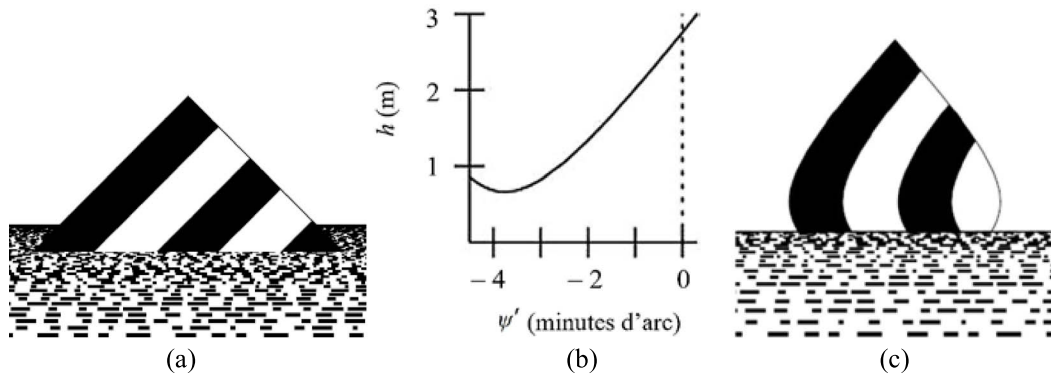
Le phénomène de mirage inférieur est celui où il n'y a que deux images dont l'une, renversée (car il y a *mirage*), est bornée inférieurement par l'horizon sensible et se trouve juste *en dessous* de l'image droite — d'où l'appellation de mirage *inférieur*. La courbe de transfert commence donc par une portion décroissante suivie d'une portion croissante à sa droite — voir Figure 1. Usuellement la dépression de l'horizon est accrue, et la courbe de transfert du cas standard se trouve sous celle du cas de mirage inférieur, donc tout point de l'image droite pour ce dernier cas est *en-dessous* du point correspondant *de l'image standard* — ce qui renforce l'appellation de mirage *inférieur*.

Un tel mirage se produit typiquement (mais pas uniquement — voir la Fig. 11 de l'article [15] de ce numéro spécial, discutée dans notre sous-paragraphe 2.2) quand l'objet se trouve placé juste au-dessus d'une couche d'air chauffée par le bas. Par exemple, sur la laisse de basse mer à Dunkerque le 22 mars 1809, Jean-Baptiste Biot et Claude-Louis Mathieu ont relevé les températures suivantes : 11,0 °C sur le sable; 9,5 °C à 3 cm au-dessus; 7,0 °C à 15 cm; 6,3 °C à 65 cm; 6,1 °C à 93 cm [20, p. 31].

On voit que  $-dT/dr$  y dépasse non seulement la valeur troposphérique standard  $6,5 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$ , mais aussi la limite de stabilité adiabatique  $9,8 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$ , donc cette couche est instable (ce qui explique l'aspect dentelé de la limite inférieure du mirage — voir la Figure 3 — voire même parfois morcelé, comme sur sa première image) et ceci jusqu'à la hauteur d'Obukhov en théorie [21]. La forte décroissance de  $-dT/dr$  entre le sol (ou la mer) et  $S$ , produisant le mirage inférieur, diminue nettement  $\langle \kappa \rangle$  (qui peut devenir négatif) et donc augmente  $\delta$  d'après l'expression (3); cela signifie que, dans cette situation, le domaine angulaire d'observation d'objets visibles au-delà de l'horizon est étendu vers le bas, ce qui crée de la place pour en loger une image renversée sous l'image droite — l'horizon sensible est « descendu ».

Enfin, dans le mètre de hauteur au-dessus du sable où Biot et Mathieu ont relevé les températures, on note que  $-dT/dr > 34 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$  et donc  $\kappa_S < 0$  (voir le paragraphe 1) : la concavité des rayons lumineux est vers le haut dans cette couche d'air,  $dn/dr$  n'est plus négatif comme dans la plupart des cas, mais positif. En soi, cela ne suffit pas à former une image renversée du ciel : si  $-dT/dr$  était uniforme, sa forte valeur positive ne ferait que décaler nettement vers le bas l'horizon sensible. Pour Biot et Mathieu la valeur moyenne de  $-dT/dr$  entre 3 et 15 cm au-dessus du sable est  $21 \times 10^3 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$ , donc (à la pression de 1 atm) celle de  $\kappa$  est voisine de  $-134$  et celle de

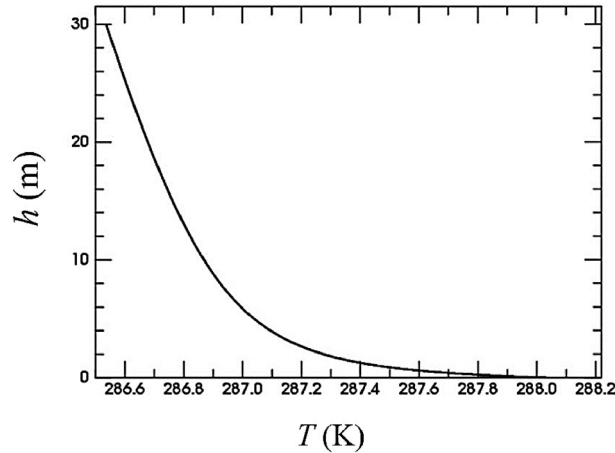




**FIGURE 1.** Simulations numériques, avec un objet évoquant une île haute de 200 m. (a) Pour l’atmosphère standard, image de l’objet à  $D = 2$  km, vue de  $E = 1,5$  m; l’objet est donc en deçà de l’horizon. (b) Courbe de transfert pour un observateur de même élévation  $E = 1,5$  m, au-dessus du niveau de la mer où s’étend le profil thermique de la Figure 2, et avec un objet à  $D = 3$  km donc au-delà de l’horizon sensible (d’où la borne inférieure  $-\delta \cong -5'$  pour le domaine de définition, nettement plus basse que la valeur standard  $-2'$  pour la même élévation — voir la formule (5)). (c) Image de l’objet correspondant aux conditions de cette courbe de transfert. Celui-ci étant au-delà de l’horizon sensible, l’image de sa base (d’après le nombre de bandes noires visibles) est absente. Entre l’horizon sensible et l’unique image droite se trouve l’image renversée (ce qui est caractéristique du mirage inférieur), celles-ci se joignant sur une horizontale (correspondant à la largeur maximale de l’image) qui est leur « ligne de partage » [17, p. 236–237], soit ici la limite de la zone invisible (la base de l’objet cachée par le mirage), et où le grossissement vertical local est infini — d’où les tangentes verticales aux bords gauche et droit de l’image. © Andrew T. Young, <https://aty.sdsu.edu/mirages/mirsims/mirsimintro.html> et <https://aty.sdsu.edu/mirages/mirsims/inf-mir/inf-mir.html>

la courbure des rayons lumineux quasi horizontaux vaut environ  $-(48 \text{ km})^{-1}$  dans cette couche à fort gradient d’indice; or l’angle au centre d’un arc de cercle de 48 km de rayon, dont la flèche vaut  $(15 - 3) \text{ cm} = 12 \text{ cm}$ , est  $\alpha \cong 15'$  (cf. Figure 4), ce qui permet de voir pour un même point objet deux images angulairement séparées, au maximum, de  $\beta \cong \alpha$  — ce qui est très visible à l’œil nu !

Quand  $\psi'$  négatif croît, survient (vers  $-4,5'$  sur la Figure 5) le rayon lumineux critique qui marque la transition entre les rayons ne subissant pas et ceux subissant la quasi-réflexion totale au sens d’Everett [1, p. 171] — pour  $\psi' > 0$  ils ne la subissent pas, dans le présent sous-paragraphe. De manière générale, on dit qu’un rayon courbe subit une quasi-réflexion en  $I$  s’il y est tangent à une surface équi-indice sans la traverser; et lorsqu’il se situe du côté de cette surface où l’indice est le plus (resp. le moins) grand, on dit que sa quasi-réflexion est totale (resp. ordinaire). Dans un milieu à symétrie sphérique, quand  $dn/dr < 0$  la quasi-réflexion *totale* correspond à certains cas où la valeur de  $\kappa$  en  $I$  est  $\kappa_I = 1$ , et à tous les cas où  $\kappa_I > 1$ ; quand  $dn/dr > 0$ , i.e.  $\kappa < 0$ , elle est systématique aux points de tangence avec une surface équi-indice. Cette terminologie a été initiée par Everett en 1873 [1], malheureusement sans succès; mais il nous paraît intéressant de la réhabiliter pour unifier la compréhension des phénomènes optiques en milieu continu et en milieu discontinu. Lorsqu’un rayon est courbe et *traverse* une surface équi-indice, la courbure du rayon est un phénomène de *réfraction*. Cette distinction n’a d’importance que si on tient à donner un sens précis à ces mots « réflexion » et « réfraction ». En présence d’un dioptre, la



**FIGURE 2.** Exemple de profil thermique théorique des trente mètres d'atmosphère au-dessus de la mer chauffée, tel que le prévoit la météorologie des couches limites. Au sommet il est quasi rectiligne, de pente très proche de celle dictée par le gradient adiabatique ( $-9,8$  K/km); plus on descend vers la surface, plus le gradient thermique est important, et c'est ce changement de gradient qui produit le mirage. © Andrew T. Young, <https://aty.sdsu.edu/explain/simulations/inf-mir/Omega.html#profile>

distinction entre ces deux phénomènes est nécessaire, puisqu'un rayon incident sur le dioptre peut se scinder. Ce n'est plus le cas en milieu continu; or ce qui importe vraiment est la forme des rayons lumineux, alors Everett dit lui-même, à la dernière page de son article : « I should perhaps say, both names [refraction and reflection] are equally inappropriate in this application » pour le cas d'un milieu continu [1, p. 172].

Notons bien que, contrairement au cas où la réflexion se produit sur un miroir ou un dioptre, le lieu ( $\Sigma_I$ ) des points  $I$  où se produit la quasi-réflexion dépend de  $S$ . De plus, l'ensemble des points anguleux  $R$  de réflexion sur un dioptre ou un miroir forme une surface ( $\Sigma_R$ ) qui peut, à la limite, être considérée comme une caustique des rayons arrivant en  $S$  et réfléchis aux points  $R$  où leur courbure est infinie. En étudiant les mirages, Biot a montré en substance que l'observateur voit une image apparente renversée d'un élément de l'objet si et seulement si le pinceau de rayons partant de cet élément et arrivant en  $S$  rencontre un nombre impair de caustiques. En présence d'un hypothétique dioptre réfléchissant qui contribuerait à la formation du mirage, ( $\Sigma_R$ ) serait une de ces caustiques [20, p. 41–63]. Mais comme la réflexion dans l'atmosphère n'existe qu'au sens d'Everett, ( $\Sigma_R$ ) n'existe pas, les points  $I$  ne sont pas anguleux, *a priori* ( $\Sigma_I$ ) n'est pas une caustique. Il faut donc bien se garder de croire *a priori* que la réflexion au sens d'Everett impliquerait la formation d'une image apparente renversée — voir la fin du présent sous-paragraphe. De plus, au sous-paragraphe 2.3, nous verrons que l'existence d'une image renversée n'implique pas celle d'une quasi-réflexion totale. Finalement, nous saurons qu'il n'y a aucun lien général entre quasi-réflexion totale et existence d'une image renversée.

Notons aussi que, au passage par une altitude très proche de celle de la frontière haute de la couche d'air chauffé, le gradient de l'indice de réfraction  $n$  change de sens, car  $dT/dr$  y passe d'un côté à l'autre de la valeur  $-34$  K  $\cdot$  km $^{-1}$  (voir le paragraphe 1), donc les rayons obliques présentent à cette altitude un point d'inflexion : leur concavité est vers le bas au-dessus (sens usuel), vers le haut au-dessous.

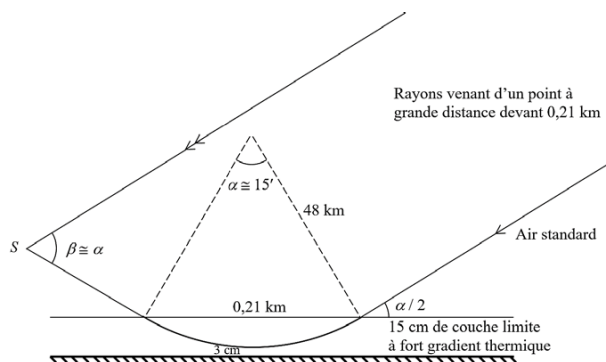
Une des premières mentions de ce type de mirage, avant l'apparition de ce mot, semble être due à Jean Picard (voir la légende de la Figure 3), quand en 1671, suite à la fondation de



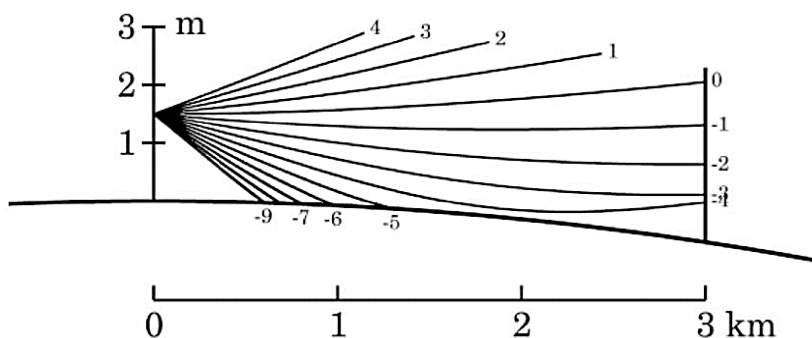
**FIGURE 3.** Mirage inférieur en Finlande (en haut © Photo : Pekka Parviainen) et en France (en bas © Photo : Thierry Tragin). « [...] la mer estoit fort unie, faisoit à nostre égard si exactement l'effet du miroir, que nous la confondions avec le Ciel. » [22, p. 8] L'élévation de l'observateur et la rotondité de la Terre font que l'image renversée est comprimée verticalement, contrairement à l'image droite.

l'Observatoire de Paris en 1667, il est allé avec son aide Etienne Villiard sur les ruines d'Uraniborg (l'ancien observatoire de Tycho Brahe) pour déterminer ses différences de coordonnées par rapport au tout nouvel observatoire de Paris [22], afin de pouvoir combiner les observations faites en ces deux lieux. Une autre mention ancienne d'un mirage inférieur remonte à l'expédition géodésique des Pères jésuites Roger Joseph Boscovich et Christopher Maire dans les états pontificaux de 1750 à 1752 [23, p. 94–96].

L'image renversée est plus ou moins comprimée verticalement dans le cas d'un mirage inférieur, mais pas partout — au niveau de la jonction avec l'image droite le grossissement vertical local est par contre infini ! Cette compression verticale est d'autant plus forte que l'observateur est élevé (au-dessus de la couche à forte variation du gradient d'indice) : cela est clairement noté par Bravais [17, p. 241], et attribué (comme Reinhard Woltman l'avait fait dès 1800 [24]) à la rotondité de la Terre; le premier calcul confirmant cette interprétation semble dater de 1874 [25]. Pour un objet oblique, la jonction de ses images droite et renversée est alors arrondie à cause de la valeur infinie du grossissement vertical local sur elle (voir la Figure 3) et de l'étirement vertical très fort en son voisinage; cela permet de distinguer le mirage de la réflexion sur une surface d'eau, qui donnerait un point anguleux ([17, p. 237], [26, p. 3–4]). Et en assimilant l'observateur à un point  $S$  émettant fictivement des rayons dans toutes les directions, on sait, avec les analyses



**FIGURE 4.** Calcul d'un ordre de grandeur de la séparation angulaire maximale entre deux images, avec des valeurs inspirées de la situation de mirage inférieure étudiée par Biot et Mathieu à Dunkerque (pour plus de lisibilité, les angles sont très exagérés et les proportions ne sont pas conservées sur le schéma). La formation d'une image renversée nécessite une variation spatiale du gradient d'indice (surtout lié ici au gradient thermique); dans ce modèle elle est concentrée à 15 cm au-dessus de la surface terrestre, mais c'est une schématisation grossière (en regard des Figures 2 et 5 notamment) : on note immédiatement que, pour  $D$  infini (cas de la réfraction astronomique) ce modèle donne à la courbe de transfert un minimum anguleux, au lieu d'un minimum stationnaire comme il se doit.



**FIGURE 5.** Diagramme des rayons lumineux (arrivant en S à  $E = 1,5$  m d'altitude dans l'œil d'un observateur) dans le cas du mirage inférieure produit par le profil thermique montré sur la Figure 2. Le trait gras vertical à droite schématise l'objet observé; le trait gras le plus bas symbolise la surface sphérique de la mer. Noter la grande différence entre l'échelle verticale et l'échelle horizontale. Les autres traits symbolisent les rayons lumineux, et à leur extrémité droite se trouve indiquée leur inclinaison  $\psi'$  (en minutes d'arc) à l'arrivée sur l'œil en S. En leur point le plus proche de la surface terrestre (quand il n'est ni sur l'objet ni en S) les rayons subissent une quasi-réflexion totale au sens d'Everett; dans le présent sous-paragraphe, le rayon critique correspond à  $\psi' = -\delta$ . La variation de courbure des rayons sur le domaine schématisé par cette figure est surtout due à la variation du gradient d'indice, et très peu à celle de l'inclinaison locale des rayons. Ceux qui correspondent à  $\psi'$  allant de  $-9'$  à  $-6'$  et de  $2'$  à  $4'$  ont une apparence quasi rectiligne sur cette figure, mais leur courbure vraie est de 2 à 30 fois plus grande que dans le cas standard, et tournée vers le haut au lieu d'être vers le bas — donc dans le cas standard leur apparence sur la figure serait quasi rectiligne pour tous. © Andrew T. Young, <https://aty.sdsu.edu/mirages/mirsims/inf-mir/inf-mir.html>

de Biot en 1810, que ce grossissement infini affecte l'intersection de l'objet avec la caustique ( $\Sigma$ ) de ces rayons fictifs [20, p. 151 ss]; on sait aussi qu'il correspond par définition à un point stationnaire (i.e. à tangente horizontale) de la courbe de transfert, qui est son minimum dans le cas du phénomène de mirage inférieur. En termes de qualités d'un système optique visuel, un point stationnaire de la courbe de transfert correspond à une puissance locale (en dioptries) infinie; mais nous n'utiliserons pas plus cette notion de puissance dans cet article.

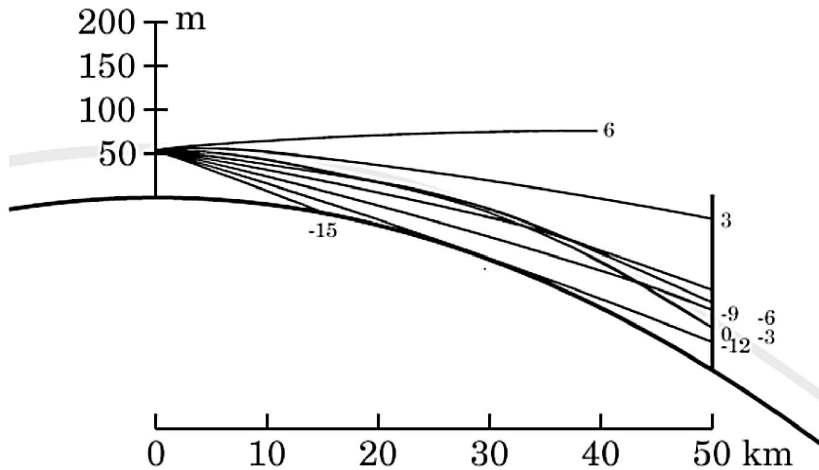
Dans certains cas, la réflexion totale au sens d'Everett peut quand même produire une image apparente droite [27], qui n'est donc pas un mirage au sens strict; cela arrive notamment quand la famille des rayons joignant S et l'objet étendu comporte deux caustiques (et non seulement celle due au passage dans la couche à fort gradient d'indice), par exemple à cause de la concavité d'une portion ensoleillée de route sur laquelle se forme cette couche provoquant la quasi-réflexion totale — tout comme la réflexion rasante sur un miroir concave peut produire ce genre de caustique pour la famille de rayons considérée ici, sans qu'ils soient courbes entre l'objet et le miroir.

## 2.2. *Mirage supérieur*

Le phénomène de mirage supérieur est celui où l'image la plus basse est droite, et où il y a une image renversée au-dessus, *due à la quasi-réflexion totale* au sens d'Everett (voir la Figure 6) à l'intérieur d'une couche (pas forcément unique) d'inversion de température (i.e. où  $dT/dr > 0$ ) dite « raide » car  $dT/dr > 116 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$  (cette valeur numérique étant celle du gradient minimum de guidage), et dans ou sous laquelle se trouve l'observateur. Le guidage dû à cette couche s'exerce sur un chenal optique, i.e. le domaine parcouru par l'ensemble de tous les rayons lumineux guidés concevables dans l'absolu — pour une définition plus formelle, voir le paragraphe 3 du document [28] lié à l'article [3], qui permet de comprendre aussi que le chenal est occupé par la couche d'inversion dans sa partie haute, mais qu'il a encore une partie supplémentaire sous la couche d'inversion, à cause de la rotondité de la Terre.

Si l'inversion de température produisant le mirage supérieur est complètement au-dessus de S, et qu'en dessous de S la distribution de température est standard, alors les valeurs de  $\langle \kappa \rangle$  et  $-\delta$  le sont aussi. Si en plus l'objet est moins loin de S que l'intersection du rayon rasant le sol, avec la couche d'inversion (la distance correspondante  $D_I$  se calculant de la même façon que la portée géographique d'un phare — voir le sous-paragraphe 4.2 de [8]), le début de la courbe de transfert à gauche est le même que dans le cas standard, avec la pente  $D > 0$  (même si  $\langle \kappa \rangle$  n'a pas sa valeur standard, mais du moment, conformément au théorème XXX de Lambert, que  $\kappa$  est quasi uniforme en dessous de S). Ce n'est pas le cas pour la portion de  $-7'$  à  $-12'$  de la Figure 7(a) :  $h(-\delta)$  et la pente positive sont légèrement inférieurs aux valeurs attendues dans le cas standard; pour cette figure l'observateur est dans la couche d'inversion raide.

Mais à droite de cette première portion légèrement non-standard de la courbe de transfert vient une portion décroissante se terminant si abruptement que dans la pratique cela pourrait être pris pour une discontinuité : voir encore la Figure 7(a), pour laquelle on dit, dans le jargon de l'optique atmosphérique, que cette portion décroissante correspond à une forme de *Nachspiegelung* — ce phénomène (discuté au sous-paragraphe 2.3) est un des cas de formation d'une image renversée sans que les rayons lumineux concernés subissent de réflexion totale [29] (même au sens d'Everett), donc il n'est pas nommé « mirage supérieur » au sens strict. Sur cette Figure 7(a), la seule portion de la courbe donnant un mirage supérieur avec les rayons concernés *subissant une quasi-réflexion totale* (donc contenus dans le chenal optique par définition, et produisant ainsi la bande de Wegener quasiment centrée sur l'horizon astronomique), est la *petite* portion décroissante à droite du pointillé vertical. Enfin, juste à droite de la bande de Wegener, il y a une portion très abruptement croissante, dont le début évoque une discontinuité qui est



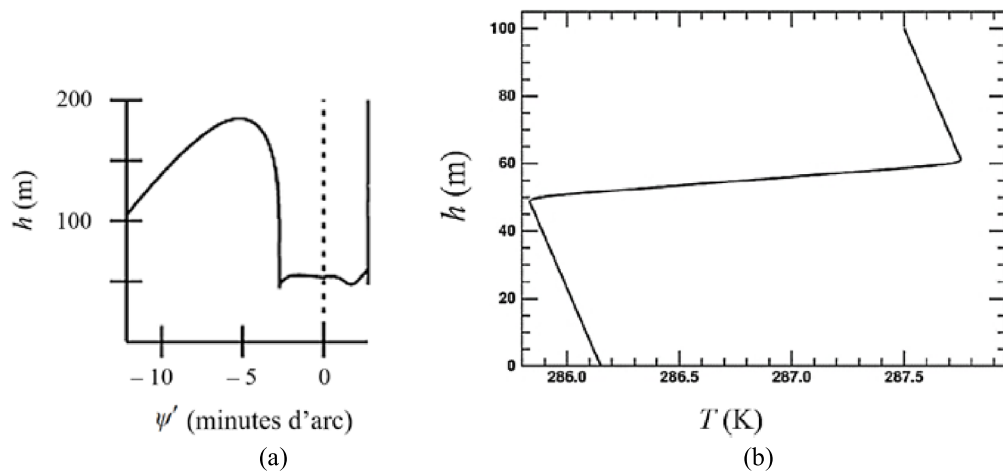
**FIGURE 6.** Diagramme des rayons lumineux (arrivant en  $S$  à 54 m d'altitude) dans le cas du mirage supérieur produit par le profil thermique montré sur la Figure 7. Le principe de ce diagramme est le même que sur la Figure 5. Le seul rayon tracé que l'on voit subir une réflexion totale (forcément dans la couche d'inversion raide représentée par une bande grisée) est celui correspondant à  $\psi' = 0'$ . Tous les rayons représentés ont dans cette couche une courbure vers le bas supérieure non seulement à la courbure standard mais aussi à  $1/r$ , et ceux correspondant à  $\psi' = -3'$ ,  $-6'$  et  $-9'$  traversent entièrement la couche de haut en bas en partant de l'objet. © Andrew T. Young, <https://aty.sdsu.edu/mirages/mirsims/sup-mir/SMDrow/SMDrow.html>

associée, tout comme la précédente, à un rayon lumineux critique — toujours au sens du sous-paragraphe 2.1, où il marque en fonction de  $\psi'$  la transition entre les rayons subissant une quasi-réflexion totale et ceux n'en subissant pas (voir aussi, juste après les Figures 9–13, l'interprétation de l'image supérieure, droite et très comprimée, du segment  $NP$ ).

Ces deux quasi-discontinuités n'existent que si  $D$  est assez grand, et il est intéressant de savoir comment la condition correspondante sur  $D$  évolue quand  $S$  passe de la frontière basse à la frontière haute du chenal dû à l'inversion correspondant à la Figure 7(b) : pour la quasi-discontinuité de droite (celle avec  $\psi' > 0$ ), cette condition nécessaire passe d'une exigence initiale ( $D > 35$  km environ) à une exigence quasi relaxée, donc dès que l'observateur s'est assez rapproché de la frontière haute du chenal la quasi-discontinuité de droite apparaît; pour celle de gauche (associée au *Nachspiegelung*) la condition nécessaire sur  $D$  passe de la même exigence initiale à une exigence à peu près deux fois plus forte ( $D > 70$  km environ), donc selon la valeur de  $D$  il peut se faire (cas où  $D > 70$  km) que la quasi-discontinuité associée au *Nachspiegelung* soit tout le temps présente quand  $S$  s'élève de la base au sommet du chenal, ou (si  $35 \text{ km} < D < 70 \text{ km}$ ) qu'elle disparaisse pendant la montée de  $S$ , ou qu'elle ne soit jamais présente (cas où  $D < 35$  km environ). On peut donc avoir les deux quasi-discontinuités présentes en même temps, ou (plus facilement) celle de droite sans celle de gauche, mais jamais l'inverse.

Quand  $S$  s'élève dans la couche d'inversion raide et tend vers son sommet (qui est aussi la frontière haute du chenal), chaque quasi-discontinuité se rapproche de l'axe des ordonnées (en pointillés sur la Figure 7(a)); elles tendent vers lui, sauf celle de gauche si elle disparaît.

Avec les valeurs numériques de la Figure 7, le fait que le minimum de la fonction de transfert soit inférieur à  $h(-\delta)$  permet de voir détachées de l'horizon des images de portions basses de l'objet lointain invisibles dans le cas standard pour la même distance — cf. la Figure 8 qui montre

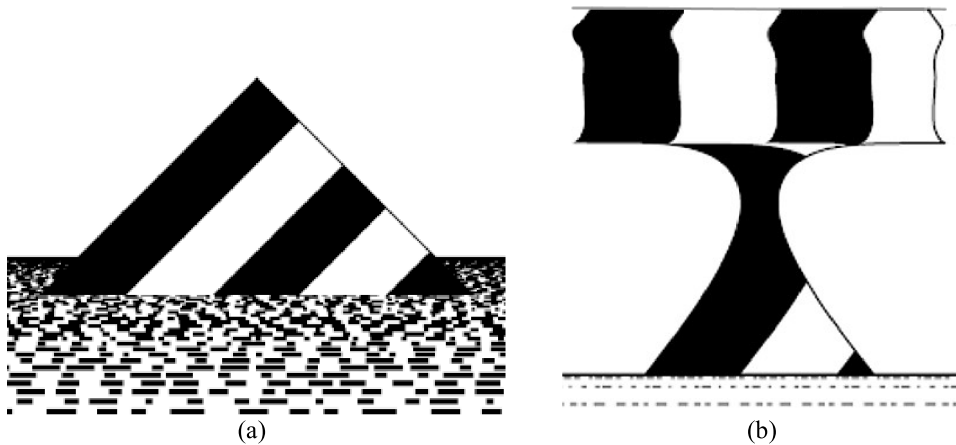


**FIGURE 7.** Pour un observateur d'élévation  $E = 54$  m au-dessus du niveau de la mer et un objet au-delà de l'horizon (d'où la borne inférieure  $-\delta \cong -12'$  pour le domaine de définition) à  $D = 70$  km, courbe de transfert (a), pour le cas où le profil thermique — courbe (b) — comporte une inversion (de 2 K de 50 à 60 m d'altitude) raide. L'observateur est aussi dans le chenal optique, et comme l'objet est loin, la courbe de transfert commence à ressembler à celle de la Fig. 9 de [28], mais la grande différence est que dans la bande dite de Wegener (ici, celle allant de  $-3'$  à  $3'$ ) on peut voir des images de l'objet s'il traverse le chenal, ce qui est possible car cet objet est terrestre; ces images sont très déformées car dans cette bande la courbe de transfert est relativement oscillante, l'objet étant assez loin pour que des rayons lumineux partant de lui puissent subir plusieurs quasi-réflexions totales avant d'arriver en S. Pour cet exemple particulier, la quasi-réflexion totale des rayons entre S et l'objet produit quelques morceaux de courbe décroissante dans la bande de Wegener (et eux seulement) qui justifient l'appellation de mirage supérieur, sans donner systématiquement ni partout dans cette bande une image renversée; la formation d'une portion d'image renversée, correspondant à la portion décroissante de la courbe à gauche de la bande, n'est pas due à une quasi-réflexion totale donc ce phénomène est nommé séparément : c'est une forme de *Nachspiegelung*. © Andrew T. Young, <https://aty.sdsu.edu/mirages/mirsims/sup-mir/SMDrow/SMDrow.html> et [https://aty.sdsu.edu/explain/simulations/ducting/duct\\_intro.html](https://aty.sdsu.edu/explain/simulations/ducting/duct_intro.html)

une simulation de mirage supérieur avec *Nachspiegelung*, ainsi qu'avec un fort étirement dans la bande de Wegener (qui existe car l'observateur est dans le chenal) et la forte compression typique contre les bords externes de celle-ci.

Un cas réel d'observation d'un mirage supérieur d'objets cachés sous l'horizon est montré sur la Figure 9.

Notons que si on augmente  $D$  au-delà de  $D_I$ , la pente de la courbe de transfert en  $-\delta$  croît nettement moins que  $D$ , puis décroît, s'annule, et devient négative;  $h(-\delta)$  se met aussi à décroître. C'est le cas pour la seconde courbe de transfert de la Fig. 11 de l'article [15] dans ce numéro spécial (avec l'objet à 15 miles et deux inversions superposées), mais pas pour la première (car l'objet est à 10 miles, ce qui est trop près); ce cas très particulier redonne un mirage inférieur, mais dans une situation très inhabituelle où la dépression de l'horizon n'est pas augmentée (car le gradient thermique est standard sous le niveau de l'observateur) et où on voit des images d'objets qui seraient « invisibles » dans l'atmosphère standard.



**FIGURE 8.** Simulations numériques, avec le même objet que sur la Figure 1, évoquant une île haute de 200 m. (a) Pour l’atmosphère standard, image de l’objet à  $D = 2$  km, vue de  $E = 1,5$  m; l’objet est donc en deçà de l’horizon. (b) Pour l’atmosphère avec la couche d’inversion raide, et en accord avec la Figure 7, image zoomée de l’objet à  $D = 70$  km, vue de  $E = 54$  m (l’observateur est dans le chenal). L’objet est donc au-delà de l’horizon, et dans l’image droite touchant l’horizon sensible la représentation de la moitié inférieure de l’objet (d’après le nombre de bandes visibles) est absente, mais une fine tranche horizontale environ au quart inférieur de l’objet donne lieu à une image quasi rectangulaire (car très étirée verticalement) et sans contact avec l’horizon — conformément aux explications précédentes sur la valeur du minimum de la fonction de transfert. Les bords supérieur et inférieur de cette image quasi rectangulaire sont bien tranchés, à cause de la très forte compression de l’image juste contre les bords externes de la bande de Wegener. Le *Nachspiegelung*, qui n’est pas le mirage supérieur *stricto sensu*, se manifeste par la portion d’image renversée la plus évidente ici : celle entre la zone la plus étroite (où il y a un étirement vertical infini de l’image) et le bord inférieur de la partie quasi rectangulaire. L’image droite située sous le *Nachspiegelung* ne concerne que la moitié supérieure de l’objet mais sans sa pointe, car le maximum local de la courbe de transfert — à gauche du pointillé de la Figure 7(a) — n’arrive pas à l’altitude de la pointe; cette image est un peu étirée verticalement, comme le montre l’inclinaison des bandes. Au-dessus de l’image quasi rectangulaire, l’image de la pointe n’est plus perceptible car elle est très aplatie. © Andrew T. Young, <https://aty.sdsu.edu/mirages/mirsims/mirsimintro.html> et <https://aty.sdsu.edu/mirages/mirsims/sup-mir/SMDrow/SMDrow.html>

Une des premières mentions du phénomène de mirage supérieur semble être due à Samuel Vince en 1799 [30] :

« In fact, the images [of the ship] were visible, when the whole ship was actually below the horizon [...] The discovery of ships in this manner might, in some cases, be of great importance [...] ».

Un témoignage magnifique est celui du capitaine baleinier (et membre de la Société Royale d’Edimburgh) William Scoresby Jr sur son observation extraordinaire du 24 juillet 1822 auprès de la côte est du Groenland :

« The most extraordinary effect of this state of the atmosphere, however, was the distinct inverted image of a ship in the clear sky, over the middle of the

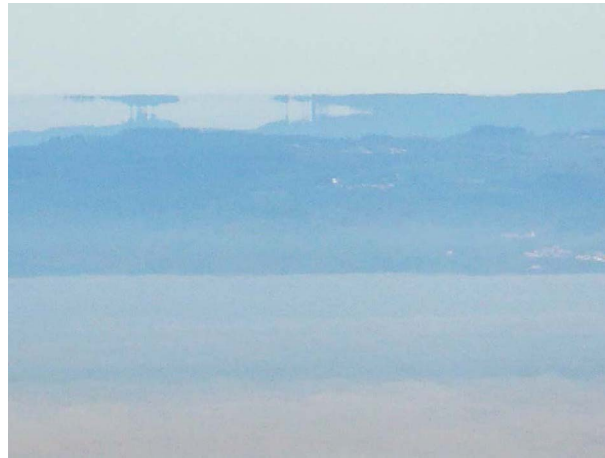




**FIGURE 9.** Mirage supérieur vu en mer de Norvège. On y remarque l'étirement infini à la jonction de l'image droite et de l'image renversée, et la bande plus sombre correspondant à la couche d'air inférieure plus froide — donc souvent plus chargée en aérosols. En outre, noter que la forme du relief est bien visible, surtout pour le rocher à droite et le rivage à gauche, dans l'image droite supérieure très comprimée verticalement, contrairement à l'image renversée (ce qui est fréquent). Observer aussi la présence d'images renversées sans image droite correspondante en dessous; c'est possible dans un chenal, avec un objet assez éloigné et dont la hauteur n'excède pas  $h(-\delta)$  mais dépasse le minimum de la fonction de transfert, comme ici. Remarquer enfin le caractère anormalement ondulé de l'horizon sensible; il est dû à la très forte turbulence liée à l'instabilité de l'air situé juste sous la couche d'inversion. © Photo : Luc Dettwiller

large bay or inlet before mentioned,—the ship itself being entirely beyond the horizon. Appearances of this kind I have before noticed, but the peculiarities of this were,—the perfection of the image, and the great distance of the vessel that it represented. It was so extremely well defined, that when examined with a telescope by Dollond, I could distinguish every sail, the general “rig of the ship,” and its particular character; insomuch that I confidently pronounced it to be my Father's ship, the *Fame*, which it afterwards proved to be;—though, on comparing notes with my Father, I found that our relative position at the time gave our distance from one another very nearly thirty miles, being about seventeen miles beyond the horizon, and some leagues beyond the limit of direct vision. (Plate V. Fig. 2.) » [31, p. 189–190 et Plate V, entre les p. 164 et 165].

On a vu que le mirage supérieur fait intervenir un chenal optique (voir [28] lié à [3]) dans lequel se trouve l'observateur — sinon les rayons lui arrivant ne subissent pas de quasi-réflexion totale. Le chenal contient forcément, dans sa partie supérieure, une couche d'inversion raide ( $dT/dr > 116 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ ); en ce qui concerne l'amplitude de cette inversion, elle peut être modérée (valant  $2 \text{ }^\circ\text{C}$  sur  $10 \text{ m}$  d'épaisseur totale), mais aussi très forte (typiquement  $15 \text{ }^\circ\text{C}$  sur  $50 \text{ m}$  au total, quand une couche d'air froid et humide au-dessus de l'eau est surmontée d'une couche d'air chaud et sec comme celui du désert apporté, par les vents Santa Ana — ainsi nommés d'après une montagne et un canyon californiens). En 2003 a été signalée [32] l'observation d'une couche d'inversion très raide, de  $1 \text{ }^\circ\text{C}$  seulement mais de  $5 \text{ cm}$  d'épaisseur; encore plus raide était celle rapportée en 1948 [33], vue dans le désert du Grand Lac Salé :  $15 \text{ }^\circ\text{F}$  et  $1 \text{ pouce}$  d'épaisseur,



**FIGURE 10.** Mirage supérieur vu depuis le plateau de Gergovie (France). « The lower parts of [...] objects, are sometimes connected with the sensible horizon, by an apparent fibrous or columnar extension of their parts, which columns are always perpendicular to the horizon : at other times, they appear to be quite lifted into the air, a void space being seen between them and the horizon. » [36, p. 385] Cette description due à un familier de l'Arctique dénote un grossissement local infini à la jonction des images droite et renversée au-dessus, comme en témoignent sur la photo les stries verticales sombres probablement dues à des arbres; en assimilant l'observateur à un point émettant fictivement des rayons dans toutes les directions, on sait [20, p. 151 ss] que ce grossissement infini affecte l'intersection de l'objet avec la caustique de ces rayons fictifs. Noter aussi, au-dessus de l'image renversée, la troisième image, droite et très comprimée, qui se manifeste par une courte pointe vers le haut dans le prolongement de la strie verticale la plus large. © Photo : Luc Dettwiller

donnant  $dT/dr \cong 328 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $\kappa \cong 2,2 \times 10^3$ . Si l'observateur se trouve au-dessus d'une zone où la fonction  $-dT/dr$  est brutalement décroissante, comme par exemple le voisinage de la frontière basse d'une couche d'inversion (même si celle-ci n'est pas raide), il est possible aussi d'avoir une image renversée : voir la dernière catégorie — celle du pseudo-mirage. Quel que soit le type de couche d'inversion, elle ne produit pas de point d'inflexion pour les rayons lumineux : les rayons obliques y ont leur concavité tournée vers le bas comme dans l'atmosphère normale, mais leur courbure y est plus forte — toutes choses égales par ailleurs.

Comme avec le mirage inférieur, il y a un grossissement vertical local infini au niveau de la jonction entre une image droite et une image renversée voisine (voir nos Figures 3, 9–13); cela peut expliquer la description de diverses créatures mythiques, comme le *hafstramb* et le *margygr* (*merman* et *mermaid* en anglais — voir l'article [15] dans ce numéro spécial) mentionnés par des récits nordiques [34, 35]. De manière générale, un mécanisme similaire est à l'œuvre dans trois autres classes d'observations, dont les noms détonent par leur tournure non scientifique : l'effet *hafgerdingar*, la *Fata Brumosa*, la *Fata Morgana*. Nous comparerons physiquement leurs natures respectives au paragraphe 3. En attendant, indiquons les contingences qui les différencient initialement : l'effet *hafgerdingar* ne concerne que l'image de la surface de la mer, la *Fata Brumosa* que l'image de la surface d'un lac, tandis que la *Fata Morgana* concerne des images d'autres objets éloignés aussi, mais plus contrastés.

Théoriquement, dans le mirage supérieur pour un objet donné, en plus de son image droite et de son image renversée qui est au-dessus de celle-ci, il se forme encore une troisième image



**FIGURE 11.** Suite du mirage montré sur la Figure 10. Sur la droite de l'image, noter que : la forme du relief est bien visible dans l'image droite supérieure très comprimée verticalement (contrairement à l'image renversée); juste au-dessus de la limite supérieure de l'image renversée se trouve la ligne horizontale la plus sombre, due au fait que les rayons lumineux qui y passent proviennent du ciel lointain et ont effectué le trajet le plus long dans l'air, d'où leur extinction maximale; en dessous de cette ligne se trouve une bande un peu plus sombre qu'en dessus, car les rayons correspondants se propagent uniquement dans la couche d'air inférieure plus froide donc souvent plus chargée en aérosols — voir aussi les Figures 9 et 10. © Photo : Luc Dettwiller



**FIGURE 12.** Suite du mirage de la Figure 9. Remarquer, juste au-dessus du fort étirement de l'image renversée, la très forte compression simulante dans l'image la perte d'une tranche rocheuse horizontale. Noter enfin que certains îlots n'ont pas d'image renversée : c'est normal, celle-ci ne peut se former que pour certaines hauteurs de l'objet, en fonction de sa distance. © Photo : Luc Dettwiller

simple de ce même objet : elle est droite (voir nos Figures 9–11), et passe usuellement inaperçue car elle est souvent très comprimée verticalement par rapport à l'image renversée.

Cette image droite supplémentaire se trouve située juste au-dessus de l'image renversée — qui peut aussi être très étirée verticalement dans sa partie haute (voir les Figures 11 et 12).

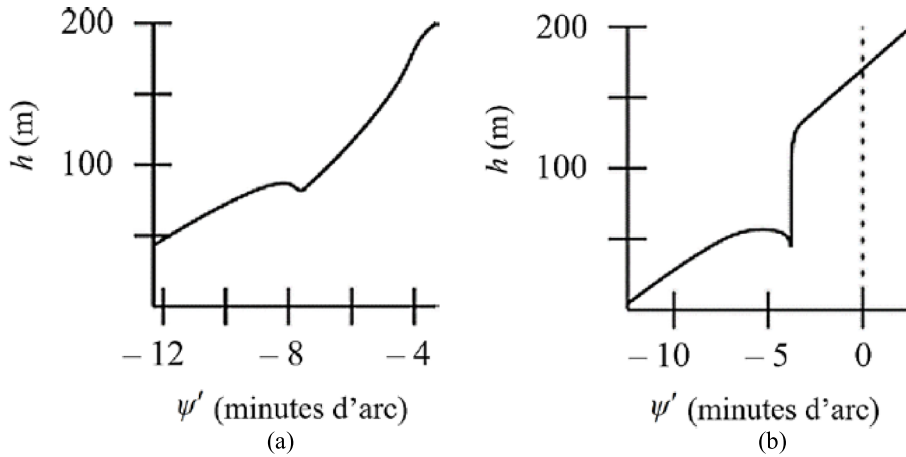


**FIGURE 13.** Suite du mirage des Figures 9 et 12. On voit ici le mécanisme déjà décrit dans la légende de la Figure 11, pour expliquer la bande horizontale plus sombre, renforcé par le fait que le haut de celle-ci est l'image renversée d'une portion de l'air située beaucoup plus bas, donc plus proche de la mer où l'extinction de la lumière est plus importante, à cause de la diffusion par les aérosols marins — mais cette diffusion peut aussi renvoyer vers l'observateur une certaine quantité de lumière solaire, non négligeable dans les cas où le voisinage est peu lumineux. © Photo : Luc Dettwiller

L'existence de cette image supplémentaire du même objet, droite, est due à la continuité réelle de la courbe de transfert, qui doit forcément se terminer par une portion croissante, mais celle-ci commence si abruptement qu'elle simule une discontinuité. Ce comportement critique qui explique la forte compression verticale de cette image s'interprète simplement, si on s'aide du modèle simpliste où la couche d'inversion est assimilée à un dioptre (d'épaisseur nulle par définition) qui séparerait la couche inférieure, d'air froid, de la couche supérieure d'air chaud moins réfringent : dans ce cas caricatural, quand  $S$  regarde de plus en plus haut au-dessus de l'horizon astronomique, il reçoit d'abord, moyennant une réflexion totale, des rayons provenant d'un ensemble de points dont la frontière passe sur l'objet par un point  $N$  sous le dioptre, puis un rayon provenant subitement d'un point  $P$  au-dessus quand la réflexion totale disparaît ; ainsi,  $S$  verrait superposées les images de  $N$  et  $P$  ! En fait, à cause de l'épaisseur de la couche d'inversion et de la dérivabilité de la distribution d'indice de réfraction, les images de  $N$  et  $P$  sont vues dans des directions différentes mais très voisines, ce qui veut dire que l'image du segment  $NP$  est très comprimée.

La rotondité de la Terre autorise aussi, pour un objet assez loin (à plusieurs dizaines de kilomètres typiquement), la vision d'une image fortement comprimée sous l'horizon astronomique, pour une raison similaire. Enfin, toujours avec  $D$  assez grand, il peut se produire plusieurs quasi-réflexions totales successives pour des rayons provenant de l'objet ; ce phénomène de réflexions multiples (qui a été effectivement observé) permet une grande variété de séquences et de grossissements des images successives — déjà avec une seule quasi-réflexion totale il peut y avoir formation de deux images en plus de l'image droite si l'objet est assez loin, voire quatre s'il est encore plus loin.

Notons enfin que toute cette présentation avec  $T(r)$  utilise implicitement un modèle d'atmosphère à symétrie sphérique ; mais des écarts dynamiques à cette situation ont été envisagés, notamment quand l'atmosphère est le siège d'ondes de gravité, faisant (par les composantes à



**FIGURE 14.** Pour un observateur  $S$  à 5 m au-dessus de la frontière haute de la couche d'inversion, et un objet au-delà de l'horizon (d'où la borne inférieure  $-\delta$  pour le domaine de définition), courbes de transfert : à gauche, cas (a) où  $D = 55$  km, avec une inversion relativement faible (de 0,8 K de 30 à 50 m d'altitude), donc non raide car  $dT/dr = 40 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1} < 116 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$ ; à droite, cas (b) où  $D = 40$  km, avec une inversion raide identique à celle utilisée pour la Figure 7. La valeur de  $\delta$  (environ 12' ici encore) peut se calculer par l'expression (3), avec  $E$  valant 55 m pour le cas (a), 65 m pour (b). La formation d'une portion d'image renversée, correspondant à la petite portion décroissante de la courbe, n'est pas due à une quasi-réflexion totale, même quand l'inversion est raide, puisque  $S$  est au-dessus d'elle; alors, dans chacun de ces deux cas, l'image renversée forme un pseudo-mirage. © Andrew T. Young, <https://aty.sdsu.edu/mirages/mirsims/mock/ordMM.html> et <https://aty.sdsu.edu/mirages/mirsims/mock/ductMM.html>

grande longueur d'onde) que les images oscillent aussi, ou (par les composantes à petite longueur d'onde) que les images acquièrent une structure fine supplémentaire [37].

### 2.3. *Nachspiegelung* et *pseudo-mirage*

Dans le cas particulier des mirages inférieur et supérieur, la formation de l'image renversée est liée à une quasi-réflexion totale au sens d'Everett. Mais *a priori*, pour qu'une image renversée se produise, il n'est pas indispensable qu'il y ait une réflexion, comme en témoignent pour la réfraction astronomique (cf. le document [28] lié à [3]) les cas du pseudo-mirage et du *Nachspiegelung*.

Pour la réfraction *atmosphérique*, ces deux cas peuvent aussi exister; on vient de le voir pour le *Nachspiegelung* sur la Figure 7(a). Suite au travail séminal d'Alfred Wegener [29] en 1918, on réserve à l'image renversée, formée par des rayons n'ayant pas subi de quasi-réflexion totale entre l'objet et  $S$  (et qui ne participent donc pas au mirage supérieur *stricto sensu*), cette appellation de *Nachspiegelung* lorsque  $S$  est dans un chenal optique à symétrie sphérique ou en dessous de lui (mais pas trop, sinon l'image renversée disparaît).

Young *et al.* ont montré [38] qu'une telle image renversée sans quasi-réflexion totale peut aussi se former pour  $S$  au-dessus d'une couche d'inversion à symétrie sphérique, sans qu'elle soit forcément raide (donc accompagnée d'un chenal) — voir la Figure 14. Ce cas est donc moins rare que celui du mirage supérieur. Mais si l'inversion est raide, dans le cas de la réfraction astronomique l'image renversée sans réflexion totale se forme pour tout observateur au-dessus du chenal, aussi loin soit-il. Cette image renversée justifie l'appellation de *mirage*; on rajoute le préfixe « pseudo » pour rappeler qu'elle se forme encore sans quasi-réflexion totale.



**FIGURE 15.** Mirage multiple dans la Manche. © Photo : Mathieu Vincent

#### 2.4. *Mirage multiple*

Le mirage multiple est le cas où il y apparaît une alternance d'images droites et renversées (voir Figure 15) avec plus de trois images au total. La première mention de cette alternance systématique, et d'un cas à cinq images, semble remonter à Kelly en 1839 [39]. Celle-ci est encore due à la continuité de la courbe de transfert, qui doit forcément se terminer par une portion croissante. Le nombre d'images est donc pair quand elle commence par une portion décroissante (c'est le cas du mirage inférieur — discuté au sous-paragraphe 2.1 — où il y a deux images, une renversée surmontée d'une image droite), impair quand elle commence par une portion croissante. Il faut se méfier des modèles irréalistes de profil d'indice, avec des discontinuités ou des points anguleux, qui peuvent donner des courbes de transfert discontinues et donc rompre l'alternance des images droites et renversées. Dans les cas réalistes, la courbe de transfert est continue, mais il faut prendre garde au fait qu'elle présente souvent des pentes si fortes en valeur absolue qu'elles simulent des discontinuités, et correspondent à des images tellement comprimées qu'elles passent inaperçues, ce qui donne l'impression que la loi d'alternance des images droites et renversées est violée ; pour cette raison, le nombre d'images dans un mirage est un critère d'identification peu indiqué.

De larges zones de fort étirement vertical à bords très tranchés peuvent se produire en présence d'une seule couche d'inversion raide, si l'objet est assez loin et l'observateur dans le chenal. Cela s'explique par de multiples quasi-réflexions totales au sens d'Everett ; elles font qu'un assez large ensemble de rayons ayant des inclinaisons croissantes au niveau de l'observateur ont rasé le sommet de la couche d'inversion sur des domaines de plus en plus longs, en partant de points de l'objet qui sont tous très proches du sommet de la couche d'inversion raide, mais quand même à des hauteurs légèrement changeantes. Cela produit une série d'images supplémentaires alternativement droites et renversées, très étirées verticalement, mais pour une étroite tranche de l'objet seulement — car elle est limitée par le chenal et surtout par une fine sous-couche de sa partie haute.

### 3. Cas spéciaux : *Fata Morgana*, *Fata Brumosa*, effet *hafgerdingar*

En l'absence de mirage, par définition, la courbe de transfert est croissante. Si elle était, dans le sens des  $\psi'$  croissants, d'abord croissante puis décroissante puis de nouveau croissante, et



sans discontinuités ni points anguleux, cela correspondrait à un mirage avec (par définition) une image apparente renversée présentant un grossissement vertical local infini au niveau de ses bords supérieur et inférieur, qui sont alors les images des deux lignes ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ) formant l'intersection entre le plan objet et la caustique ( $\Sigma$ ) des rayons arrivant en  $S$ ; l'image du voisinage de ( $L_1$ ) ou de ( $L_2$ ) présente un étirement très grand, comparable à celui déjà mentionné aux sous-paragraphes 2.1 et 2.2 et visible sur les Figures 1(c) et 9. Cette caustique dépend de la position de  $S$  par rapport à la distribution de l'indice de réfraction dans l'atmosphère. De manière générale, la « *Fata Morgana* archétypale » est le cas critique entre les configurations sans mirage, et celles avec un mirage du type décrit ci-dessus : en passant de celles-ci au cas critique, le maximum et le minimum stationnaires de la courbe de transfert fusionnent, donnant un point d'inflexion à tangente horizontale; l'intersection de ( $\Sigma$ ) avec le plan objet devient une ligne ( $L_D$ ) — double au sens où c'est la fusion de ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ). La courbe de transfert associée à une *Fata Morgana* archétypale présente ainsi un contact d'ordre supérieur avec sa tangente horizontale, donc l'image du voisinage de ( $L_D$ ) présente un étirement encore plus grand que pour les voisinages de ( $L_1$ ) ou de ( $L_2$ ), et il n'y a pas d'image renversée.

Voyons maintenant comment de tels effets peuvent se manifester dans la pratique. Mais nous ne prétendons pas à l'exhaustivité : l'ensemble des phénomènes apparentés aux *Fata Morgana* constitue vraiment un cas spécial, au sens où tous ne sont pas encore élucidés — certains restant rebelles à la tentative de classification utilisant les catégories simples que nous présentons.

- Dans une première classe d'observations, où le voisinage de ( $L_D$ ) a de multiples petites taches claires et sombres, son image donne de nombreuses stries verticales claires et sombres; alors l'observateur voit, suivant l'expression de François-Alphonse Forel [40, p. 544], une large « zone striée », donnant l'illusion de « colonnades » (d'après une lettre d'Ignatio Angelucci en 1643, transcrite chez Athanasius Kircher [41]) ou de « pilastres » et de « colonnes » selon Antonio Minasi [42]. Celui-ci notait aussi la présence éventuelle d'irisations, confirmées par Ronald Ives [33] qui ajoute qu'elles ne sont pas rares dans les forts mirages; on peut en voir un exemple en zoomant sur l'image du sentier et l'image nonuple du chemin (montrées par la Fig. 8 de l'article [43]), irisées de rouge à droite et de bleu à gauche (alors que la lunette utilisée pour observer est apochromatique, avec un élément en fluorite). Juste au-dessus de la zone striée, l'image est souvent très comprimée [44] : ces faits sont typiques des *Fata Morgana*. Tout cela peut advenir notamment quand  $S$  est au voisinage de la frontière basse du chenal dû à une couche d'inversion raide, large (d'une vingtaine de mètres typiquement) et donc assez forte (typiquement 5 °C, ou plus), dans laquelle se trouve ( $L_D$ ). La Figure 16 montre une observation d'un tel cas archétypal, où il n'y a pas d'image renversée (ce n'est donc pas un mirage), et où la zone striée est bien développée.

Mais selon les valeurs numériques des paramètres de la courbe de transfert dotée d'une tangente horizontale inflexionnelle il est possible que la zone striée (qui est, d'après les observations de Forel, la signature visuelle prépondérante d'une *Fata Morgana*) soit moins développée que sur la Figure 16, et donc que le cas pratique correspondant soit jugé moins digne d'être classifié comme *Fata Morgana*; de ce point de vue, le cas archétypal n'est pas forcément satisfaisant. En fait d'autres variantes, apparemment dépourvues de vraie tangente inflexionnelle horizontale et présentant une ou des portions de courbe de transfert très légèrement décroissantes, peuvent produire des zones striées mieux développées, dignes d'être estampillées *Fata Morgana*; dans ce cas, ce sont des mirages, que nous allons décrire plus précisément.

Quand les lignes ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ) sont assez rapprochées, la courbe de transfert présente en effet une partie relativement horizontale, avec de très faibles ondulations au lieu d'un point d'inflexion à tangente rigoureusement horizontale; cela donne une configuration hybride, où apparaît une juxtaposition d'images alternativement droites et renversées, qui sont peu espacées et très étirées



**FIGURE 16.** *Fata Morgana* archétypale sur une côte de la Manche à un endroit sans falaise, dont l'image est très étirée mais droite, formant une zone striée, avec une forte compression juste au-dessus. © Photo : Mathieu Vincent

verticalement sur un large domaine, formant ainsi un ersatz de zone striée — comme la concevait Kelly [39]. La présence d'images renversées, ainsi que l'intervention de quasi-réflexions totales dans la couche d'inversion raide, fait classer ces cas pratiques de *Fata Morgana* parmi les mirages supérieurs; avec eux il est fréquent que la courbe de transfert présente une quasi-discontinuité pour  $\psi' > 0$ , produisant dans l'image, juste au-dessus de la bande de Wegener, la quasi-perte d'une tranche de l'objet — au lieu d'un très fort étirement. Un exemple en est donné par notre Figure 17. Une grande variété de cas est possible, avec notamment cette quasi-perte juste au-dessus de la zone striée, mais aussi la présence d'intersections supplémentaires ( $L_3$ ), etc., avec des caustiques. Quant à la Figure 8(b), précisons qu'elle ne présente pas des stries verticales assez lisses pour être considérées comme celles d'une *Fata Morgana* — les comparer avec celles des Figures 16, 17 du présent article, et des simulations montrées par les Figs 5 et 7 de [43], qui sont plus proches de verticales parfaites.

Pour Forel [40, p. 544–561] qui a réalisé quatre à cinq cents observations de ce type au-dessus du Lac Léman à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle (pour une analyse détaillée de photographies récentes de ce phénomène, voir la référence [43]), les objets ainsi perçus sont à 10–40 km de distance, donnent une zone striée de 5' à 10' de hauteur [45], et l'élévation optimale de l'œil au-dessus de l'eau pour voir ce phénomène va de 2 à 4 m; mais un écart de  $\pm 0,5$  m par rapport à la meilleure altitude peut suffire à le faire disparaître, puisque la position de  $S$  par rapport au chenal est un paramètre très sensible — autant que pour obtenir la Fig. 11 de [28]. En d'autres lieux, l'élévation optimale peut être plus grande (Angelucci était à une soixantaine de mètres). La façon dont la géographie et la météorologie influent sur ces paramètres optimaux, ainsi que la cause réelle de certains cas de *Fata Morgana* à multiples zones striées, restent mal comprises.

L'appellation « *Fata Morgana* » vient de la façon dont les habitants de Reggio ont nommé des mirages vus dans le détroit de Messine, comme en témoigne Marc'Antonio Politi en 1617 le premier [46, p. 18–19]; peu après a été publiée la première description d'un tel mirage par Kircher dans son traité *Ars Magna Lucis et Umbrae* en 1646 [41], où il s'appuie sur l'observation du Père Angelucci le 14 août 1643 à Reggio. Giuseppe Maria Giovene rapporte en 1790 que les habitants de la côte Adriatique nomment ces mirages *Lavandaja*. La vision d'arcades, de piliers, de colonnades, de tours, de châteaux, etc., rapportée par Kircher en 1646 puis Minasi en 1773 [42], relève d'un effet psychologique de projection mentale facilement compréhensible : l'image très





**FIGURE 17.** Suite du mirage des Figures 9 et 12–13, montrant maintenant une *Fata Morgana* avec une large zone striée. Noter la quasi-discontinuité de grossissement dans l'image au niveau du sommet de la zone striée, avec (du côté supérieur) une très forte compression (qui ne nécessite pas une couche d'inversion très fine, comme dans le modèle simpliste évoqué à la fin du sous-paragraphe 2.2); comparer avec la Figure 12. © Photo : Luc Dettwiller

étirée d'un objet quelconque peut alors ressembler à un pilier ou une tour, etc. — soit des éléments des châteaux que la fée Morgane aurait le pouvoir de faire surgir !

- Dans une deuxième classe d'observations, seule une petite portion de lac donne une image étirée verticalement, prenant l'apparence de « brouillards [qui] ont exactement la teinte du lac, tellement qu'en certains cas ils semblent des vagues gigantesques soulevant la surface [...] de dix ou vingt mètres [soit] 2 ou 4 minutes de degré » selon les observations de Forel sur le Lac Léman [40, p. 552] : c'est typique d'une *Fata Brumosa*, avec le fait que souvent l'observateur doit être au-dessus d'elle, contrairement à la configuration usuelle d'observation d'une *Fata Morgana*. Comme avec elle, la zone d'image étirée se déplace; c'est très probablement dû à l'excitation, par le cisaillement de l'air (qui est usuellement dans le sens du vent), d'ondes de gravité affectant la couche d'inversion et se déplaçant dans le sens du cisaillement, comme on le voit souvent dans les mirages supérieurs.

- Enfin, dans une troisième classe d'observations, la zone d'image très étirée verticalement ne correspond qu'à une bande de la surface de la mer : c'est l'effet *hafgerdingar* — ce mot islandais signifiant des haies (ou des barrières) de mer, décrites comme telles dans le manuscrit médiéval *King's Mirror* [47–49]. Cette classe d'observations pourrait expliquer les légendes vikings parlant de murs maritimes délimitant le bord du monde.

Dans le cas d'une atmosphère à symétrie sphérique, l'effet *hafgerdingar* et la *Fata Morgana* devraient être complètement identiques sur le plan des lois de l'optique. De manière satisfaisante, peut-on dire qu'il en est approximativement ainsi dans les cas réels, où les couches d'inversion sont d'étendue limitée dans l'atmosphère terrestre qui n'a pas la symétrie sphérique? La question n'est pas tranchée entre les tenants de l'identité approximative de ces classes d'observations [43], et ceux qui pensent discerner entre elles des différences (voir certaines des simulations numériques de l'article [15]) — sans compter les dissymétries dues aux ondes de gravité très courantes dans les couches d'inversion et pouvant donner une image en forme de vague géante comme avec la *Fata Brumosa*. Des observations supplémentaires sont nécessaires pour élucider ces points; des progrès sont attendus aussi sur la question des caractéristiques optiques

et météorologiques précises des chenaux optiques produisant des portions de courbes de transfert quasi horizontales sur l'essentiel du spectre visible (et pas seulement dans le rouge comme sur la Fig. 11 du document [28] lié à [3]), exemptes aussi des petites oscillations visibles sur la Figure 7(a), afin de donner des zones striées bien développées.

#### 4. Effets possibles sur une image unique

Il y a d'autres effets dus à la courbure des rayons lumineux, mais ce ne sont pas des mirages car les images formées sont droites; la fonction de transfert reste monotone, croissante — comme elle doit l'être systématiquement pour les grandes hauteurs angulaires. Dans les deux premiers cas que nous verrons, la courbe de transfert est seulement décalée vers le haut ou vers le bas; dans le cas suivant sa forme est modifiée, la pente de certaines de ses portions devenant beaucoup plus petite ou plus grande que  $D$ ; et dans le dernier cas (celui de l'effet *hillingar*), plusieurs phénomènes notables changent de nature (en particulier quant à la dépression et la distance de l'horizon), aussi l'intérêt de la courbe de transfert s'en trouve-t-il relativisé.

##### 4.1. Disparition

Par comparaison avec le cas standard, il peut se produire une disparition de l'image d'un objet lointain — celui-ci étant vu proche de l'horizon mais en deçà de lui dans le cas standard, ou bien au-delà et le dépassant légèrement.

Ce phénomène survient lorsqu'entre les niveaux de  $S$  et du sol la valeur moyenne  $\langle \kappa \rangle$  de  $\kappa$  devient notablement inférieure à sa valeur standard  $\kappa_{Si} \cong 1/5,9$  : la courbure de la Terre paraît plus grande que d'habitude.

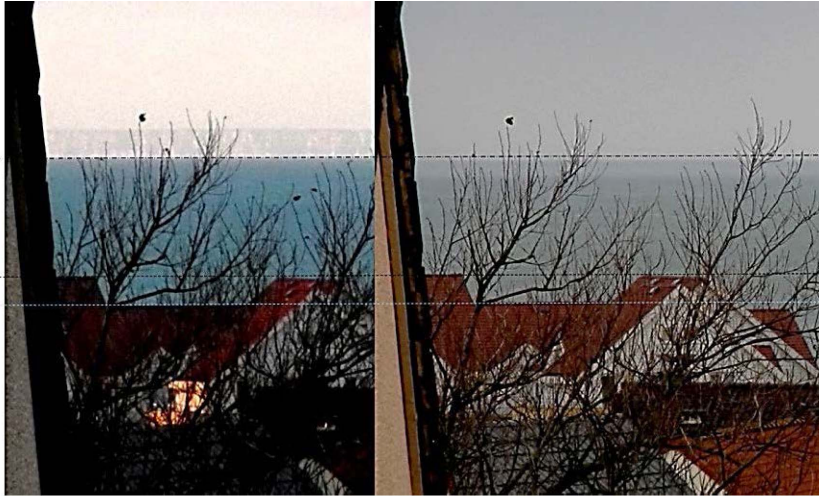
C'est systématiquement le cas avec les mirages inférieurs classiques, où l'image d'un objet visible dans l'atmosphère standard a disparu, au profit de l'image renversée d'un autre objet; et pour ces mirages la variation de  $\kappa$  entre les niveaux de  $S$  et du sol est importante, à tel point que  $\langle \kappa \rangle$  devient très nettement négatif.

Plus précisément, dans les cas où  $\kappa$  est resté à peu près uniforme (et donc où il n'y a pas de mirage), les expressions (4)–(5) montrent comment l'horizon est devenu plus proche et plus déprimé, avec l'augmentation de la courbure apparente  $1/r_a$  liée au fait que  $\kappa_S$  est passé de  $\kappa_{Si}$  à  $\kappa_{Sf} < \kappa_{Si}$ . Si dans le cas standard l'objet (dont le sommet est à l'altitude  $H$ ) est en deçà de l'horizon, cette sortie du cas standard le fait passer au-delà dès que  $L < D$ , i.e.  $\kappa_S < 1 - 2(r_s E/D^2)$ ; et alors sa hauteur restant visible est  $H - [(D-L)^2/(2r_a)]$ , mais il disparaît au regard dès qu'elle devient négative, i.e.  $\kappa_S < 1 - 2r_s[(\sqrt{E} + \sqrt{H})/D]^2$ . En l'absence de connaissance du paysage vu dans les conditions usuelles (avec  $\kappa_S \cong \kappa_{Si}$ ), ces effets passent inaperçus, car l'image restant visible n'est pas déformée mais seulement translatée verticalement vers le bas, de  $(\kappa_{Si} - \kappa_{Sf})D/(2r_s)$  angulairement (voir d'après la relation (6) la variation de  $\psi'$  en fonction de celle de  $\kappa_S$  à  $h$ ,  $D$  et  $E$  fixés), pendant que l'horizon est devenu plus déprimé, de  $(\sqrt{1 - \kappa_{Sf}} - \sqrt{1 - \kappa_{Si}})\sqrt{2E/r_s}$  — cf. la relation (5).

La cause de tout cela réside dans le gradient thermique vertical,  $dT/dr$ , mais devenu inférieur à  $-6,5 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$  tout en restant quasi uniforme dans un domaine allant au moins de  $S$  jusqu'à l'horizon; rappelons cependant que la stabilité convective de l'atmosphère correspond à  $-dT/dr < 9,8 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$ , donc à  $\kappa > 1/6,7$  pour  $15 \text{ }^\circ\text{C}$  et  $1 \text{ atm}$  (voir le sous-paragraphe 7.1.4 de l'article [3]).

##### 4.2. Surgissement

Tout aussi surprenant que la disparition est le phénomène opposé : le surgissement, où  $\kappa$  reste quasi uniforme, mais devient sensiblement plus grand que la valeur standard  $\kappa_{Si} \cong 1/5,9$ , tout



**FIGURE 18.** À gauche, surgissement des falaises anglaises vues de Boulogne (et à droite la vue ordinaire, le pointillé supérieur montrant que la dépression de l'horizon est alors un peu plus grande). © Photo : Olivier Buridant

en restant inférieur à 1 (valeur à partir de laquelle des effets nouveaux apparaissent). Comme pour la disparition, le surgissement passe inaperçu en l'absence de connaissance du paysage vu dans les conditions usuelles. Muni de cette connaissance, et pour des objets à une centaine de kilomètres ou plus, ce phénomène devient perceptible à l'œil nu avec  $\kappa_S > \kappa_{Sf} \cong 0,23 \cong 1/4,3$ , qui correspond (sous 1 atm et 15 °C) à une inversion de température d'au moins  $+3,5 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$  au voisinage de S : c'est fréquent dans les couloirs remplis d'eau — cf. le détroit de Messine, le lac de Genève, l'estuaire du Saint-Laurent, le lac Biwa, etc. Quand  $\kappa$  quasi uniforme passe de  $\kappa_{Si}$  à  $\kappa_{Sf}$ , l'image est angulairement translatée vers le haut, de  $(\kappa_{Sf} - \kappa_{Si})D/(2r_s) \cong 0,98'' \times D/1 \text{ km}$  soit  $3,3'$  pour  $D = 200 \text{ km}$ , tandis que l'horizon est devenu moins déprimé, de  $(\sqrt{1 - \kappa_{Si}} - \sqrt{1 - \kappa_{Sf}})\sqrt{2E/r_s} \cong 3,9'' \times \sqrt{E/1 \text{ m}}$  — qui est petit devant  $3,3'$  pour  $E \ll 1 \text{ km}$ .

Il apparaît alors l'image droite d'un objet usuellement caché derrière l'horizon (voir la Figure 18) : l'augmentation de  $\kappa$  rend la courbure des rayons plus grande que d'habitude, et, tant que  $\kappa_S$  ne dépasse pas 1, la courbure apparente  $r_a^{-1}$  d'un méridien diminue, l'horizon devient plus lointain. Une des premières mentions de ce phénomène semble être due à Latham en 1798 [50]. Il est très prononcé lorsque  $\kappa_S$  est proche de 1 — cependant la hauteur angulaire des points vus par effet de surgissement ne dépasse que très rarement  $15'$ . Notons encore que l'échelle angulaire des images vues par l'observateur n'est pas changée, celles-ci sont seulement translatées vers le haut par rapport à l'horizon astronomique, dans le même sens que l'horizon sensible.

La visibilité de la Corse depuis le bord de mer en Côte d'Azur témoigne couramment de la courbure des rayons lumineux (aucun sommet de l'Île de Beauté ne serait visible depuis Nice avec  $\kappa = 0$  et  $E = 4 \text{ m}$ ), sans pour autant impliquer un dépassement de la valeur standard — avec  $\kappa_S \cong \kappa_{Si}$  et  $E = 4 \text{ m}$  une quinzaine de sommets dépassent l'horizon (dont le point culminant, de  $7'$ ). Mais avec un début de surgissement ( $\kappa_S \cong \kappa_{Sf}$ ) il y en a déjà une petite dizaine en plus (toujours pour  $E = 4 \text{ m}$ ).

Au tout début du XIX<sup>e</sup> s'était répandue une rumeur à Marseille, disant qu'on pouvait y voir les Pyrénées. Galéjade?

Le baron Franz Xaver von Zach, astronome d'origine hongroise installé à Marseille en 1808, y observe le phénomène :

« L'an 1808, j'étais à Marseille. Le jour du 8 février fut remarquablement beau et serein. Je me transportai dans l'après-midi, avec mes instruments, sur la montagne Notre-Dame de la Garde; plusieurs savants et amateurs m'accompagnèrent pour être témoins de l'expérience. Après avoir pointé ma lunette sur le point de l'horizon où devait se trouver le Canigou, nous ne vîmes rien d'abord; le soleil donnait droit dans la lunette et devait par conséquent empêcher toute vision distincte des objets terrestres, soit avec des instruments d'optique, soit à la vue simple; ce n'était qu'après le coucher du soleil que le spectacle devait avoir lieu. Cet astre s'approchant de l'horizon, nous attendîmes avec impatience son coucher; à peine le dernier rayon avait-il disparu que, comme par un coup de baguette, nous vîmes pour ainsi dire tirer le rideau et une chaîne de montagne noire comme geai avec deux pics élevés vint, au point nommé, frapper nos regards avec tant d'évidence et de clarté que plusieurs spectateurs eurent peine à croire que ce fussent les Pyrénées. On les aurait prises pour des montagnes du voisinage, tant elles paraissaient distinctes et proches de nous! Tandis que nos spectateurs s'émerveillaient, faisaient leurs réflexions, je me dépêchai d'observer ces pics et de tracer le dessin de leur contour [...] »

Une vive polémique éclate sur la réalité de ce phénomène. Le Verrier confirme par le calcul la possibilité de cette observation. En 1880 Louis Fabry, astronome à l'Observatoire de Marseille (et frère du célèbre physicien marseillais Charles Fabry) prédit qu'on pourrait voir, depuis Notre-Dame de la Garde, le Canigou se découper sur le soleil couchant vers les 11 février et 30 octobre. Il l'observa effectivement avec une longue-vue le 31 octobre 1882, puis le 30 octobre 1886, accompagné d'un grand nombre de personnes prévenues par voie de presse.

Notre-Dame de la Garde est à 164 m d'altitude; le Canigou à 2 785 m, distant de 253 km. Sans la courbure des rayons lumineux, la direction de son sommet devrait être vue  $8'$  sous l'horizon marin; avec la courbure standard des rayons quasi horizontaux,  $2'$  au-dessus. On l'a vu parfois  $7'$  au-dessus, alors  $\kappa \cong 0,27 > 0,23$  (et  $dT/dr \cong 10 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$  à  $15 \text{ }^\circ\text{C}$  et  $1 \text{ atm}$ ) : il y a surgissement.

#### 4.3. Étirement / Compression

Tout en restant positive, la pente de la courbe de transfert peut devenir plus petite que  $D$ . Cela se traduit par un étirement vertical sans qu'il y ait de renversement, comme en témoignent de bons dessins (pour l'image d'un bateau) [51], ou un compte-rendu par le physicien-chimiste Jacques-Louis Soret (observant depuis un bateau à vapeur dans des circonstances où l'air était à  $25 \text{ }^\circ\text{C}$ , nettement plus chaud que l'eau — à  $12 \text{ }^\circ\text{C}$ ) :

« Les rives, réellement basses apparaissaient comme se terminant par des falaises élevées; mais ce phénomène présentait une grande variabilité d'un instant à l'autre. » [52];

notons que cette description s'applique aussi bien à une *Fata Morgana* archétypale, pour laquelle la courbe de transfert est croissante mais avec une tangente inflexionnelle horizontale — ce qui est quasiment le cas pour notre Figure 16.

La pente de la courbe de transfert peut aussi devenir plus grande que  $D$ , ce qui se traduit par une compression verticale — voir par exemple le rapport anonyme depuis le H. M. S. « Cleopatra » [53].

Tout cela dépend de la distance  $D$  entre autres. Par exemple, en reprenant la Figure 14 et en n'y changeant que  $D$  que l'on abaisse à 30 km, on fait disparaître les portions décroissantes des courbes de transfert (voir les URL de cette figure), et la nouvelle courbe correspondant à la Figure 14(b) a quasiment un point anguleux avec une demi-tangente horizontale et une autre

verticale : ainsi, une zone de très fort étirement voisine avec une zone de très forte compression — ce qui n'est pas exceptionnel ni obligatoire. L'étirement de l'image d'un objet dépassant de la surface d'un lac peut faire croire à l'existence d'animaux fantastiques [54]. Comme la courbe de transfert présente souvent une alternance de zones de compression et d'étirement, si l'image entière de l'objet est étirée, c'est qu'il se trouve assez petit pour être situé complètement dans une zone d'étirement.

#### 4.4. Effet *hillingar*

Nous avons vu que l'augmentation de  $\kappa_S$  à partir de 1/4,3 produit un surgissement perceptible, qui tend à annuler la dépression de l'horizon si  $\kappa_S$  tend vers 1. Avec  $\kappa_S > 1$ , l'observateur est dans un chenal optique, les formules (3)–(5) ne s'appliquent plus — la vision de l'horizon n'est plus due à des rayons rasant le sol horizontal, mais la frontière haute du chenal (i.e. la *Kimmfläche* considérée au paragraphe 3 de l'article [8] dans ce numéro spécial). Si  $\kappa > 1$  sur tout un rayon lumineux allant d'un objet à l'observateur, on dit (par abus de langage) que c'est un effet *hillingar* ou « mirage arctique » même s'il ne se forme pas d'image renversée, et même si on a pu l'observer à Dunkerque [20, p. 202], dans le golfe de Californie [55], sur le Lac Léman [40, p. 541], etc. ; le rayon est alors entièrement dans une couche d'inversion raide.

La nouveauté induite par  $\kappa > 1$  sur tout un rayon lumineux est que celui-ci peut joindre, malgré la courbure de la Terre, un point de l'océan à un autre point de l'océan. Pour souligner ce fait, il est bon de le distinguer du surgissement ordinaire, et on peut regretter que tous les auteurs ne le fassent pas [11]. Un modèle simple d'effet *hillingar* idéal reprend celui de Bouguer (voir le paragraphe 3 de notre « panorama historique [...] » [56], et l'article [57], dans ce numéro spécial), où  $n$  est inversement proportionnel à  $r^q$ . Dans ce cas,  $\kappa = q$  d'après la relation (43) de l'article [3] ; pour avoir un effet *hillingar* on considère donc  $q > 1$ . Alors on peut montrer [58] que la distance géodésique entre deux points (dont  $S$ ) joints par un rayon lumineux sur la surface d'une Terre idéale supposée parfaitement sphérique vaut  $2r_s(q-1)\psi'$ . Dans la pratique,  $\kappa$  ne dépasse pas beaucoup 1 lorsque l'effet *hillingar* se produit. Pour  $q \in ]1, 2[$  l'observateur  $S$  verrait une calotte terrestre centrée sur lui.

Dans les cas réels,  $S$  est au moins un peu au-dessus de la surface de l'océan — ou de la mer ou d'un grand lac. Son image est peu déformée mais paraît concave, avec un net surgissement ; l'océan (ou un grand lac) semble non pas plat, mais creux comme une soucoupe :

« Through an optical illusion, dependent on the mirage of the ice horizon, it appeared to us as if we were proceeding on the bottom of a shallow, saucer-shaped cavity. » [59, p. 272]. « [...] la mer plus froide que l'air, rendoit les objets visibles par en haut. Cette élévation étoit tellement sensible qu'on s'en apercevoit même sans le secours des instrumens. Lorsqu'on alloit s'asseoir sur le rivage on sembloit être dans un fond autour duquel, suivant une pente douce, s'élevoit la mer fortement azurée, surtout au large [...] » [20, p. 202].

Un signe frappant en est donné quand au loin voguent des bateaux :

« on peut reconnaître cet état particulier de l'atmosphère à ce signe que la mer paraît comme une surface concave, qu'en même temps l'horizon se voit par-dessus la coque des navires, [...] et que les objets très-distants paraissent s'élever en l'air comme des nuages » [17, p. 257].

Ces effets sont bien connus des marins islandais et des explorateurs polaires ; en 1820, Scoresby écrit :

« Under certain circumstances, all objects seen on the horizon, seem to be lifted above it a distance of 2 to 4, or more minutes of altitude [...] » [36, p. 384].

Harry Sawatzky et Waldemar Lehn proposent l'idée que l'effet *hillingar*, plus fréquent à la fin du premier millénaire que maintenant vu l'évolution du climat, ait joué un rôle significatif dans les cosmographies des peuples nordiques, ainsi que dans la connaissance de l'existence de l'Islande par les habitants des îles Féroé, ou du Groenland par l'islandais Erik le Rouge conformément à ses sagas [47]. Lehn dresse un historique détaillé des idées concernant la visibilité du Groenland [60], sous la forme d'îlots mentionnés pour la première fois à la fin du ix<sup>e</sup> siècle et appelés « Gunnbjörn's skerries », mais inexistantes — car dus probablement à un chenal optique permettant de voir des régions côtières élevées du Groenland depuis des bateaux naviguant au large de l'extrémité nord-ouest de l'Islande.

## 5. Conclusion

L'histoire de l'explication des mirages est tortueuse, comme le montre l'article [61] de ce numéro spécial : non seulement elle peut être obscurcie par les discussions sémantiques sur ce qu'on appelle la réflexion (selon que l'on adopte ou non la nomenclature d'Everett [1] présentée au sous-paragraphe 2.1), mais plus fondamentalement, il y a eu au xix<sup>e</sup> siècle des discussions au sujet d'une hypothétique interface réfléchissante dans l'air [61]... Et une idée fautive n'a commencé à se dissiper qu'au xx<sup>e</sup> siècle : celle d'un prétendu lien entre le mirage au sens strict (donc la formation d'une image renversée) et l'existence d'une quasi-réflexion totale au sens d'Everett. Il n'y en a aucun *a priori* ! Rappelons qu'en présence de cette réflexion, une image droite [27] peut apparaître (donc ce n'est pas un mirage au sens strict). Par ailleurs, des rayons lumineux qui ne subissent pas une telle réflexion peuvent quand même former une image renversée pour un observateur *S*, dans les cas du *Nachspiegelung* (*S* étant dans un chenal) [29] ou du pseudo-mirage (*S* étant au-dessus d'une couche d'inversion) [38] qui étaient connus d'abord en réfraction astronomique, puis furent transposés dans les années 2000 en réfraction atmosphérique (i.e. pour des objets terrestres).

Au xx<sup>e</sup> siècle encore, l'informatique a permis de traiter le problème inverse consistant à retrouver le profil thermique à partir d'une image. Cela fut réalisé d'abord dans le cas d'un mirage supérieur [62], puis d'un mirage inférieur [63], puis d'un cas quelconque [64] en introduisant alors une fonction à minimiser qui aide à éliminer les profils moins probables [65] car en fait le problème inverse est mal posé : il n'y a pas unicité de la solution [66]. Ces divers profils thermiques sont conditionnés par la météorologie des couches limites ; la réfraction peut nous renseigner beaucoup sur leur état, notamment par l'observation de l'horizon et le suivi de sa dépression  $\delta$  [67], où le gradient thermique varie proportionnellement au flux thermique non-radiatif émanant des surfaces matérielles plus ou moins chauffées par le soleil.

Malgré tous ces progrès, la classification que nous avons tenté d'élaborer n'est sûrement pas exhaustive : déjà, il est loin d'être certain que toutes les possibilités marquantes de phénomènes possibles aient été répertoriées et comprises dans le cas théorique restrictif d'une atmosphère à symétrie sphérique, notamment avec un empilement de plusieurs couches d'inversion. Cela reste un handicap de taille lorsqu'on tente d'expliquer des cas compliqués (comme ceux des Figs 8, 9 de [43]) ; car on ne sait pas s'il faut les attribuer à une juxtaposition de multiples très petites inversions, ou à un écart de la structure de l'atmosphère par rapport à la symétrie sphérique, sous la forme d'une onde de gravité (pour la Fig. 8 de [43]) ou bien d'une variation graduelle de l'amplitude thermique d'une inversion en fonction de la distance à l'observateur (comme dans l'effet *Novaya Zemlya* [15]) par exemple. En pareille situation, il serait bon de disposer de séries de photos prises simultanément en un même lieu précisément connu mais à des hauteurs différentes bien spécifiées de l'appareil, et assorties d'un maximum de données météorologiques pertinentes — alors que la plupart du temps on n'a que des images obtenues

par hasard en des lieux mal précisés, dans des circonstances et à des hauteurs inconnues. Pour certaines images [12], aucune explication nette n'est en vue.

L'étude de la dépression  $\delta$  de l'horizon (voir le sous-paragraphe 4.2 de l'article [8]) relève bien de la réfraction atmosphérique, et non pas astronomique ; mais, comme Pierre Bouguer l'a montré dès 1729 ([57, sous-paragraphe 3.7], [68, p. 66]), son application utilitaire au point en haute mer nous y ramène, puisqu'après avoir appliqué la correction due à  $\delta$ , on peut en déduire une valeur correcte de la réfraction astronomique afin d'appliquer la correction suivante [8, sous-paragraphe 4.3]. Dans son livre de 1758, Johann Heinrich Lambert a montré [69, p. 82–111] que la réfraction atmosphérique (ou terrestre) standard joue aussi un rôle important en géodésie, et doit être prise en compte pour les calculs d'altitude des points géodésiques — voir le paragraphe 2 de l'article [9] dans ce numéro spécial. Par la suite, les liens théoriques et pratiques entre les volets terrestre et astronomique de la réfraction ont été soulignés au XIX<sup>e</sup> siècle. À leur sujet, le mathématicien James Ivory écrivait en 1823 :

« With regard to altitudes less than 2°, it is not clear that the astronomical refractions do not participate of the extreme irregularity that attends the terrestrial refractions. » [70, p. 472]

Dans le demi-siècle suivant, l'astronome Hervé Faye tentera (sur la base d'hypothèses non valides) d'utiliser la réfraction terrestre pour améliorer la connaissance de la réfraction astronomique [71] (ce qui déclenchera une controverse avec Biot jusqu'en 1855) ; et d'autres auront plus tard l'idée inverse — voir le paragraphe 14 de [72] dans ce numéro spécial. Les réfractions astronomique et terrestre, que nous avons séparées pour la commodité de notre étude, ont naturellement de profondes racines communes, et ne diffèrent surtout que sur des plans techniques et sur les applications pratiques.

## Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

## Remerciements

L'auteur exprime ses vifs remerciements au Dr. Andrew T. Young pour de très nombreux échanges scientifiques depuis l'an 2000, et de très fructueuses discussions sur cet article en particulier. Il le remercie aussi pour son autorisation de réutiliser certaines de ses figures, ainsi que Pekka Parviainen, Thierry Tragin, Olivier Buridant, Mathieu Vincent qui ont donné la permission de reproduire certaines de leurs photographies, et Grégoire Bost pour son aide à la retouche de deux schémas.

## Références

- [1] J. D. Everett, « On the optics of mirage », *Philos. Mag.* **45** (1873), p. 161-172.
- [2] W.-E. Schiele, « Zur Theorie der Luftspiegelungen, insbesondere des elliptischen Falles », *Veröff. Geophys. Inst. Univ. Leipzig* **7** (1935), p. 101-188.
- [3] L. Dettwiller, « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 63-102.
- [4] W. Hillers, « Theoretische und experimentelle Beiträge zur Aufklärung des dreifachen Bildes einer Luftspiegelung », *Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften* **20** (1914), p. 1-55.
- [5] J. D. Everett, « On mirage », *Nature* **11** (1874), p. 49-52 et 69-71.
- [6] J. D. Gergonne, « Du mouvement de la lumière dans un milieu transparent, dont la densité varie, dans tous les sens, suivant une loi mathématique quelconque », *Ann. Math. Pures Appl.* **19** (1829), p. 257-285.
- [7] J. D. Gergonne, « Essai analytique sur le phénomène du mirage », *Ann. Math. Pures Appl.* **20** (1829), p. 1-31.

- [8] L. Dettwiller, « La discussion par Kummer d'une quadrature sur la réfraction astronomique : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 503-525.
- [9] L. Dettwiller, « Les développements de Lambert : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 453-465.
- [10] J. M. Pernter, F. M. Exner, *Meteorologische Optik*, 2<sup>e</sup> éd., Braumüller, Leipzig, 1922.
- [11] W. J. Humphreys, *Physics of the Air*, 3<sup>e</sup> éd., McGraw-Hill, New York, 1940.
- [12] Société de recherche sur le mirage du lac Biwa, « Mirage supérieur survenu le 22 février 2001 (photo partiellement mise à jour le 9 mars 2001) », [http://www.biwa.ne.jp/~t-ban/010222\\_sinkirou.htm](http://www.biwa.ne.jp/~t-ban/010222_sinkirou.htm) [page en japonais] (consulté le 20 décembre 2022).
- [13] J.-B. de Chabert, *Voyage fait par ordre du Roi en 1750 et 1751 ...*, Suite des Mémoires de l'Académie des Sciences, Imprimerie Royale, Paris, 1753.
- [14] G. Le Gentil, « Extrait d'un mémoire sur des observations astronomiques faites sur les réfractions, en 1786, 1787 et 1788 », *Mém. Acad. R. Sci. année 1789* (1793), p. 224-236.
- [15] S. van der Werf, « Novaya Zemlya effect and Fata Morgana. Raytracing in a spherically non-symmetric atmosphere », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 365-389.
- [16] J.-B. Delambre, *Histoire de l'Astronomie au Dix-Huitième Siècle*, Bachelier, Paris, 1827.
- [17] A. Bravais, « Notice sur le mirage », *Annuaire Météorologique de la France pour 1852* (1853), p. 227-280.
- [18] W. Kelly, « On the temperature, fogs and mirages of the river St. Lawrence », *Trans. Lit. Hist. Soc. Quebec* **3** (1832), p. 1-45.
- [19] W. H. Wollaston, « On double Images caused by atmospherical refraction », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **90** (1800), p. 239-254.
- [20] J.-B. Biot, *Recherches sur les réfractions extraordinaires qui ont lieu près de l'horizon*, Garnery, Paris, 1810.
- [21] A. T. Young, « Inferior mirages: an improved model », *Appl. Opt.* **54** (2015), p. B170-B176.
- [22] J. Picard, *Voyage d'Uranibourg ou observations astronomiques faites en Dannemarck*, Imprimerie Royale, Paris, 1680.
- [23] R. J. Boscovich, C. Maire, *De Litteraria Expeditione per Pontificiam Ditionem ...*, Typographio Palladis, Rome, 1755.
- [24] R. Woltmann, « Beobachtungen über die Brechung der Lichtstrahlen, die nahe über der Erdoberfläche hinfahren », *Gilb. Ann. Phys.* **3** (1800), p. 397-438.
- [25] C. Dufour, « De l'altération des images par reflexion sur la surface des eaux », *Bull. Soc. Vaud. Sci. Nat.* **13** (1874), p. 303-309.
- [26] W. H. Wollaston, « Observations on the quantity of horizontal refraction; with a Method of measuring the Dip at Sea », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **93** (1803), p. 1-11.
- [27] S. Y. van der Werf, « Noninverted images in inferior mirages », *Appl. Opt.* **50** (2011), p. F12-F15.
- [28] L. Dettwiller, « Properties of optical ducts, their chromatism and its effects on astronomical refraction », 2022, *preprint*, <https://arxiv.org/abs/2204.02605>.
- [29] A. Wegener, « Elementare theorie der atmosphärischen Spiegelungen », *Ann. Phys.* **57** (1918), p. 203-230.
- [30] S. Vince, « Observations upon an unusual horizontal refraction of the air; with remarks on the variation to which the lower parts of the atmosphere are sometimes subject », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **89** (1799), p. 13-23.
- [31] W. Scoresby, *Journal of a Voyage to the Northern Whale-Fishery*, Constable, Edinburgh, 1823.
- [32] B. B. Balsley, R. G. Frehlich, M. L. Jensen, Y. Meillier, A. Muschinski, « Extreme gradients in the nocturnal boundary layer: structure, evolution, and potential causes », *J. Atmos. Sci.* **60** (2003), p. 2496-2508.
- [33] R. L. Ives, « Meteorological conditions accompanying mirages in the Salt Lake desert », *J. Franklin Inst.* **245** (1948), p. 457-473.
- [34] W. H. Lehn, I. Schroeder, « The Norse merman as an optical phenomenon », *Nature* **289** (1981), p. 362-366.
- [35] W. H. Lehn, I. I. Schroeder, « The *hafstramb* and *margygr* of the *King's Mirror*: an analysis », *Polar Record* **40** (2004), p. 121-134.
- [36] W. Scoresby, *An Account of the Arctic Regions With a History and Description of the Northern Whale-Fishery*, vol. I, Constable, Edinburgh, 1820.
- [37] W. H. Lehn, W. K. Silvester, D. M. Fraser, « Mirages with gravity waves », *Appl. Opt.* **33** (1994), p. 4639-4643.
- [38] A. T. Young, G. W. Kattawar, P. Parviainen, « Sunset science. I. The Mock mirage », *Appl. Opt.* **36** (1997), p. 2689-2700.
- [39] W. Kelly, « On some extraordinary forms of mirage », *Nautical Mag. (London)* **8** (1839), p. 394-399.
- [40] F.-A. Forel, *Le Léman — Monographie limnologique*, t. 2, F. Rouge, Lausanne, 1895.
- [41] A. Kircher, *Ars Magna Lucis et Umbrae*, Sumptibus Hermanni Scheus ex typographia Ludovici Grignani, Rome, 1646.
- [42] A. Minasi, *Dissertazioni sopra diversi fatti meno ovi della storia naturale*, Benedetto Francesi, Rome, 1773.
- [43] A. T. Young, E. Frappa, « Mirages at Lake Geneva : the Fata Morgana », *Appl. Opt.* **56** (2017), p. G59-G68.
- [44] P.-A. Bonnelance, « Les réfractions anormales », *L'Astronomie* **43** (1929), p. 489-501.
- [45] F.-A. Forel, « La Fata-Morgana », *C. R. Acad. Sci.* **153** (1911), p. 1054-1056.
- [46] M. Politi, *Cronica della nobil' e fedelissima città di Reggio*, Appresso Pietro Brea, Messine, 1617.
- [47] H. L. Sawatzky, W. H. Lehn, « The Arctic mirage and the early north Atlantic », *Science* **192** (1976), p. 1300-1305.
- [48] W. H. Lehn, I. I. Schroeder, « *Hafgerðingar*: a mystery from the *King's Mirror* explained », *Polar Record* **39** (2003), p. 211-217.



- [49] S. van der Werf, « Hafgerdingar and giant waves », *Appl. Opt.* **56** (2017), p. G51-G58.
- [50] W. Latham, « Account of a singular instance of atmospherical Refraction. In a Letter from William Latham, Esq. F.R.S. and A.S. to the Rev. Henry Whitfield, D.D. F.R.S. and A.S. », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **88** (1798), p. 357-360.
- [51] K. H. Milne, R. Duff, « Abnormal refraction, Mediterranean sea », *Mar. Observer* **57** (1987), p. 112.
- [52] J.-L. Soret, « Sur divers phénomènes de mirage », *Arch. Sci. Phys. Nat.* **20** (1888), p. 302-304.
- [53] « Mirage on the Gulf of Finland, May 1<sup>st</sup>, 1919 », *Met. Mag.* **56** (1921), p. 40.
- [54] W. H. Lehn, « Atmospheric refraction and lake monsters », *Science* **205** (1979), p. 183-185.
- [55] R. L. Ives, « Recurrent mirages at Puerto Peñasco, Sonora », *J. Franklin Inst.* **252** (1951), p. 285-295.
- [56] L. Dettwiller, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 13-62.
- [57] L. Dettwiller, « L'invariant de Bouguer et ses conséquences : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 415-452.
- [58] L. Dettwiller, « Some theorems on "arctic mirages": *hillngar* effect and superior mirages », *J. Opt. Soc. Am. A* **36** (2019), p. 1997-2004.
- [59] G. F. Wright, W. Upham, *Greenland Icefields and Life in the North Atlantic*, D. Appleton, New York, 1896.
- [60] W. H. Lehn, « Skerrylike mirages and the discovery of Greenland », *Appl. Opt.* **39** (2000), p. 3612-3619.
- [61] A. T. Young, « Did Monge really explain inferior mirages? », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 467-481.
- [62] W. H. Lehn, « Inversion of superior mirage data to compute temperature profiles », *J. Opt. Soc. Am. A* **73** (1983), p. 1622-1625.
- [63] W. H. Lehn, J. S. Morrish, « A three-parameter inferior mirage model for optical sensing of surface layer temperatures profiles », *IEEE Trans. GE-24* (1986), p. 940-946.
- [64] W. G. Rees, C. M. Roach, C. H. F. Glover, « Inversion of atmospheric refraction data », *J. Opt. Soc. Am. A* **8** (1991), p. 330-338.
- [65] P. D. Sozou, « Inversion of mirage data: an optimization approach », *J. Opt. Soc. Am. A* **11** (1994), p. 125-134.
- [66] W. G. Rees, « Mirage with linear images diagram », *J. Opt. Soc. Am. A* **7** (1990), p. 1351-1354.
- [67] M. E. Tschudin, « Refraction near the horizon — An empirical approach. Part 2: variability of astronomical refraction at low positive altitude (LPAAR) », *Observatory* **139** (2019), p. 29-68.
- [68] P. Bouguer, *De la Méthode d'Observer Exactlyment sur Mer la Hauteur des Astres*, Claude Jombert, Paris, 1729.
- [69] J. H. Lambert, *Les propriétés remarquables de la route de la lumière*, H. Scheurleer F. Z. & Compagnie, La Haye, 1758.
- [70] J. Ivory, « On the astronomical refractions », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **113** (1823), p. 409-495.
- [71] H. Faye, « Note sur les réfractions astronomiques », *C. R. Acad. Sci.* **39** (1854), p. 381-389.
- [72] A. T. Young, « Relations among atmospheric structure, refraction, and extinction », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 179-212.



---

Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

# Les tables de réfraction astronomique

## *Tables of astronomical refraction*

François Mignard<sup>\*, a</sup>

<sup>a</sup> Université Côte d'Azur, Observatoire de la Côte d'Azur, CNRS, Laboratoire Lagrange,  
Bd de l'Observatoire, CS 34229, 06304 Nice Cedex 4, France  
*Courriel*: francois.mignard@oca.eu (F. Mignard)

**Résumé.** Histoire de la découverte de la réfraction astronomique et des méthodes mises en œuvre pour en tenir compte dans les mesures de position des astres. On reprend le fil historique depuis Tycho Brahé pour la construction de tables empiriques dans un premier temps, puis de modèles mathématiques utilisant les lois de l'optique et de la physique des gaz. Établissement des équations fondamentales et présentation de quelques solutions analytiques, comparées aux calculs actuels. Discussion des modèles numériques actuels et des modèles d'atmosphères dérivés de l'atmosphère standard. Les expressions théoriques sont développées pas à pas pour permettre le codage informatique.

**Abstract.** The paper investigates the refraction as it concerns position astronomy and the attempts of generations of astronomers since Tycho Brahe to estimate its size as a function of the apparent zenith distance of the sources. A few historical models are introduced and their value discussed by comparison to modern tables. The fundamental equation of the light-rays is established starting from the Fermat principle, together with a sample of analytical approximations of its solution down to the end of the XIXth century. Finally the two numerical approaches used today are presented with some details alongside the standard model of the Earth atmosphere. Theoretical expressions are developed step by step to allow the coding into a computer program.

**Mots-clés.** réfraction, astronomie, astrométrie, tracé de rayon, optique atmosphérique, histoire de l'optique.

**Keywords.** refraction, astronomy, astrometry, ray tracing, atmospheric optics, history of optics.

*Published online: 25 May 2023, Issue date: 11 August 2023*

## 1. Introduction

Avec l'avènement de l'astrométrie spatiale dans les années 1980, l'importance des mesures de positions absolues de grande précision depuis le sol terrestre a considérablement diminué, ce qui n'est pas le cas pour les mesures relatives dans des petits champs, bien au contraire. L'usage des instruments méridiens a disparu des observatoires et le suivi de la rotation de la Terre est assuré par des techniques très différentes de celles de l'astronomie classique. Les marins ont abandonné la navigation astronomique et ne se soucient plus de la réfraction et de la

---

\* Auteur correspondant.

visibilité de l'horizon, mais il y a encore des passionnés de la navigation à l'ancienne et même une compétition (Golden Globe Race) de navigation au large avec les moyens traditionnels. Les catalogues stellaires fondamentaux, ou ceux des sources extragalactiques, se construisent dans l'espace pour les mesures optiques, ou au sol pour le domaine des ondes radio où la troposphère et l'ionosphère jouent un rôle important. Même si des mesures astrométriques au sol demeurent indispensables pour les objets du système solaire par exemple, ce sont des mesures différentielles qui se rapportent aux sources fondamentales dont les positions sont obtenues par ailleurs. Ainsi, le traitement de la réfraction astronomique n'a plus aujourd'hui le rôle central qu'il a pu avoir dans le passé. En revanche l'intervention de l'atmosphère dans la formation des images a largement pris sa place en raison de la résolution angulaire potentielle des instruments astronomiques depuis la fin du XIX<sup>e</sup> siècle.

Les grands traités d'astronomie de position de bon niveau contiennent tous un chapitre, souvent étendu et difficile à lire, sur la réfraction astronomique et les développements mathématiques (conséquents) nécessaires à l'établissement des tables. Citons les traités majeurs en langue anglaise de Brünnow, Chauvenet, Newcomb et Ball [1–4] qui ont formé des générations d'astronomes praticiens. À noter que ces quatre auteurs sont au départ des mathématiciens de formation qui ont enseigné les mathématiques au niveau supérieur avant de s'orienter vers l'astronomie fondamentale. Ils ne sont donc pas rebutés par des développements analytiques couvrant plusieurs pages, et même des dizaines de pages. En langue française, la contribution de P. Puisseux [5] dans l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques* (adaptation française de *die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen* et non une traduction) met bien en évidence toutes les hypothèses simplificatrices et explore dans le détail plusieurs modèles physiques pour l'atmosphère. Elle est l'oeuvre d'un physicien plus que d'un mathématicien et sa lecture est plus aisée. À un niveau plus abordable, l'ouvrage de A. Danjon [6] reste la référence la plus complète, moins développée que les traités anglo-saxons mais suffisante pour arriver à l'intégrale de la réfraction et à la signification physique des deux premiers coefficients du développement en  $\tan z_0$ , avec  $z_0$  pour la distance zénithale apparente. Cet ouvrage contient tout ce qu'il faut pour comprendre les propriétés essentielles de la réfraction et le fait que, du zénith à environ 70° de distance zénithale, les détails de la structure atmosphérique importent peu. Les vrais problèmes commencent à cette hauteur et deviennent pratiquement insolubles à l'horizon.

Mais ces mathématiques avancées masquent les aspects physiques essentiels qui sont à la base d'une compréhension profonde du phénomène et dissimulent sous le formalisme les limites du modèle que toute modélisation, aussi raffinée soit-elle, aura bien du mal à franchir. Pour une présentation à l'inverse très physique des difficultés rencontrées pour estimer la réfraction au voisinage de l'horizon, la lecture de [7] et de [8] est fortement conseillée avant d'aborder les solutions plus mathématiques.

Cet article est organisé en quatre sections traitant tout d'abord de la réfraction astronomique avant la loi de Snell-Descartes (section 2), puis l'application de cette loi dans le modèle de Cassini qui est étudié dans le détail (section 3). Dans la section 4 on établit la relation fondamentale de la réfraction atmosphérique à partir des principes de base, avec une présentation succincte des solutions analytiques. Enfin la section 5 aborde la question des solutions numériques employées aujourd'hui et donne tous les éléments permettant de les programmer avec un modèle d'atmosphère standard.

Un certain nombre de paragraphes historiques de cet article se prêtent bien à une première lecture du sujet avant de se plonger dans les chapitres beaucoup plus détaillés et particulièrement documentés de L. Dettwiller dans ce volume [9, 10] pour les questions générales et les autres chapitres du même auteur pour des points techniques très précis. Les redondances éventuelles

ne nuisent pas à la lecture et permettent de mieux suivre le fil de la pensée de l'auteur sans une rupture de texte par un renvoi.

### *Notations*

Les notations, leurs définitions et les unités sont rassemblées dans la table 5 à la fin de ce document.

## **2. La réfraction astronomique avant l'optique moderne**

### *2.1. Ptolémée*

Certains phénomènes résultant de la réfraction de la lumière étaient bien connus avant Ptolémée, mais pour la partie qui nous concerne ici, il est le premier à en voir de façon remarquablement claire les conséquences astronomiques et probablement également le premier à en faire l'étude expérimentale du point de vue de l'optique. Notons cependant que Cléomède (*ca.* 1<sup>er</sup> siècle avant notre ère) rapporte dans *De motu circulari corporum caelestium*<sup>1</sup> l'observation d'une éclipse de Lune avant le coucher du Soleil, ce qu'il ne peut expliquer qu'avec l'hypothèse que les rayons lumineux du Soleil ne traversent pas l'atmosphère terrestre en ligne droite. Les travaux de Ptolémée sur la réfraction sont rapportés dans le Livre V de *l'Optique* et contiennent une table de l'angle de réfraction pour un dioptré air-eau. Cet ouvrage a été perdu dans la langue originale et n'est parvenu à nous que dans une traduction latine d'une version arabe également perdue. Le Livre I (qui devait traiter de la vision) et la fin du Livre V nous sont inconnus [11].

*L'Optique* a été rédigé après *l'Almageste*, ce dernier ne contenant aucune mention du phénomène et donc rien de ses effets sur la position des astres<sup>2</sup>. Ptolémée affirme que, tout comme il y a réfraction des rayons au passage de l'air dans l'eau, ou de l'air dans le verre, il doit s'en produire au passage de l'air dans l'éther. Une extrapolation hardie sans aucun doute et qui suppose déjà une étendue limitée à l'enveloppe atmosphérique avec la densité de l'éther bien inférieure à celle de l'air. Selon [13, p. 828] Ptolémée en tire la conclusion que « les étoiles doivent apparaître surélevées, et cela d'autant plus qu'elles sont plus proches de l'horizon ; à tel point même que des étoiles apparemment très voisines de l'horizon pourraient être effectivement déjà couchées ou pas encore levées ». On ne peut le dire aujourd'hui plus clairement et cet extrait témoigne de la compréhension profonde du phénomène de réfraction par l'astronome alexandrin. Ptolémée ne donne aucune indication quantitative mais mentionne que si l'on avait la connaissance du lieu où se trouve la limite entre l'air et l'éther, alors il serait possible d'établir des tables exactes de la valeur de cette réfraction. Une anticipation remarquable, qui va rester sans conséquence pour l'astronomie pratique pendant de nombreux siècles, tant le sujet est difficile et les données manquantes.

### *2.2. Tycho Brahé*

Pour les observations astronomiques, Tycho Brahé (1546–1601) est sans conteste le premier astronome qui se soit préoccupé d'une correction quantitative de la réfraction sur les mesures

<sup>1</sup> Ouvrage principalement connu comme étant la source la plus ancienne rapportant la mesure du diamètre de la Terre par Eratosthène.

<sup>2</sup> Au Livre I, section 3, il est juste fait allusion au grandissement des astres proches de l'horizon ou de la séparation angulaire entre les étoiles, phénomène qui n'est pas dû à la réfraction. Enfin dans le Livre VIII-6 Ptolémée mentionne qu'il y a des effets dans les instants des levers et couchers des astres qui proviennent de l'atmosphère, rendant le calcul des ces phénomènes incertain [12].

de position. Cela s'inscrit dans une attitude tournée vers l'exactitude des mesures, une précision associée à la réalisation d'instruments nouveaux pour l'astronomie de position et à la nécessité de répéter ses observations. À ce titre, il est un acteur majeur de la révolution scientifique qui se prépare et un des fondateurs de l'astronomie telle que nous continuons à la pratiquer, aux côtés de Copernic, Kepler, Galilée et Newton, pour s'en tenir à la sélection de J. Bertrand dans son ouvrage *Les fondateurs de l'astronomie moderne*. Si B. Walther (1430–1504) de Nuremberg a reconnu avant Tycho l'importance que pouvait avoir la réfraction sur la précision des mesures de position, c'est bien ce dernier qui a construit la première table de la réfraction à partir des observations.

Initialement, Tycho Brahé a observé les hauteurs apparentes d'étoiles circumpolaires lors des culminations inférieure et supérieure, ainsi que la hauteur du Soleil au moment des solstices. Ayant trouvé une incohérence de 4' [14, Art. 2166] dans la détermination de la latitude d'Uraniborg déduite des étoiles et du Soleil, il l'attribue à l'existence d'un effet de réfraction atmosphérique. C'est là la première mise en évidence sérieuse de cet effet par des mesures astronomiques. Ensuite, il suit régulièrement la hauteur du Soleil au cours de la journée, en particulier au voisinage du solstice d'hiver, lorsque la déclinaison est peu variable et le Soleil bas sur l'horizon de l'île de Hven. Il compare la hauteur apparente à la hauteur calculée à partir de son azimuth au lever ou au coucher du Soleil, et la différence entre les deux hauteurs lui donne une estimation de la réfraction.

Tycho Brahé est un astronome praticien, il ne cherche pas un modèle physique de la réfraction, mais les lois qui la gouvernent afin de corriger ses observations. Une bonne table, bien arrangée et sûre, vaut mieux que des formules approximatives. De l'ensemble de ces mesures, il conclut que le phénomène n'est pas identique pour le Soleil et les étoiles, et construit deux tables de réfraction. Celle du Soleil donne une réfraction nulle pour une hauteur apparente  $h_0 > 45^\circ$ , alors que cette limite est de  $20^\circ$  pour les étoiles. La réfraction à l'horizon est de 34', une précision tout à fait remarquable.

Pour une question si nouvelle et sans fondement théorique, il n'y avait pas lieu de s'émouvoir de cette différence entre les étoiles et le Soleil. La différence entre ces astres est tellement évidente que c'est une grande conquête de l'astronomie d'avoir établi leur identité physique derrière les apparences contraires. De plus, Tycho Brahé ne doutait pas que relativement aux étoiles le Soleil fût très proche de nous et que les hauteurs mesurées étaient affectées par la parallaxe solaire. Il utilisera tout au long de sa vie la valeur de 3' héritée de Ptolémée pour la parallaxe équatoriale (ou parallaxe horizontale), au lieu d'une valeur réelle légèrement inférieure à 9''. Cet effet se combinait avec la réfraction dans le cas du Soleil mais pas pour les étoiles, et Tycho Brahé avec sa large parallaxe solaire sur-corrigeait l'effet [15], mais avait de bonnes raisons de traiter les astres différemment.

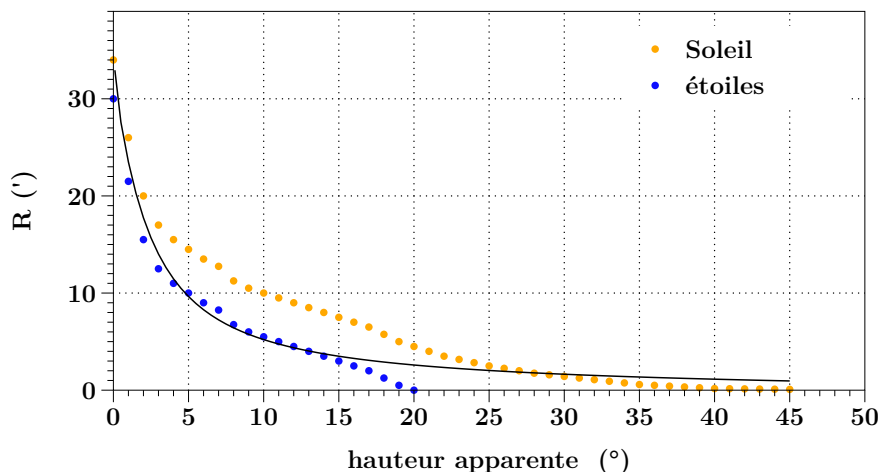
Les deux tables de Tycho Brahé sont reproduites sur la figure 1, avec celle du Soleil à gauche. Pour le Soleil, la table part de l'horizon pour arriver à une réfraction nulle (négligeable serait plus correct probablement) à la hauteur de  $45^\circ$ , (valeur vraie = 1'). Pour les étoiles, la réfraction n'est notable pour Tycho Brahé que jusqu'à  $20^\circ$  de hauteur (la valeur vraie à  $h_0 = 20^\circ$  est 2.6'). Par comparaison à la courbe en continu correspondant aux valeurs calculées aujourd'hui, on voit sur la figure 2 que la table stellaire de Tycho Brahé est en meilleur accord et est même raisonnablement correcte bien que déduite d'observations dont la précision est au mieux de 0.5'. Enfin, la différence entre les deux tables de Tycho Brahé, qui devrait être au maximum égale à la valeur adoptée pour la parallaxe solaire de 3', est en fait constamment de 4.5' (sauf à l'horizon), et ne résulte donc pas de l'observation directement, mais d'un choix pour ajuster l'une des deux réfractions sur l'autre [16]. La parallaxe ne suffit donc pas pour rendre compte de l'erreur importante dans la table de réfraction du Soleil.

TABVLA REFRACTI- ONVM SOLARIVM.					
Alt.	Refractio.		Alt.	Refractio.	
☉	Arc.		☉	Arc.	
G.	′	″	G.	′	″
0	34	0	23	3	10
1	26	0	24	2	50
2	20	0	25	2	30
3	17	0	26	2	15
4	15	30	27	2	0
5	14	30	28	1	45
6	13	30	29	1	35
7	12	45	30	1	25
8	11	15	31	1	15
9	10	30	32	1	5
10	10	0	33	0	55
11	9	30	34	0	45
12	9	0	35	0	35
13	8	30	36	0	30
14	8	0	37	0	25
15	7	30	38	0	20
16	7	0	39	0	15
17	6	30	40	0	10
18	5	45	41	0	9
19	5	0	42	0	8
20	4	30	43	0	7
21	4	0	44	0	6
22	3	30	45	0	5

TABVLA Refractio- num Fixa- rum Scel- larum.		
Alt.	Refractio.	
G.	M.	S.
0	30	0
1	21	30
2	15	30
3	12	30
4	11	0
5	10	0
6	9	0
7	8	15
8	6	45
9	6	0
10	5	30
11	5	0
12	4	30
13	4	0
14	3	30
15	3	0
16	2	30
17	2	0
18	1	15
19	1	30
20	0	0

FIGURE 1. Tables de réfraction de Tycho Brahé. Gauche : table solaire; droite : table stellaire.  
Source : *Astronomiae instauratae progymnasmata* p. 79 et p. 280.



**FIGURE 2.** Valeurs de la réfraction mesurées par Tycho Brahé (*Astronomiae instauratae progymnasmata*) comparées aux théories modernes. Les valeurs de Tycho (disques pleins) et les valeurs vraies (ligne continue).

### 2.3. Kepler

Kepler était non seulement un astronome de génie par sa créativité, mais aussi un opticien hors pair, qui maîtrisait la dioptrique et la formation des images. Il rencontre Tycho Brahé dans l'observatoire de ce dernier à Benátky nad Jizerou, dans les environs de Prague, en 1600, répondant à une invitation à le rejoindre à la cour de l'empereur Rudolph II, en tant qu'assistant dans ses fonctions d'Astronome Impérial. Chacun sait que l'histoire des sciences aurait été différente sans ce contact entre deux hommes aussi exceptionnels et aussi complémentaires. La mort de Tycho Brahé en 1601 fait de Kepler l'héritier des archives et des observations de Tycho, dont il fera le meilleur usage pour établir les lois du mouvement des planètes.

Concernant la réfraction, il va étudier les tables de Tycho Brahé, qu'il accepte globalement. Mais toutefois, il soutient que la réfraction, tout en s'atténuant fortement, doit continuer jusqu'au zénith et ne réellement s'annuler que pour cette direction. Plus mathématicien que Tycho Brahé, il va chercher à en déterminer une loi en admettant qu'il n'y ait qu'une seule réfraction à la frontière de l'atmosphère. Nous sommes donc très près du modèle de Ptolémée et de Cassini discuté plus bas dans la section 3. Sa table de réfraction n'est guère différente de celle de Tycho Brahé pour les régions où la réfraction doit être prise en compte.

## 3. La réfraction astronomique après Snell

La loi de la réfraction à l'interface de deux milieux homogènes telle que nous la connaissons aujourd'hui est définitivement établie au début du XVII<sup>e</sup> siècle par W. Snell, amplifiée par Descartes et englobée dans un principe plus général énoncé par Fermat. Snell en trouve la formulation mathématique alors qu'il construisait une table des sinus en 1621, mais rien ne fut publié de son vivant. Descartes découvrit également cette loi, tout à fait indépendamment en 1637 et la publia dans sa *Dioptrique* en annexe du *Discours de la Méthode*. Cette loi, complétée par un modèle physique de l'atmosphère, est suffisante pour obtenir l'équation du trajet d'un rayon lumineux pendant sa traversée de l'atmosphère et pour en déduire la valeur de l'angle de réfraction pour chaque hauteur apparente.

Le chemin théorique menant à des réfractions calculées pour toutes les hauteurs utiles semble, avec le recul du temps, d'une grande simplicité et bien assuré. Mais dans les faits, avant d'en arriver là, il a fallu établir par l'observation que la question se ramenait à cette pure question d'optique atmosphérique. Les mesures faites à Paris, Greenwich, Le Cap, Cayenne, par les meilleurs observateurs montraient des variations avec la latitude, avec la saison, et bien entendu, avec la température et, plus on se rapprochait de l'horizon, plus l'incohérence des résultats était manifeste. La réfraction ne se présente jamais à l'observateur dans toute sa pureté mais comme une des multiples corrections à appliquer aux mesures : une petite erreur sur la latitude se traduit sur la hauteur de l'étoile Polaire par une variation semblable à celle occasionnée par la réfraction. Toute l'ingéniosité de ces grands praticiens sera mise en œuvre pour l'isoler et se convaincre qu'elle suit somme toute une loi assez simple. Les hésitations et errements des astronomes ont disparu du fil historique en dépit du temps passé par nombre d'entre eux comme en témoignent les pages que consacre J. Lalande à cette question majeure pour les progrès de l'astronomie de position [14, Art. 2170–2190].

### 3.1. *Jean Dominique Cassini*

J.-D. Cassini (1625–1712) est le premier à mettre en œuvre ce programme en utilisant ces nouveaux outils et cela alors qu'il était encore à Bologne en 1662 et travaillait à la construction des tables du Soleil. Il considère une atmosphère homogène d'une certaine épaisseur  $H$  et d'indice de réfraction  $n$  constant. Le rayon lumineux ne subit donc qu'une seule réfraction à l'interface extérieure au point  $M$  de la figure 3.

Il y a deux paramètres libres qui sont l'épaisseur de l'atmosphère  $H$  et l'indice de réfraction (même si ce n'est pas formulé de cette manière par J.-D. Cassini). Ces deux constantes sont contraintes par les deux valeurs mesurées de la réfraction horizontale (soit pour une distance zénithale  $z_0 = 90^\circ$ ) et à  $z_0 = 80^\circ$ . J.-B. Delambre, dans *l'Histoire de l'Astronomie Moderne* et dans *l'Histoire de l'Astronomie au XVIII<sup>e</sup> siècle*, insiste à deux reprises sur le fait qu'on ne sait pas comment J.-D. Cassini a obtenu ces deux valeurs de la réfraction. Le mémoire étudié par J.-B. Delambre est extrêmement succinct et ne permet pas de comprendre les hypothèses et les calculs de J.-D. Cassini. En revanche nous avons un mémoire très détaillé dans [17], dont l'auteur est nommé comme *Cassini*, mais on comprend dans le texte qu'il s'agit de son fils Jacques. Il est fait mention à la première personne d'observations de levers et couchers de soleil en 1713, donc après le décès de Cassini père. Même si les observations sont antérieures de quelques années, il s'agit de mesures en plein hiver à Paris et il est douteux qu'à l'âge de 85 ans passés, à peu près aveugle, il se soit ainsi exposé aux éléments.

Dans ce mémoire J. Cassini dit clairement qu'il prend ces deux valeurs de référence dans *La Connaissance des temps* (CDT). Reste à savoir quelle table se trouvait alors dans la CDT à cette date, sachant que le mémoire est présenté en 1714 et peut correspondre à un travail bien plus ancien. Dans ce qui ressemble à une construction familiale et s'étend sur plusieurs décennies, il est difficile de démêler les contributions de chacun, tant en ce qui concerne les idées que les développements plus mathématiques nécessaires à la construction d'une table.

Le modèle de base de J.-D. Cassini est remarquable, d'une part par sa simplicité, ne faisant usage que de la géométrie très élémentaire et d'une seule couche atmosphérique et, d'autre part par sa précision, puisqu'il donne de bons résultats, erreur  $< 0.1''$  jusqu'à  $70^\circ$  de distance zénithale. Il constitue un bel exemple de modélisation mathématique en sciences et de sa confrontation au réel, accessible à un niveau élémentaire dans les études scientifiques.

Par des considérations géométriques simples et avec la loi de la réfraction, on obtient immédiatement les relations géométriques, (voir la figure 3 et la table 5 pour les notations applicables



à l'ensemble du texte),

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= z - z_0 \\ R_a &= R_\oplus + H \\ R_a \sin(\zeta - \mathcal{R}) &= R_\oplus \sin z_0\end{aligned}$$

puis la contrainte optique,

$$\sin \zeta = n \sin(\zeta - \mathcal{R})$$

dont on déduit avec l'épaisseur réduite,

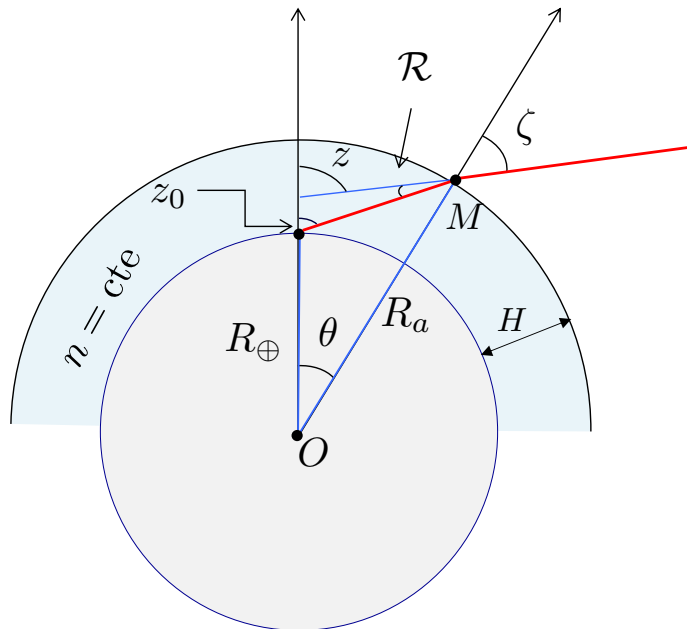
$$\frac{H}{R_\oplus} = x$$

les deux relations,

$$\begin{aligned}\sin \zeta &= \frac{n \sin z_0}{1+x} \\ \sin(\zeta - \mathcal{R}) &= \frac{\sin z_0}{1+x}\end{aligned}$$

qui conduisent à une forme exacte de l'angle de réfraction  $\mathcal{R}$ ,

$$\mathcal{R}(z_0) = \sin^{-1} \left[ \frac{n \sin z_0}{1+x} \right] - \sin^{-1} \left[ \frac{\sin z_0}{1+x} \right] \quad (1)$$



**FIGURE 3.** Modèle de la réfraction astronomique selon J.-D. Cassini (1625–1712). L'angle de réfraction  $\mathcal{R}$  est égal à la différence  $z - z_0$  entre la distance zénithale vraie  $z$  et la distance zénithale apparente  $z_0$  pour l'observateur qui, sauf quand son altitude est mentionnée, est supposé se trouver au niveau du sol. L'atmosphère comprend une seule couche homogène dont l'épaisseur et la réfractivité sont contraintes par deux valeurs observées de la réfraction au voisinage de l'horizon.

ou de façon équivalente à la forme trouvée aussi récemment qu'en 1905 par A. Bemporad [18, p. 199]

$$\tan \frac{\mathcal{R}}{2} = \frac{1}{(n+1) \sin z_0} \left[ \sqrt{(1+x)^2 - \sin^2 z_0} - \sqrt{(1+x)^2 - n^2 \sin^2 z_0} \right] \quad (2)$$

qui est cependant indéfinie au zénith, mais donne bien  $\mathcal{R} = 0$  après régularisation. On trouve encore cette forme implicite donnée dans [19, p. 72],

$$\sin \mathcal{R} = \frac{\sin z_0}{1+x} (n^2 - 2n \cos \mathcal{R} + 1)^{1/2}. \quad (3)$$

Les différentes formules sont équivalentes (ce qui n'est pas évident au premier abord mais aisé à vérifier numériquement) et exactes, c'est-à-dire sans approximation pour le modèle considéré. La formulation de l'équation (1) n'est pas forcément la meilleure pour le calcul numérique puisqu'elle apparaît sous la forme de deux termes positifs grands devant leur différence, impliquant de calculer chaque terme avec un nombre de décimales élevé par rapport à la précision recherchée sur le résultat. Avec  $n-1 \ll 1$  et également  $x \ll 1$ , on peut régulariser l'expression (1) avec

$$\sin^{-1}(x_0 + \epsilon) = \sin^{-1}(x_0) + \frac{\epsilon}{\sqrt{1-x_0^2}} + \frac{x_0}{(1-x_0^2)^{3/2}} \frac{\epsilon^2}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

et en écrivant

$$\frac{n \sin z_0}{1+x} = \frac{\sin z_0}{1+x} + \frac{(n-1) \sin z_0}{1+x}$$

pour faire apparaître le petit paramètre  $n-1$ . On trouve alors,

$$\mathcal{R}(z_0) \approx (n-1)(1-x) \tan z_0 + (n-1) \left( \frac{n-1}{2} - x \right) \tan^3 z_0 \quad (4)$$

soit les deux premiers termes du développement en puissances impaires de  $\tan z_0$  qui va jouer un rôle important dans la théorie de la réfraction. Bien entendu rien de tout cela ne figure dans les documents de Cassini, mais il est intéressant de donner ces développements pour une présentation actualisée. Le développement en  $\tan z_0$  diverge vers l'horizon, mais avec (1) on obtient directement avec  $n-1 < x \ll 1$ ,

$$\mathcal{R}(90^\circ) \approx \frac{n-1}{\sqrt{2x}}$$

qui est en fait une piètre approximation avec le quotient de deux petites quantités et des conditions fortes sur la hiérarchie des petites quantités. Avec la forme (3) on trouve une bien meilleure expression, pratiquement exacte,

$$\mathcal{R}(90^\circ) \approx \frac{n-1}{\sqrt{(1+x)^2 - n}}$$

Pour obtenir  $x$  et  $n$ , Cassini prend,  $\mathcal{R}(90^\circ) = 32'20''$  et  $\mathcal{R}(80^\circ) = 5'28''$  et cela conduit à la table de la figure 4 publiée dans la *Connaissance des temps*. Le détail du calcul numérique est donné, quoique de façon un peu confuse, dans [16, Sect. 9] et il conduit à  $H \approx 3900\text{m}$ .

La comparaison à un modèle plus complet utilisant l'atmosphère standard et un tracé de rayon est donnée sur la figure 5. On a utilisé la valeur de l'indice de réfraction au sol et contraint uniquement la réfraction horizontale pour le modèle de Cassini, ce qui correspond au choix d'une hauteur d'atmosphère  $H = 3626\text{m}$ . En dépit de sa simplicité, ce premier modèle théorique de la réfraction atmosphérique ne diffère pas d'un modèle moderne plus exact de plus d'une seconde d'arc jusqu'à la distance zénithale de  $70^\circ$ . Ce fait *a priori* surprenant est en accord avec le *théorème* d'Oriani stipulant que la réfraction pour ces distances zénithales dépend uniquement des conditions au sol et non du détail de la distribution de densité avec l'altitude. Mais par la suite, lorsque l'on descend vers l'horizon, la dégradation est extrêmement rapide et le modèle devient totalement inopérant.

**Tafel der Refractionen von Cassini.**

Höhe	Refract.	Höhe	Refract.	Höhe	Refract.	Höhe	Refract.	Höhe	Refract.
0°	32' 20"	19°	2' 49"	37°	1' 18"	55°	0' 41"	73°	0' 18"
1	27 56	20	2 39	38	1 16	56	0 40	74	0 17
2	21 4	21	2 31	39	1 12	57	0 38	75	0 16
3	16 6	22	2 25	40	1 10	58	0 37	76	0 14
4	12 48	23	2 18	41	1 7	59	0 35	77	0 13
5	10 32	24	2 12	42	1 5	60	0 34	78	0 12
6	8 55	25	2 6	43	1 3	61	0 33	79	0 11
7	7 44	26	2 0	44	1 1	62	0 31	80	0 10
8	6 47	27	1 55	45	0 59	63	0 30	81	0 9
9	6 4	28	1 51	46	0 58	64	0 28	82	0 8
10	5 28	29	1 46	47	0 56	65	0 27	83	0 7
11	4 58	30	1 42	48	0 54	66	0 26	84	0 6
12	4 32	31	1 38	49	0 52	67	0 25	85	0 5
13	4 12	32	1 34	50	0 50	68	0 24	86	0 4
14	3 54	33	1 30	51	0 49	69	0 22	87	0 3
15	3 38	34	1 27	52	0 47	70	0 21	88	0 2
16	3 24	35	1 23	53	0 45	71	0 20	89	0 1
17	3 11	36	1 20	54	0 43	72	0 19	90	0 0
18	3 0								

FIGURE 4. Table de la réfraction atmosphérique selon J.-D. Cassini. Les valeurs seront utilisées dans *La Connaissance des temps*. La table est extraite de [16, p. 39].

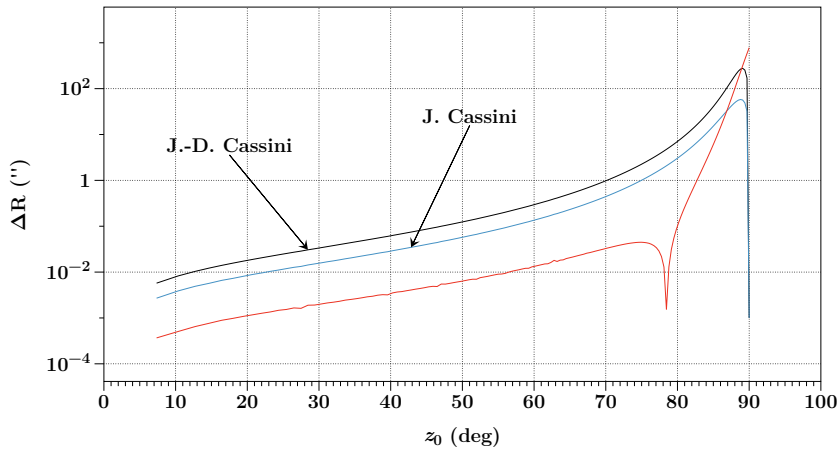


FIGURE 5. Comparaison du modèle de réfraction de Cassini à un modèle basé sur l’atmosphère standard. On a adopté  $n_0 - 1 = 0.00027714$  et contraint uniquement la réfraction horizontale à sa valeur du modèle standard, donnant  $H = 3.626$  km pour le modèle à rayons rectilignes (J.-D. Cassini) et  $H = 12.452$  km pour le modèle en arcs de cercle (J. Cassini). Le modèle rectiligne reste meilleur que  $1''$  pour  $z_0 < 70^\circ$  et  $z_0 < 75^\circ$  pour le modèle à courbure constante. La courbe en rouge est calculée pour le modèle de J.-D. Cassini mais avec  $H = 8.2$  km sans contraindre la réfraction à l’horizon. La valeur absolue de l’erreur est tracée pour supprimer les valeurs négatives et produit le point singulier à  $z_0 \approx 78^\circ$  en raison du changement de signe; il devrait être en  $\Delta\mathcal{R} = 0$ , mais l’échantillonnage et l’échelle logarithmique limitent la précision du rendu. Le modèle est excellent ( $\Delta\mathcal{R} < 1''$ ) jusqu’à  $z_0 < 83^\circ$ .

La raison de cet écart croissant et important à faible hauteur entre le modèle complet et la version de Cassini est la contrainte imposée d'une valeur fixée de la réfraction dans l'horizon. C'est cette contrainte qui conduit à l'épaisseur d'une atmosphère fictive de densité uniforme de moins de 4 km au lieu d'une valeur qui devrait être proche de 8 km. Si l'on relâche cette contrainte et que l'on utilise la valeur physique de l'atmosphère équivalente  $H = 8.2$  km, alors la représentation par l'équation (1) ou (2) est remarquable jusqu'à  $z_0 = 80^\circ$ , avec une exactitude meilleure que  $0.07''$  sur l'intervalle et même  $0.04''$  jusqu'à  $z_0 = 70^\circ$ . C'est probablement une des meilleures formules approximatives parmi les très nombreuses propositions faites pour ce domaine de hauteur. La valeur absolue de l'erreur  $\Delta R$  en secondes d'arc est donnée par la courbe rouge de la figure 5.

*TABLE des Réfractions suivant l'Ancienne & la Nouvelle Hypothèse jusques à la hauteur de trente Degrés.*

Hauteur sur l'Horizon.	Réfraction suivant l'Hypothèse rectiligne.		Réfraction suivant l'Hypothèse nouvelle.		Hauteur sur l'Horizon.	Réfraction suivant l'Hypothèse rectiligne.		Réfraction suivant l'Hypothèse nouvelle.		Hauteur sur l'Horizon.	Réfraction suivant l'Hypothèse rectiligne.		Réfraction suivant l'Hypothèse nouvelle.							
	Degrés.	M. S.	M. S.	M. S.		D. M.	M. S.	M. S.	M. S.		Minutes.	M. S.	M. S.	Minutes.	M. S.	M. S.				
0	32	20	32	20	1	0	27	56	24	19	0	0	32	20	32	20				
1	27	56	24	19	10	10	26	45	23	13	1	32	20	32	9	31	30	57	27	53
2	21	6	18	40	20	20	25	37	22	12	2	32	19	32	0	32	30	52	27	45
3	16	8	14	46	30	30	24	22	21	14	3	32	18	31	52	33	30	46	27	37
4	12	49	12	2	40	40	23	14	20	21	4	32	18	31	47	34	30	41	27	29
5	10	33	10	6	50	50	22	8	19	18	5	32	18	31	33	35	30	35	27	21
6	8	55	8	38	2	0	21	6	18	40	6	32	16	31	24	36	30	30	27	12
7	7	44	7	32	10	10	20	8	17	56	7	32	15	31	14	37	30	24	27	5
8	6	48	6	40	20	20	19	13	17	13	8	32	14	31	5	38	30	19	26	57
9	6	4	5	57	30	30	18	22	16	32	9	32	12	30	56	39	30	13	26	49
10	5	28	5	23	40	40	17	34	15	55	10	32	10	30	47	40	30	8	26	42
11	4	58	4	55	50	50	16	48	15	19	11	32	9	30	38	41	30	2	26	34
12	4	33	4	31	0	0	16	8	14	46	12	32	7	30	30	42	29	56	26	27
13	4	11	4	10	10	10	15	29	14	15	13	32	4	30	21	43	29	50	26	19
14	3	54	3	52	20	20	14	53	13	45	14	32	2	30	13	44	29	44	26	12
15	3	36	3	36	30	30	14	19	13	17	15	32	0	30	4	45	29	37	26	4
16	3	24	3	22	40	40	13	47	12	50	16	31	57	29	55	46	29	32	25	57
17	3	11	3	20	50	50	13	17	12	25	17	31	54	29	47	47	29	25	25	50
18	3	0	2	59	4	0	12	49	12	2	18	31	50	29	39	48	29	19	25	43
19	2	49	2	49	10	10	12	23	11	40	19	31	47	29	30	49	29	12	25	36
20	2	39	2	39	20	20	11	58	11	19	20	31	44	29	22	50	29	5	25	29
21	2	31	2	32	30	30	11	35	10	59	21	31	40	29	14	51	28	58	25	22
22	2	25	2	25	40	40	11	13	10	40	22	31	36	29	5	52	28	51	25	15
23	2	18	2	18	50	50	10	52	10	22	23	31	33	28	57	53	28	45	25	8
24	2	12	2	12	0	0	10	33	10	6	24	31	29	28	49	54	28	38	25	1
25	2	6	2	6	10	10	10	15	9	50	25	31	25	28	41	55	28	32	24	54
26	2	0	2	0	20	20	9	58	9	34	26	31	21	28	33	56	28	25	24	47
27	1	55	1	55	30	30	9	42	9	19	27	31	16	28	25	57	28	18	24	40
28	1	51	1	51	40	40	9	25	9	5	28	31	11	28	19	58	28	11	24	33
29	1	46	1	46	50	50	9	10	8	51	29	31	7	28	9	59	28	4	24	26
30	1	42	1	42	6	0	8	35	8	38	30	31	3	28	1	60	27	57	24	19

FIGURE 6. Table de la réfraction astronomique calculée selon la théorie de J.-D. Cassini, complétée par J. Cassini, avec les contraintes à  $z_0 = 80^\circ$  et  $90^\circ$ . Source : *Mémoire de l'Académie Royale des Sciences* (1714), p. 33-54.

### 3.2. Jacques Cassini

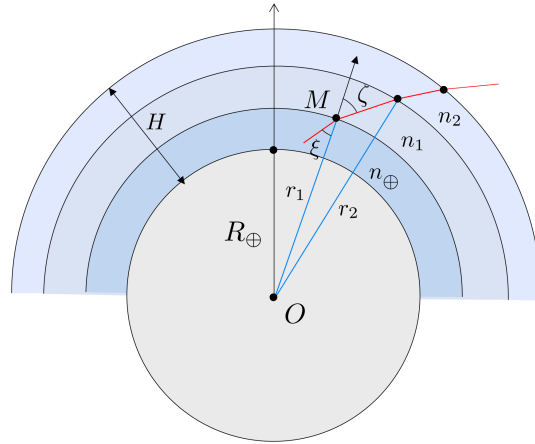
Le mémoire mentionné plus haut de J. Cassini (1677–1756) va plus loin que ce simple modèle à une couche. Il est conscient que le trajet rectiligne de la lumière à partir de la couche la plus externe de l'atmosphère n'est pas réaliste et que l'effet est progressif allant en augmentant lorsque l'on se rapproche de la surface terrestre. De plus, l'épaisseur de l'atmosphère trouvée ne peut approcher la réalité, bien en dessous des sommets des Alpes. J. Cassini développe deux modèles alternatifs, bien plus proches de la réalité et, à ma connaissance, qui ne semblent pas avoir attiré l'attention des historiens. Il suppose tout d'abord un modèle en couches sphériques tel que les déviations soient constantes pour chaque traversée de couches d'égale épaisseur. La ligne brisée est alors un arc de polygone (figure 7) et il admet que la ligne tend vers un cercle pour des couches infiniment minces. La ligne droite de J.-D. Cassini est donc remplacée par un arc de cercle et donc une géométrie illustrée sur la figure 8 un peu plus compliquée, mais sans réelle difficulté, et cela conduit à l'équation de la réfraction (5) au premier ordre en  $x = H/R_{\oplus}$  avec  $n_{\oplus}$  pour l'indice de réfraction de la couche au niveau du sol,

$$\frac{2x}{(n_{\oplus} - 1)^2 \sin^2 z_0} \sin^2 \frac{\mathcal{R}}{2} + \frac{2}{(n_{\oplus} - 1) \sin z_0} \sin \frac{\mathcal{R}}{2} \cos \left( z_0 + \frac{\mathcal{R}}{2} \right) - 1 = 0 \quad (5)$$

dont la racine positive donne  $\sin(\mathcal{R}/2)$ . La réfraction étant un petit angle et  $1 - \cos(\mathcal{R}/2) < 10^{-5}$ , on peut développer le second terme en cosinus et obtenir une équation du second degré en  $\sin(\mathcal{R}/2)$ . En tenant compte de la hiérarchie des petits termes on trouve finalement l'approximation,

$$\mathcal{R}(z_0) \approx (n_{\oplus} - 1) \left( 1 - \frac{x}{2} \right) \tan z_0 + \frac{(n_{\oplus} - 1)^2 - (n_{\oplus} - 1)x}{2} \tan^3 z_0 \quad (6)$$

qui est identique à (24), avec  $H = 2\mathcal{H}$ .



**FIGURE 7.** Modèle de la réfraction astronomique selon J. Cassini (1677–1756), avec des couches d'égales épaisseurs et d'indice constant. Le rayon suit une ligne polygonale, dont les côtés ne sont pas nécessairement égaux.

Pour obtenir (5) dans une atmosphère d'épaisseur  $H$ , on a considéré des rayons lumineux de courbure  $1/\kappa$  constante déterminée par

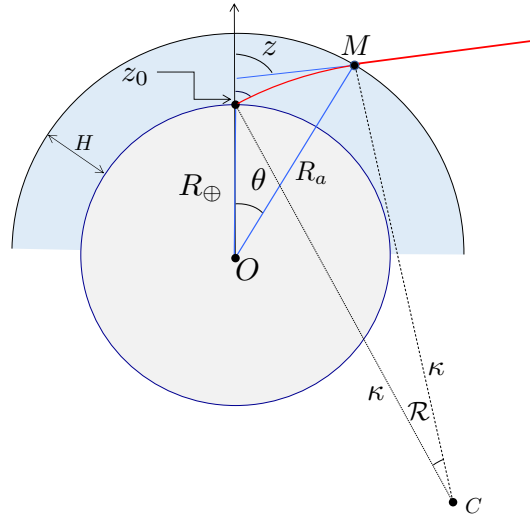
$$\frac{n_{\oplus}}{\kappa} = -\sin z_0 \frac{dn}{dh} = \sin z_0 \frac{n_{\oplus} - 1}{H}$$

sachant qu'il est difficile de comprendre les détails du modèle chez J. Cassini, qui ne donne que les grandes lignes et des résultats numériques. Avec les mêmes conditions aux limites, J. Cassini parvient à une épaisseur de l'atmosphère plus raisonnable de 13.4km, qu'il juge cependant encore peu conforme aux idées de son temps.

L. Dettwiller (com. pers.) partant de la même géométrie a obtenu une solution exacte de la réfraction, sans passer par l'équation du second degré et l'approximation au premier ordre en  $H/R_{\oplus}$  :

$$\mathcal{R} = \cos^{-1} \left[ \frac{\kappa - R_{\oplus} \sin z_0 - \frac{H}{\kappa} \left( R_{\oplus} + \frac{H}{2} \right)}{(\kappa^2 + R_{\oplus}^2 - 2\kappa R_{\oplus} \sin z_0)^{1/2}} \right] - \cos^{-1} \left[ \frac{\kappa - R_{\oplus} \sin z_0}{(\kappa^2 + R_{\oplus}^2 - 2\kappa R_{\oplus} \sin z_0)^{1/2}} \right] \quad (7)$$

Au plan numérique, et pour les paramètres de J. Cassini, les deux expressions (5) et (7) conduisent à des valeurs de la réfraction ne différant jamais de plus de  $1''$  entre la verticale et l'horizon. En omettant le terme en  $H^2$  dans (7), puisque (5) est du premier ordre, l'écart maximum devient  $0.002''$  à l'horizon, ce qui fournit une belle validation croisée des expressions obtenues tout à fait indépendamment l'une de l'autre.



**FIGURE 8.** Modèle de la réfraction astronomique selon J. Cassini (1677–1756), à partir d'un rayon lumineux de courbure constante durant sa traversée de l'atmosphère. L'angle de réfraction  $\mathcal{R}$  est égal à la différence  $z - z_0$  entre la distance zénithale vraie  $z$  et la distance zénithale apparente  $z_0$ , et est aussi égal à l'angle entre les deux rayons extrêmes issus du centre de courbure  $C$ .

Le second modèle substitue au cercle un arc parabolique, et sans surprise pour des arcs aussi petits, il n'y a pas de différence notable entre les deux. Compte tenu de la simplicité du modèle et de sa qualité aux hauteurs des astres qui concernent les astronomes, on comprend que les tables de *La Connaissance des temps* utilisèrent ce modèle pendant plusieurs décennies, de 1685 à 1765 plus précisément, comme cela est indiqué dans ce travail de P. Descamps disponible en ligne : <https://cdt.imcce.fr/exhibits/show/les-tables-des-r-fractions-as>. Les tables sont données initialement avec un pas de  $1^\circ$  et une précision de  $1'$  pour la réfraction et ce n'est qu'à partir de 1702 que l'on trouve une table d'aspect moderne, avec la réfraction donnée à la seconde de degré. Les valeurs à l'horizon et à  $z_0 = 80^\circ$  sont bien celles des conditions aux limites de Cassini.

On a tracé sur la figure 5 la différence entre ce modèle et une intégration moderne. On constate l'amélioration sensible par rapport au modèle rectiligne, avec une exactitude meilleure que la seconde d'arc jusqu'à  $z_0 = 75^\circ$ . Au-delà de  $80^\circ$ , le modèle n'a plus aucune validité.

J. Cassini a publié en même temps une table comparative des deux solutions reproduite figure 6, avec trois résolutions angulaires différentes au voisinage du rayon horizontal : un pas de  $1^\circ$ , puis de  $10'$  et enfin de  $1'$ .

### 3.3. I. Newton

La contribution de I. Newton (1642–1727) est intéressante à plus d'un titre. Tout d'abord par la notoriété de l'auteur, car on l'imagine mal passant des jours entiers à calculer une table pour l'astronomie pratique. Ensuite, il est bien connu que tout phénomène naturel qui est passé entre ses mains est la garantie d'un examen approfondi, si ce n'est définitif. Au minimum il fallait que I. Newton y vît un enjeu de *Philosophie Naturelle*. Enfin, de par le fait qu'il n'a rien publié et qu'il faut se contenter d'une mention par E. Halley accompagnée d'une table (figure 9) dont il nous dit qu'il l'a reçue du *Grand Homme*. À ce jour il faut faire confiance aux reconstructions de L. Euler, P. S. de Laplace, J.-B. Biot et de celles des historiens, pour se faire une idée ce qu'a pu être l'approche de I. Newton. Voir à ce sujet deux études très récentes [21, 22]. En terme pratique pour les astronomes, qui recherchent une table ou une formule aussi exacte que possible, la table de Newton n'a pas eu d'impact et n'a jamais été à la base des publications des éphémérides en Angleterre ou en France. En revanche, la méthode essentiellement numérique de I. Newton ouvre un chemin qui sera suivi par J.-B. Biot et par les astronomes contemporains. On peut aussi penser que I. Newton n'a pas été convaincu par ses essais et n'a pas voulu donner suite, ce qui en soit est une indication supplémentaire que ce problème est vraiment difficile.

Newton suppose qu'un rayon lumineux est composé de corpuscules dont la vitesse  $v$  est proportionnelle à l'indice de réfraction du milieu qu'elles traversent. À l'interface plane entre deux milieux, la composante de la vitesse le long de la tangente à l'interface est conservée. Cela conduit à la loi de Snell–Descartes pour la théorie corpusculaire. Avec sa parfaite maîtrise des équations du mouvement des planètes, I. Newton écrit l'équation correspondante pour la trajectoire des corpuscules, dont l'intégration donnerait la tangente en tout point, donc la réfraction par comparaison des tangentes au sol et hors de l'atmosphère.

Il prend pour la masse volumique de l'air une décroissance exponentielle avec la hauteur, c'est-à-dire un modèle physique proche de celui d'une atmosphère isotherme, voire identique. Ce modèle va connaître une grande fortune comme approche analytique permettant d'aller assez loin dans la solution. P. S. de Laplace et d'autres vont montrer que cette décroissance est trop rapide et l'idée d'une atmosphère à température constante est contredite de manière évidente par des mesures en altitude, bien avant l'aérostation.

## 4. Théories modernes de la réfraction

Fondamentalement, dès la connaissance de la loi de Snell–Descartes et la maîtrise du calcul différentiel, les équations de la trajectoire du rayon lumineux ou l'intégrale donnant la réfraction peuvent être écrites. Ce qui sera fait dès 1715 par B. Taylor dans *Methodus Incrementorum* (Prop. XXVII, Prob. XXII, figure 10).<sup>3</sup> Retrouvé de façon très naturelle par de nombreux auteurs, ce résultat se trouve aujourd'hui dans tous les ouvrages traitant de cette question. Nous ne ferons pas exception en établissant ces formules plus bas par plusieurs méthodes. La solution de cette

<sup>3</sup>C'est dans cet ouvrage que se trouve le fameux développement de Taylor d'une fonction dérivable, qui entre les mains de J. L. Lagrange et de ses successeurs deviendra un outil théorique de premier plan pour l'analyse.

( 172 )

*Tabula Refractionum Siderum ad Altitudines  
apparentes.*

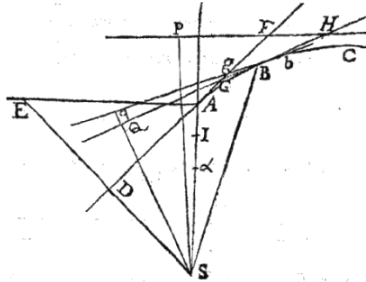
Alt. Appar. deg. m.	Retra- ctio. m. sec.	Alt. Appar. deg.	Retra- ctio. m. sec.	Alt. Appar. deg.	Retra- ctio. m. sec.
0 0	33 45	16	3 4	46	0 52
0 15	30 24	17	2 53	47	0 50
0 30	27 35	18	2 43	48	0 48
0 45	25 11	19	2 34	49	0 47
1 0	23 7	20	2 26	50	0 45
1 15	21 20	21	2 18	51	0 44
1 30	19 46	22	2 11	52	0 42
1 45	18 22	23	2 5	53	0 40
2 0	17 8	24	1 59	54	0 39
2 30	15 2	25	1 54	55	0 38
3 0	13 20	26	1 49	56	0 36
3 30	11 57	27	1 44	57	0 35
4 0	10 48	28	1 40	58	0 34
4 30	9 50	29	1 36	59	0 32
5 0	9 2	30	1 32	60	0 31
5 30	8 21	31	1 28	61	0 30
6 0	7 45	32	1 25	62	0 28
6 30	7 14	33	1 22	63	0 27
7 0	6 47	34	1 19	64	0 26
7 30	6 22	35	1 16	65	0 25
8 0	6 0	36	1 13	66	0 24
8 30	5 40	37	1 11	67	0 23
9 0	5 22	38	1 8	68	0 22
9 30	5 6	39	1 6	69	0 21
10 0	4 52	40	1 4	70	0 20
11 0	4 27	41	1 2	71	0 19
12 0	4 5	42	1 0	72	0 18
13 0	3 47	43	0 58	73	0 17
14 0	3 31	44	0 56	74	0 16
15 0	3 17	45	0 54	75	0 15

FIGURE 9. Table de la réfraction astronomique selon I. Newton. La table a été communi-  
quée par E. Halley dans [20].



**PROP. XXVII. PROB. XXII.**

*To find the refraction of the light rays passing through the atmosphere of the earth.*



Let S be the centre of the earth, ABC the radius of a curved light ray, that touches the lines AG; BG in A and B, and these tangents mutually cross each other in G, and the perpendiculars sD and SQ are sent to the tangents, and SA and SB are drawn; and at A the normal of SA, AE is drawn crossing SD in E, and A is a given fixed point on the ray, and B is a variable point. Let SA = a, SD = b, SE = t (=  $\frac{aa}{b}$ ), SB = x, d is the density at A, y the density at B. [p. 109.]

**FIGURE 10.** Première apparition de l'équation fondamentale de la réfraction atmosphérique dans le *Methodus Incrementorum* de Brook Taylor en 1715. La proposition est donnée comme un exemple d'application de sa méthode des différences finies.

équation ou le calcul de la valeur de l'intégrale de réfraction sont une autre histoire. Ce n'est plus simplement une question de mathématique, mais principalement de physique de l'atmosphère, puisqu'il faut introduire la loi de la variation de l'indice de réfraction de l'air avec l'altitude.

4.1. *Équations fondamentales*

4.1.1. *Première méthode*

Soit maintenant un modèle plus réaliste avec une atmosphère à symétrie sphérique, dans laquelle toutes les propriétés physiques, dont l'indice de réfraction, ne dépendent que de la distance  $r$  au centre de la Terre, assimilée à une sphère. En utilisant l'altitude  $h$ , on aura également  $h = r - R_{\oplus}$ .<sup>4</sup> La géométrie du rayon lumineux est représentée sur la figure 11, avec le point courant  $M$  dans l'atmosphère et la distance zénithale locale apparente  $\zeta$ , direction du vecteur tangent au rayon lumineux rapportée à l'axe tournant  $OM$ . La distance zénithale apparente pour l'observateur est  $z_0$  et la distance zénithale vraie  $\mathcal{Z}_{\infty}$ , valeur de  $\mathcal{Z}$  pour  $\zeta_{\infty}$ . Comme auparavant, on a  $\mathcal{R} = \mathcal{Z}_{\infty} - z_0$  et l'infini se comprend comme étant la sortie de l'atmosphère, lorsque la trajectoire est rectiligne.

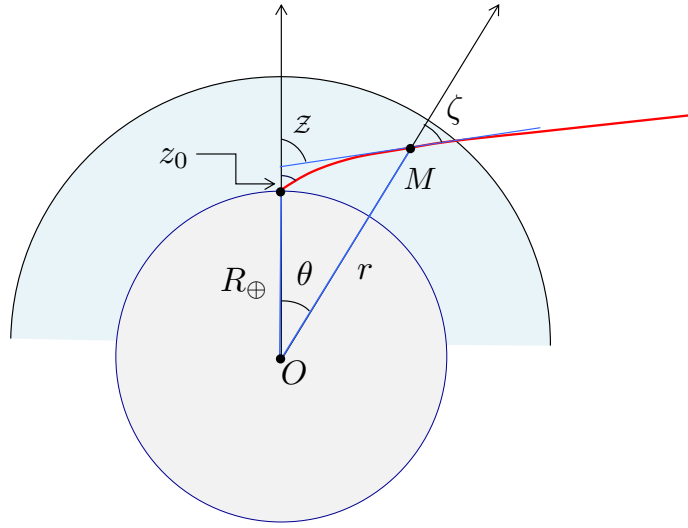
L'équation différentielle générale de la propagation d'un rayon lumineux a la forme [23] :

$$\frac{d(n\mathbf{T})}{ds} = \nabla n(\mathbf{r}) \tag{8}$$

où  $\mathbf{T}$  désigne le vecteur tangent unitaire le long du rayon lumineux et  $\mathbf{r}$  le vecteur position du point courant rapporté au centre de la Terre. La symétrie sphérique entraîne :

$$\frac{d(n\mathbf{r} \times \mathbf{T})}{ds} = 0$$

<sup>4</sup>Le contexte (et la notation) permet toujours de distinguer l'altitude  $h$  (en m, km) de la hauteur angulaire  $\eta = 90^\circ - z$ , mais autant que possible dans ce texte on utilise la distance zénithale chaque fois que cela est possible.



**FIGURE 11.** Notations du modèle général de réfraction avec atmosphère à symétrie sphérique.  $z_0$  est la distance zénithale *réfractée*,  $\mathcal{Z}$  l'angle de la direction du vecteur tangent au rayon lumineux au point courant  $M$  rapportée à la verticale de l'observateur, alors que  $\zeta$  est la distance zénithale locale le long du rayon lumineux. On a  $\mathcal{R} = z - z_0$ , avec  $z = \mathcal{Z}_\infty$  la valeur de  $\mathcal{Z}$  hors de l'atmosphère, égale à la distance zénithale vraie.

et donc l'existence d'une intégrale première,

$$nr \times \mathbf{T} = \mathbf{cte}$$

qui s'exprime par,

$$nr \sin \zeta = C \quad (9)$$

Ceci est la généralisation au cas sphérique de l'invariant  $n \sin i = Cte$  de l'approximation des plans parallèles. L'intégrale première de l'équation des rayons lumineux à symétrie sphérique est aussi l'équivalent de la conservation du moment angulaire et de l'intégrale des aires pour la dynamique à forces centrales.

On a alors les relations géométriques qui relient les différentes grandeurs de la figure 11,

$$\mathcal{Z} = \theta + \zeta \quad (10a)$$

$$r' = \frac{dr}{d\theta} \quad (10b)$$

$$\tan \zeta = \frac{r}{r'} \quad (10c)$$

$$\mathcal{R} = z - z_0 \quad (10d)$$

$$z = \mathcal{Z}_\infty \quad (10e)$$

$$z_0 = \zeta_0 \quad (10f)$$

En notant que, lors d'un déplacement élémentaire du point  $M$ , le changement infinitésimal d'orientation de la tangente donné par  $d\mathcal{Z}$  est aussi la contribution à la réfraction pour ce déplacement, nous pouvons écrire :

$$d\mathcal{R} = d\mathcal{Z} = d\theta + d\zeta$$

puis :

$$d\mathcal{R} = \frac{\tan\zeta}{r} dr + d\zeta$$

Ensuite avec (9),

$$d(nr \sin\zeta) = 0$$

on a :

$$\tan\zeta \frac{dn}{n} + \tan\zeta \frac{dr}{r} + d\zeta = 0$$

ce qui conduit immédiatement à,

$$\mathcal{R} = -\frac{\tan\zeta}{n} dn \quad (11)$$

pour l'équation différentielle donnant la variation de la réfraction. Finalement, la quadrature,

$$\mathcal{R} = \int_1^{n_0} \frac{\tan\zeta}{n} dn \quad (12)$$

(où  $n_0$  désigne l'indice au niveau de l'observateur) conduit à l'intégrale de la réfraction (la disparition du signe moins provient du choix des bornes de l'intégrale). Il faut des relations supplémentaires pour aller plus loin, et lier  $\zeta$  et  $n$ , et plus exactement deux relations paramétriques qui relient  $\zeta$  et  $r$  et également  $n(r)$ . On a une intégrale impropre lorsque  $\zeta \rightarrow \pi/2$ , ce qui se produit pour un observateur qui observe à l'horizon.

#### 4.1.2. Deuxième méthode

Ce résultat est suffisamment important pour justifier une autre démonstration, cette fois-ci très géométrique. La réfraction élémentaire lors d'une propagation infinitésimale  $ds$  le long du rayon, n'est rien d'autre que la variation d'orientation  $d\mathcal{R}$  de la tangente durant ce trajet. Donc  $d\mathcal{R} = |d\mathbf{T}|$ . Mais,

$$\left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \frac{1}{\kappa} \quad (13)$$

où  $\kappa$  est le rayon de courbure du rayon lumineux au point considéré. Ainsi, entre les points extrêmes du rayon lumineux  $\mathcal{Z}$ ,

$$\mathcal{R} = \int_{\mathcal{Z}} \frac{ds}{\kappa} \quad (14)$$

Maintenant l'équation différentielle du rayon lumineux (8) projetée sur la normale au rayon donne pour un milieu à symétrie sphérique avec  $n = n(r)$ ,

$$\frac{n}{\kappa} = \nabla n \cdot \mathbf{N} = -\frac{dn}{dr} \sin\zeta \quad (15)$$

puisque  $\zeta$  est l'angle entre le rayon vecteur et la tangente au rayon. On a également  $dr/ds = \cos\zeta$  et finalement,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \int_{\mathcal{Z}} \frac{ds}{\kappa} \\ &= \int_{\mathcal{Z}} -\frac{dn}{dr} \frac{\sin\zeta}{n} ds \\ &= \int_1^{n_0} \tan\zeta \frac{dn}{n} \end{aligned}$$

identique à (12) pour un chemin sur le rayon lumineux entre l'infini et l'observateur.

En passant, nous avons trouvé la courbure du rayon lumineux avec l'équation (15), qui donne au sol pour une distance zénithale  $z_0$  et en prenant  $n_0 \sim 1$ ,

$$\frac{1}{\kappa} = -\frac{dn}{dh} \sin z_0 \quad (16)$$

indiquant que la courbure est maximum pour les rayons dans l'horizon et nulle pour un rayon vertical. Au sol nous avons  $n - 1 = 0.000277$  et en gros  $n - 1 \sim 0$  à  $h \sim 8\text{km}$  soit  $\Delta n/\Delta h \sim -3.5 \times 10^{-5} \text{km}^{-1}$ . C'est un bon ordre de grandeur puisque la valeur standard à  $h = 0$  est  $dn/dh = -2.67 \times 10^{-5} \text{km}^{-1}$ , conduisant à  $\kappa \sim 37500 \text{km}$  pour  $z_0 = 90^\circ$  et,

$$k = \frac{R_\oplus}{\kappa} = 0.17 \quad (17)$$

indiquant que la courbure du rayon lumineux horizontal dans les conditions standards est environ six fois plus faible que celle de la Terre.

À noter que l'intégrale de la réfraction (12) n'est pas adaptée pour étudier le cas le plus simple du modèle de Cassini, puisque toute la variation de l'indice  $n$  est concentrée à une distance particulière.

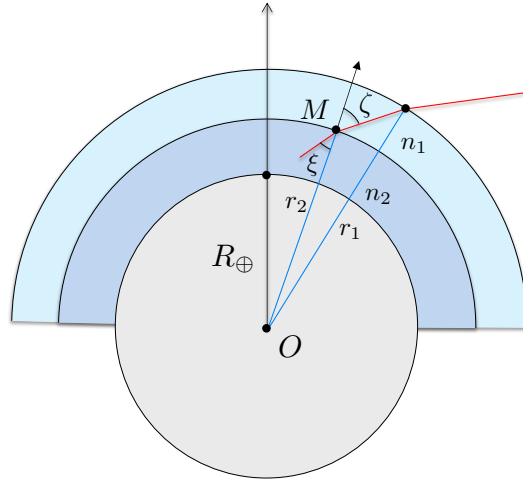


FIGURE 12. Modèle discret à couches sphériques utilisé dans la sous-sous-section 4.1.3.

#### 4.1.3. Méthode discrète

Une approche plus aisée encore, prise dans [2], considère des couches d'épaisseur finie que l'on fait tendre vers zéro. La géométrie est celle de la figure 12 avec une réfraction à la séparation de deux couches d'indice de réfraction  $n_1$  et  $n_2$ . Au point  $M$  on a la relation,

$$n_1 \sin \zeta = n_2 \sin \xi$$

et en utilisant l'identité trigonométrique,

$$\tan \frac{p \pm q}{2} = \frac{\sin p \pm \sin q}{\cos p + \cos q}$$

on obtient,

$$\tan \frac{\zeta - \xi}{2} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \tan \frac{\zeta + \xi}{2}$$

Dans cette expression  $\zeta - \xi$  est la réfraction à la traversée du dioptré. En faisant tendre l'épaisseur vers zéro on transforme cette expression finie en une expression différentielle,

$$\frac{d\mathcal{R}}{2} = \frac{dn}{2n} \tan \zeta$$

qui est identique à (11) (au signe près car  $dn$  est pris de l'extérieur vers l'intérieur).

La comparaison des trois approches pour établir la même équation du phénomène physique est très instructive sur les moyens à mettre en œuvre. Dans les trois cas il faut coupler la loi élémentaire de la réfraction à des considérations géométriques, mais le niveau des connaissances préalables n'est pas identique dans les trois cas. La dernière démonstration de W. Chauvenet est certainement la plus simple et traduit le fait qu'il enseignait à des cadets de la marine peu rompus au calcul différentiel, mais après des semaines de cours de navigation astronomique, ils n'ignoraient rien de la richesse des identités trigonométriques.

## 4.2. Solutions analytiques

### 4.2.1. Transformations de l'équation fondamentale

On introduit la relation optique qui relie  $\zeta$  et  $n(r)$  avec (9), ce qui conduit à une intégrale explicite, dès que l'on connaît le modèle  $n(r)$  :

$$\mathcal{R} = \int_1^{n_0} \frac{dn}{n \left( \frac{n^2 r^2}{C^2} - 1 \right)^{1/2}} \quad (18)$$

où  $C = n_0 R_\oplus \sin z_0$ . Ainsi,

$$\mathcal{R} = \int_1^{n_0} \frac{n_0 R_\oplus \sin z_0}{(n^2 r^2 - n_0^2 R_\oplus^2 \sin^2 z_0)^{1/2}} \frac{dn}{n} \quad (19)$$

qui est la forme la plus courante de l'intégrale de la réfraction. Le résultat est exact pour une atmosphère en couches sphériques concentriques et, une fois connue la loi  $n(r)$ , un calcul numérique conduit à la valeur de la réfraction, même si cela n'a pas été la voie majoritairement suivie dans le passé.

La forme intégrale apparaît naturellement avec l'indice de réfraction  $n$  comme variable d'intégration, mais P. S. de Laplace et d'autres ont préféré introduire dès le début la masse volumique  $\rho$  de l'air avec la relation admise à l'époque,

$$n^2 - 1 = 2\nu\rho \quad (20)$$

où  $\nu$  est une constante, et également exprimer l'altitude au travers de

$$\frac{R_\oplus}{r} = 1 - s$$

avec  $s \in [0, 1]$ . En fait,  $s$  est toujours une petite quantité pour une hauteur efficace de l'atmosphère ne dépassant pas 100 km. Avec  $n_0^2 - 1 = 2\nu\rho_0$  pour (20) au niveau de l'observateur, on transforme (19) en,

$$\mathcal{R} = \int_0^{\rho_0} \frac{(1-s) \sin z_0}{\left[ 1 - \frac{2\nu\rho_0}{1+2\nu\rho_0} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) \right] \left[ \cos^2 z_0 - \frac{2\nu\rho_0}{1+2\nu\rho_0} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) + (2s - s^2) \sin^2 z_0 \right]^{1/2}} \frac{\nu\rho_0}{1+2\nu\rho_0} \frac{d\rho}{\rho} \quad (21)$$

expression impressionnante mais dans laquelle les petits paramètres ( $s, \nu\rho, \nu\rho_0$ ) sont bien isolés. Sous cette forme, cette expression est le point de départ de la théorie de P. S. de Laplace ([24, Mec. Cel, vol. IV, lib. X, §5, eq. 8286] de l'édition de N. Bowditch). Il n'y a toujours pas d'approximation dans cette dernière expression, mais juste une réécriture de l'intégrale de réfraction.

### 4.2.2. Solution élémentaire approximative

Toutes les méthodes analytiques partent des expressions (18) – (21) et les développent selon les petits paramètres, après avoir introduit une loi liant  $n$  et  $r$  ou  $\rho$  et  $s$ . Par exemple, partant de l'équation (19), une première approximation donne  $r = R_\oplus + h$ , avec  $h/R_\oplus \ll 1$ , puisque  $h < 10$  km

pour l'essentiel du phénomène. Ceci permet d'effectuer un développement au premier ordre du petit paramètre :

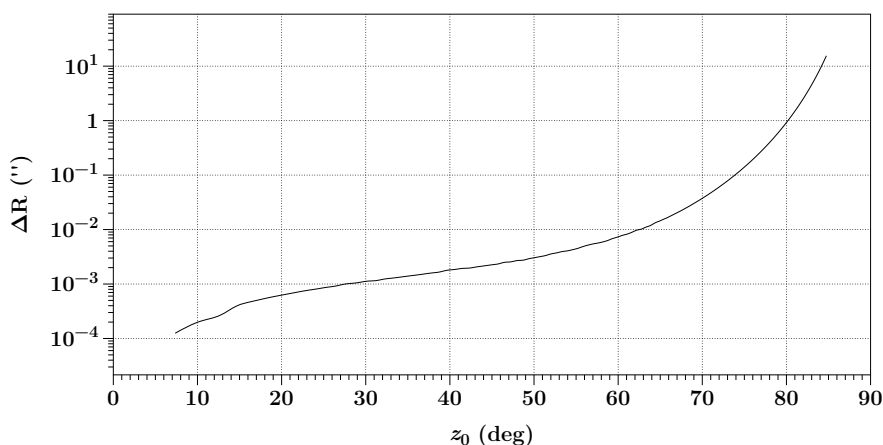
$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1 \quad (22)$$

avec :

$$\mathcal{R}_0 = n_0 \sin z_0 \int_1^{n_0} \frac{1}{(n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0)^{1/2}} \frac{dn}{n}$$

et:

$$\mathcal{R}_1 = -\frac{n_0 \sin z_0}{R_\oplus} \int_1^{n_0} \frac{hn}{(n^2 - n_0^2 \sin^2 z_0)^{3/2}} dn$$



**FIGURE 13.** Erreur dans la valeur de la réfraction calculée avec le développement (25) rapportée à une intégration numérique avec le modèle standard de l'atmosphère.

La validité du développement est assurée si  $h/R_\oplus \ll 1$  et  $\sin z_0 \ll n_0^{-1}$ , soit  $z_0 \leq 80^\circ$ , c'est-à-dire lorsque l'on ne s'approche pas trop de l'horizon. La première intégrale donnerait la réfraction si  $h/R_\oplus = 0$ , donc pour le cas de l'atmosphère à plans parallèles ou plus simplement si la Terre était plate. En toute première approximation on peut poser  $n \sim n_0 \sim 1$  tant que le dénominateur n'approche pas 0 et obtenir l'expression élémentaire,

$$\mathcal{R} = (n_0 - 1) \tan z_0$$

qui est le résultat classique pour une atmosphère à plans parallèles. Mais on peut aller plus loin avec  $\mathcal{R}_0$  puisque l'intégrale se ramène par le changement de variable  $u = n_0/n$  à,

$$\mathcal{R}_0 = \sin^{-1}(n_0 \sin z_0) - z_0$$

qui se développe en puissance de la petite quantité  $n_0 - 1$ ,

$$\mathcal{R}_0 \approx (n_0 - 1) \tan z_0 + \frac{(n_0 - 1)^2}{2} \tan^3 z_0 \quad (23)$$

Quant à  $\mathcal{R}_1$  déjà facteur du petit paramètre  $h/R_\oplus$ , on peut se contenter de l'approximation du premier ordre, en posant  $n \approx n_0 \approx 1$  dans l'intégrande, et ramener l'intégrale à

$$\mathcal{R}_1 \approx -\frac{n_0 \sin z_0}{R_\oplus} \frac{1}{\cos^3 z_0} \int_1^{n_0} h dn$$

et, avec la proportionnalité,  $n - 1 = \nu\rho$  entre la réfractivité et la masse volumique de l'air (loi empirique de Gladstone–Dale), l'intégrale se transforme en,

$$\int_0^{\rho_0} h d\rho = -[h\rho(h)]_0^{h_{\max}} + \int_0^{h_{\max}} \rho dh$$

Le terme central est nul et l'intégrale de droite est  $\rho_0 \mathcal{H}$  où  $\mathcal{H} \approx 8 \text{ km}$  est la hauteur équivalente d'une atmosphère homogène qui exercerait la pression standard au niveau de la mer. Il nous reste,

$$\mathcal{R}_1 \approx -\nu\rho_0 \frac{\mathcal{H}}{R_{\oplus}} \frac{\sin z_0}{\cos^3 z_0} = -(n_0 - 1) \frac{\mathcal{H}}{R_{\oplus}} (\tan z_0 + \tan^3 z_0)$$

qui se combine avec (23) pour donner,

$$\mathcal{R} \approx (n_0 - 1) \left(1 - \frac{\mathcal{H}}{R_{\oplus}}\right) \tan z_0 - (n_0 - 1) \left(\frac{\mathcal{H}}{R_{\oplus}} - \frac{(n_0 - 1)}{2}\right) \tan^3 z_0 \quad (24)$$

expression parfois appelée formule de Laplace et que l'on peut rapprocher de développements semblables obtenus avec la théorie de Cassini (cf. P. S. de Laplace [24, *Mec. Cel.*, vol. IV, lib. X, §8, eqs. 8474–8474c] de l'édition de N. Bowditch).

Avec les valeurs standards à  $t = 15^\circ \text{C}$  et  $P = 1013.25 \text{ hPa}$ , on a

$$\begin{aligned} n_0 - 1 &= 0.00027714 \quad \text{à } \lambda = 0.590 \mu\text{m} \\ \mathcal{H} &= 8.43 \text{ km} \\ \frac{\mathcal{H}}{R_{\oplus}} &= 0.00132 \end{aligned}$$

ce qui donne,

$$\mathcal{R} \approx 57.084'' \tan z_0 - 0.0676'' \tan^3 z_0 \quad (25)$$

bien que la procédure employée pour utiliser cette formule ait été plutôt de déterminer les deux coefficients devant  $\tan z_0$  et  $\tan^3 z_0$  à partir des observations.

À ce degré d'approximation, et donc pour des distances zénithales  $< 80^\circ$ , la réfraction astronomique dépend principalement des conditions atmosphériques au point d'observation et non du détail de la densité de l'air en fonction de l'altitude, ou de façon équivalente du profil vertical de la pression et de la température. La qualité de cette approximation est remarquable comme on peut en juger sur la figure 13 donnant pour des conditions identiques la différence avec une intégration numérique utilisant l'atmosphère standard. La formule limitée à  $\tan^3 z_0$  est suffisante pour pratiquement tous les besoins jusqu'à  $z_0 \sim 75^\circ$ . On trouvera dans [25, sect. 9.4], différentes formules ajustées jusqu'au terme en  $\tan^5 z_0$  assurant encore un meilleur accord avec le modèle numérique jusqu'à  $z_0 \sim 80^\circ$ .

#### 4.2.3. Formule de Bradley

On pose pour la loi de variation de l'indice de réfraction avec l'altitude,

$$n^{\alpha+1} r = Cte = n_0^{\alpha+1} R_{\oplus}$$

avec  $\alpha$  une constante positive. C'est aussi une manière de représenter par une expression simple la décroissance de la densité de l'atmosphère en fonction de l'altitude. Cette représentation est associée au mathématicien anglais T. Simpson (1710–1761) dans un ouvrage de 1743, mais sous cette forme elle est bien due à P. Bouguer (1698–1758) dans son mémoire de 1729 primé par l'Académie. Le traitement analytique de l'équation de la réfraction avec cette hypothèse est élémentaire et se trouve en particulier dans [2, Sect. 109].

En combinant,

$$\frac{d(nr)}{nr} = \frac{dn}{n} + \frac{dr}{r}$$

Scheinb. Höhe.	Refraction.	Scheinb. Höhe.	Refraction.	Scheinb. Höhe.	Refraction.	Scheinb. Höhe.	Refraction.
0°	0' 0".0	35	0' 39".6	70° 0'	2' 35".5	83° 0'	7' 21".1
1	0 1.0	36	0 41.1	70 30	2 39.8	83 20	7 41.1
2	0 2.0	37	0 42.6	71 0	2 44.3	83 40	8 2.9
3	0 3.0	38	0 44.2	71 30	2 49.0	84 0	8 26.6
4	0 4.0	39	0 45.9	72 0	2 53.9	84 20	8 52.7
5	0 5.0	40	0 47.6	72 30	2 59.2	84 40	9 21.3
6	0 6.0	41	0 49.4	73 0	3 4.7	85 0	9 53.0
7	0 7.0	42	0 51.2	73 30	3 10.6	85 20	10 27.9
8	0 8.0	43	0 53.1	74 0	3 16.9	85 40	11 0.8
9	0 9.0	44	0 55.0	74 30	3 23.4	86 0	11 50.2
10	0 10.0	45	0 57.0	75 0	3 30.3	86 10	12 13.7
11	0 11.0	46	0 59.0	75 20	3 35.2	20	12 38.7
12	0 12.0	47	1 1.1	75 40	3 40.3	30	13 5.2
13	0 13.0	48	1 3.3	76 0	3 45.6	40	13 33.4
14	0 14.0	49	1 5.5	76 20	3 51.2	50	14 3.2
15	0 15.1	50	1 7.9	76 40	3 57.0	87 0	14 35.1
16	0 16.2	51	1 10.4	77 0	4 3.1	10	15 8.9
17	0 17.3	52	1 13.0	77 20	4 9.5	20	15 44.7
18	0 18.4	53	1 15.7	77 40	4 16.3	30	16 23.2
19	0 19.5	54	1 18.5	78 0	4 23.4	40	17 4.4
20	0 20.6	55	1 21.4	78 20	4 30.8	87 50	17 48.1
21	0 21.7	56	1 24.4	78 40	4 38.8	88 0	18 34.8
22	0 22.9	57	1 27.6	79 0	4 47.1	10	19 24.6
23	0 24.1	58	1 31.0	79 20	4 55.9	20	20 17.8
24	0 25.3	59	1 34.6	79 40	5 5.2	30	21 14.6
25	0 26.5	60	1 38.4	80 0	5 15.1	88 40	22 15.3
26	0 27.8	61	1 42.5	80 20	5 25.6	50	23 19.8
27	0 29.1	62	1 46.9	80 40	5 36.7	89 0	24 28.7
28	0 30.4	63	1 51.4	81 0	5 48.7	10	25 42.1
29	0 31.7	64	1 56.4	81 20	6 1.4	20	27 0.1
30	0 33.0	65	2 1.7	81 40	6 15.1	89 30	28 22.9
31	0 34.2	66	2 7.5	82 0	6 29.8	40	29 50.5
32	0 35.5	67	2 13.6	82 20	6 45.6	50	31 22.8
33	0 36.8	68	2 20.3	82 40	7 2.7	90 0	33 0.0
34	0 38.2	69	2 27.5	83 0	7 21.1		

FIGURE 14. Table de la réfraction atmosphérique selon J. Bradley. Les valeurs seront utilisées dans *La Connaissance des temps* de 1767–1808. La table est extraite de [16, p. 56]. (Scheinb. Höhe = scheinbare Höhe : hauteur apparente...qui est ici une distance zénithale)

et

$$n^{\alpha+1}r = \text{Cte} \Rightarrow (\alpha + 1) \frac{dn}{n} + \frac{dr}{r} = 0 \quad (26)$$

on a

$$\frac{dn}{n} = -\frac{1}{\alpha} \frac{d(nr)}{nr}$$

que l'on reporte dans (19) avec

$$\mathcal{R} = -\frac{1}{\alpha} \int_{n_0^\alpha / \sin z_0}^{1 / \sin z_0} \frac{1}{(U^2 - 1)^{1/2}} \frac{dU}{U} \quad (27)$$

on l'on a posé,

$$U = \frac{nr}{n_0 R_\oplus \sin z_0}$$

L'intégrale (27) donne directement,

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\alpha} \left[ z_0 - \sin^{-1} \left( \frac{\sin z_0}{n_0^\alpha} \right) \right] \quad (28)$$



expression d'une grande simplicité appelée formule de Simpson. Elle sera plutôt utilisée sous une forme implicite pour la réfraction, avec

$$n_0^\alpha \sin(z_0 - \alpha \mathcal{R}) = \sin z_0$$

soit

$$\frac{n_0^\alpha - 1}{n_0^\alpha + 1} = \frac{\sin z_0 - \sin(z_0 - \alpha \mathcal{R})}{\sin z_0 + \sin(z_0 - \alpha \mathcal{R})}$$

puis

$$\tan \frac{\alpha}{2} \mathcal{R} = \frac{n_0^\alpha - 1}{n_0^\alpha + 1} \tan \left( z_0 - \frac{\alpha}{2} \mathcal{R} \right) \quad (29)$$

ou encore avec l'approximation des petits angles et  $n_0 - 1 \ll 1$ ,

$$\mathcal{R} \approx (n_0 - 1) \tan \left( z_0 - \frac{\alpha}{2} \mathcal{R} \right) \quad (30)$$

qui est la formule de Bradley, largement utilisée à partir de 1750 et durant une bonne partie du siècle suivant. Elle dépend de deux constantes, qui seront déterminées par les observations. Cependant avec (26), on a déjà,

$$\frac{dn}{dr} = -\frac{1}{\alpha + 1} \frac{n}{r}$$

donnant au niveau de la mer,

$$\left( \frac{dn}{dr} \right)_{r=R_\oplus} \approx -\frac{1}{(\alpha + 1) R_\oplus}$$

soit avec (15)–(17)  $\alpha \sim 5$ . On peut également exprimer (30), sous la forme du développement en puissance de  $\tan z_0$ . On obtient sans difficulté,

$$\mathcal{R} \approx (n_0 - 1) \left( 1 - \frac{n_0 - 1}{2} \alpha \right) \tan z_0 - \frac{\alpha (n_0 - 1)^2}{2} \tan^3 z_0$$

J. Bradley (1693-1762) a ajusté les deux paramètres sur ses observations de réfraction et obtenu  $\alpha = 6$ , alors que la confrontation à la formule de P. S. de Laplace (24) conduit plutôt à  $\alpha \approx 8$ . La figure 14 est une reproduction de la table de Bradley donnée dans [16]. On retrouve exactement ces valeurs avec (30) en adoptant  $n_0 - 1 = 0.00027663$ .

La formule de Bradley sous la forme  $\mathcal{R} = 57'' \tan(z_0 - 3\mathcal{R})$  a longtemps été utilisée, directement ou sous forme de table, par les astronomes et elle a l'avantage de ne pas diverger à l'approche de l'horizon où elle donne une réfraction horizontale  $33'$ . J. Lalande, encore en 1792 dans son *Astronomie*, donne la règle sous la forme [14, Art. 2202],

*La réfraction est comme la tangente de la distance apparente au zénith diminuée de trois fois la réfraction*

et surtout [14, Art. 2205],

*La réfraction est la septième partie de l'angle au centre de la Terre, dans lequel est renfermé tout l'espace que le rayon a parcouru dans l'atmosphère,*

donnant ainsi le rayon de courbure du rayon lumineux horizontal de l'ordre de sept fois le rayon de la Terre, valeur tout à fait correcte comme on l'a vu avec l'équation (17).

La formule de Bradley avait été établie pour une hauteur barométrique de 29.6 pouces (752 mm) et une température de 50 °F (10 °C). On ne possède que peu d'éléments expliquant la procédure de J. Bradley, mais M. Mathieu rapporte dans une note consacrée à la réfraction insérée dans [26, p. 784] que N. Maskelyne possédait un manuscrit de J. Bradley avec les différentes observations. Ce sont encore les valeurs de J. Bradley que J. F. Herschel mentionne pratiquement un siècle plus tard dans son *Outlines of Astronomy* [27], d'où est extraite cette remarque très célèbre,

*The exact estimation of the amount of atmospheric refraction is a very difficult subject of physical inquiry, one on which geometers are not yet entirely agreed.*

(J.F. Herschel, *Outline of Astronomy*, 1849, sect. 41).

et que l'on retrouve sous une forme voisine chez S. Newcomb au début du siècle suivant,

*There is probably no branch of practical astronomy on which so much has been written as on this and which is still in so unsatisfactory a state.*

(S. Newcomb, *A compendium in spherical astronomy*, 1906, sect. 118, p. 223).

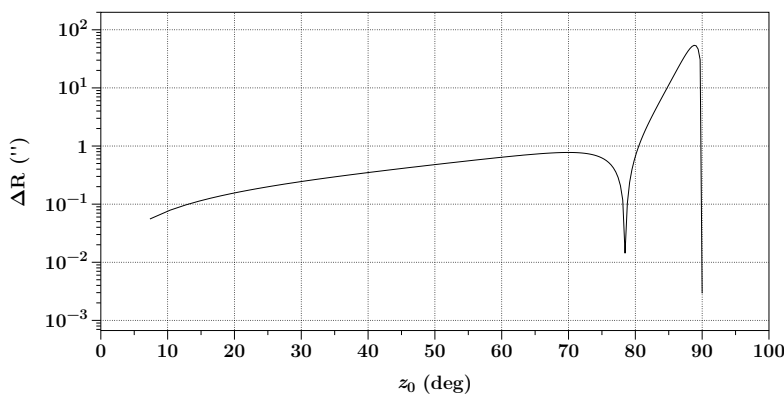
La comparaison à une intégration numérique utilisant l'atmosphère standard et en ajustant  $n_0 - 1$  pour avoir la même valeur que la table de Bradley à l'horizon conduit à la figure 15. On voit que la formule est excellente jusqu'à  $z_0 \sim 80^\circ$ , mais défaille aux plus grandes distances zénithales, sauf à l'horizon, par construction. La courbe obtenue dépend très étroitement du choix opéré pour rendre compatibles deux calculs de réfraction construits sur deux modèles d'atmosphère différents.

On remarque qu'avec (28) ou (30) on peut obtenir une formule analytique pour la réfraction à l'horizon avec

$$\mathcal{R}(z_0 = 90^\circ) \approx \sqrt{\frac{2(n_0 - 1)}{\alpha}} \approx 33.0' \quad (31)$$

qui est bien la valeur lue dans la table de Bradley. On se reportera à [2, Sects. 110-111] pour une discussion approfondie du modèle d'atmosphère équivalent à une réfraction suivant la loi de Bradley.

La formule de Bradley (30) ne dépend que de deux constantes qui peuvent être ajustées à deux contraintes (par exemple deux valeurs particulières de la réfraction) sans se soucier de leur signification physique. C'est bien ce qui a été fait au XVIII<sup>e</sup> siècle par Piazzzi, Groombridge, Brinkley et d'autres, sans nécessairement viser une bonne représentation de la réfraction horizontale, de peu d'utilité pour l'astronome praticien. Une méthode numérique d'ajustement de ces deux constantes a été développée par A. Bemporad [18, p. 209–210], mais ne présente plus d'intérêt aujourd'hui.



**FIGURE 15.** Erreur (en valeur absolue) dans le calcul de la réfraction en utilisant la formule de J. Bradley comparée à un calcul moderne. On a contraint l'égalité des deux réfractions à l'horizon et le changement de signe vers  $z_0 \approx 78^\circ$  est à l'origine de la singularité.

#### 4.2.4. Introduction à la solution de Newcomb

Les développements analytiques ont été très nombreux entre 1750 et 1900, occupant des centaines de pages de calculs, et ne peuvent trouver leur place dans ce texte de présentation. Je vais aller juste un peu plus loin pour la solution de S. Newcomb, techniquement très abordable et figurant dans un livre d'enseignement. Cette solution analytique est une des dernières qui ait donné lieu à la construction d'une table ayant fait référence, avant que les méthodes numériques ne remplacent définitivement cette approche.

Newcomb part de (19) mis sous la forme,

$$\mathcal{R} = \int_1^{n_0} \frac{\sin z_0}{\left( \frac{n^2 r^2}{n_0^2 R_\oplus^2} - \sin^2 z_0 \right)^{1/2}} \frac{dn}{n} \quad (32)$$

puis fait apparaître l'échelle de hauteur de l'atmosphère homogène,

$$\mathcal{H} = \frac{RT_0}{M_{\text{air}}g} \approx 8.4 \text{ km à } 15^\circ \text{C}$$

et l'altitude réduite  $x$  avec

$$x = \frac{h}{\mathcal{H}}$$

et

$$\frac{r}{R_\oplus} = 1 + \frac{\mathcal{H}}{R_\oplus} x$$

Ensuite S. Newcomb introduit comme Laplace avant lui, la relation (20) liant l'indice de réfraction à la masse volumique de l'air

$$n^2(\rho) - 1 = 2\nu\rho$$

puis avec les notations complémentaires,

$$w = 1 - \frac{\rho}{\rho_0} \in [0, 1]$$

on peut écrire,

$$\frac{n^2}{n_0^2} = 1 - \frac{2\nu\rho_0}{1 + 2\nu\rho_0} w$$

et en combinant ces relations géométriques et optiques il pose,

$$\frac{n^2 r^2}{n_0^2 R_\oplus^2} = 1 + 2u$$

soit,

$$1 + 2u = \left( 1 - \frac{2\nu\rho_0}{1 + 2\nu\rho_0} w \right) \left( 1 + \frac{\mathcal{H}}{R_\oplus} x \right)^2$$

Finalement avec l'approximation  $dn/n \approx dn/n_0$ , l'intégrale de la réfraction se ramène à l'une ou l'autre forme,

$$\mathcal{R}(z_0) = \frac{\nu\rho_0}{1 + \nu\rho_0} \tan z_0 \int_0^1 \frac{dw}{(1 + 2u \sec^2 z_0)^{1/2}} \quad (33)$$

$$\mathcal{R}(z_0) = \frac{\nu\rho_0}{1 + \nu\rho_0} \sin z_0 \int_0^1 \frac{dw}{(2u + \cos^2 z_0)^{1/2}} \quad (34)$$

mathématiquement équivalentes mais avec la première forme adaptée aux directions pas trop proches de l'horizon et la seconde pour ce voisinage.

À ce stade aucune approximation importante n'a été effectuée et l'intégration nécessite la loi reliant la variable  $w$  (la densité de l'air) à  $x$  (l'altitude). S. Newcomb montre que  $x < 5$ , avec une altitude efficace de l'atmosphère inférieure à 40 km, et donc que  $\mathcal{H}/R_\oplus x < 0.01$ . De plus

Table of Refractions for 50° F. Temp. and 30 in. Pressure.

App. Z.D.	Mean Refraction.	Change for		App. Z.D.	Mean Refraction.	Change for	
		10° F. Temp.	1 in. Bar.			10° F. Temp.	1 in. Bar.
0	0.00	"	"	0	58.2	- 1.1	+ 2.0
1	1.02	- 0.02	+ 0.03	45	1 0.2	- 1.2	+ 2.1
2	2.03	- 0.04	+ 0.07	46	1 2.4	- 1.3	+ 2.1
3	3.05	- 0.06	+ 0.10	47	1 4.6	- 1.3	+ 2.2
4	4.07	- 0.08	+ 0.14	48	1 6.9	- 1.3	+ 2.2
5	5.09	- 0.10	+ 0.17	49	1 9.3	- 1.4	+ 2.3
6	6.12	- 0.12	+ 0.21	50	1 11.8	- 1.4	+ 2.4
7	7.15	- 0.14	+ 0.24	51	1 14.4	- 1.5	+ 2.5
8	8.18	- 0.16	+ 0.28	52	1 17.1	- 1.5	+ 2.6
9	9.22	- 0.18	+ 0.31	53	1 20.0	- 1.6	+ 2.7
10	10.27	- 0.21	+ 0.34	54	1 23.0	- 1.6	+ 2.8
11	11.32	- 0.23	+ 0.38	55	1 26.1	- 1.7	+ 2.9
12	12.38	- 0.25	+ 0.42	56	1 29.4	- 1.7	+ 3.0
13	13.44	- 0.26	+ 0.45	57	1 32.9	- 1.8	+ 3.2
14	14.52	- 0.29	+ 0.49	58	1 36.6	- 1.9	+ 3.3
15	15.60	- 0.31	+ 0.53	59	1 40.5	- 2.0	+ 3.4
16	16.70	- 0.33	+ 0.56	60	1 44.6	- 2.1	+ 3.6
17	17.80	- 0.35	+ 0.60	61	1 49.1	- 2.2	+ 3.7
18	18.92	- 0.37	+ 0.64	62	1 53.8	- 2.2	+ 3.9
19	20.04	- 0.39	+ 0.68	63	1 58.8	- 2.3	+ 4.0
20	21.19	- 0.42	+ 0.72	64	2 4.2	- 2.4	+ 4.2
21	22.35	- 0.44	+ 0.76	65	2 10.0	- 2.5	+ 4.4
22	23.52	- 0.46	+ 0.80	66	2 16.3	- 2.6	+ 4.6
23	24.71	- 0.48	+ 0.84	67	2 23.1	- 2.8	+ 4.9
24	25.92	- 0.51	+ 0.88	68	2 30.5	- 2.9	+ 5.1
25	27.15	- 0.54	+ 0.92	69	2 38.6	- 3.1	+ 5.4
26	28.39	- 0.56	+ 0.97	70	2 47.5	- 3.3	+ 5.7
27	29.66	- 0.58	+ 1.01	71	2 57.3	- 3.5	+ 6.0
28	30.95	- 0.60	+ 1.05	72	3 8.2	- 3.7	+ 6.4
29	32.26	- 0.63	+ 1.10	73	3 20.3	- 4.0	+ 6.8
30	33.60	- 0.65	+ 1.15	74	3 33.9	- 4.3	+ 7.3
31	34.97	- 0.69	+ 1.19	75	3 49.4	- 4.6	+ 7.8
32	36.37	- 0.72	+ 1.23	76	4 7.0	- 5.0	+ 8.3
33	37.79	- 0.74	+ 1.28	77	4 27.4	- 5.5	+ 9.0
34	39.26	- 0.77	+ 1.33	78	4 51.1	- 6.0	+ 9.9
35	40.75	- 0.80	+ 1.38	79	5 19.0	- 6.5	+ 10.9
36	42.28	- 0.83	+ 1.43	80	5 52.5	- 7.3	+ 12.0
37	43.84	- 0.86	+ 1.48	81	6 33.2	- 8.2	+ 13.4
38	45.46	- 0.89	+ 1.54	82	7 23.7	- 9.3	+ 15.3
39	47.12	- 0.92	+ 1.60	83	8 27.7	- 10.8	+ 17.5
40	48.82	- 0.96	+ 1.66	84	9 51.4	- 12.9	+ 20.4
41	50.57	- 0.99	+ 1.72	85	11 44.3	- 16.0	+ 24.3
42	52.37	- 1.02	+ 1.78	86	14 22.6	- 20.6	+ 30.0
43	54.24	- 1.07	+ 1.84	87	18 16.1	- 28.3	+ 38.6
44	56.17	- 1.10	+ 1.91	88	24 20.6	- 41.7	+ 52.4
45	58.16	- 1.14	+ 1.97	89	34 32.1	- 68.6	+ 76.5

FIGURE 16. Table de la réfraction atmosphérique selon S. Newcomb, incluant les variations de température et de pression. La table est extraite de [3, p. 433] et doit être comparée au calcul moderne des tables 1-2.

$v\rho_0 \approx n_0 - 1 < 0.0003$  et avec  $w < 1$  on voit que  $u$  est un terme de très faible amplitude et que l'on peut assimiler à,

$$u \approx \frac{\mathcal{H}}{R_\oplus} x - \frac{v\rho_0}{1 + 2v\rho_0} w \tag{35}$$

Tant que  $z_0 < 81^\circ$  alors  $2u \sec^2 z_0 < 1$  et le dénominateur de (33) peut être développé en séries,

$$(1 + 2u \sec^2 z_0)^{-1/2} \approx 1 - u \sec^2 z_0 + \frac{3}{2} u^2 \sec^4 z_0 - \frac{5}{2} u^3 \sec^6 z_0 + \dots$$

qui ne laisseront que des intégrales de la forme,

$$\int_0^1 u^k dw$$

avec  $u(w)$  donné par (35) et donc après développement binomial, des termes génériques du type,

$$\mathcal{J}_{mn} = \int_0^1 x^m w^n dw$$

On voit très rapidement que le premier terme en  $u$  va conduire à la densité intégrée sur l'épaisseur de l'atmosphère,

$$\int_0^{\mathcal{H}} \rho dh$$

et donc, que le coefficient du terme en  $\tan^3 z_0$  est indépendant de la loi de variation de la densité avec l'altitude, conformément au *théorème* d'Oriani–Laplace.

S. Newcomb envisage ensuite différentes lois de décroissance de la densité, à commencer par l'hypothèse de I. Newton de l'atmosphère isotherme

$$\rho = \rho_0 e^{-x}$$

puis celle de J. Ivory (1765-1842) correspondant en fait à une diminution de la température à taux uniforme avec l'altitude, que nous allons retrouver avec l'atmosphère standard dans la section suivante. Dans ce cas, la densité prend la forme,

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{x}{\beta}\right)^{\beta-1}$$

où  $\beta$  est un coefficient sans dimension de l'ordre de 5 (voir plus bas ce même coefficient dans les équations (46), (47)). S. Newcomb ramène les intégrales à des formes eulériennes permettant de conduire le calcul de la réfraction avec un développement en puissances de  $\sec^2 z_0$  en fonction des quelques constantes physiques du modèle. Il détermine également les effets d'un changement des conditions de référence pour la température et la pression. Cela donne finalement la table de la figure 16, donnant la valeur de la réfraction jusqu'à l'horizon pour un observateur au niveau de la mer, et les coefficients à appliquer pour une différence de température ou de pression. La table n'étant pas numérisée, je donne dans la table 1 la comparaison sous la forme d'une table calculée pour les mêmes conditions de température et de pression et arrangée très semblablement à celle de S. Newcomb pour faciliter la comparaison. Le modèle utilisé est celui des couches de l'atmosphère standard avec, dans la troposphère,  $dT/dh = -6.5$  K/km. On voit que l'accord est parfait à mieux que  $0.1''$  jusqu'à  $z_0 \sim 85^\circ$  et que la différence ne devient sensible qu'à l'horizon avec  $30''$  de différence pour la réfraction horizontale. Mais un simple changement, relativement bénin, du taux de décroissance de la température dans la troposphère en prenant  $dT/dh = -5.5$  K/km, conduit à la table 2, et à un accord quasi parfait sur toute l'étendue de la table. On remarquera que même avec cette modification les deux tables sont strictement identiques jusqu'à  $z_0 = 79^\circ$ .

Il n'est pas possible de connaître avec toute la précision voulue le modèle équivalent employé par S. Newcomb jusqu'à l'horizon, mais cette expérience montre qu'il est vain de comparer les tables dans le voisinage extrême de l'horizon. Une variation raisonnable d'un ou deux paramètres physiques peut modifier la réfraction à l'horizon de une à deux minutes d'arc sans qu'il soit possible d'affirmer qu'une solution est meilleure que l'autre. Elles sont juste un peu différentes, et probablement tout aussi inexactes. Les astronomes ont remarqué depuis longtemps que la réfraction aux faibles hauteurs pouvait subir des changements notables d'un jour à l'autre alors que les conditions atmosphériques locales étaient restées à peu près identiques. On ne peut maîtriser les conditions atmosphériques rencontrées par le rayon horizontal durant les  $\sim 1\ 000$

km de son parcours dans l'air, et même si c'était le cas, il restera toujours les derniers mètres au-dessus du sol dont l'effet peut avoir une influence majeure sur la réfraction.

Enfin, pour la partie principale de la table, il ne faut pas trop s'étonner de l'accord et lui attribuer plus de mérite qu'il ne convient, puisque reprenant l'hypothèse de J. Ivory, le calcul de S. Newcomb correspond à une atmosphère avec une température décroissante à taux constant avec l'altitude. C'est précisément le cas de la troposphère de l'atmosphère standard utilisée pour le calcul numérique où se déroule l'essentiel de la réfraction. Donc la comparaison montre surtout un accord entre une intégration numérique et un calcul analytique reposant sur des hypothèses physiques très voisines. En somme si je valide S. Newcomb par ce calcul, à l'inverse la confiance que je place dans son expertise permet de valider mon implémentation.

Avec la table de S. Newcomb, et en France celle de R. Radau (1835–1911) à la même époque, on est parvenu à une solution satisfaisante qui rendait compte au mieux de la réfraction pour l'astronome praticien qui n'avait jamais besoin de la valeur horizontale. Le problème n'est plus le calcul de la table à partir d'un modèle et quelques contraintes venant de l'observation, mais bien la signification de ces nombres par rapport au phénomène réel et sa grande variabilité près de l'horizon en fonction du lieu, de l'heure et de la stratification en température des basses couches de l'atmosphère. Pour l'astrométrie de haute précision, le problème de la qualité de la mesure résultant de la réfraction ne peut se résoudre par de nouvelles tables, aussi élaborées soient-elles. Le problème est ailleurs maintenant et, tant que l'on observera du sol, il sera impossible de s'affranchir parfaitement de l'atmosphère et de tous ses effets sur les images. La réfraction est le problème de l'astrométriste, la qualité des images (au sens large car cela concerne les spectres par exemple) est le problème de tout astronome qui incorpore l'atmosphère comme une des composantes de son système optique.

**TABLE 1.** Réfraction pour les conditions standards de S. Newcomb ( $P = 30$  inches = 1 015.9 hPa,  $t = 50$  °F = 10 °C) et  $\lambda = 0.590 \mu\text{m}$ , calculée par une méthode numérique utilisant le modèle en couches de l'atmosphère standard avec  $dT/dh = -6.5$  K/km. Table à comparer à la figure 16.

$z_0$ deg	$z_0 \leq 45^\circ$ variation			$z_0$ deg	$z_0 \geq 45^\circ$ variation		
	$\mathcal{R}$ "	10 °F "	1 inch "		$\mathcal{R}$ ' "	10 °F "	1 inch "
0	0.00	-0.00	0.00	45	00 58.2	-1.1	1.9
1	1.02	-0.02	0.03	46	01 00.2	-1.2	2.0
2	2.03	-0.04	0.07	47	01 02.4	-1.2	2.1
3	3.05	-0.06	0.10	48	01 04.6	-1.3	2.2
4	4.07	-0.08	0.14	49	01 06.9	-1.3	2.2
5	5.10	-0.10	0.17	50	01 09.3	-1.3	2.3
6	6.12	-0.12	0.20	51	01 11.8	-1.4	2.4
7	7.15	-0.14	0.24	52	01 14.4	-1.4	2.5
8	8.19	-0.16	0.27	53	01 17.1	-1.5	2.6
9	9.23	-0.18	0.31	54	01 20.0	-1.6	2.7
10	10.27	-0.20	0.34	55	01 23.0	-1.6	2.8
11	11.32	-0.22	0.38	56	01 26.1	-1.7	2.9
12	12.38	-0.24	0.41	57	01 29.5	-1.7	3.0
13	13.45	-0.26	0.45	58	01 33.0	-1.8	3.1
14	14.52	-0.28	0.48	59	01 36.6	-1.9	3.2
15	15.61	-0.30	0.52	60	01 40.6	-2.0	3.4
16	16.70	-0.33	0.56	61	01 44.7	-2.0	3.5
17	17.81	-0.35	0.59	62	01 49.1	-2.1	3.6
18	18.93	-0.37	0.63	63	01 53.8	-2.2	3.8
19	20.06	-0.39	0.67	64	01 58.9	-2.3	4.0
20	21.20	-0.41	0.71	65	02 04.3	-2.4	4.1
21	22.36	-0.43	0.75	66	02 10.1	-2.5	4.3
22	23.53	-0.46	0.78	67	02 16.4	-2.7	4.6
23	24.72	-0.48	0.82	68	02 23.2	-2.8	4.8
24	25.93	-0.50	0.86	69	02 30.6	-3.0	5.0
25	27.16	-0.53	0.91	70	02 38.7	-3.1	5.3
26	28.40	-0.55	0.95	71	02 47.6	-3.3	5.6
27	29.67	-0.58	0.99	72	02 57.4	-3.5	5.9
28	30.96	-0.60	1.03	73	03 08.3	-3.7	6.3
29	32.28	-0.63	1.08	74	03 20.4	-4.0	6.7
30	33.62	-0.65	1.12	75	03 34.0	-4.2	7.2
31	34.99	-0.68	1.17	76	03 49.5	-4.6	7.7
32	36.38	-0.71	1.21	77	04 07.1	-4.9	8.3
33	37.81	-0.73	1.26	78	04 27.5	-5.4	8.9
34	39.27	-0.76	1.31	79	04 51.2	-5.9	9.7
35	40.77	-0.79	1.36	80	05 19.1	-6.5	10.7
36	42.30	-0.82	1.41	81	05 52.6	-7.2	11.8
37	43.87	-0.85	1.46	82	06 33.3	-8.1	13.2
38	45.48	-0.88	1.52	83	07 23.8	-9.3	14.9
39	47.14	-0.92	1.57	84	08 27.9	-10.9	17.1
40	48.84	-0.95	1.63	85	09 51.4	-13.0	20.0
41	50.50	-0.98	1.68	86	11 43.9	-16.0	23.9
42	52.38	-1.02	1.75	87	14 21.4	-20.6	29.4
43	54.28	-1.05	1.81	88	18 12.1	-28.1	37.8
44	56.19	-1.09	1.87	89	24 09.2	-41.2	51.1
45	58.19	-1.13	1.94	90	33 59.7	-66.9	74.3

TABLE 2. Réfraction pour les conditions standards de S. Newcomb ( $P = 30$  inches = 1 015.9 hPa,  $t = 50$  °F = 10 °C) et  $\lambda = 0.590\mu\text{m}$ , calculée par une méthode numérique utilisant le modèle en couches de l'atmosphère standard avec  $dT/dh = -5.5$  K/km. Table à comparer à la figure 16.

$z_0$ deg	$z_0 \leq 45^\circ$ variation			$z_0$ deg	$z_0 \geq 45^\circ$ variation		
	$\mathcal{R}$ "	10 °F "	1 inch "		$\mathcal{R}$ ' "	10 °F "	1 inch "
0	0.00	-0.00	0.00	45	00 58.2	-1.1	1.9
1	1.02	-0.02	0.03	46	01 00.2	-1.2	2.0
2	2.03	-0.04	0.07	47	01 02.4	-1.2	2.1
3	3.05	-0.06	0.10	48	01 04.6	-1.3	2.2
4	4.07	-0.08	0.14	49	01 06.9	-1.3	2.2
5	5.10	-0.10	0.17	50	01 09.3	-1.3	2.3
6	6.12	-0.12	0.20	51	01 11.8	-1.4	2.4
7	7.15	-0.14	0.24	52	01 14.4	-1.4	2.5
8	8.19	-0.16	0.27	53	01 17.1	-1.5	2.6
9	9.23	-0.18	0.31	54	01 20.0	-1.6	2.7
10	10.27	-0.20	0.34	55	01 23.0	-1.6	2.8
11	11.32	-0.22	0.38	56	01 26.1	-1.7	2.9
12	12.38	-0.24	0.41	57	01 29.5	-1.7	3.0
13	13.45	-0.26	0.45	58	01 33.0	-1.8	3.1
14	14.52	-0.28	0.48	59	01 36.6	-1.9	3.2
15	15.61	-0.30	0.52	60	01 40.6	-2.0	3.4
16	16.70	-0.33	0.56	61	01 44.7	-2.0	3.5
17	17.81	-0.35	0.59	62	01 49.1	-2.1	3.6
18	18.93	-0.37	0.63	63	01 53.8	-2.2	3.8
19	20.06	-0.39	0.67	64	01 58.9	-2.3	4.0
20	21.20	-0.41	0.71	65	02 04.3	-2.4	4.1
21	22.36	-0.43	0.75	66	02 10.1	-2.5	4.3
22	23.53	-0.46	0.78	67	02 16.4	-2.7	4.6
23	24.72	-0.48	0.82	68	02 23.2	-2.8	4.8
24	25.93	-0.50	0.86	69	02 30.6	-3.0	5.0
25	27.16	-0.53	0.91	70	02 38.7	-3.1	5.3
26	28.40	-0.55	0.95	71	02 47.6	-3.3	5.6
27	29.67	-0.58	0.99	72	02 57.4	-3.5	5.9
28	30.96	-0.60	1.03	73	03 08.3	-3.7	6.3
29	32.28	-0.63	1.08	74	03 20.4	-4.0	6.7
30	33.62	-0.65	1.12	75	03 34.0	-4.2	7.2
31	34.99	-0.68	1.17	76	03 49.5	-4.6	7.7
32	36.38	-0.71	1.21	77	04 07.1	-4.9	8.3
33	37.81	-0.73	1.26	78	04 27.5	-5.4	8.9
34	39.27	-0.76	1.31	79	04 51.2	-5.9	9.7
35	40.77	-0.79	1.36	80	05 19.2	-6.5	10.7
36	42.30	-0.82	1.41	81	05 52.6	-7.2	11.8
37	43.87	-0.85	1.46	82	06 33.4	-8.1	13.2
38	45.48	-0.88	1.52	83	07 23.9	-9.3	14.9
39	47.14	-0.92	1.57	84	08 28.1	-10.9	17.1
40	48.84	-0.95	1.63	85	09 51.8	-13.0	20.0
41	50.52	-0.98	1.68	86	11 44.7	-16.0	23.9
42	52.38	-1.02	1.75	87	14 23.0	-20.6	29.5
43	54.27	-1.05	1.81	88	18 16.1	-28.2	37.9
44	56.19	-1.09	1.87	89	24 19.8	-41.6	51.5
45	58.19	-1.13	1.94	90	34 30.4	-68.2	75.7



## TROISIÈME PARTIE.

*Calcul des réfractions, par quadratures numériques à toute distance du zénith, et dans une constitution quelconque d'atmosphère.*

FIGURE 17. Biot, 1836, début de la section 3 relative à la quadrature numérique.

### 5. Solutions numériques

#### 5.1. Présentation

On a déjà mentionné que cette approche avait été initiée par I. Newton avant d'être systématisée et largement développée par J.-B. Biot dans les années 1830. Dans les faits cela resta une entreprise isolée et délaissée par les astronomes au profit de (très/trop) longs développements analytiques, sans toujours parvenir à une théorie valable jusqu'à l'horizon. Ce n'est que dans les années 1980 que L. H. Auer et E. M. Standish [28] ont redécouvert (selon toute vraisemblance sans avoir connaissance des travaux de J.-B. Biot) cette approche et montré qu'elle était extrêmement efficace et adaptée aux moyens modernes de calcul. Un article similaire de C. Y. Hohenkerk et A. T. Sinclair [29] en propose une implémentation plus complète et fournit le code Fortran. Pour les calculs complets du trajet des rayons lumineux, applicables également en cas de dépression de l'horizon, une solution par résolution de l'équation différentielle complète est présentée ci-dessous, très facile d'emploi avec les outils standards de programmation. Pour compléter cette mise en perspective historique, l'auteur de ces lignes avait mis en œuvre cette dernière approche numérique en 2005, pour des études de trajets de rayons lumineux et des calculs de réfraction à distance finie dans l'ignorance totale des travaux de ses précurseurs, découverts par la suite.

Après le survol de quelques méthodes analytiques permettant d'approcher la solution exacte de l'intégrale de la réfraction sous la forme (12) ou (19), on aborde dans cette section l'approche purement numérique. En fait, on la trouve déjà en toute rigueur dans la solution de I. Newton de la section 3.3, mais c'est une solution isolée historiquement qui n'a pas eu d'impact immédiat. Le véritable précurseur en la matière est J.-B. Biot dans une série de publications dont la synthèse se trouve dans l'addition à *La Connaissance des temps* de 1839 [30] (cf. figure 17) dans laquelle il mentionne bien que la lecture d'I. Newton est à l'origine de son propre travail sur le sujet. Les intégrales classiques de la réfraction sont impropres et inadaptées à un calcul numérique jusque dans l'horizon. Ce terme d'horizon signifie maintenant l'horizon optique c'est-à-dire incluant la dépression de l'horizon pour un observateur à l'altitude  $h_0$  au-dessus du niveau de la mer, pour lequel la distance zénithale de l'horizon est supérieure à  $90^\circ$ . La direction de l'horizon et celle du rayon horizontal sont alors des directions distinctes, sauf pour un observateur au niveau de la mer. Le problème des intégrales impropres a bien été perçu par J.-B. Biot comme la difficulté à contourner comme on peut le voir sur la figure 18. Il va mettre en œuvre une transformation permettant la quadrature numérique jusqu'à l'horizon, reprise récemment (voir dans ce volume [9] et surtout [31]).

## 5

aucun indice quelconque des procédés employés pour l'établir. Je me suis ainsi assuré que Newton s'était formé des expressions différentielles de la réfraction astronomique équivalentes à celles que nous employons aujourd'hui, et qu'il en avait déduit théoriquement sa table pour le cas d'une température uniforme; non pas sans doute à l'aide des grandes et difficiles méthodes d'intégration par lesquelles on résout aujourd'hui ce problème analytiquement; mais par le simple emploi des quadratures paraboliques approximatives, exposées dans le troisième livre *Des Principes*, et dont il dit lui-même qu'il a fait cet usage dans les lettres que je viens de citer. Or, comme nos expressions actuelles de l'élément différentiel de la réfraction se prêteraient difficilement à un pareil procédé sous la forme que nous leur donnons habituellement, j'ai pensé qu'il devait y avoir telle manière de les présenter qui les rendrait plus simples et plus propres à être calculées ainsi. J'y suis en effet parvenu, non pas

FIGURE 18. J.-B. Biot, 1836, inspiration venant de sa lecture de I. Newton et remarque sur la singularité des intégrales et les changements qu'il y a apportés.

## 5.2. Évaluation numérique de l'intégrale de la réfraction

L'intégrale de la réfraction sous la forme (12) ou (19) est singulière pour un rayon lumineux horizontal au niveau de l'observateur, mais fondamentalement, le rayon lumineux ne présente aucune singularité, même avec une dépression de l'horizon pour un observateur en haut d'une montagne ou d'une colline. Ce n'est donc pas une singularité essentielle et elle peut être éliminée par un bon choix de la variable d'intégration. L. H. Auer et E. M. Standish [28] ont transformé l'intégration sur  $n$  en une intégration sur l'angle  $\zeta$ , la distance zénithale locale, qui varie de façon monotone le long du rayon lumineux. Il n'y a plus la singularité au passage par  $\zeta = \pi/2$ , qui provenait du fait que  $r$  était stationnaire à cet endroit. Par ce changement de variable, l'intégrale impropre devient une intégrale régulière sur toute la longueur du rayon lumineux.

L.H. Auer et E.M. Standish ont effectué le changement de variable sur l'intégrale elle-même, mais il est plus simple et plus instructif de repartir des premiers principes. On part de (10a) pour établir l'équation fondamentale en fonction de  $\zeta$ , en supposant connue la loi  $n(r)$ . On a, comme auparavant, la condition purement géométrique :

$$d\mathcal{R} = \frac{\tan \zeta}{r} dr + d\zeta \quad (36)$$

que l'on combine avec la condition optique,

$$d(nr \sin \zeta) = 0$$

prise sous la forme,

$$\frac{d(nr)}{nr} + \frac{d\zeta}{\tan \zeta} = 0$$

qui permet d'éliminer le  $\tan \zeta$  de l'équation (36) et d'aboutir alors directement à la forme de l'intégrale régulière de la réfraction,

$$\mathcal{R} = - \int_0^{z_0} \frac{r \frac{dn}{dr}}{n + r \frac{dn}{dr}} d\zeta \quad (37)$$

La variable d'intégration étant  $\zeta$ , et la donnée physique  $n(r)$ , il faut pouvoir relier  $r$  et  $\zeta$ , c'est-à-dire avoir la description de la trajectoire par sa tangente. L'intégrale première

$$nr \sin \zeta = n_0 R_{\oplus} \sin z_0$$

fournit implicitement ce dernier maillon.  $R_{\oplus}$  doit être remplacé par  $R_{\oplus} + h_0$  pour une observation à l'altitude  $h_0$ . Il faut donc résoudre cette équation en parallèle de l'intégration de l'équation (37) pour avoir  $r$  pour chaque valeur de  $\zeta$ . Cela se fait par une méthode de point fixe à convergence rapide, en utilisant également  $n(r)$ . C.Y. Hohenkerk et A.T. Sinclair [29] recommandent la méthode de Newton-Raphson bien adaptée ici et à convergence quadratique. L'équation se ramène à la recherche d'un zéro en  $r$  à  $\zeta$  fixé de l'équation,

$$F(r) = nr \sin \zeta - n_0 R_{\oplus} \sin z_0 \quad (38)$$

à partir d'une approximation  $r_0$  et d'une relation connue et accessible analytiquement ou numériquement donnant  $n(r)$ . On a alors la récurrence,

$$r_{i+1} = r_i - \frac{F(r_i)}{F'(r_i)}$$

Les bornes de l'intégrale dans l'équation 37 sont la distance zénithale apparente du lieu d'observation ( $z_0$ ) et en théorie  $\zeta = 0$  à l'infini. Bien entendu, la valeur finale est déterminée par la borne supérieure de  $r$  et donc la valeur correspondante de  $\zeta$  dans la résolution de l'équation (38). À noter qu'avec la variable  $\zeta$  il n'y a plus de difficulté sur la partie de la trajectoire avec  $\zeta > 90^\circ$ , et l'intégrale couvre la situation d'un observateur en altitude visant dans une direction sous le plan horizontal.

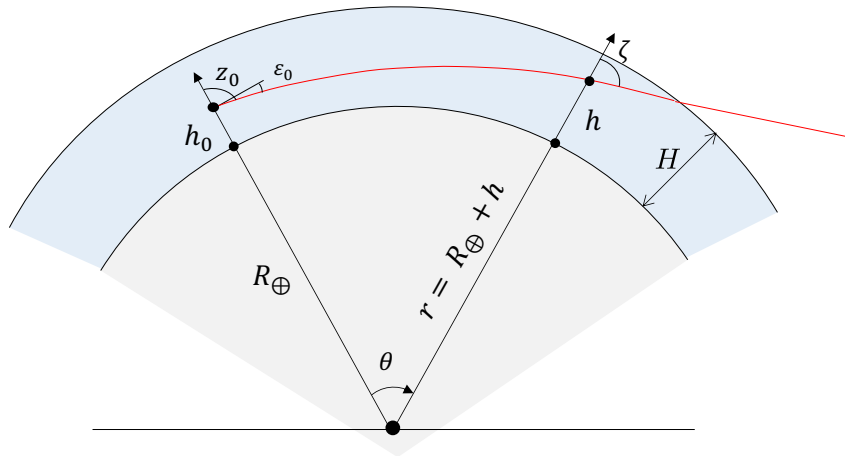
L'approximation de départ peut être, par exemple, le rayon rectiligne dans le vide, qui fournit déjà une bonne approximation du lien entre  $r$  et  $\zeta$ . En pratique, cela s'effectue au moyen d'un programme informatique et, au final, de l'appel d'une fonction `refraction` avec les conditions initiales  $z_0$ ,  $h_0$ , les paramètres météorologiques, et, éventuellement, la longueur d'onde pour des besoins de très haute précision.

On doit noter également la solution de B. Garfinkel [32], auteur d'une théorie purement analytique, relativement simple dans son principe puisqu'elle prend un modèle polytropique à une couche de la troposphère, mais techniquement d'une complexité considérable par le nombre de développements et de notations intermédiaires. Pour vérifier certains des résultats analytiques, il effectue des comparaisons à une intégration numérique directe de l'équation (19) à peine modifiée, sans donner de détails, laissant penser qu'il n'a rencontré aucune difficulté pour calculer la réfraction jusqu'à l'horizon, y compris pour des situations impliquant une dépression de plusieurs degrés. Il possédait clairement une approche numérique efficace, mais on restera pour toujours dans l'ignorance des transformations qu'il a mises en œuvre. C'est une situation assez curieuse qui témoigne d'une pratique scientifique révolue dans laquelle un problème n'est vraiment résolu que si on lui apporte une solution sous la forme de formules, quitte à ce que l'évaluation numérique implique de la programmation dont l'exactitude est bien difficile à établir et passe par des vérifications numériques bien plus simples que la solution elle-même. Il faut cependant créditer l'auteur d'une solution analytique dont les développements restent valables dans l'horizon, même pour un observateur en altitude. Je pense que c'est la seule

solution analytique réalisant cette performance, mais c'est aussi la dernière solution analytique complète de la réfraction astronomique.

### 5.3. Équation différentielle de la trajectoire

On peut éviter cette difficulté de la quadrature couplée à la résolution d'une équation non linéaire, en intégrant directement l'équation qui donne le trajet du rayon lumineux. Une fois ce trajet connu du point d'observation à la sortie de l'atmosphère, il suffit de comparer les tangentes aux points extrêmes pour avoir la valeur de la réfraction. Bien entendu, la trajectoire n'est pas absolument nécessaire pour la réfraction astronomique, et la méthode semble rechercher plus qu'il ne faut, mais la trajectoire est parfois bien utile pour des études d'optique atmosphérique, pour la réfraction terrestre ou pour produire des figures à but pédagogique par exemple. Au final la méthode présente moins de difficulté que l'intégrale avec une équation implicite à résoudre en parallèle à chaque pas de l'intégration et, éventuellement, la distinction des segments de trajectoire sous l'observateur et au-dessus de l'observateur lorsque son altitude n'est pas nulle. Enfin les astronomes sont souvent plus familiers des techniques d'intégration numérique des équations différentielles que des quadratures numériques, et le contrôle du calcul numérique de précision passe par l'expérience et non par l'emploi sans discernement d'une boîte noire.



**FIGURE 19.** Trajet d'un rayon lumineux pour un observateur à l'altitude  $h_0$  pour une distance zénithale apparente  $z_0$ . L'angle  $\varepsilon_0$  est la dépression du rayon sous le plan horizontal et  $H$  l'épaisseur de l'atmosphère. Le point courant a pour coordonnées  $(\theta, r)$  ou  $(\theta, h)$  et  $\zeta$  est la distance zénithale locale.

On part à nouveau de l'intégrale première de l'équation différentielle (8) et des notations de la figure 19 :

$$nr \sin \zeta = C \quad (39)$$

et :

$$\tan \zeta = \frac{r}{r'}$$

avec  $r' = dr/d\theta$ . On a alors l'équation différentielle du rayon lumineux :

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm r \left[ \frac{n^2 r^2}{C^2} - 1 \right]^{1/2} \quad (40)$$

qui se compose de deux branches en raison du signe. Cela correspond à la singularité lors du passage à  $\zeta = 90^\circ$ . L'intégration de l'équation (40) doit prendre en compte ces deux branches. Cependant, en dérivant cette équation par rapport à  $\theta$ , on obtient une équation différentielle du second ordre, dans laquelle le choix du signe de l'équation (40) a disparu :

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 = r \left[ \frac{2n^2 r^2}{C^2} + \frac{nr^3}{C^2} \frac{dn}{dr} - 1 \right] \quad (41)$$

Cela peut sembler être une complication, mais les outils numériques de résolution d'équations différentielles sont largement disponibles, et il est parfois plus simple de résoudre une équation différentielle que de passer par une quadrature numérique. Enfin, l'intégrale première n'a pas disparu dans l'opération, puisque la constante  $C$  figure explicitement dans l'équation (41) et doit être initialisée avec

$$C = n_0 (R_\oplus + h_0) \sin z_0$$

Avec le changement de variable :

$$r = R_\oplus + h$$

$$x = R_\oplus \theta$$

on obtient l'équation de la trajectoire décrite par l'angle polaire  $\theta$  et l'altitude  $h$ , et non par la distance au centre de la Terre (voir figure 19) :

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{(R_\oplus + h)}{R_\oplus^2} \left[ \frac{2n^2 (R_\oplus + h)^2}{C^2} + \frac{n (R_\oplus + h)^3}{C^2} \frac{dn}{dh} - 1 \right] \quad (42)$$

La relation qui relie l'angle  $\zeta$  à la dérivée en chaque point a la forme :

$$\zeta = \tan^{-1} \left( \frac{R_\oplus + h}{dh/d\theta} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{1 + h/R_\oplus}{dh/dx} \right) \quad (43)$$

et enfin, la déviation du rayon lumineux entre les deux points extrêmes est donnée par :

$$\mathcal{R} = (\theta + \zeta)_{h \approx 100 \text{ km}} - z_0 \quad (44)$$

où la sortie de l'atmosphère en altitude est déterminée par le modèle utilisé et est de l'ordre de 100 km. Lors de l'intégration des rayons proches de l'horizon, il faut contrôler que la trajectoire reste toujours au-dessus du niveau de la mer et donc que  $h > 0$ . La variable  $x$  est très proche de l'abscisse curviligne le long du rayon, et pour des rayons proches de l'horizon, il faut intégrer sur plusieurs centaines de kilomètres, voire 1 000 km ou 1 500 km pour atteindre  $h \approx 100$  km et la sortie de l'atmosphère. L'équation (43) donne également la condition initiale  $(dh/d\theta)_{\theta=0}$  pour démarrer l'intégration en prenant  $\zeta = z_0$ .

Le rayon rasant, donc correspondant à l'horizon optique, nécessaire par exemple pour les calculs de levers et couchers des astres, est donné par la condition initiale  $\epsilon_0$  à l'altitude  $h_0$  par application de l'invariant (39)

$$\cos \epsilon_0 = \frac{n_\oplus R_\oplus}{n_0 (R_\oplus + h_0)}$$

qui exprime que le rayon à son point le plus bas est tangent à la surface de la Terre où l'indice de réfraction vaut  $n_\oplus$ . Comme  $\epsilon_0$  est généralement un petit angle, cette expression n'est pas la meilleure sur le plan numérique et il vaut mieux prendre l'angle moitié avec

$$\sin \frac{\epsilon_0}{2} = \left( \frac{n_0 - n_\oplus + n_0 h_0 / R_\oplus}{2n_0 (1 + h_0 / R_\oplus)} \right)^{1/2}$$

et

$$\epsilon_0 \approx \sqrt{\frac{2h_0}{R_\oplus} \left( 1 + R_\oplus \frac{dn}{dh} \right)} = \sqrt{\frac{2h_0}{R_\oplus} \left( 1 - \frac{R_\oplus}{\kappa} \right)}$$

où  $\kappa$  est le rayon de courbure du rayon lumineux au voisinage de l'horizon donné par l'équation (16). La dépression est donc moins forte que celle que l'on calculerait avec un trajet rectiligne le long de la tangente à la sphère de rayon  $R_{\oplus}$ .

Lors de l'intégration, il vaut mieux adopter une variable régularisante  $\tilde{x} = x \sin z_0$ , avec un pas régulier sur la longueur de l'arc. Cette longueur peut être approchée par la longueur  $\mathcal{L}$  du segment de droite joignant le point initial à l'altitude  $h_0$  à la sortie de l'atmosphère en  $h = H \simeq 100$  km, avec :

$$\mathcal{L} = -(R_{\oplus} + h_0) \cos z_0 + [(R_{\oplus} + H)^2 - (R_{\oplus} + h_0)^2 \sin^2 z_0]^{1/2}$$

son exactitude n'étant pas critique et ne servant qu'à borner l'intervalle d'intégration. Cette expression est valable, y compris pour  $z_0 > 90^\circ$  ou pour une position initiale en dehors de l'atmosphère, par exemple à bord d'un satellite en orbite terrestre ([33]).

## 5.4. Modèles d'atmosphère

### 5.4.1. Un monde à découvrir

On a passé en revue au cours des sections précédentes toutes les étapes qui ont jalonné la maîtrise de la réfraction astronomique. Nous sommes passés des premiers résultats de Tycho Brahé aux modèles mathématiques d'une complexité à peine croyable de 1850 à nos jours, terrain de jeu de talentueux mathématiciens où la virtuosité avait peu à peu pris le pas sur l'ingéniosité. Dans une première époque, ce sont les lois de l'optique qu'il a fallu découvrir, puis appliquer à ce problème, sans savoir avec certitude si le phénomène en relevait totalement et quels facteurs pouvaient entacher les mesures, par exemple la parallaxe solaire de façon certaine, mais aussi la saison ou la latitude de manière moins évidente. L'équation fondamentale sous la forme de l'intégrale de la réfraction est établie à peu près simultanément par B. Taylor, P. Bouguer, entre autres. La messe était dite et cette équation, inchangée dans sa forme, demeure toujours le point de départ de tout exposé un peu avancé sur le sujet. Ensuite, le problème n'est plus l'optique, mais celui des propriétés du milieu traversé par le rayon lumineux et constitue le facteur limitant à la précision des théories comme le dit si justement J.-B. Biot [30, p. 3],

*la connaissance du pouvoir réfringent de l'air atmosphérique dans ses états divers de composition, densité, de température, et sur la représentation plus ou moins approchée des lois suivant lesquelles ces trois éléments varient dans l'atmosphère à mesure que l'on s'élève dans les couches aériennes superposées.*

E. Torricelli et l'invention du baromètre, la montée au Puy-de-Dôme de F. Périer sur la demande de B. Pascal, sont les prémices de la connaissance de l'atmosphère. Suivront les ascensions sur les plus hauts sommets, à commencer par le Mont Blanc en 1786 sous l'impulsion du physicien suisse H. B. de Saussure qui voulait y faire des mesures météorologiques, puis celle du Chimborazo, déjà entamée par P. Bouguer, presque réussie par A. de Humboldt et A. Bonpland en 1802, pour en rester aux ascensions à but scientifique. La décroissance de la pression, celle très régulière de la température, devenaient des faits scientifiques. Mais ces mesures, aussi remarquables fussent-elles, étaient isolées et ne disaient pas grand-chose sur la hauteur de l'atmosphère. P. S. de Laplace au début du XIX<sup>e</sup> siècle se cale sur la mesure unique de J. Gay-Lussac lors de son ascension en ballon à près de 7 000 m du 16 septembre 1804, au péril de sa vie.

### 5.4.2. Air sec

Jusqu'à l'exploration de la haute atmosphère par les ballons, puis les fusées au XX<sup>e</sup> siècle, les modèles étaient relativement peu contraints et relevaient de l'extrapolation du connu des basses couches, contrôlée par les lois élémentaires de la physique des gaz et de l'équilibre dynamique.

La décroissance régulière de la température dans la troposphère était un fait connu à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et S. Newcomb cite la valeur de  $-6.5$  °C par km comme taux de variation. Différents modèles normalisés de l'atmosphère ont été publiés, en particulier pour les besoins du transport aérien ou comme référence pour la météorologie mondiale.

Ainsi le modèle standard de l'atmosphère (*ISA : International Standard Atmosphere*) comporte des couches successives, certaines isothermes, d'autres avec un gradient constant de température avec l'altitude. En appliquant les lois de l'hydrostatique et des gaz parfaits à chacune des couches, on obtient les équations suivantes reliant la pression  $P$ , la température  $T$  et l'altitude  $h$ , avec

$$\frac{dP}{dh} = -\rho g$$

pour l'équilibre mécanique, et

$$P = \frac{\rho RT}{M_{\text{air}}}$$

pour l'équation d'état de l'air considéré comme un mélange de gaz parfaits. En éliminant  $\rho$  entre les deux équations nous avons,

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dh} = -\frac{M_{\text{air}} g}{RT(h)}$$

avec la température  $T$  donnée sous la forme  $T(h)$  en fonction de la couche. Avec  $g$  constant avec l'altitude, la solution générale est donnée par,

$$\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{M_{\text{air}} g}{RT_0} \int_{h_0}^h \frac{T_0}{T(h)} dh \quad (45)$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P}{P_0} = \exp \left[ -\frac{M_{\text{air}} g h}{RT_0} \right] \quad \text{pour les couches isothermes} \\ \frac{P}{P_0} = \left[ \frac{T(h)}{T_0} \right]^\beta \quad \text{pour les couches à gradient thermique constant} \end{array} \right. \quad (46)$$

avec

$$\beta = \frac{M_{\text{air}} g}{R\gamma} \quad (47)$$

et

$$T(h) = T_{\text{bot}} - \gamma(h - h_{\text{bot}}) \quad (48)$$

où  $T_{\text{bot}}$  est la température en bas de la couche à l'altitude  $h_{\text{bot}}$ . (La convention adoptée est donc  $\gamma > 0$  dans la troposphère avec une température décroissante). Dans la troposphère standard on a alors  $\beta \approx 5.3$ . On doit propager la pression dans chaque couche avec (46), en prenant  $P_0$ ,  $T_0$  au bas de la couche  $(k+1)$  égaux aux valeurs de  $P$ ,  $T$  au sommet de la couche  $k$  qui la précède. Le bas de la couche  $k=1$  est au niveau du sol avec les conditions de température et de pression locales. Strictement, l'atmosphère standard *ISA* utilise  $P_0 = 1\,013.25$  hPa et  $T_0 = 288.15$  K, mais on généralise le modèle pour des conditions initiales locales différentes, tout en conservant une stratification identique. Il est utile également de prendre  $\gamma = -dT/dh$  dans la troposphère comme un paramètre du modèle de calcul de la réfraction pour tester son influence et s'écarter des conditions contraignantes de l'*ISA*. Enfin

$$\begin{aligned} \rho(h) &= \frac{M_{\text{air}}}{R} \frac{P}{T} \\ &= \rho_0 \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T} \end{aligned}$$

donne avec (46) la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude. Cela donne en particulier pour la troposphère,

$$\rho(h) = \rho_0 \left[ \frac{T(h)}{T_0} \right]^{\beta-1}$$

**TABLE 3.** Paramètres de définition de l'atmosphère standard, avec les valeurs de température et de pression pour les conditions normales au sol ( $t = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $P = 1013.25 \text{ hPa}$ ). Les altitudes  $h_g$  sont géopotentielles, avec  $h_g = h(1 - h/R_\oplus)$ .

	couche	$h_g$ km	$h$ km	$dt/dh$ K km <sup>-1</sup>	$t$ °C	$P$ Pa
0	troposphère	0.0	0.0	-6.5	+15.0	101 325
1	tropopause	11.000	11.019	0.0	-56.5	22 632
2	stratosphère	20.000	20.063	+1.0	-56.5	5 474.9
3	stratosphère	32.000	32.162	+2.8	-44.5	868.02
4	stratopause	47.000	47.350	0.0	-2.5	110.91
5	mésosphère	51.000	51.413	-2.8	-2.5	66.939
6	mésosphère	71.000	71.802	-2.0	-58.5	3.9564
7	mésopause	84.852	86.000	0.0	-86.2	0.3734

Le lien avec l'indice de réfraction se fait par,

$$n(h) - 1 = (n_0 - 1) \frac{\rho(h)}{\rho_0}$$

Quant à l'indice de réfraction  $n_0$ , c'est aussi une fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ , et il a fait l'objet de nombreuses mesures en laboratoire dont la précision pour les besoins métrologiques en spectroscopie dépasse très largement les besoins des modèles de réfraction. On trouve ci-dessous la formule de P. E. Ciddor [34] utilisée pour toutes les applications numériques de cet article :

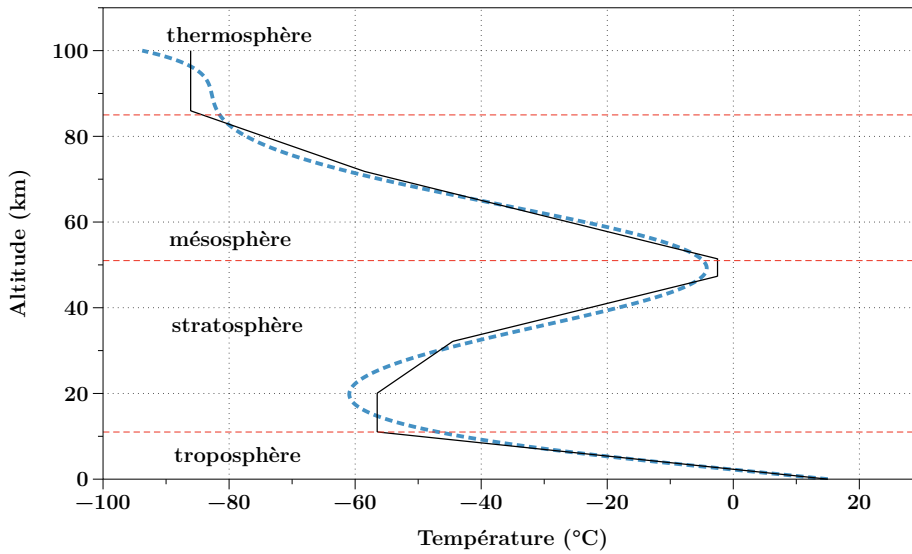
$$10^8 [n_0(\lambda) - 1] = \frac{v_1}{w_1 - 1/\lambda^2} + \frac{v_2}{w_2 - 1/\lambda^2}$$

et

$$\begin{aligned} v_1 &= 5\,792\,105 \text{ } \mu\text{m}^{-2}, & w_1 &= 238.018\,5 \text{ } \mu\text{m}^{-2} \\ v_2 &= 167\,917 \text{ } \mu\text{m}^{-2}, & w_2 &= 57.362\,0 \text{ } \mu\text{m}^{-2} \end{aligned}$$

Le modèle est complet dans le sens où il fournit une valeur de l'indice de réfraction, et éventuellement de sa dérivée pour chaque altitude, à partir du choix de la longueur d'onde et des paramètres atmosphériques au niveau du sol. Mais il ne faut pas se faire d'illusions : la qualité du modèle comme décrivant la réalité ne dépasse pas celle de l'atmosphère standard comme approximation de l'atmosphère réelle. Cela reste un modèle moyen, voire idéal, de l'atmosphère, mais sans prétention à en représenter les variations saisonnières, les profils qui, dans la réalité, ne sont pas identiques selon les latitudes, selon que l'on est au-dessus d'un océan, d'un désert de sable, de montagne ou des zones couvertes de glace. Changer la température au sol pour décrire le profil vertical de température en tout lieu est une étape, mais sûrement insuffisante si l'on ne change pas la géométrie des couches ou les gradients thermiques, en particulier dans la troposphère.





**FIGURE 20.** Ligne continue : modèle standard de l’atmosphère terrestre pour les conditions normales en  $h = 0$ . Selon les couches, le modèle est soit isotherme, soit à gradient thermique constant. Ligne en pointillots bleus : version lissée avec pour  $T_0/T$  un polynôme sans discontinuités de la fonction et de sa dérivée première.

L’emploi des méthodes numériques, que ce soit par des quadratures ou par la résolution d’une équation différentielle, implique des schémas fondés sur des différences finies avec des pas discrets pour évaluer les fonctions et leurs dérivées. Le modèle en couche est, par construction, continu aux traversées des couches pour la pression, la température, etc, mais avec des discontinuités dès les dérivées premières. C’est une situation à risque pour un schéma numérique, avec des configurations sans dommage apparent et d’autres où les discontinuités peuvent conduire à des instabilités, des divergences bien visibles dans les résultats mais également à des résultats inexacts au terme d’un calcul au déroulement tout à fait normal.

Pour pallier ce risque, j’ai lissé le modèle de l’atmosphère standard avec une représentation polynomiale du profil de température qui évite les discontinuités à la traversée des couches. Au sens strict, il n’y a plus de couche mais des tranches d’atmosphère presque isothermes et d’autres à gradients thermiques presque constants avec des transitions douces bien que rapides (*smooth but steep*). Le lissage en température a été réalisé par un ajustement de  $T_0/T(h)$  sur un polynôme de degré six et en utilisant une pondération en fonction de l’altitude visant d’une part, à donner plus de poids à la troposphère, et d’autre part, à contraindre la dérivée de la température à basse altitude à être égale au gradient thermique de l’atmosphère standard. Avec ce choix, l’intégrale (45) faisant intervenir  $T_0/T(h)$  s’effectue analytiquement en intégrant le polynôme du profil et donne  $\ln P(h)$  directement sous forme polynomiale.

On a alors précisément,

$$\frac{T_0}{T(h)} = \sum_{k=0}^6 a_k x^k \quad (49)$$

avec

$$a_0 = 0.94794377928$$

$$a_1 = 0.21394$$

$$a_4 = 0.027368767272$$

$$a_2 = 0.11380901063$$

$$a_5 = -0.0026404572768$$

$$a_3 = -0.11289515947$$

$$a_6 = 0.00009030786$$

et  $x = h/10$  avec  $h$  en km. L'intégrale de l'équation (45) prend la forme,

$$\int \frac{T_0}{T(h)} dh = \sum_{k=0}^6 \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \quad (50)$$

ce qui donne  $P(h)$ , puis  $\rho(h)$  et finalement  $n(h) - 1$ . La version lissée du modèle pour les conditions normales est rajoutée sur la figure 20 du modèle standard de l'atmosphère et sur la figure 21 du gradient de réfractivité mettant en évidence la disparition des discontinuités.

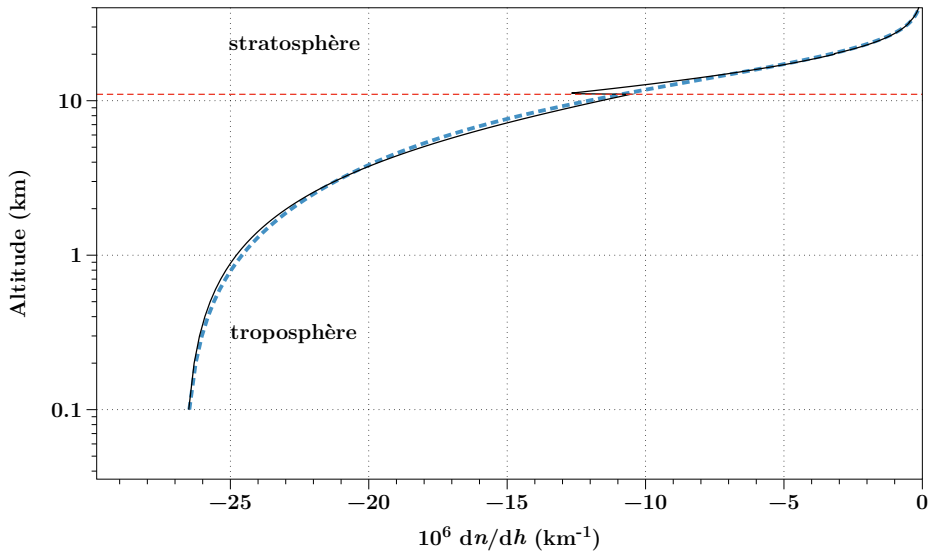
Si l'on voit le modèle standard comme une référence commune d'une atmosphère moyenne et qui s'écarte significativement de l'atmosphère vraie pour un instant et un lieu particulier, alors la version lissée est tout aussi valable comme référence de calcul, ni plus exacte, ni moins, et les avantages qu'elle offre sur le plan numérique justifient son emploi pour les calculs d'optique atmosphérique. Dans le cas de la réfraction, les différences entre les deux modèles sont  $< 0.01''$  jusqu'à  $z_0 = 75^\circ$ , puis atteignent  $0.1''$  à  $z_0 = 85^\circ$ , et  $1''$  à l'horizon, autant dire qu'il n'y a pas de différence significative compte tenu des différences bien réelles entre l'atmosphère vraie et le modèle de référence.

La table 4 donne une idée de la sensibilité de la réfraction à l'horizon en fonction de changements mineurs de quelques paramètres influant sur les propriétés de l'atmosphère. Cela donne une idée des besoins pour les paramètres météorologiques, mais aussi des incertitudes venant du modèle d'atmosphère lui-même. On voit l'importance du choix du gradient thermique et au-delà de cette valeur, c'est l'existence d'un gradient uniforme sur toute la troposphère qui est encore plus critique. Le dernier paramètre se rapporte à l'altitude de la tropopause, zone de de transition entre la troposphère et la stratosphère (soit 11 km dans le modèle standard) dont on voit que la position n'est pas critique.

La variation d'altitude de l'observateur est un paramètre plus complexe puisque l'horizon optique se déplace (la dépression augmente) avec l'élévation de l'observateur, donc les changements dans la direction du rayon ne proviennent pas que de la réfraction. Mais il est important d'avoir à l'esprit qu'à très basse altitude, l'excès de réfraction entre l'œil de l'observateur et le point où le rayon lumineux est tangent au niveau de la mer est significatif et doit être introduit pour un calcul très précis de l'heure du lever du Soleil à l'horizon. Il faut donc connaître cette altitude avec exactitude puisque l'effet est sensible à une erreur de quelques mètres. Cette précision est moins critique sur une colline ou un sommet de plus d'une centaine de mètres.

**TABLE 4.** Sensibilité  $\delta\mathcal{R}$  de la valeur de la réfraction à l'horizon pour des variations élémentaires des paramètres atmosphériques et pour deux altitudes d'observation. Une erreur de  $10''$  sur la réfraction donne environ 1 s sur l'instant du lever ou du coucher du Soleil pour les latitudes moyennes, valeur à mettre en rapport avec l'observation rapportée à la figure 22.

Paramètre	variation	$\delta\mathcal{R}$	
		$h_0 = 5 \text{ m}$	$h_0 = 500 \text{ m}$
$T$	1 °C	-11''	-15''
$P$	10 hPa	+20''	+27''
$h_0$	10 m	50''	6''
$\lambda$	0.1 $\mu\text{m}$	-9''	-12''
RH	50 %	-5''	-8''
$dT/dh$	0.5 °C/km	+15''	+24''
alt. tropo	1 km	0.7''	0.7''



**FIGURE 21.** Valeurs du gradient  $dn/dh$  en fonction de l'altitude. La discontinuité dans le modèle en couches (ligne continue) a disparu avec la version lissée (pointillés bleus) par un polynôme.

#### 5.4.3. Prise en compte de l'humidité

Le modèle décrit jusqu'à maintenant se rapporte à l'air sec, sans vapeur d'eau, ce qui n'est pas tout à fait conforme à la réalité dans la basse troposphère. Dans les conditions normales de température (15 °C) et une humidité relative (RH) de 50 %, il y a environ 7 g de vapeur d'eau par  $m^3$  d'air au niveau du sol et l'indice de réfraction de l'air humide n'est pas identique à celui de l'air sec. Mais on ne peut traiter la vapeur d'eau de la même façon que le mélange de l'oxygène et de l'azote, car elle est en équilibre avec un réservoir en phase liquide qui absorbe ou libère de la vapeur selon la température et le régime des vents. Pour tenir compte de la vapeur d'eau dans la réfraction il faut reprendre le calcul liant la pression, la température et la densité de l'air en tenant compte du contenu en vapeur d'eau et déterminer le profil de densité, et donc de réfractivité, en tenant compte de l'humidité. Au final, c'est une correction mineure sur la réfraction comme on peut le voir dans la table 4, mais que les mesures astronomiques de grande précision doivent prendre en compte. Je donne le principe du calcul sans rentrer dans tous les détails de l'implémentation.

Soit  $P_w$  la pression partielle de vapeur d'eau, et  $\rho_w$  la densité de la vapeur d'eau dans l'air pour cette pression. Le calcul est fait dans la troposphère et donc  $T = T_0 - \gamma(h - h_0)$  ( $\gamma = 6.5 \text{ K}\cdot\text{km}^{-1}$ ). La pression totale est donnée par la somme des pressions partielles de l'air sec et de la vapeur d'eau,

$$P = P_d + P_w$$

puis, pour chaque composante gazeuse,

$$P_d = \frac{\rho_d RT}{M_d}$$

$$P_w = \frac{\rho_w RT}{M_w}$$



**FIGURE 22.** Exemple d'un lever de Soleil (bord supérieur) observé par l'auteur à 220 m d'altitude avec visibilité de l'horizon sur la mer. Le calcul astronomique avec le modèle de réfraction numérique prévoit un lever à 07 : 00 : 27 ± 2 s UTC et la valeur mesurée par extrapolation des positions du bord supérieur donne 07 : 00 : 25 ± 1 s. Elle est ici en plein accord avec la date de la première lumière (instant du premier cliché à 07 : 00 : 25), mais ce n'est généralement pas le cas, avec fréquemment des différences de plusieurs secondes.

avec  $M_d = 28.963$  g/mol et,  $M_w = 18.015$  g/mol. L'équation d'équilibre hydrostatique nous donne,

$$\frac{dP}{dh} = -\rho g = -(\rho_d + \rho_w)g$$

et finalement,

$$\frac{dP}{dT} = \beta \frac{P}{T} - \beta \left[ 1 - \frac{M_w}{M_d} \right] \frac{P_w}{T} \quad (51)$$

avec comme précédemment,

$$\beta = \frac{M_d g}{\gamma R} \approx 5.3$$

Quant à la pression de vapeur courante, c'est une fraction  $f$  de la pression de vapeur saturante à la température  $T$  donnée par une expression connue en fonction de la température,

$$P_w = f P_{ws}(T) \quad (52)$$

équation dans laquelle  $f$  est un nombre  $\in [0, 1]$ , mais en général donné sous la forme de l'humidité relative RH en pourcentage et que l'on peut prendre constant dans la troposphère.

On dispose alors d'un outillage complet pour avoir un programme informatique donnant  $n(h)$  pour des conditions météorologiques au sol et une longueur d'onde que l'on peut ajuster. La figure 22 donne une illustration assez remarquable du pouvoir prédictif, pour une atmosphère calme, avec la comparaison d'un instant de lever de Soleil (bord supérieur) observé au-dessus de la mer, à la valeur calculée en utilisant le modèle numérique de réfraction. Si, dans le cas

choisi, l'accord est de quelques secondes, la règle est que pour une observation en légère altitude ( $\geq 100$  m), il est fréquent de trouver une exactitude meilleure que 5 s, sous nos latitudes. Au niveau de la mer, l'altitude exacte de l'observateur devient très difficile à définir et l'instant du phénomène très sensible à ce paramètre. Une précision autour de 10 s est plutôt la norme. Bien entendu les réfractions anormales peuvent toujours apparaître et décaler la première lumière de 10 s, voire beaucoup plus. Pour éviter de dépendre de cet instant précis, le moment du lever est reconstruit à partir d'images successives pendant une dizaine de minutes. On élimine ainsi les couches les plus basses, 2 à 3 minutes d'arc (environ 10 m à une distance de 10 km), là où l'atmosphère n'est probablement pas conforme au modèle, mais en général la variabilité venant de la réfraction est sans rapport avec les 4 min rapportées dans l'étude de Schaefer et Liller [35] en 1990.

## 6. Conclusion

Limité aux questions de réfraction astronomique pour l'astronomie de position, on peut considérer que, de la découverte du phénomène à sa prise en compte aussi exacte que possible, le parcours est achevé. Son histoire proprement dite est partiellement écrite et ce volume y ajoute de nombreux éléments nouveaux tirés des sources primaires. Il y a peu de chances que de nouvelles théories analytiques aussi élaborées que celles entrevues dans ces pages voient le jour, elles ne répondraient d'ailleurs à aucun besoin et elles ont montré leurs limites. La méthode numérique est également figée dans son principe. En revanche, on peut espérer des améliorations sensibles dans la façon de modéliser l'atmosphère, qui est bien simpliste avec une troposphère bien trop régulière sur plus de 10 km. La méthode numérique ouvre des perspectives d'une grande richesse en introduisant des couches peu élevées pour prendre en compte les inversions de température, les rayons à courbure inversée et la duplication des images. Mais nous sortons du cadre purement astronomique pour rentrer dans celui de la véritable optique atmosphérique, qui n'était pas dans le périmètre choisi pour cette présentation. Même restreint à ce cadre, il y a bien des manques dans ce texte, largement comblés par les présentations historiques critiques citées en référence et présentes dans différentes contributions de ce volume.

## Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

## Remerciements

Luc Dettwiller a bien voulu relire la première version de ce texte et je le remercie pour l'ensemble de ses remarques et suggestions toujours pertinentes, tant sur le fond que sur la forme.

TABLE 5. Notations utilisées dans ce document

Symbole	Grandeur	Unités
$\zeta$	distance zénithale locale	°
$\mathcal{Z}$	angle polaire de la tangente locale au rayon lumineux	°
$z$	distance zénithale vraie d'un astre	°
$z_0$	distance zénithale apparente au sol ou à $h_0$ (incluant la réfraction)	°
$h, h_0$	hauteur angulaire : $\pi/2 - z, \pi/2 - z_0$	°
$H$	épaisseur de l'atmosphère dans les modèles de Cassini	m, km
$h$	altitude courante au-dessus du niveau de la mer	m, km
$h_0$	altitude de l'observateur au-dessus du niveau de la mer	m, km
$s$	altitude réduite chez Laplace $s = 1 - R_{\oplus}/r = h/r$	-
$\epsilon_0$	dépression de l'horizon sous le plan horizontal ( $> 0$ )	°, ', ''
$r$	distance au centre de la Terre	km
$R_{\oplus}$	rayon moyen de la Terre (6 371 km)	km
$n$	indice de réfraction de l'air	-
$n_{\oplus}$	indice de réfraction de l'air au sol	-
$n_0$	indice de réfraction de l'air au niveau de l'observateur	-
$\lambda$	longueur d'onde dans le vide	$\mu\text{m}$
$\mathcal{R}$	réfraction atmosphérique ( $\mathcal{R}(z), \mathcal{R}(z_0)$ )	°, ', ''
$\kappa$	rayon de courbure des rayons lumineux	km
$T, T_0$	température absolue	K
$P$	pression atmosphérique	Pa, hPa
$g$	accélération de la pesanteur	$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
$\mathcal{H}$	épaisseur de l'atmosphère homogène ( $\approx 8.5$ km)	km
$R$	constante des gaz parfait ( $8.3145 \text{ J mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )	$\text{J}\cdot\text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
$\rho$	masse volumique de l'air	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
$\rho_0$	masse volumique de l'air au niveau de la mer	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
$M_{\text{air}}$	masse molaire de l'air sec ( $0.02897 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ )	$\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$
$\gamma$	gradient de température dans la troposphère ( $-dT/dh$ )	$\text{K}\cdot\text{km}^{-1}$

## Références

- [1] F. Brünnow, *Spherical astronomy*, Asher, Londres, 1865.
- [2] W. Chauvenet, *Manual of spherical and practical astronomy, Vol. I*, J.B. Lippincott Company, Philadelphie, 1889.
- [3] S. Newcomb, *A compendium of spherical astronomy*, The Macmillan Company, New York, 1906.
- [4] R. Ball, *A treatise on spherical astronomy*, Cambridge University Press, New York, 1908.
- [5] P. Puiseux, A. Bemporad, « Réfraction et Extinction », in *Encyclopédie des sciences mathématiques* (J. Mock, H. Andoyer, éd.), Gauthier-Villars, 1913, p. 14-58.
- [6] A. Danjon, *Astronomie générale. Astronomie sphérique et éléments de mécanique céleste*, Librairie scientifique et technique, Albert Blanchard, Paris, 1980.
- [7] A. T. Young, « Understanding astronomical refraction », *The Observatory* **126** (2006), p. 82-115.
- [8] A. T. Young, « Sunset Science. IV. Low-Altitude Refraction », *Astron. J.* **127** (2004), n° 6, p. 3622-3637.
- [9] L. Dettwiller, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 13-62.
- [10] L. Dettwiller, « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 63-102.
- [11] W. H. Lehn, S. van der Werf, « Atmospheric refraction : a history », *Appl. Opt.* **44** (2005), n° 27, p. 5624-5636.
- [12] G. J. Toomer, *Ptolemy's Almagest*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998.

- [13] P. Brunet, A. Mieli, *Histoire des Sciences dans l'Antiquité*, Payot, Paris, 1935.
- [14] J. Lalande, *Astronomie*, Johnson Reprint Corporation, New York, 1966.
- [15] K. P. Moesgaard, « Refraction in TYCHO Brahe's Small Universe », in *Mapping the Sky : Past Heritage and Future Directions* (S. Debarbat, éd.), vol. 133, Kluwer Academic Pub., 1988, p. 87-93.
- [16] C. Bruhns, *Die Astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwicklung*, Voigt and Günther, Leipzig, 1861.
- [17] J. D. Cassini, « Des réfractions astronomiques », *Mémoire de l'Académie Royale des Sciences* (1714), p. 33-54.
- [18] A. Bemporad, « Sulla Teoria della Refrazione Astronomica », *Memorie della Societa Degli Spettroscopisti Italiani* **34** (1905), p. 191-212.
- [19] W. M. Smart, *Textbook on Spherical Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge, Londres, New York, 1977.
- [20] E. Halley, « Some Remarks on the Allowances to be Made in Astronomical Observations for the Refraction of the Air. By Dr. Edm. Halley, R. S. S. Astronomer Royal. With an Accurate Table of Refractions », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series I* **31** (1720), p. 169-172.
- [21] W. H. Lehn, « Isaac Newton and the astronomical refraction », *Appl. Opt.* **47** (2008), n° 34, p. H95-H105.
- [22] M. Nauenberg, « Newton's theory of the atmospheric refraction of light », *Am. J. Phys.* **85** (2017), n° 12, p. 921-925.
- [23] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford, New York, 1975.
- [24] P. S. de Laplace, N. Bowditch, *Celestial mechanics*, Chelsea Publishing Company, 1966.
- [25] J. Berthier, P. Descamps, F. Mignard, *Introduction aux éphémérides et phénomènes astronomiques*, EDP Sciences, 2021.
- [26] J. B. J. Delambre, *Histoire de l'astronomie au XVIII<sup>e</sup> siècle*, Bachelier (Succ. Veuve Courcier), Paris, 1827.
- [27] J. F. Herschel, *Outlines of Astronomy*, Longman and Taylor, Londres, 1849.
- [28] L. H. Auer, E. M. Standish, « Astronomical Refraction : Computational Method for All Zenith Angles », *Astron. J.* **119** (2000), n° 5, p. 2472-2474.
- [29] C. Y. Hohenkerk, A. T. Sinclair, « The Computation of Angular Atmospheric Refraction at Large Zenith Angles », *NAO technical note* **63** (1985), p. 1-12.
- [30] J.-B. Biot, « Sur les réfractions astronomiques », in *Additions à la Connaissance des Temps 1939*, vol. 1839, 1836, p. 3-114.
- [31] L. Dettwiller, « Le théorème de Biot et le changement de variable de Biot–Auer–Standish : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 483-501.
- [32] B. Garfinkel, « Astronomical refraction in a polytropic atmosphere », *Astron. J.* **72** (1967), p. 235-254.
- [33] F. Mignard, « Images du Soleil et de la Lune, depuis le sol ou la Station spatiale internationale », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 391-414.
- [34] P. E. Ciddor, « Refractive index of air : new equations for the visible and near infrared », *Appl. Opt.* (1996), n° 35, p. 1566-1573.
- [35] B. E. Schaefer, W. Liller, « Refraction near the Horizon », *Publ. Astron. Soc. Pac.* **102** (1990), p. 796.



---

Astronomie, atmosphères et réfraction / *Astronomy, Atmospheres and Refraction*

# Relations among atmospheric structure, refraction, and extinction

## *Relations entre la structure de l'atmosphère, la réfraction et l'extinction*

Andrew T. Young<sup>Ⓢ</sup>\*, <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Astronomy Department, San Diego State University, San Diego, California, 92182-1221, USA

*E-mail:* ATYoung@sdsu.edu (A. T. Young)

**Abstract.** The refraction and extinction in the Earth's atmosphere depend on the atmosphere's structure, so it was natural to try to infer that structure from optical observations. Efforts to extract structure from observed refractions led to proof that this is possible only below the astronomical horizon. Direct studies of the real atmosphere show complicated, variable structure. The complex history of relations between structure and refraction is outlined by citing some important works.

**Résumé.** La réfraction et l'extinction dans l'atmosphère terrestre dépendent de sa structure, donc il était naturel d'essayer de déduire celle-ci à partir d'observations optiques. Partant des réfractions observées, les efforts pour en tirer cette structure ont conduit à prouver que cela n'est possible que sous l'horizon astronomique. Des études directes de l'atmosphère réelle révèlent une structure variable et compliquée. On expose l'histoire complexe des études concernant les relations entre structure atmosphérique et réfraction en citant des travaux majeurs.

**Keywords.** Refraction, Extinction, Atmospheric Structure, Polytropes, Lapse Rate, Inverse Problems, Standard Atmosphere.

**Mots-clés.** Réfraction, extinction, structure de l'atmosphère, cas polytropiques, gradient thermique, problèmes inverses, atmosphère standard.

*Published online: 21 February 2023, Issue date: 11 August 2023*

## 1. Introduction

### 1.1. Generalities

Atmospheric refraction displaces the images of objects seen through the Earth's atmosphere from the objects' actual positions; so optical position measurements must be corrected for this effect. As the displacements depend on the structure of the intervening air, it is useful to understand this

---

\* Corresponding author.



relationship. If atmospheric structure is well known, it can be used to correct for refraction; on the other hand, if refraction can be measured well, it can be used to infer atmospheric structure.

However, this is more difficult than it seems at first glance. This article outlines the long history of attempts to define and solve this problem, and explains its current state. The subject is too complicated to go into details, but they can be found in the references cited. Readers unfamiliar with astronomical terminology should consult Smart's classic introductory text [1], which devotes a chapter to astronomical refraction (i.e., the refraction of astronomical objects.)

These same problems arise in geodesy and civil engineering, where the effects are described as "terrestrial refraction". The terminology is different, but the physics is the same. The relation between astronomical and terrestrial refraction is treated in Section 14 of this paper.

Another article [2] in this special issue describes other varieties of refraction phenomena.

## 1.2. *Beginnings*

The refraction and extinction of light in the Earth's atmosphere have been noticed for millennia, as the distortion of the setting Sun and its relatively dim image at the horizon are naked-eye phenomena. It was known in antiquity that celestial objects at the horizon appear higher in the sky than they should, and this was attributed to refraction by the atmosphere, just as a coin hidden within an opaque vessel becomes visible when the vessel is filled with water.

The history of the subject until the 1850s is reviewed by Bruhns [3], with emphasis on works of the Classical era. The table-top demonstration described above appears in the *Catoptrics* [4] attributed to "Euclid" — whether or not this was the author of the *Elements* is debated — and is repeated in very similar form in both Ptolemy's *Optics* [5] and in the work on the circular motion of celestial bodies by Cleomedes [6]. Ptolemy and Cleomedes are Bruhns's first two references.

Unfortunately, Smith (who translated and commented on Ptolemy's *Optics* [4, 5]) did not understand astronomical coordinates, and called ecliptic latitude, geographic latitude, altitude, and declination all "latitude," which garbles the "explanations" in his notes to Ptolemy's work. It also appears that the instrument used by Ptolemy was an armillary, and not (as Smith says) an astrolabe. However, it's clear from Smith's translations that Ptolemy thought celestial objects were displaced upward by "refraction . . . at the surface that separates the air and the ether". Ptolemy said the refraction might be computed "if the distance of the interface between the two media were known." Perhaps this is the beginning of an attempt to connect refraction with atmospheric structure.

Both Ptolemy and Cleomedes were much taken by the analogy between refraction at this imagined surface and that seen at the surface of water in the vessel holding the disappearing coin. Cleomedes [6] remarked that "many such things appear in the air, and especially around the Sea. For it could happen that the ray leaving our eyes is bent on entering wet and humid air and reaches the Sun now hidden below the horizon." And he then described the tabletop experiment with "a gold ring . . . put into a cup or some similar vessel," thinking that "it could be that something similar happens in humid and watery air." This may be the origin of the long-accepted story that refraction was caused by "vapors at the horizon."

Another common error, already asserted by Ptolemy, was to suppose that refraction caused the Moon Illusion. This mistake is still popular today. Actually, refraction makes the apparent sizes of objects near the horizon smaller, not larger; the Illusion is entirely a perceptual phenomenon that has nothing to do with optics.

## 1.3. *Refraction measurements*

After a handful of qualitative observations confirming that astronomical refraction exists, the first measurement of its size at the horizon was made by Walther [7]. He first observed it at the sunset

of March 6, 1489, with later measurements on 12 Dec. 1490, 9 Sept., 1491, and 12 Dec. 1503. Much of this has been translated into English [8], along with Kepler's comments.

Systematic measurements of refraction were made by Tycho Brahe, whose empirical refraction tables were published by Kepler [9] after Tycho's death. Tycho had three refraction tables: one each for the Sun, the Moon, and the stars, because he suspected that the refraction might depend on the distance or the brightness of the refracted object. His tables for the Sun and Moon were systematically in error because of a wrong correction for parallax, but his table for the stars agrees within 2 or 3 minutes of arc with modern values. Tycho could not measure refraction at altitudes above  $20^\circ$ , where the actual refraction is about 2.6 arc minutes.

Tycho had to correct his solar data for the horizontal parallax (see [1, §117]) of the Sun. As he could not measure the solar parallax independently, he adopted the traditional value of 3 minutes of arc, which had been found by the well-known method of Aristarchus of Samos. This value is about 20 times larger than the true one. Because both the refraction and the parallax increase from zenith to horizon, and the parallax correction is nearly constant in the region where Tycho could measure refraction, he could not detect this error, and his refraction values for the Sun are all too large.

Tycho's stellar refractions were measured by comparing altitudes of circumpolar stars at upper and lower culminations (cf. [1, pp. 68–69]). But to extract refractions from such differences, one needs to know the actual declinations of the stars; this requires the observer's latitude. And to find the latitude, the apparent altitude of the Pole has to be corrected for refraction. (Tycho avoided this problem by assuming that the refraction was negligible above  $45^\circ$  altitude, so he regarded the altitude of the Pole as unaffected by refraction.) Further progress in determining refractions observationally required additional information about both the refraction law and atmospheric structure.

#### 1.4. *The sine law*

The first step toward a theory of atmospheric refraction was the discovery of the sine law of refraction, which is well explained in [1, §34]. Unfortunately, its origin is still debated [10].

##### 1.4.1. *Ibn Sahl*

The constant ratio of sines for two media first appears in an Arabic manuscript in the Tenth Century [11]. But it comes from thin air: neither empirical nor theoretical reasons are offered to justify it. Furthermore, the manuscript consists entirely of geometrical arguments relating ray paths to conic surfaces of revolution. The focusing properties of parabolic and ellipsoidal mirrors are worked out; then the sine ratio is introduced *ex nihilo* and used to show that hyperboloidal refracting surfaces could also focus light. Though arrangements for drawing conic sections on flat paper are proposed, no way to produce three-dimensional conic surfaces is mentioned.

As the manuscript is devoted to geometrical properties of conics, it appears that its author began by studying the focusing properties of elliptical and parabolic mirrors, and then wondered whether something similar could be done with hyperbolae. By following arguments similar to those he had used for reflective surfaces, he discovered that refractive optics could produce similar results *if* this peculiar ratio could be kept constant. As his motivation in composing the manuscript was to produce "burning glasses," he rearranged the presentation for refractive optics to begin with the conclusion (our sine law), and derive the focusing property at the end. This would account for the complete lack of justification for the constant ratio, and the lack of any discussion of optical materials or methods of making optical surfaces [10]. (A similar process seems to have been followed by James Gregory [12] in his belated rediscovery of the law in 1663.)

#### 1.4.2. *Thomas Harriot*

In the 1950s, it was noticed that Thomas Harriot had actually found and used the sine law around the end of the 16th Century [13, 14]. His discovery was entirely empirical, and just required more accurate measurements than earlier workers had made. These observations were made in 1597 and 1598, and used by Harriot in the next few years. He certainly had the sine law by 1601 [15]. It seems he refrained from publishing the discovery, for fear of attracting the attention of malevolent authorities. He died in 1621, without publishing the law.

#### 1.4.3. *Willebrord Snel*

Snel's work is better documented. His outline for a manuscript on refraction, long thought to be lost, was discovered in 1935 [16]. What was found is clearly only an outline for a book on refraction; there are big gaps that were not filled in. Snel planned to have a large section on atmospheric refraction, and to discuss the height of the atmosphere. Vollgraff [17] quotes some additional bits from the outline (which he mistakenly calls an "index"): Snel described a distorted sunset, invoking "vapores crassos" as the cause of the flattening. Enough second-hand accounts of Snel's work exist to allow a reasonable reconstruction [18] of how he found the sine law empirically. However, he died about five years after learning it, with his manuscript unpublished.

#### 1.4.4. *Descartes*

Finally, in 1637, Descartes published the sine law — though without using sines. (All these early workers described refraction in terms of ratios of lengths; the sine function was explicitly introduced later.) Many translations are available, e.g., [19]. The law was quickly checked by other workers, and accepted as correct. Its first application to astronomical refraction was Cassini's [20].

## 2. The homogeneous model

According to Ptolemy [5], astronomical refraction occurs at "the surface" that separates the air from the "ether." This supposed surface was assumed to be real until the 18th Century, though it is hard for a modern reader to imagine it. As late as 1719, de Mairan [21] was still quoting from a physics textbook that the air "extends above the Earth up to a height of about two or three leagues, where neither winds nor clouds occur; its surface must be very smooth, like that of all fluids that are not agitated".

Below this surface, the air was supposed to be uniform, and incapable of producing any refraction — except, perhaps, for those obscure "vapors near the horizon." This, then, was the picture to which Cassini applied the sine law.

### 2.1. *Cassini's refraction table*

In the late 1640s, Giovanni Domenico Cassini began working with Count Malvasia, a rich amateur astronomer with a private observatory who was interested in astrology. Cassini's job was to help the Count produce improved ephemerides. He soon found that better observations were needed, and was able to get an enormous "heliometer" installed in the huge Basilica of San Petronio, the largest building in Bologna (and still the sixth largest church in Europe). This instrument consisted of a small hole in the roof of the vault, 27 meters above the floor, which has a meridian line 66.8 meters long inlaid in the paving of the left nave. Together they formed a gigantic pinhole camera that allowed Cassini to measure both the altitude and the diameter of the Sun throughout

the year. Near the summer solstice, the scale of the solar image on the floor is about 7 arcsec/mm, and the smaller (E-W) axis of the solar image is about 27 cm.

In his first report on these solar altitudes [22], Cassini showed how the refraction, the solar parallax, the obliquity of the ecliptic, and the latitude of the observer are all involved in understanding the apparent position of the Sun. With a precision on the order of 10 seconds of arc, his observations were about 15 times better than Tycho's naked-eye measurements, and the error in Tycho's refraction tables, caused by his use of a solar parallax nearly 20 times too large, became obvious. Cassini realized that better refraction corrections were required.

Although the sine law was well known by the 1650s, Cassini took care to check it experimentally himself before using it to calculate refraction. He then applied it to the refraction at the assumed upper surface of the homogeneous atmosphere. The process is very simple, as it involves only geometry and the definitions of the trigonometric functions; see [23] or [24, pp. 93–94] for an elementary treatment in modern notation. Cassini's table was printed in Malvasia's new Ephemerides [20, p. 173].

The model has two parameters: the refractive index of air, and the height of the uniform atmosphere. Cassini did not express his calculations in mathematical form, but instead described the process verbally, using “the ratio of the sines” instead of the modern term “refractive index.” Also, he had no way to fit the two parameters simultaneously, and so resorted to a trial and error method, which was partly explained half a century later by his son [25].

He first tried to find a height of the “refractive medium” that would make the observed and computed refractions agree at some low altitudes; and “as he found that supposing this height to be 2000 toises, the two refractions agreed,” he adopted this height for the calculation of the table. (The 2000 toises was obviously an arbitrary round number that Cassini considered good enough for computing the table.) As this height (“which is only a league”) was considerably less than the minimum height of 6 leagues that anyone had proposed (“there are others who go up to 18 or 20”), “The atmosphere would only be refractive in a small part of its extent, and in its lowest layers, or, if one wants, the refractive material would be different from the atmosphere.” But by 1714 [25] it was becoming clear that the homogeneous model was the cause of this discrepancy, and that a density varying with height would produce better refraction tables.

## 2.2. *Objections to the table*

A few years after the publication of Cassini's first table, Riccioli published a book [26] in which he raised objections to it. Part of his disagreement was due to his misunderstanding of how refraction is mixed up with the solar parallax; but part was due to the peculiar run of Cassini's computed refractions at the horizon, which was quite different from Tycho's empirical table. In Tycho's table, the *differences* of successive pairs of values steadily increase with increasing zenith distance; but in Cassini's table, the difference in refraction between 88 and 89 degrees is considerably larger than that between 89 and 90 degrees. Riccioli suggested this might be a typographical error in Cassini's table.

Cassini sent a response to Riccioli's criticism in a letter to Geminiano Montanari, who promptly published it [27]. This letter was so important that it was reprinted (with two others) in 1692 [28], and English abstracts of all three were printed in *Phil. Trans.* in 1672 [29]. Those English abstracts explain the process that Cassini had used to correct the observed height of the Pole and those of the Sun at the solstices for refraction and parallax, and the laboratory experiments on refraction that convinced him of the truth of the sine law. The resulting refraction tables “make it evident” that solar refractions are appreciable even in the summer, and continue all the way to the zenith, “which hitherto hath alwaies been denied.” In responding to Riccioli's remark

about the intervals between the computed refractions nearest the horizon, Cassini [27, 28] wrote (in Latin, of course) the following:

“I have calculated the refractions again trigonometrically from the principles in the published letters for the same degrees of altitude, and likewise again came out those which are arranged in the table; hence there is no error, either typographical or trigonometrical, but it really follows from the laws of astronomical refractions published by me. The real reason why the difference of refractions from the first to the second degree is bigger than from the horizon to the first, is that at the first, up to an altitude of a degree, the inclination of the visual ray to the upper surface of the air is changed only 15 minutes, and from the first to the second degree of altitude is changed about five and thirty minutes, as is deduced geometrically by me by means of the ratio of the height of the air to the Earth’s semidiameter, but so much variation of the inclination to the surface of the air in the second degree of altitude having been made produces a bigger ratio of the differences of the angles to the differences of the sines at a larger zenith distance, which produces the bigger difference of the refractions at the horizon, of course, as you will understand more clearly in my theory of refractions, which I am working on.”

Actually, Kepler had encountered exactly this same problem 62 years earlier [8]; but neither he nor Cassini realized that this problem is inherent in the homogeneous atmosphere. Because the rays are straight within that atmosphere, they meet its refracting surface at an angle that is independent of the path length in air. Consequently, the model’s refraction is the same a few minutes of arc above the astronomical horizon as at the same distance below it, and is completely symmetrical about the astronomical horizon. So the computed refraction has an extremum at the horizon, and is nearly constant near altitude zero degrees.

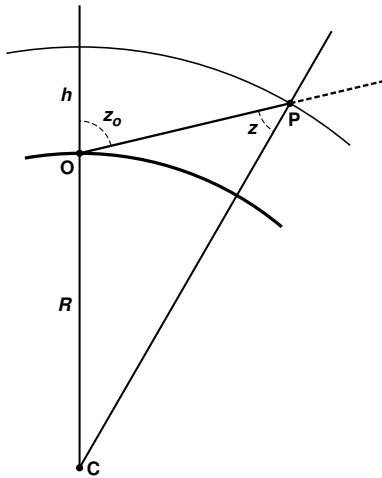
### 2.3. *Why was Cassini’s table useful?*

Although Cassini’s computed refractions were later disparaged as unreliable, the values in his table are in fact within a second of arc or two of the refractions tabulated in Allen’s *Astrophysical Quantities* from the zenith to 15° altitude, and are still within 1 or 2 per cent of modern values out to 82° zenith distance. These errors are an order of magnitude smaller than the observational errors in the data Cassini was using, so his refraction table was perfectly adequate for his purposes, except for errors of about 3 minutes of arc at the horizon. The surprising accuracy of Cassini’s table was pointed out by Delambre [30]; and Ivory [31] noticed that “if we use accurate elementary quantities in the computation, it will determine the refractions to the extent of 74° from the zenith with the same degree of exactness as any of the other methods, without even excepting the formula of Laplace.”

How could the crude homogeneous model have given such good results — especially considering that the height Cassini used was too small by a factor of two?

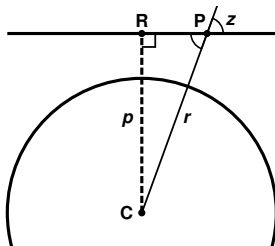
Figure 1 shows the geometry. Well above the horizon, the astronomical refraction depends weakly on the height  $h$  of the refracting surface, and is nearly a function of just the refractivity of air. At the altitude where  $\sin z_o = (1 - h/R)$ , the refraction becomes strongly dependent on  $h$ . Cassini chose  $h/R = 6.095 \times 10^{-4}$ , which puts the boundary between these two regions at an altitude of 2°. (If he had chosen the right height, which is twice as big, this altitude would be  $\sqrt{2}$  times larger, close to the crossover altitude of 2.6° found in [24, p. 108].)

Because the refraction within about 87° of the zenith is very insensitive to the adopted vertical structure [24], and Cassini fitted his model to a refraction of 5′ 28″ at 80°, all his refractions from the zenith to ten degrees altitude were scaled to a well-determined observational value at a larger zenith distance than any of his stellar and planetary observations, or any of the more accurate meridian altitudes of the Sun at San Petronio. His adopted refraction at the horizon and atmospheric height had very little influence on computed values over most of the sky.



**Figure 1.** Geometry of a ray (the straight line **OP**) in the homogeneous model. The heavy arc through **O** represents the surface of the Earth, with center at **C** and radius  $R$ . The apparent zenith distance of the ray is  $z_0$  at the observer, **O**, and a slightly smaller angle  $z$  at **P**, a height  $h$  above the surface. The law of sines in triangle **OPC** makes  $\sin z = (R/(R + h)) \sin z_0$ ; so if  $h \ll R$ ,  $z \approx z_0$ . The refraction does not depend much on  $h$  as long as  $R/(R + h)$  is closer to unity than is  $\sin z_0$ . But if  $\sin z_0$  is nearly unity, this approximation fails, and the refraction depends on  $h$ .

The small flattening of the Sun at the horizon shows that the ray curvature is usually small compared to the Earth’s curvature (see [24, pp. 86–88]). So it is instructive to ignore ray curvature and just consider the geometry of straight rays. This approximation is still better when the upper atmosphere is considered, as the refractive index  $n$  is exactly unity at the top of the atmosphere, and is not quite 1.0003 even at sea level; neglecting curvature is equivalent to assuming  $n \equiv 1$  everywhere.



**Figure 2.** Geometry of a straight ray (the straight line **RP**). The dashed line **CR** is the perpendicular from the center of the Earth **C** to the ray. At any point **P** on the ray, the local zenith distance of the ray is the angle  $z$ .

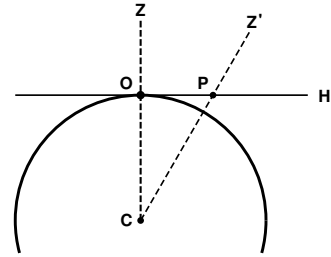
Figure 2 shows the geometry for a ray that passes through the upper atmosphere. The length  $p$  of the perpendicular **CR** from **C** to the ray is  $r \sin z$ , where  $r$  is the distance of a point **P** on the ray from **C**. Wherever on the ray **P** is located, the local zenith distance  $z$  varies so that the product  $p = r \sin z$  remains fixed at the perigee distance of the ray.

Notice that the invariance of  $p$  makes the local zenith distance of the ray at **P** decrease as the point’s distance  $r$  from the center of curvature increases. That means that  $z$  is always smaller in the upper atmosphere than the zenith distance of the ray at a ground-based observer. Furthermore, the change in zenith distance is larger for rays near the observer’s horizon than for those near the zenith (see Figure 3).

#### 2.4. The refractive invariant

When the small deviation of the refractive index from unity is taken into account, the invariant quantity is not the simple geometric invariant  $r \sin z$ , but becomes  $nr \sin z$ . This was noticed by Bouguer [32] and by Euler [33]. (For a derivation in modern notation, see [24].) A remarkable consequence of this invariant is that the differential equation for the refraction is easily obtained

**Figure 3.** Geometry of a straight ray at the observer’s horizon. The observer, at **O**, sees the horizon at **H**, and the zenith at **Z**. At **P**, the curve of the Earth shifts the local zenith to **Z'**, so the local zenith distance of the ray is less than  $90^\circ$ . Because an observer at **P** would see the horizon at **O**, the zenith distance of the ray at **P** is just the complement of the dip of the horizon there.



by taking the logarithmic derivative of the invariant and setting it equal to zero. So we can write the refraction directly as the integral

$$\int_1^{n_o} \tan z \frac{dn}{n} \tag{1}$$

where  $n_o$  is the value of the refractive index at the observer, and 1 is its value above the atmosphere.

**Figure 4.** Integrand of the refraction integral near the horizon. The top of the atmosphere is at the left edge; the ground is at the right. The abscissa is a linear function of density, starting at  $n = 1$ . (Z.D. = zenith distance.)

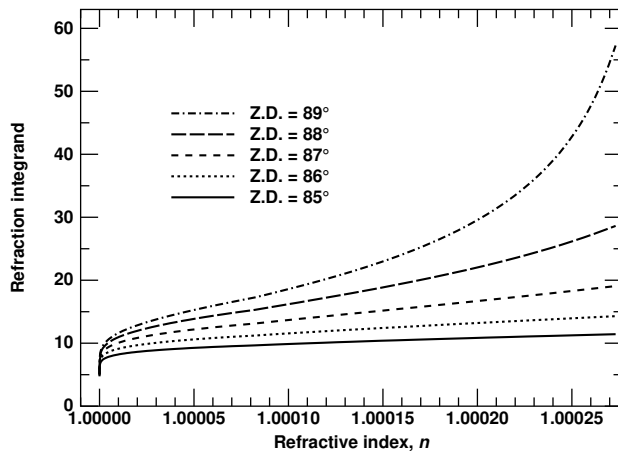


Figure 4 shows the integrand of this integral as a function of the refractive index  $n$  for a few zenith distances near the horizon, using the Standard Atmosphere model. At small and moderate zenith distances (see [24] for examples), the integrand is nearly constant, which is why Cassini’s simple calculation gave good values for  $z_o < 80^\circ$ , in spite of his poor choice for the height of the atmosphere.

However, Figure 4 shows that the weighting with height changes drastically in the last few degrees above the horizon. At  $85^\circ$ , the integrand remains nearly linear, but is hardly constant, being about 40% larger at the surface than in the upper atmosphere. With increasing zenith distance, the integrand bends up steeply near the surface, and the average value corresponds to a height of just a few km; this explains why Cassini had to use a small height to fit measured refractions near the horizon.

### 3. The demise of the homogeneous model

Subsequent workers tried to extend Cassini’s method by allowing refraction to occur throughout the atmosphere instead of at a single height. However, without knowing either the density distribution of the air or a way of calculating the ray curvature, they could only assume some shape for the ray and use that to determine its local zenith distance and hence the differential

of refraction. For example, in 1714 [34], Cassini's son Jacques assumed the rays are arcs of a circle (corresponding approximately to a linear decrease of density with height). This model produced better agreement with observed refractions near the horizon, and moved the top of the atmosphere up a factor of 3.5; but it was still much lower than estimates of the height of the atmosphere from twilight.

The situation improved considerably 15 years later, when Pierre Bouguer derived the proper differential equation for the ray. He was trained by his father in mathematics and hydrography; in 1729, he won the Grand Prix of the Royal Academy of Sciences for a monograph on determining the altitudes of stars at sea [35], in which he showed how to relate the ray shape to the density distribution in a spherical atmosphere. This allows the refraction to be written as a definite integral. Assuming that the ray makes the same angle with the local vertical at each level, the rays become logarithmic spirals.

Like Cassini II, Bouguer was struck by the great effect of the lower atmosphere; they both supposed that the "refractive material" had to be something other than air. Bouguer was misled by confusing the refractive index with the "refractive power" (i.e., the refractivity), which he correctly assumed must be proportional to density. This led him to try a refractive index proportional to some power of distance from the center of curvature, which amounts to adopting a polytropic model. Like Cassini, he then had to find his two parameters (the refractive index at the surface and the exponent in the power law) from the refractions at the horizon and some higher altitude. "But nothing is easier than to discover these two quantities," says Bouguer; he develops an iterative solution, and then uses his parameters to construct a refraction table.

Bouguer's big advance was to relate the refraction directly to the density distribution of the "refractive material." In addition, he provided a table of the geometric dip of the horizon, and a refined dip table that took refraction into account. But as Bouguer adopted a density model close to the one chosen by Jacques Cassini, he too found a small value for the height of the atmosphere — which reinforced his conviction that air could not be the "refractive material."

Because of the competence Bouguer displayed in his prize essay, he was one of the three men chosen by the Academy to measure the length of a degree of latitude near the equator in 1735. This expedition was sent to Peru; Bouguer went to Quito (now the capital of Ecuador), and measured both refraction and gravity there, and on the slope of a nearby volcano, over a kilometer above Quito, which itself is nearly 3 km above sea level. The uniform model had predicted that refractions should be much larger at these heights, where the observer would be closer to the supposed refracting surface of the atmosphere; but to everyone's astonishment, the refractions were substantially *less* than those measured at sea level. Bouguer's preliminary account, in a letter [36] sent from Quito in July, 1737, was read to the Academy in 1739.

His final report [32] was delivered to the Academy 10 years later. It contains the detailed measurements of refraction and their analysis, using the methods of his 1729 prize essay. By showing that a continuously varying refractive index explained not only the run of measured refraction with angular altitude, but also the different refractions measured from sea level to the tops of high mountains, Bouguer completely destroyed the homogeneous model atmosphere.

#### 4. Other linear models

Bouguer's models, like the one proposed by Cassini II, assumed a linear decrease of refractivity with height, and a definite top to the refracting medium. However, this conflicted with the "geometric" (i.e., exponential) — as opposed to the "arithmetic" (i.e., linear) — decrease with height required by hydrostatic equilibrium, as well as the evidence from twilight and other phenomena that the atmosphere must extend much higher. Because of uncertainties about



the effects of temperature on the refractivity of air, in addition to doubts about air itself as the “refractive medium”, several other people tried to improve on these early linear models.

The first was Thomas Simpson. In the 1743 book [37] where he explained his method of evaluating definite integrals by parabolic approximations, he also discussed refraction (though without citing any previous theoreticians). Simpson produced a refraction table for altitudes less than  $24^\circ$  that is within a few seconds of modern values, but shows appreciable systematic variations; his method of computing it is sufficiently complicated that it never seems to have been put into practical use. However, he did appreciate the irrelevance of atmospheric structure for the run of refraction above a few degrees of altitude: “. . . the refraction in high altitudes, it has been proved, will be but little affected by different Laws of Density, and therefore come out very near the same, compute them according to what Hypothesis you will; even so near, that if the Refraction at any Altitude not less than about 7 Degrees be truly given from Experiment, the Refractions, computed from thence, for any higher Altitude, will never differ from one another by more than about 2 Seconds.”

The next person to study the linear model was James Bradley, the third Astronomer Royal (after Halley), who discovered the aberration of light and the nutation of the Earth. He was an assiduous and careful observer, but never reduced and published his extensive observations, which were only published decades after his death in 1762. However, he corresponded extensively with many other astronomers, and his method of computing refractions became known as “Bradley’s rule.” It was first made public by Nevil Maskelyne in 1763 and 1764 [38, 39], and discussed by him further in 1787 [40]. He says that Bradley found the rule by applying Simpson’s analysis to his own refraction measurements. The table computed by Maskelyne from Bradley’s rule seems to be the first to use accurate corrections for temperature and pressure, though several earlier workers had published separate tables for summer and winter.

Meanwhile, Tobias Mayer, a self-taught mathematician who had become Professor of Economics and Mathematics at Göttingen in 1751, had devised his own way of computing refraction in the linear model. While working as a cartographer earlier, he had produced an accurate lunar map based on micrometric measurements, which allowed him to study the libration of the Moon. Apparently his interest in lunar observations led him to develop the famous theory of lunar distances, which was adopted by Maskelyne and the Nautical Almanac for navigation at sea; the refraction theory was part of this effort. Like Bradley, Mayer died in 1762 before his full theory was ready for the press, and his tables were prepared for publication by Maskelyne [41]. Unfortunately, that version only states the refraction formula with the vague remark that it was “deduced from theory”. In Maskelyne’s later discussion of Bradley’s work [40], he noted that “Mayer’s refractions agree almost exactly with Dr. Bradley’s,” so they evidently came from a very similar model.

The actual details of the derivation were not revealed until the publication of the correspondence between Mayer and Leonhard Euler by Eric Forbes in 1971 [42]. In this, one finds that Mayer, much like Simpson, had worried about the conflict of the linear model with the hydrostatic law; in a letter of 6 Jan. 1752, Mayer wrote: “Now, although this hypothesis is an open contradiction of the truth, the resulting formula for the refraction nevertheless agrees very closely with observations, and this makes me think that it would not really help much if one were to choose straightaway another and better expression for the density of the air. I have already seen Mr. Bouguer’s treatise ten years ago . . .” [This is evidently Bouguer’s prize essay from 1729.] Forbes noticed that Mayer’s formula is too small near the horizon; this is a well-known problem with the linear model, which corresponds to an unrealistic lapse rate (the negative of  $dT/dh$ ) near the surface.

The inclusion of temperature effects in the refraction formulae of Bradley and Mayer came several decades before the development of the ideal-gas law. The understanding of these effects

took more than a century [43], largely for lack of adequate instruments and suitable laboratory techniques. Daniel Fahrenheit did not invent the mercury-in-glass thermometer until 1714; earlier devices were affected by changes in barometric pressure, and by the nonlinear variation of the vapor pressures of liquids like water and alcohol with temperature.

Even so, a vague understanding that heating makes gases and vapors expand goes back to antiquity; so there was an awareness that the “degree of heat” must somehow be taken into account. But ideas about atmospheric refraction developed while the concepts of heat and temperature were still immature: the notion of “phlogiston” was proposed about the time of Cassini’s first refraction table. Phlogiston gradually gave way to “caloric” in the last years of the 18th Century [44]; and that in turn was superseded by kinetic theory during the 19th Century. So, in the early years of the 18th Century, the rules for temperature corrections to astronomical refraction tables should be regarded as empirical adjustments made to fit the observed measurements of refraction.

An early attempt made by Leonhard Euler [33] luckily involved imagining a temperature scale such that at a constant pressure, “the numbers indicated by the thermometer . . . would always be reciprocally proportional to the densities of air.” This corresponds to the modern ideas of an absolute temperature scale, and an ideal gas — both of which were at least half a century in the future in 1754. Euler also pointed out the importance (and the geometric interpretation) of the refractive invariant.

In the same paper, Euler assumed that the ray has the shape of a negative power law, which would be approximately true if the density of the atmosphere decreased as a power law of the height. He then compounded the error by guessing that the height where the atmosphere has half its temperature at the surface might “surpass a German mile” — 7 or 8 km — so he tried 2 miles, and later, 3. He also began the tradition of expanding the refraction in powers of the tangent of the zenith distance, which was continued by Lambert [45].

Bruhns [3] says that (because of Euler’s errors) “no one has ever made tables from his formulas; they would have given worse values than the much simpler Bradley’s formula.” On the other hand, Bruhns liked Lambert’s work; but Lambert gave a “proof” (based on oversimplified assumptions about the atmospheric density profile) that refraction cannot alter the apparent size of an object — did he ever notice the flattening of the setting Sun? — and that therefore the existing reports of mirages were false. It later turned out that the apparent utility of power series in  $\tan z$  would prove deceptive.

All these attempts to construct useful refraction tables without knowing either the gas laws or the temperature distribution in the atmosphere must be considered empirical ways of smoothing observed measurements of refraction. They contributed little to understanding atmospheric structure. However, they did indicate that temperature variations were important.

## 5. The exponential model

### 5.1. *Avoiding the temperature problem: Newton*

But without a quantitative model for the effects of temperature, little progress was possible. However, the discovery that the density of air is proportional to its pressure, published by Boyle in 1662 and by Mariotte in 1676, allowed the principle of hydrostatic equilibrium to be applied to the refraction problem. This idea was first used by Isaac Newton in the 1690s — but without contributing to the advancement of astronomy. Although his refraction table was eventually published by Halley [46], Newton never explained how it was computed.

The mystery remained unresolved until 1835, when Francis Baily published the correspondence between Newton and Flamsteed [47]. It began in 1694, when Flamsteed told Newton he

had found the horizontal refraction to be  $33'$ , decreasing to  $23'$  a degree higher; but the existing theories based on a uniform atmosphere made this difference only  $5'$  rather than  $10'$  — the problem both Kepler and Riccioli had noticed. “It seems only the medium, in which the refractions are made, is not equable as supposed by those who build their tables upon theories. This subject deserves your consideration: I desire your thoughts of it at your leisure,” Flamsteed wrote. Newton replied that he blamed the discrepancy on “the different heat of the air in the lower region;” adding that he also thought “the refraction in all greater altitudes is varied a little by the different weight of the air discovered by the baroscope.”

A month later, Newton sent Flamsteed a preliminary refraction table based on a linear decrease of refractivity with height. A few weeks later, Newton wrote that this table was “not so accurate as it may be made . . . , and when I have set it right I will send you a new copy of it.” After another month, Newton wrote that “The theorem of refractions I sent you has this fault, that it makes the refracting power [i.e., the refractivity gradient] of the atmosphere as great at the top as at the bottom. This has put me upon thinking on a new theorem . . . . But the calculation is intricate.” This was followed by his comments in January, 1695, that “the dense vapors, which always stagnate upon the surface of the sea and often fenny places, cause a strong refraction.”

“To make a new table of refractions has taken up almost all my time ever since the holidays: and I have hitherto lost my pains in fruitless calculations, by reason of the difficulty of the work. For considering that such a table is the foundation of astronomy, and very necessary for your great work, and that you have taken so great pains in providing materials for it, I was desirous to complete it . . . .” The next month, Newton wrote that “I have been, ever since I wrote to you last, upon making a new table of refractions and have not yet finished it: 'tis a very intricate and laborious piece of work; . . . I have found that, if the horizontal refraction be  $34'$ , the refraction in the apparent altitude of  $3^{\text{gr}}$ . will be  $13' 3''$ : and if the refraction in the apparent altitude of  $3^{\text{gr}}$ . be  $14'$ , the horizontal refraction will be something more than  $37'$ .” [But  $14'$  and  $33'$  were Flamsteed's observed values, which he asserted were “incontestable”.]

Newton then went on to speculate about effects of “sea-vapors and fen-vapors” as being really due to “condensation of the air by cold.” Finally, in March, 1695, Newton sent Flamsteed the finished table of refractions. But Baily did not find this table in Flamsteed's papers; the only value mentioned in the letter is  $13' 20''$  at  $3^\circ$  altitude, which agrees with Newton's table published by Halley in 1721.

Evidently Newton was aware that temperature effects were important; but, lacking a quantitative theory for them, he had to do the best he could with just pressure. And Flamsteed knew that result was inconsistent with his own careful measurements of refraction, which he continued to use instead of Newton's calculated values. Newton, who had done the best he could, considered Flamsteed ungrateful for his hard work; and relations between them rapidly deteriorated. Newton was so disgusted that he never mentioned refraction again.

The publication of this correspondence allowed Biot [48–50] to determine that Newton's enigmatic refraction table was actually based on an isothermal atmospheric model that took account of the variation of air density with pressure. Biot reverse-engineered Newton's procedure, and even correctly predicted that Newton's lost calculations would be found in the Portsmouth collection of Newtoniana; they were finally published in 1974 [51].

## 5.2. *Dealing with the isothermal model: early attempts*

The first person to *publish* an exponential model was Brook Taylor, who devoted the final section of *Methodus Incrementorum* [52] to refraction. He got as far as deriving the differential equation for the refraction, but never actually calculated numerical values. Solving the exponential problem proved too difficult even for Euler [33], who made several unfortunate approximations in his

attempt. However, he did introduce the idea of approximating the refraction at small zenith distances by a multiple of  $\tan z$ , followed by some small correction terms. A little more progress in this direction was made by Lambert [45], who improved the approximations.

Later, Lagrange [53] made further improvements, based largely on de Luc's studies of the density of air. In 1787, Oriani [54, 55] extended Lagrange's approach, and produced the first numerical values of the intractable integral of  $\exp(-t^2)$ , obtained by trapezoidal-rule quadrature. Both Lagrange and Oriani used an awkward mathematical notation, denoting common base-10 logarithms (which they call "tabular") by  $L.$ , even before complicated expressions, without using parentheses; and denoting "hyperbolic" (i.e., natural) logs with a lower-case  $l$ . Oriani carried the series-expansions farther than Lagrange did, though making the clumsy typesetting more difficult to read than Lagrange's, and writing the whole paper in Latin, which was beginning to decline in use.

### 5.3. *Oriani's theorem*

Despite these drawbacks, Oriani managed to deal with the isothermal model numerically, and to show the properties of its representations in series of terms that are odd powers of  $\tan z$ . He found that the first term was adequate from the zenith to  $50^\circ$  Z.D., and that the first two terms suffice for  $z$  as large as  $65$  or  $70^\circ$ . Furthermore, he showed that as these two terms depend only on the conditions at the observer, "This expression depends on no hypothesis about either the law of heat in the atmosphere or about the density of the air at various distances from the surface of the Earth." (This demonstration is known as "Oriani's Theorem.") Finally, he managed to extend his refraction table to  $80$  or  $85^\circ$  by including the third and fourth terms; but at  $86^\circ$  his expansion began to diverge. Because of the "imperfect analysis", he recommended taking values within  $5^\circ$  of the horizon directly from observations.

It's not clear what accuracy Oriani had in mind in setting these limits; however, when he specified angles, he only gave values precise to the nearest second of arc. Later workers who used his two-term approximation have usually claimed it was useful to  $75^\circ$  Z.D., even when they worked to much finer precision. As late as 1907, Bemporad [56] compared Oriani's approximation with Bessel's *Tabulae Regiomontanae*, finding that they agreed to a hundredth of a second even at  $75^\circ$  Z.D. But Bessel, like Oriani, used an isothermal model atmosphere; so this comparison proves only that both astronomers could calculate correctly. Anyhow, Simpson [37] had already found that the details of the atmospheric model were unimportant above an altitude of  $7^\circ$ .

A more practical test is to compare the Oriani approximation to more exact refraction values. Today, it is known [23] that Oriani's two-term approximation differs from the refraction calculated for the Standard Atmosphere by 41 milliarcseconds (mas) at  $70^\circ$ , and by 122 mas at  $74^\circ$  Z.D. In fact, the isothermal model differs from the standard one by only 26 mas at  $75^\circ$ , and just over  $0.1''$  at  $79^\circ$ . Such comparisons explain the popularity of Oriani's theorem.

In fact, it has become *too* popular. The idea that astronomical refraction is proportional to the refractivity at the observer has become embedded in astronomical folklore. It is a useful approximation over most of the sky, but is never exact; it usually fails by about 10% at the horizon, but can be wildly in error when the nocturnal inversion is strong. Unfortunately, many astronomers have mistakenly assumed it is true at the visible horizon, where it is even worse than at the astronomical one; see [23] for examples.

### 5.4. *Kramp and Laplace*

Oriani had to employ numerical integrations, leaving the further analysis of the isothermal model to later workers. In 1799, Christian Kramp published a monograph [57] on refraction in which he

managed to evaluate various moments of a negative exponential, advancing the theory of the gamma function in the process. This showed him that Newton's table (as published by Halley) must have been calculated theoretically for an exponential atmosphere.

In the detailed explanation of refraction, Kramp derived the refractive invariant, and expressed the refraction as a series with powers of  $\tan z_o$ . He devoted a chapter to the mathematical properties of factorials; he used the integral expression for the gamma function to show that  $\int_0^\infty \exp(-t^2)$  is half the square root of  $\pi$  (or, as he put it, "the integral . . . reduces to a quarter of a circle.") This set the stage for a detailed discussion of refraction in an exponential atmosphere, followed by a discussion of actual observations of large refraction (including the Dutch observations at Novaya Zemlya). If the scale height falls to 1880 toises, the ray curvature equals that of the Earth, and the horizontal refraction is infinite. This seems to be the earliest step toward understanding ducts, which underlie various spectacular refraction phenomena: the Novaya Zemlya phenomenon, the Fata Morgana, and other types of superior mirages. Further work in this direction was done by Bouguer [32], Kummer [58], and others.

These preliminaries allowed Kramp to calculate refraction at the horizon, using the error function. This led him into a long discussion of Bradley's rule, which of course is inconsistent with the exponential model. The horizontal refraction naturally led him to discuss terrestrial refraction, and the ratio of Earth's curvature to ray curvature. Of course, as his isothermal model made the ray curvature a little too big, he found that this ratio must be less than 7 even on hot days, and usually about 5.5.

Kramp's discussion benefits from an understanding of the effect of temperatures, although he assumed a constant temperature in his model. But Charles's law allowed him to find absolute ray curvatures for different temperatures. Unfortunately, his text is difficult for a modern reader, because of his peculiar notation as well as his use of centesimal instead of sexagesimal angular units. There are also several typographical and other errors. Still, there is a lot of substance to his work.

While Kramp was working out the exponential atmosphere, Laplace was writing the *Mécanique Céleste*. Its fourth volume, which appeared in 1805 [59], deals with refraction, which Laplace regarded as due to a central force acting on the "luminous molecule". This allowed him to treat it as a problem in orbital mechanics. The result is somewhat more readable than Kramp's treatment, though it still uses centesimal angles. The main drawback of Laplace's treatment is his insistence on expressing everything in terms of a supposed law of attraction that acts on his luminous molecules, which introduces the expression

$$\sqrt{1 + \frac{4K}{n^2} \cdot \rho} \quad (2)$$

wherever a modern reader expects the refractive index of air. Fortunately, this is all explained in detail in Nathaniel Bowditch's English translation [60]; in footnote (3844) on p. 453 of the cited volume, Bowditch simplifies the notation slightly in his equation numbered [8192b]. As Laplace already defined a quantity  $n$  as the velocity of light, that letter is not available to label the refractive index; he used  $i$  instead. Fortunately, Bowditch spends several pages of footnotes at the beginning of the chapter explaining the correspondences between the "emission" and the "undulatory" theories of light, noting that the only property actually used is the sine law, which is "the results of observation."

Laplace concentrated on the exponential model; but he recognized its weakness — an unrealistic increase in refraction toward the horizon — and devised a treatment for it. He also improved on Oriani's derivation of the tangent power series for refraction.

## 6. Hybrid models

Laplace seems to be the first person to see that because the linear model underestimates the horizontal refraction, and the exponential model overestimates it, some combination of the two would give a better refraction table than either one alone. While earlier efforts by Simpson, Bradley, and Mayer to adjust the low-altitude behavior of their linear models in this region were merely numerical, Laplace modified the structure of his atmospheric model, thereby connecting the observed refractions at low altitudes to atmospheric structure. However, his hybrid model turned out to be unphysical: it had a super-adiabatic lapse rate near the surface.

The mixed-model idea was applied more carefully by James Ivory in a long series of papers in *Phil. Mag.* volumes 57–68 (1821-26), in parallel with disputes about refraction with Thomas Young in the *Quarterly Journal of Science, Literature, and the Arts*. Their papers are too numerous to cite here; see the on-line bibliography [61] for a list. The disputed matters included the convergence of series, approximations for refraction in various atmospheric models, and the refraction at low altitudes. In general, Young's arguments seem slipshod and carelessly rushed into print, while Ivory's discussions are well thought out and insightful. In particular, Young [62] claimed that atmospheric structure could be inferred from observed refractions, while Ivory [31, 63] showed that a simple formula derived from Cassini's homogeneous model gave results practically indistinguishable from Laplace's results at zenith distances less than  $80^\circ$ .

A notable feature of Ivory's work was to consider various models that had not been treated before. He realized that the models of Cassini and Simpson/Bradley/Mayer both gave too little refraction at the horizon, and that the isothermal model of Kramp and Laplace gave too much; so he considered a broader class of models, with Cassini at one extreme and Laplace at the other. Today, we would call these polytropic models: the homogeneous model has polytropic index zero; the linear model has index 1; and the isothermal model has an index of infinity. And the total heights of these model atmospheres are proportional to the polytropic index plus one. (Polytropes are discussed further in Section 8.) By considering the heights of the various models, Ivory decided that the observed horizontal refraction corresponds to an atmosphere 4 times the height of Cassini's, with a lapse rate corresponding to about  $7.8^\circ\text{C}/\text{km}$ . However, he already knew that the observed lapse rate is about  $6^\circ\text{C}/\text{km}$ , which would produce too large a horizontal refraction. He attributed the discrepancy to a non-uniform decrease of temperature with height.

In 1823, Ivory published an 87-page paper [64] on refraction, summarizing the history of the subject as well as his own work. After describing the various (polytropic) models then in use, he says: "If we reflect that all these atmospheres will agree in giving the refractions actually observed by astronomers as far as  $70^\circ$  or  $80^\circ$  from the zenith, it is natural to think that the one which likewise coincides with nature at the horizon, will deviate but little from the truth in the intermediate  $10^\circ$ ." On the basis of Gay-Lussac's balloon ascent, he notes that "the elevation for depressing the thermometer one degree will come out equal to 95 fathoms: and if we suppose that the same rate prevails in all parts of the atmosphere, the whole height will be ... nearly 29 miles. The observations of twilight show that this is less than the true altitude; and hence we must infer, that the thermometer falls at a slower rate in the higher, than in the lower, parts of the atmosphere." Ivory took this decrease to be gradual; but today we know it is due to the stratosphere — which his comment might be seen as predicting.

To produce this decreasing lapse rate, Ivory introduces a parameter  $f$  on p. 449 that increases the polytropic index at great heights. At the surface, the index  $m = 4$ ; high in the atmosphere,  $m$  becomes large, and the upper atmosphere is nearly isothermal. This flexibility gave him a physically consistent model atmosphere that would also match the observed refraction at the horizon, the measured lapse rate in the lower atmosphere, and the twilight observations. All

these conditions were satisfied with  $f = 2/9$ . On comparing this model atmosphere with actual measurements of the temperatures and pressures measured on various mountains and in Gay-Lussac's balloon ascent, "It appears that, although the refractions near the zenith are affected in a degree hardly perceptible by the peculiar constitution of the atmosphere, yet, near the horizon, they depend entirely on the same arrangement of the strata of air indicated by terrestrial experiments."

On pp. 466–467 of this paper, Ivory discusses the convergence of the series expansions he has used. He points out that the series for the refraction integral "belongs to that class called semi-convergent; which converge indeed to a certain degree in their first terms, but afterwards become divergent." This term had been invented by Legendre a few years earlier, but was still unfamiliar to the English scientists; so Ivory's warning was generally ignored. (The modern term for such series is "asymptotic.") This behavior means that many common assumptions about the sizes of terms in a series are incorrect, and that the approximations commonly used in evaluating refraction integrals often turn out not to be valid. For example, although it is obvious that the expansion of the refraction in a power series in  $\tan z$  must fail near the horizon, where  $\tan z$  becomes infinite, it is not so obvious that the series actually diverges at *every* zenith distance, even very near the zenith.

Indeed, Ivory discusses this further on p. 472, where he says "The first two terms do not contain  $f$ ; and they give that part of the refractions near the zenith, which has no dependence upon the constitution of the atmosphere." Of course, this explains why Oriani found this to be true for the tangent series; but Ivory does not mention Oriani. Ivory goes on to point out that  $f$  can be adjusted "so as to make the formula represent some very exact observations made at low altitudes, from  $2^\circ$  to  $7^\circ$  above the horizon. With regard to altitudes less than  $2^\circ$ , it is not clear that the astronomical refractions do not participate of the extreme irregularity that attends the terrestrial refractions".

Ivory's disputes with Young continued the next year. A notable contribution was Ivory's letter [65] in which he again used polytropic models, and introduced what we would call adiabatic atmospheres, which had been studied by Dalton. Ivory was puzzled by the discrepancy between the ratio of specific heats found in the laboratory and the expected value of  $4/3$ ; he knew that this plays a part in determining the speed of sound. He continued his study of adiabatic polytropes in 1825 [66], noticing that the measured atmospheric lapse rate is significantly sub-adiabatic, and that the sound speed agrees with the laboratory ratio of specific heats. He adopted a new value ( $-267^\circ\text{C}$ ) for the absolute zero temperature. And he concluded that the horizontal refraction is between  $34'$  and  $35'$  at  $50^\circ\text{F}$ , making the lapse rate between one degree in 84 fathoms [corresponding to  $6.5^\circ\text{C}/\text{km}$  — the value enshrined in our Standard Atmosphere for the past century] and  $4.6^\circ/\text{km}$ , saying "The true atmosphere is undoubtedly contained between these limits."

In 1826, Ivory [67] carefully compared his theory with observed refractions near the horizon, concluding that "no table of refractions hitherto published can safely be trusted to at altitudes less than  $2^\circ$ . And this conclusion is corroborated by the parallel instance of the terrestrial refractions, which are found to vary from a certain limit through all degrees of magnitude, and even to change from positive to negative. ... The boundary which separates the refractions irreducible to any degree of regularity, from those that can be theoretically computed, at least with tolerable regularity, ... seems to be placed at an altitude of  $2^\circ$  or  $1^\circ\frac{1}{2}$  above the horizon."

Finally, in his Bakerian lecture of 1838 [68], Ivory reviewed the whole subject, emphasizing that "a great share of that part of the astronomical refraction which depends upon the constitution of the atmosphere, must be ascribed to the initial rate at which the density decreases," and that "as far as  $74^\circ$  from the zenith ... all tables of refraction may be computed by Cassini's method." But between there and the horizon, the lapse rate near the ground becomes increasingly important. He tried hard to find evidence in refraction measurements for higher-order terms in the temper-

ature profile, but succeeded only in showing that even the second-order term in a series expansion (representing a change in lapse rate with height near the surface) could only affect the refraction within two degrees of the horizon by a few seconds of arc. He concluded that improving the knowledge of the temperature profile near the ground would require “many good observed refractions at altitudes less than  $5^\circ$ .”

However, in the same year, Arago (who had plenty of practical experience in measuring altitudes near the horizon) pointed out [69] that “Astronomers who have tried, even a single time in their life, to determine the value of horizontal refraction, know how little it is permissible to count on the results. Ordinarily, the edge of the sun is the aim point; but near the horizon this edge is so strongly indented, so vividly colored, so jagged; besides, these diverse irregularities are so changeable that the observer does not know where to put the wire of the reticle, at what point, at what height to fix the telescope on the graduated limb of the instrument which he uses.” In short, it is hopeless to expect to obtain reliable measurements within a few degrees of the horizon. (These sunset structures are discussed further at the end of Section 12.)

## 7. Realistic models

As Ivory’s final models have a lapse rate at the surface very close to the mean value obtained from direct measurements, they represent “mean refraction” as well as can be expected. What they lack is a way to include changes within the lowest kilometer caused by local weather conditions, which would require a means of computing refraction from actual, measured atmospheric states. This had actually been provided by Biot in 1836 in two notes in *C.R.* [48, 70] and a detailed monograph [71] in the *CdT*.

Biot was led to these improvements by reading the Newton–Flamsteed correspondence published by Baily the year before [47]. While reconstructing Newton’s procedure from the clues in those letters, he not only discovered that Newton had used an exponential (i.e., isothermal) atmosphere; he also found a remarkable theorem about the vertical magnification of objects at the astronomical horizon. (Biot had a long-standing interest in that subject; he had discussed the flattening of the Sun and Moon at the horizon in his 1810 textbook.) Biot used calculus; but a simpler proof is possible with just geometry [24].

In this work, Biot repeatedly emphasizes that the refraction observed at sea level is mainly determined by the structure of the lower atmosphere, and that the structure of the upper layers has no appreciable influence. Consequently, the observed refraction cannot be used to estimate the height of the atmosphere, nor to indicate the way in which the densities and temperatures decrease at heights greater than four or five thousandths of the Earth’s radius (i.e., 25 or 30 km).

After discussing the validity of the Oriani approximation, Biot went on to show a simple way to evaluate the refraction integral numerically: he changed the variable of integration to the local zenith distance of the ray at each height in the atmosphere. By using 13 suitably chosen density levels, he reproduced Ivory’s calculated refraction at the horizon with an accuracy better than  $1.25''$ . He gave the details of the calculation to illustrate this example. As additional test cases, he worked out the isothermal model and the arithmetic-decrease model (i.e., the one used by Simpson and his followers), and discussed Bradley’s rule. This case is very unrealistic; its lapse rate is about three times the value measured near the surface by direct observations. Despite this large deviation from the real atmosphere, it produces very nearly the same refraction from the zenith to  $80^\circ$  as Ivory’s model. (This is another illustration of the Oriani theorem.) But at larger zenith distances, it gives calculated refractions that are too small; Biot showed that this conclusion can be predicted from his theorem about the magnification at the horizon, saying “These defects of Bradley’s rule have long been recognized, but I do not know that anyone has indicated the true cause.”



In his concluding discussion, Biot said that “if ... some day, exact measures allow us to obtain more precise and more numerous elements of the real state of the lower layers of the atmosphere, ... one could, by the method of quadratures explained in the present memoir, use these results in the calculation of refraction.” Over a century later, this actually happened after Auer and Standish [72, 73] re-invented Biot’s transformation of the refraction integral. Their way of evaluating this integral is not as direct as Biot’s, and fails when the ray curvature is near the Earth’s curvature, which makes their Newton–Raphson iterations fail to converge.

In 1838, Biot published a note [74] in which he used Gay-Lussac’s balloon measurements to show how his numerical method could be applied to data on the real atmosphere. He also produced another long monograph on atmospheric structure [75], in which he again emphasized the uselessness of refraction observations for inferring the structure of the upper parts of the atmosphere, “as the refractions observable down here [at sea level] are sensibly independent of the manner of superposition which one could attribute to them.” In 1854 and ’55, an extensive debate about the relation between low-altitude astronomical refraction and terrestrial refraction raged through the pages of volumes 39 and 40 of *C.R.*; Biot summed it up in a review [76] in which he pointed out that the “caprices” of refraction near the horizon were beyond the abilities of theory to predict, but that empirical refraction data in this region provide information about the *lowest* layers of the atmosphere.

## 8. A wasted century

Biot’s understanding of refraction was far ahead of his time. Despite his best efforts, astronomers and geodesists continued to treat refraction as a nuisance to be eliminated, rather than a problem to be understood; and their traditional approach was to use Lambert’s divergent series of odd powers of the tangent. Subsequent workers continued to expand unrealistic analytical models of the atmosphere in these divergent series, whose complexity led farther and farther from any understanding of the problem. Instead of following Biot’s advice to deal numerically with real atmospheric conditions, they stuck to series expansions based on analytical idealizations.

One trend was to study various polytropic models intermediate between the extremes of Simpson’s order 1 and the infinite-order isothermal model. (The term *polytrope* was not introduced to atmospheric physics until 1916, when Robert Emden [77] described the basic properties of these models, in which the density is proportional to a power of the pressure; if the variation of gravity with height is neglected, a polytropic region has a constant lapse rate. In 1923, he gave a rather superficial account of their use in refraction calculations [78].) Among the first was Fabritius [79], who remarked that “one can draw the conclusion that the constitution of the atmosphere in the highest layers will be without appreciable influence, even on the horizontal refraction.” But most assumed a particular lapse rate, and derived series expansions for it. For example, Bauernfeind (1864) developed the refraction for an order 5 polytrope [80], carrying the expansions to the 28th order terms. (He later extended this treatment to terrestrial refraction.)

Further efforts of this sort were made by Radau, an amateur mathematician who evidently enjoyed exploring series expansions [81, 82]. He worked out the polytropes of orders 4, 5, and 6, as well as several more elaborate models. His intricate series expansions were endorsed by the Paris Observatory, and were inordinately influential on later workers. Unfortunately, they were based on Lambert’s expansion [45] of the refraction integral in odd powers of  $\tan z$ , which Ivory [64] had shown to be divergent.

In particular, such series were used in Simon Newcomb’s chapter on refraction in his very influential textbook [83]. Although Radau realized that thermal inversions in the lowest few meters were common, that they increased the refraction near the horizon, and even that a low-lying thermal maximum could trap nearly horizontal rays, Newcomb wrongly claimed that

“astronomical refraction is little influenced by the diminution of temperature at low altitudes,” and ignored inversions. Furthermore, Newcomb’s formulae for the refraction are so complicated that he lost some coefficients and made numerical errors [23].

Somewhat more useful efforts attempted to incorporate the nocturnal inversions that had been measured by James Glaisher [84]. Early attempts to include such features in refraction models were made by Egon von Oppolzer [85] and by Banakhevich [86]; these involved a simple surface-based inversion corresponding roughly to the planetary boundary layer. Perhaps the last such efforts were those of Garfinkel [87, 88], who still represented both the model and the refraction analytically. But by that time, direct instrumental probing of the boundary layer had already revealed much more complex structure (cf. [89, 90]); and the distortions of the Sun at the horizon similarly showed the importance of thermal inversions [91–98]. (These features are discussed in Section 12.) More recent atmospheric measurements [99, 100] show extremely complex boundary-layer structure that does not resemble the simple analytical models used by astronomers.

## 9. Analytical solutions to the inverse problem

### 9.1. *Bruns and Hausdorff*

Instead of using a trial-and-error search to find an atmospheric model that could explain observed astronomical refractions, Heinrich Bruns, who succeeded Carl Christian Bruhns as director of the Leipzig observatory, developed a highly original approach [101] to astronomical refraction. He recognized that the choice between  $(n - 1)$  and  $(n^2 - 1)$  as the expression for refractivity could be made to simplify the analytical development, and also that the expression  $nr$  was a better choice of integration variable than the radius of curvature  $r$  itself. These simplifications allowed him to obtain differential corrections to the parameters of a provisional model from the deviations of its calculated refractions from actual observations of refraction: “it is possible, by reversing the course always followed until now, to obtain the vertical temperature changes ... numerically from refraction observations, as far as the nature of the matter allows.”

Of course, this is the crucial difficulty, as Biot had shown; but Bruns apparently never read Biot’s work. Still, Bruns realized that the higher layers “make only a small contribution to” the refraction. He also pointed out that the expansion in odd powers of  $\tan z$  is only semiconvergent. Nevertheless, he found an expansion of the refraction as a sum of rational functions of  $\cot z$  (which is equivalent to rational terms in  $\tan z$ ), which can be expressed as a sum of partial fractions. By limiting the development to one or two terms, he could represent standard refraction tables better than many of the previous refraction theories.

All of these fits led to model atmospheres that ended near 30 or 40 km. Nevertheless, he concluded that “the partial-fraction formula with two terms has enough flexibility to satisfy all requirements.” Although his models terminate with zero temperature and pressure at the top, he concluded that “from refraction observations, one can draw no conclusion about this part of the atmosphere, which makes only an inappreciable contribution ...”

His student Felix Hausdorff began his career by studying the refraction and airmass integrals, using methods developed by Bruns (who, in turn, had been a student of Kummer’s). Hausdorff began with a thesis [102–104] in which he transformed the refraction integral into a set of general functions that could represent the refraction in *any* possible atmosphere. When this proved to be impractical (because the problem was ill-posed), he then tried the same trick with the extinction [105]. This was an even worse fiasco, partly because the existing extinction data were not monochromatic. (Today this complication of the broadband extinction problem is described as the Forbes [106] effect; but Hausdorff apparently did not know of the work of Forbes, and

instead referred to the radiometric measurements of S. P. Langley.) After this wasted effort, Hausdorff abandoned the refraction problem and took up topology.

## 9.2. *Modern efforts*

In the 20th century, the idea of inferring atmospheric structure from refraction observations was revived by meteorologists [107, 108]. The idea seemed appealing because it is difficult to measure air temperatures very accurately [109, 110]. However, in spite of the apparent sensitivity of terrestrial refraction to lapse rates, the required measurement accuracy [111] was hard to reach in practice. In the 1980s, careful theoretical studies [112–115] showed that the inverse problem is hopelessly ill-conditioned above the astronomical horizon, but is well-posed below it, provided that the atmosphere does not contain a duct. Apparently, it is the infinite value of  $\tan z$  at the perigee point on a ray that makes the refraction integral invertible; this concentrates the weight function at the perigee, and prevents the integration over the whole path from smoothing away the dominant contribution from that height.

A low-lying thermal inversion can produce a duct. If the observer is in the duct, ray trapping can produce superior mirages and other complex refraction displays. In this case, the trapped rays will be horizontal at heights that approach the top of the inversion; then it is possible to infer the thermal structure up to the top of the duct from the miraged images [116], if the heights and distances of the miraged objects are known. Modern computing power has made the necessary numerical ray-tracing practical.

## 10. From analytical to numerical integrations

Biot's 1836 paper [71] in the *CdT* showed how simply the refraction can be integrated numerically. Unfortunately, astronomers were accustomed to doing everything analytically in the 19th Century, and Biot's method was almost completely ignored. But, as series expansions grew more and more complicated, a few workers suggested that numerical quadratures were a better way to calculate refraction. Perhaps the first attempt was made by Julius Bauschinger [117], who made observations to  $88^\circ$  Z.D., and computed refractions for a model with a nocturnal inversion of  $2^\circ\text{C}$  in the lowest 200 m, which he divided into 10 m layers.

But a more explicit appeal was made by Azeglio Bemporad in 1907 [56, 118]. In these and later works, he emphasized that direct numerical quadrature is easier than the labor of evaluating all the terms in elaborate series expansions: "If one considers the efforts that have been spent on the countless analytical treatments of refraction theory, especially the most complete ones of Gylden and Radau, it seems justified to ask whether the derivation of astronomical refraction is not easier to reach by *plain numerical calculation (mechanical quadrature) by directly applying the results of atmospheric physics*, than by the digression through a hypothesis that today one can completely avoid for the region below 10 km height, and which will soon be entirely dispensable following the newest advances in sounding-balloon technology." This statement was then published in French [119], making it available in three languages.

A few years later, Comstock [120] used "mechanical quadratures to compute directly from the differential expression for the refraction" for a range of conditions, from an unstable surface layer to a surface-based inversion "over a snowclad earth." Out to  $75^\circ$  Z.D., the computed refractions differ by "amounts that rarely exceed a few hundredths of a second of arc." But at the horizon, "variations amounting to several minutes of arc may easily result from plausible changes in the distribution of temperature at different levels in the atmosphere." These large variations almost disappeared at  $4^\circ$  altitude, where the range of refractions "due to varying conditions in the lower two kilometers of the atmosphere is reduced from nine minutes to less than one second of arc."

After Biot's method was rediscovered by Auer and Standish [72, 73] and adopted by the RGO [121, 122], numerical integration has been widely used to calculate refraction for a variety of atmospheric models, including many with thermal inversions [23, 116]. As the computing power formerly confined to mainframes became available on desktop and even laptop machines, several other numerical methods (e.g., [123]) have come into use.

## 11. Extinction

Extinction is the removal of energy from an incident beam of light by scattering (angular redistribution out of the beam) and true absorption. It was first studied by Bouguer in his pioneering work [124] on photometry. He discovered that the transmitted light decreases exponentially; the exponent is the product of an extinction coefficient and a measure of the amount of attenuating medium (for which he coined the term "airmass"), and roughly determined the transmission of the atmosphere. He also introduced a remarkable simplification for calculating airmass: as the refraction is only half a degree at the horizon, he decided to neglect the ray curvature, and simply computed the length of the atmospheric path as though it were a straight line.

More detailed discussions of the airmass function were made by Maurer [125] and Hausdorff [105]; but no real progress was made until Bemporad's treatment in 1904 [126], which remained the standard through most of the 20th Century, despite Link's insightful discussions [127–129]. Currently, there is a table and approximation [130] based on the Standard Atmosphere [131].

### 11.1. *Refraction and extinction*

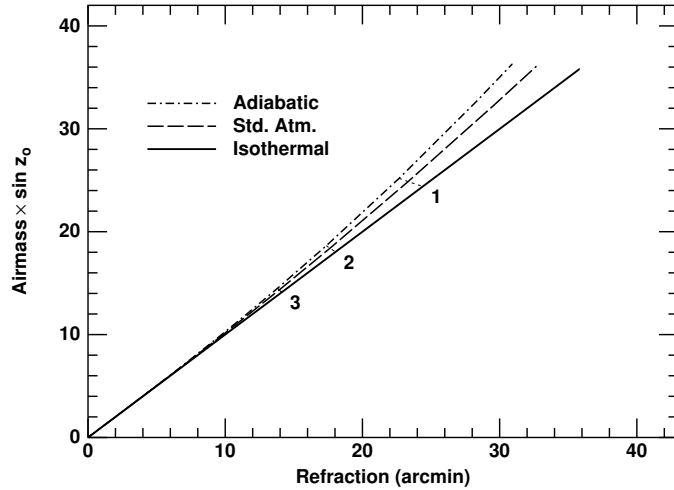
Atmospheric extinction is closely related to refraction in several ways. The most obvious is the mathematical similarity between the refraction and airmass integrals, which was first noticed by Laplace [59, 60]. A century later, after wave theories had replaced the "emission" models of Newton and Laplace, Lord Rayleigh [132, 133] noticed that the refractivity of air is intimately connected with molecular scattering out of the incident beam of light, and hence with the molecular part of the atmospheric extinction. There are other connections as well.

#### 11.1.1. *Laplace's extinction theorem*

Just as refraction is an averaged value of  $\tan z$ , airmass is an averaged value of  $\sec z$  along the ray. So, just as refraction near the zenith is nearly proportional to  $\tan z_o$ , the relative airmass (normalized to unity at the zenith) is nearly proportional to  $\sec z_o$ . But the weighting function in the airmass integral involves the density, while the weighting in the refraction integral involves the refractivity (or density) *gradient*. However, Laplace noticed that in an isothermal atmosphere, the density (which is nearly proportional to the refractivity) is a declining exponential function of height; so the refractivity and density gradients also contain that same exponential factor. Therefore, the refraction is just proportional to  $\sin z_o$  times the airmass factor.

How well does this rule work when the atmosphere is not isothermal? Figure 5 shows the product of airmass and  $\sin z_o$  as a function of the refraction, calculated for zenith distance  $z_o$  in three model atmospheres. The points on the curves 1, 2, and 3 degrees above the astronomical horizon are joined by thin dashed lines numbered 1–3. The line for the isothermal model is straight, as Laplace's theorem predicts. The lines for the adiabatic and Standard Atmosphere models deviate from this straight line only within a few degrees of the horizon.

**Figure 5.** Laplace extinction plots for three model atmospheres. The zenith is at the origin; the horizon is at the upper right end of each line.



### 11.1.2. Molecular scattering

The refractive index and scattering are connected by the molecular polarizability. Rayleigh had first found the  $\lambda^{-4}$  scaling from a dimensional argument based on the elastic-solid model of the luminiferous ether, but needed the electromagnetic theory of light to find the strength of the scattered waves. While the refractivity is proportional to the mean polarizability of the molecules, the scattering (and hence the extinction) is proportional to the mean-square, rather than the straight mean. This complicates the relation between molecular scattering and refractive index of air, because the commonest molecules in air ( $N_2$  and  $O_2$ ) are anisotropic.

The isotropic part of the polarizability produces scattered waves that are coherent in the forward direction; and because the frequencies of visible light are much lower than the resonant absorptions of the valence electrons, the coherent sum of the incident and scattered waves is also retarded in phase. This retardation makes the refractive index of air greater than unity. The anisotropic part produces additional, incoherent scattering that is isotropic in distribution because of the random orientations of the molecules. As a result, the polarization of the light scattered at  $90^\circ$  to the incident beam is incomplete; so the polarization observed in the laboratory at right angles to the illumination provides a measure of the anisotropy. But the observed depolarization also depends on the polarization of the illuminating beam — a complication that was overlooked by several workers around 1980, when incorrect extinction coefficients were published for air, based on experiments with (polarized) lasers. These difficulties, as well as the spectral distribution of the scattered light, were explained in a review article [134, 135].

More recently, it became possible to measure the extinction coefficients of gases directly in the laboratory. The main components of air were measured, and found to be in good agreement with the complete theory for Rayleigh scattering [136, 137]. For nitrogen and argon, the theory agrees with measurement to a fraction of 1%. The measurements for oxygen show a small additional extinction at higher pressures due to the collision-induced  $O_2$ - $O_2$  absorption near 532 nm wavelength. These results were independently verified [138, 139], and appear to be quite reliable.

### 11.1.3. Molecular absorption

Classical dispersion theory treats absorbing molecules as damped harmonic oscillators; this model explains the dispersion of refractivity with the well-known Sellmeier dispersion formula, and is described in most textbooks on physical optics. This approach is satisfactory when the

strong absorptions are far removed in frequency from the spectral region of interest, which is often an acceptable approximation in visible light, because the main absorptions of air are in the ultraviolet. However, some molecules also produce both discrete absorption lines and broad continua in visible light.

Worse yet, many of the absorbing species are far from uniformly mixed: the ozone is mainly concentrated in the stratosphere, while water vapor is mostly near sea level. The effective airmass factors for these absorbers are quite different from those for the well-mixed gases like nitrogen and oxygen. An approximate treatment for these components is available [140], but because their distribution in height is extremely variable, one should really use detailed sounding profiles to calculate correct airmasses for them.

However, there are two situations in which molecular extinction measurements can be used to retrieve vertical structure. The first is the Umkehr method for studying stratospheric ozone [141]. Although the ground-based observer is far below this ozone layer, observations of zenith spectral radiance provide an indirect proxy for the illumination of the upper atmosphere as the edge of the Earth's shadow sweeps through it. This effectively uses rays that are horizontal in the ozone region to provide a well-posed problem that is a useful supplement to satellite-based backscatter measurements.

The second case concerns water vapor. Because water is a polar molecule, it has a pure-rotation absorption spectrum; its strongest line is the R(0) line at 1.35 cm wavelength. This is a fundamental resonance line, so it has a strong dispersion signature in the refractivity spectrum, decreasing the refractive index for millimeter waves, and increasing it at microwave wavelengths of centimeters. (In addition, there are strong vibration-rotation transitions in the near infrared, whose effects have been measured and modeled in [142–146].) The refractive effects of water vapor are large in the 10–15 cm wavelength band used by navigational satellites, and can be separated from ionospheric effects if two or more frequencies are used; see [147] for a recent review of this technique. The additional delay due to water vapor appears as a path-length increase; the “mapping function” used in the radio-science community is really the same thing as the “airmass” function invented by Bouguer, as suggested in [24] and demonstrated in [148]. Because the position of each satellite is known from its ephemeris, the solution to the integral equation for airmass is well-posed and allows some vertical structure to be determined.

#### 11.1.4. *Aerosol extinction*

Still more unpredictable is the highly variable extinction produced by aerosols. A great variety of suspended material occurs in the atmosphere: dust raised from the ground by boundary-layer turbulence; salt particles from evaporated sea spray; photochemically produced materials such as ammonium sulfate and sulfuric acid droplets; pollen grains, spores, bacteria, leaf fragments, airborne spiders and their webs (collectively called “biosol”); meteoric and volcanic dust; ice crystals, cloud droplets, and other “hydrometeors”; and other materials. Most of these arise from or are produced near the surface, and occur primarily in the lowest kilometer or two. Some of the particles are conservative scatterers, but others have complex refractive indices and absorb. Droplets are mostly spherical, but crystals and many biosols are irregular and cannot be described by Mie theory.

Many of the particles are hygroscopic, or even deliquescent, and are very sensitive to changes in relative humidity [149]. Below about 30% R.H., they are desiccated and shrivel up, presenting small optical cross-sections. Between 30% and about 70%, they gradually expand. Above 70% humidity, the deliquescent particles form aqueous solutions in equilibrium with the vapor content

of the ambient air. These droplets grow rapidly as the relative humidity approaches 100%. Quantitative models exist [150] to describe the optical properties of various common aerosols, and have been incorporated into computer codes such as MODTRAN.

The aerosol opacity is generally concentrated toward the surface, with a typical scale height of a kilometer or so. This is the region of the atmosphere that dominates the refraction and extinction within a few degrees of the horizon; consequently, it is hopeless to try to infer atmospheric structure from extinction data. The usual procedure is to adopt some aerosol model, and to subtract the molecular extinction from observed values, assuming that the difference is the aerosol component. This can then be used to check the parameters of the aerosol model. Fortunately, the aerosols do not contribute to the refraction.

#### 11.1.5. *Interactions between refraction and extinction*

Originally, refraction corrections were needed to obtain geometric (“true”) positions of stars and planets from observed places. [One must be careful to avoid the term “apparent places,” which is used by positional astronomers to denote directions from the Earth’s center that include the effects of precession, nutation, parallax, and aberration, but *not* refraction.] Tables of refraction corrections and airmasses always use the refracted zenith distance of an object as the argument, which was very convenient for reducing observed altitudes, but is not suited to correcting photometric measurements for extinction. In photometry, one almost always computes a true zenith distance from catalog data and time, and then must convert this to an observable zenith distance that is not actually measured. Many people have mistakenly used computed zenith distances to find the airmasses for photometric observations without allowing for refraction. This error must also be avoided in using airmass tables and formulae to predict insolation for solar energy applications. Formulae are available for computing airmasses from times and geometric positions [151].

Perhaps the most important effect of extinction on measurements of refraction is the statistical bias pointed out by Henry Atkinson [152]: refraction is usually measured by observing circumpolar stars at lower transit, where extinction is so large that “no star can be seen at  $89^\circ$  of zenith distance, unless the air possess a degree of transparency far, very far, beyond what it possesses in its mean state”, and “experience shows that at  $85^\circ$  or  $86^\circ$  of zenith distance small stars frequently cannot be observed.” So the measured refractions near the horizon are biased toward times of high barometric pressure that tend to produce stronger than average thermal inversions, and unusually large refraction.

Furthermore, Atkinson recognized that this is just the part of the sky where refraction depends on atmospheric structure near the ground. He attempted to demonstrate this by calculating refraction for models with perturbed boundary layers, but died before the work could be completed. However, his incomplete manuscript was enough to show that realistic changes in the lowest 50 feet [15 m] could easily explain observed irregularities in refraction near the horizon [153, 154].

Because both aerosol and Rayleigh extinction decrease with increasing wavelength, objects appear redder near the horizon than high in the sky, as is obvious at sunset. That increases the effective wavelength of low objects observed in broadband light, and so makes their observed refraction a little smaller, because of the dispersion of atmospheric refraction. So atmospheric reddening produces color-dependent effects in ground-based astrometric measurements. In particular, variations in aerosol reddening can make the effective wavelength of visual observations at the horizon vary from about 450 nm in extremely clean conditions to 750 nm or more in very dirty air; the refraction of the Sun’s upper limb can vary by 10 or 15 seconds of arc, even for a fixed temperature profile.

These interactions make it impractical to infer atmospheric structure from astronomical refraction and/or extinction observations. However, it may be possible to calculate refraction to useful accuracy from measured thermal profiles, if the measurements have enough resolution.

## 12. Real atmospheric structure

At first glance, it might appear that vertical resolution is not very important, because of the averaging of atmospheric structure in the refraction integral at positive altitudes. But the averaging is very nonlinear; in fact, the atmospheric layers where rays that reach the observer are nearly horizontal contribute much more to the refraction than do layers with considerably different lapse rates. So the averaging emphasizes the layers where the ray bending is largest, and the result is appreciably more refraction than would be calculated for a smoothed profile having the same average lapse rate.

Although radiosonde profiles are sometimes called “high-resolution”, they are in fact samples from a profile smoothed by the thermal inertia of the temperature sensors, which are thousands of times denser than the air near the surface. A sensor must come into thermal contact with several times its own mass of air to reach equilibrium with the gas. So, as the sensors are typically a millimeter or two in diameter, they inevitably produce profiles smoothed over several meters of height [155]. For a typical time constant of 4 seconds near sea level and the nominal ascent speed of 5 m/s, this smoothing length is about 20 meters. The lag of thermistor response [156] also produces a systematic error in the reported heights of the temperature data, which refer to levels about 20 meters below the pressure data.

For example, compare the detailed profiles with simultaneous rawinsonde data in Figure 1 of [157]: much reproducible fine structure was measured with fast-response sensors on a moving carriage, but was completely unseen by the rawinsonde. These authors pointed out that “such observations have not been reported . . . because the temperature and humidity sensors used in radiosondes have had inadequate response for the usual rates of ascent of balloons . . .”. They also found that very steep thermal inversions (typically 5°C in 5 m) occur in “sheets” between convectively unstable “layers” with nearly adiabatic lapse rates. This fine structure is completely smoothed out in radiosonde data. Such structures were independently confirmed to be “ubiquitous” up to 27 km [158], with “practical consequences for all the propagation phenomena (light beams, radio waves, sounds . . .) within the atmosphere.” Special balloon soundings using fine-wire sensors [159] show that the convective layers bounded by thin turbulent sheets can be hundreds of meters thick.

Boundary-layer structure that eludes radiosondes, but is obvious in refraction near the horizon, appears as Arago’s [69] “jagged” deformations of the solar limb observed from a moderate height. These low-Sun phenomena are well known from the photographs made at Castel Gandolfo [97], which is 450 m above the sea. At that height, the dip of the sea horizon exceeds the solar diameter, so these features appear in the zone of sky below the astronomical horizon, where each feature in the temperature profile has a corresponding feature in the solar limb [160]. Each zigzag in the limb should match a thermal feature between sea level and 450 meters in the temperature profiles; yet the radiosonde data that accompany some of the pictures show no hint of the numerous photographed features, which are mostly mock mirages [98] due to thermal inversions. (Other references to these features were cited at the end of Section 8.) These refraction phenomena were not generally understood at the time they were photographed, so the interpretations in the book [97] are incorrect, as explained in [23]; detailed interpretations are available on the Web [161].

Clearly, the simple analytical descriptions of atmospheric structure used in the 19th Century were very unrealistic. Yet we still are using such a model: the Standard Atmosphere. How bad is it?



### 13. The Standard Atmosphere

#### 13.1. *A little history*

The ISO Standard Atmosphere that has been widely used to calculate modern refraction and airmass tables is essentially the same as the 1976 version of the U. S. Standard Atmosphere [131] — which was (apart from some changes at great heights that have no effect on refraction and extinction) — the same as the 1966 version. Indeed, the troposphere and lower stratosphere tables can be traced back to the very first U. S. Standard Atmosphere that was introduced in the 1950s as a slight modification of the ICAO Standard Atmosphere produced in the late 1940s, which itself was a minor variant of the NACA atmosphere of 1925. (The differences among the various standards are given in Minzer’s review [162].) All these model atmospheres start at 15°C, and all have exactly the same tropospheric lapse rate of 6.5°C per kilometer of height. This lapse rate is responsible for the behavior of refraction and airmass in those few degrees above the astronomical horizon where Oriani’s Theorem is useless, and atmospheric structure actually matters. So where did this lapse rate come from?

At the end of the first World War, practical problems in aircraft engineering and long-range gunnery that had arisen during the Great War remained unsolved. These problems lay in the density profile of the atmosphere, which is what underlies refraction tables as well. However, the people who decided to solve these problems were not astronomers or surveyors. So, apparently without consulting anyone interested in atmospheric refraction or extinction, a handful of experts agreed among themselves to adopt a particular temperature profile, beginning at 15°C at sea level, and decreasing linearly by 6.5° for every kilometer of height up to 11 km, which had been proposed by Albert Toussaint, Engineer of the Aerotechnical Institute of the University of Paris, (St.-Cyr l’Ecole), and later its Director, as well as chairman of the French National Committee charged with the examination of all new inventions relating to aviation. Toussaint’s paper [163] was primarily concerned with the performance of supercharged aircraft engines.

His temperature profile was based on a paper by Dr. Pericle Gamba, of the Geophysical Observatory of Pavia, who had published several papers on atmospheric structure, balloon soundings, and related matters. One of these — Toussaint did not say which one — summarized information about atmospheric temperature measurements in different countries. Toussaint was looking for a simple way to summarize this information, and chose the formula that has become the Standard Atmosphere temperature model. In describing this model, Dr. Willis Ray Gregg (at that time, Chief of the Aerological Section of the U. S. Weather Bureau) wrote [164]:

“With the advance of aeronautics and the science of artillery, engineers and specialists in these fields have come to require a specific knowledge of the varying states of the atmosphere from the ground to very great elevations. This has led to the introduction of a conventional term commonly known as *the standard atmosphere*, which pretends to specify the normal or average condition. As is well known, the ‘standard atmosphere’ is never found; that is to say, at no time or place do ‘standard’ or average conditions of all the meteorological elements at all altitudes simultaneously occur. Nevertheless, it is proper, and in certain fields (especially those of aviation and ordnance) it is necessary, to adopt so-called ‘standard’ values, and it is desirable to have these represent as closely as possible true mean values.”

After describing Toussaint’s model, Gregg continued: “Although the adopted rate of temperature decrease is arbitrary, the resulting values nevertheless agree quite well with annual means as published by various investigators for Europe and the United States . . . Prof. Toussaint remarks:

It has been found preferable to take a linear law rather than to seek an equation approximate to Prof. Gamba’s curve, for the following reason:

In order to define the standard atmosphere, what is needed is not an exact representation of that curve, but merely a law that can be conveniently applied and which is sufficiently in concordance with the means adhered to . . . .

The deviation is of some slight importance only at altitudes below 1,000 meters, which altitudes are of little interest in aerial navigation. The simplicity of the formula largely compensates this inconvenience.”

But of course this lowest kilometer that is “of little interest in aerial navigation” is also the kilometer that is most important for refraction and airmass calculations near the horizon. On the other hand, the trouble it causes is only appreciable *very* near the horizon. How much practical harm does it cause?

### 13.2. *The inconvenience*

Figure 7 of [23] shows that a rather drastic change to the lowest kilometer (raising the temperature at 200 m by 10°C) makes less than a minute of arc change to the refraction at an altitude of 1°. Who cares what the refraction is at this altitude? As Atkinson pointed out, only a few bright stars are even visible there, because the extinction is so large.

Refraction and extinction are important for planning solar-power installations. But in most situations, the Sun is occulted by trees, buildings, and other objects well above an altitude of one degree. In any case, the extinction at low altitudes is so great that most of the little power received by solar panels is scattered light from the sky, not direct light from the Sun.

The artificial simplicity of the Standard Atmosphere makes it useful mainly as a reference test case for checking the accuracy of refraction and airmass calculations. However, it is so easy that it cannot detect the weakness of programs that use the Auer–Standish algorithm [73], which fails in more realistic cases.

Furthermore, using the Standard Atmosphere produces a systematic bias, similar to the effect pointed out by Atkinson. The Standard is meant to represent the average of all possible conditions: day or night, rain or shine, clear or cloudy. But stellar astronomers only care about clear nights; they cannot observe during the daytime or under overcast skies. Similarly, solar-power output depends heavily on cloudless daytime conditions. The requirements for clear skies favor high-pressure air masses, which produce subsidence inversions and tend to accompany low relative humidities. So these applications of refraction and airmass formulae really should employ non-Standard atmospheric profiles, if they are to be useful in the part of the sky around 80° Z. D.

### 13.3. *Newer models*

Since the mid-1970s, NASA has produced and maintained a more detailed set of standard atmospheric models, described in various technical reports that are available from the website at <http://www.sti.nasa.gov> [165]. These provide finer-grained tables and formulae that specify atmospheric models for particular times and places.

A related approach to refraction near the horizon by considering climatological information has been used by Marcel Tschudin [166], who analyzed observations of refraction at low altitudes (including the observations Argelander made for Bessel), taking diurnal and seasonal cycles of boundary-layer structure into account.

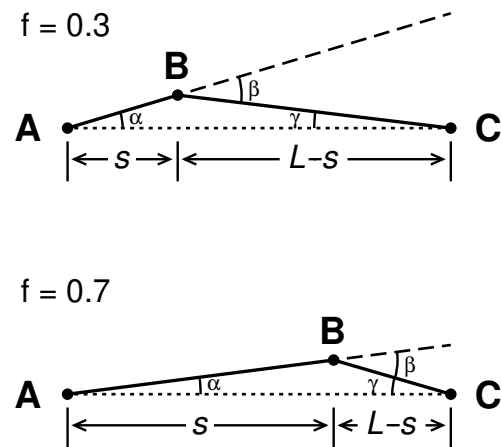
## 14. Other atmospheric refractions

As atmospheric structure is only important near the horizon, it might be that refraction effects other than astronomical refraction could give more information. The idea that terrestrial refraction might help predict astronomical refraction was already discussed in the 1850s [76]. Decades

later, both Hunter [167] and Livieratos [168] had the same idea, but in the other direction: to use astronomical refraction as a guide to terrestrial refraction. As the ray bending that displaces the apparent positions of terrestrial objects certainly is the same as the lower atmosphere's contribution to astronomical refraction, it is tempting to suppose that the terrestrial refraction is some calculable fraction of the astronomical refraction.

However, this overlooks two things. First, the terrestrial refraction is the apparent angular displacement of some relatively nearby object, all right; but it isn't equal to the bending of the ray by refraction. And second, the apparent angular displacement depends on the *distance* to the object. To see how astronomical and terrestrial refractions are connected, it's useful to consider a more general situation, in which the refracted object is only a finite distance from the observer. This actually occurs for objects such as meteors, rockets, artificial satellites, and even the Moon. Figure 6 shows the geometry for an observer at **A** who sees an object at **C**. (For simplicity, the figure uses Cassini's approximation that the refraction occurs at a single point, **B**.)

**Figure 6.** Geometry of a ray (the heavy line **ABC**) refracted by a small angle  $\beta$  at **B**, for two positions of this bend. The dashed line is the extension of **AB**. An observer at **A** would see **C** along the dotted line in the absence of refraction, but sees it refracted by an angle  $\alpha < \beta$  due to the bending at **B**. **A** and **C** are separated by a distance  $L$ ; the bend, **B**, is a fraction  $f = s/L$  of this distance from **A**.



As the bending angle  $\beta$  is an exterior angle of the triangle **ABC**, it is the sum of the apparent refraction  $\alpha$  and the parallactic angle  $\gamma$ ; so this case is often called *parallactic refraction* [169]. The size of the parallactic correction to  $\beta$  is proportional to  $f$ , the ratio of the distances of the refractive bend and the refracted object from the observer — i.e.,  $s/L$  in the figure. In astronomical refraction, the refracted objects (stars) are infinitely far away, so the parallactic correction vanishes, and the refraction is just the total bending in the atmosphere,  $\beta$ . In terrestrial refraction, the object is usually at about the same height as the observer, so the refraction is uniformly distributed along the line of sight, and  $f = 0.5$  — that is, half of the total bending is observed at each end of the line of sight. (This is why surveyors prefer to make simultaneous measurements reciprocally at both **A** and **C**.)

The parallactic correction to refraction is rarely mentioned in textbooks on positional astronomy. It is a small correction to the position of the Moon that must be taken into account in dealing with stellar occultations. On the other hand, it's a huge effect in geodesy and surveying; indeed, surveyors routinely assume that half of the bending is the apparent refraction of an observed position. However, when the line of sight is closer to the ground at one end than at the other, the refraction is usually not distributed evenly along it, and allowances should be made for the lack of symmetry.

A combination of astronomical and terrestrial refractions occurs in determining the rising and setting times of celestial objects. The position of the sea horizon varies several minutes of arc because of variations in dip; but the dip of the horizon is not quite like terrestrial refraction, because the apparent horizon is not a fixed object; its distance depends on refraction. If the

apparent horizon is land, its terrestrial refraction must be allowed for. And the astronomical refraction of the celestial object is larger than these terrestrial effects. McCluskey's treatment of these effects [170, 171] is clearer than the more convoluted description in the *Explanatory Supplement* [122].

## 15. Conclusions

It is well established that astronomical refraction is practically independent of atmospheric structure at zenith distances less than  $75^\circ$  or even  $80^\circ$ , where it is almost completely specified by the refractivity at the observer and the height  $H$  of the homogeneous atmosphere. Oriani's theorem provides the mathematical explanation for this region. The physical explanation is that the atmosphere is so thin, compared to its radius of curvature, that the weighted average of  $\tan z$  is very nearly its value at  $H$ , which differs only slightly from  $\tan z_o$ . In this region, the bending of the ray is too small to affect the run of  $z$  with  $H$ , and even Cassini's homogeneous model gives nearly correct refraction values.

Therefore, in this small-bending region that includes the zenith, observations of refraction give no useful information at all about atmospheric structure. Furthermore, Oriani's theorem underestimates the size of this region, because it is based on a divergent series whose alternating terms begin to be mutually cancelling near  $80^\circ$ . Thus the good behavior of the refraction continues even to zenith distances where the  $\tan^5 z$  term begins to look significant.

And, just as refractions depend on a weighted mean of  $\tan z$ , airmass factors are a weighted mean of  $\sec z$ , which, like the tangent, diverges at arguments near  $90^\circ$ . So extinction measurements in the small-refraction region are tightly linked to refractions, and are similarly uninformative about the atmosphere.

For zenith distances between  $75^\circ$  and  $85^\circ$ , there is a weak dependence on the ray curvature; but this curvature is mostly in the lowest part of the atmosphere. This introduces a third parameter: the mean lapse rate (or density gradient) in the lowest kilometer or two.

Only in the last two or three degrees above the astronomical horizon is there a little sensitivity to boundary-layer structure. But this structure is so smoothed out in integrations over the whole atmosphere that the inversion problem is very ill-posed. It is well-determined only for rays that are horizontal over part of their path: that is, either below the astronomical horizon, or in superior mirages. Furthermore, atmospheric extinction and reddening, combined with dispersion, hinder measurements of stellar refraction in this zone even at night.

In the daytime, refraction is always rapidly changing due to changes in boundary-layer structure, and stars are not detectable near the horizon. Only the distortions of the rising or setting Sun show the real complexity of structure below eye level; so this part of the boundary layer can be studied with astronomical refraction at sunrise and sunset. However, terrestrial refraction can be inverted to give the structures of strong thermal inversions less than a few dozen meters above the observer, if sufficiently accurate altitudes are measured.

## Conflicts of interest

The author has no conflict of interest to declare.

## Acknowledgements

I thank Luc Dettwiler, Éric Frappa, Stephen McCluskey, Marcel Tschudin, and Siebren van der Werf for useful discussions, and for bringing many important references to my attention, and librarians at San Diego State University and several other institutions for providing access to them.

## References

- [1] W. M. Smart, *Text-Book on Spherical Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge, 1949.
- [2] L. Dettwiller, "Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 103-132.
- [3] C. Bruhns, *Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwicklung*, Voigt & Günther, Nuremberg, 1861.
- [4] A. M. Smith, "Ptolemy and the foundations of ancient mathematical optics: a guided study", *Trans. Amer. Philos. Soc.* **89** (1999), no. 3, p. 1-172.
- [5] A. M. Smith, "Ptolemy's theory of visual perception: an English translation of the *Optics* with introduction and commentary", *Trans. Amer. Philos. Soc.* **86** (1996), no. 2, p. 1-300.
- [6] Cleomedes, *Cleomedis de Motu Circulari Corporum Caelestium, Libri Duo*, B. G. Teubner, Leipzig, 1891, edited by H. Ziegler.
- [7] Regiomontanus, *Scripta Clarissimi Mathematici M. Ioannis Regiomontani*, apud Ioannem Montanum et Vlricum Neuber, Norimbergæ, 1544, edited by J. Schöner.
- [8] J. Kepler, *Optics: Paralipomena to Witelo & Optical Part of Astronomy*, Green Lion Press, Santa Fe, 2000, trans. by William H. Donahue.
- [9] T. Brahe, *Astronomiæ instauratae progymnasmata* (J. Kepler, ed.), Typis inchoata Vraniburgi Daniae, Prague, 1602.
- [10] G. Videen, "Whose law of refraction?", *Optics Photonics News* **19** (2008), no. 5, p. 15-17.
- [11] R. Rashed, "A pioneer in anaclastics: Ibn Sahl on burning mirrors and lenses", *Isis* **81** (1990), p. 464-491.
- [12] A. Malet, "Gregorie, Descartes, Kepler, and the Law of Refraction", *Archives internationales d'histoire des sciences* **40** (1990), no. 125, p. 278-304.
- [13] J. W. Shirley, "An early experimental determination of Snell's law", *Amer. J. Phys.* **19** (1951), p. 507-508.
- [14] J. Lohne, "Thomas Harriott (1560-1621), the Tycho Brahe of optics", *Centaurus* **6** (1959), no. 2, p. 113-121.
- [15] J. Lohne, "The fair fame of Thomas Harriott: Rigaud versus Baron von Zach", *Centaurus* **8** (1963), p. 69-83.
- [16] C. de Waard, "Le manuscrit perdu de Snellius sur la réfraction", *Janus* **39** (1935), p. 51-72.
- [17] J. A. Vollgraff, "Snellius' notes on the reflection and refraction of rays", *Osiris* **1** (1936), p. 718-725.
- [18] K. Hentschel, "Das Brechungsgesetz in der Fassung von Snellius", *Arch. Hist. Exact Sci.* **55** (2001), p. 297-344.
- [19] R. Descartes, *Discourse on Method, Optics, Geometry, and Meteorology*, Hackett Publishing Co., Indianapolis, 2001, trans. by Paul J. Olscamp [revised ed. with an Introduction].
- [20] G. D. Cassini, "[correspondence on refraction]", in *Ephemerides Novissimæ Motuum Coelestium Marchionis Cornelii Malvasiæ*, ex typographia Andreæ Cassiani, Modena, 1662.
- [21] J.-J. Dortous de Mairan, "Memoire sur la Cause generale du Froid en Hiver, & de la Chaleur en Eté", *Mém. Acad. Roy. Sci., année 1719* **1719** (1721), p. 104-135.
- [22] G. D. Cassini, *Specimen Observationum Bononiensium*, Ex typographia H. H. de Ducijs, Bologna, 1656.
- [23] A. T. Young, "Sunset science. IV. Low-altitude refraction", *Astron. J.* **127** (2004), p. 3622-3637.
- [24] A. T. Young, "Understanding astronomical refraction", *Observatory* **126** (2006), p. 82-115.
- [25] "Sur les refractions astronomiques", *Hist. Acad. Roy. Sci., année 1714* (1719), p. 79-87, [Amsterdam reprint of the original Parisian publication, *Hist. Acad. Roy. Sci., année 1714* (1717), p. 61-67].
- [26] I. B. Riccioli, *Astronomiæ Reformatæ Tomi Duo*, Ex Typographia Hæredis Victorij Benatij, Bologna, 1665.
- [27] G. D. Cassini, "De solis hypothesibus, & de refractionibus siderum ad dubia A. R. P. Io. Baptistæ Riccioli Soc. Iesu", in *Epistolæ Duæ Astronomicæ* (G. Montanari, ed.), Typographia Ferroniana, Bologna, 1666, p. 31-52.
- [28] J.-D. Cassini, "De solaribus hypothesibus et refractionibus epistolæ tres", in *Miscellanea italica physico-mathematica* (G. Roberti, ed.), Typographia Pisariana, Bologna, 1692, p. 281-340.
- [29] "Three letters of Jo. Dominicus Cassinus, concerning his Hypothesis of the Suns motion, and his doctrine of Refractions; printed at Bononia in 4<sup>o</sup>", *Phil. Trans.* **7** (1672), no. 84, p. 5001-5002.
- [30] J.-B. J. Delambre, *Astronomie Théorique et Pratique*, t. premier, p. 319-320, Courcier, Paris, 1814, 319-320 pages.
- [31] J. Ivory, "On the atmospheric refraction", *Phil. Mag.* **57** (1821), p. 321-325.
- [32] P. Bouguer, "Second mémoire sur les réfractions astronomiques, observées dans la Zone Torride ; avec diverses remarques sur la manière d'en construire les Tables", *Mém. Acad. Roy. Sci., année 1749* (1753), p. 75-112.
- [33] L. Euler, "De la réfraction de la lumiere en passant par l'atmosphère selon les divers degrés tant de la chaleur que de l'élasticité de l'air", *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, Année MDCCLIV [1754]* **10** (1756), p. 131-172.
- [34] J. Cassini, "Des refractions astronomiques", *Mém. Acad. Roy. Sci., année 1714* (1717), p. 42-67, [Amsterdam reprint of the original Parisian publication, *Mém. Acad. Roy. Sci., année 1714* (1717), p. 33-54].
- [35] P. Bouguer, *De la Méthode d'Observer Exactly sur Mer la Hauteur des Astres*, Claude Jombert, Paris, 1729.
- [36] P. Bouguer, "Sur les réfractions astronomiques dans la Zone Torride", *Mém. Acad. Roy. Sci., année 1739* (1741), p. 407-423.
- [37] T. Simpson, "Mathematical Dissertations on a Variety of Physical and Analytical Subjects", p. 46-61, T. Woodward, London, 1743.

- [38] N. Maskelyne, *British Mariner's Guide*, J. Nourse, London, 1763.
- [39] N. Maskelyne, "Concise rules for computing the effects of refraction and parallax in varying the apparent distance of the Moon from the Sun or a star", *Phil. Trans. Roy. Soc.* **54** (1764), p. 263-276.
- [40] N. Maskelyne, "Concerning the latitude and longitude of the Royal Observatory at Greenwich; with remarks on a memorial of the late M. Cassini de Thury", *Phil. Trans. Roy. Soc.* **77** (1787), p. 151-187.
- [41] T. Mayer, *Tabulae motuum Solis et Lunæ novæ et correctæ*, Typis Gulielmi et Johannis Richardson, London, 1770.
- [42] E. G. Forbes, *The Euler-Mayer Correspondence (1751-1755)*, American Elsevier, New York, 1971.
- [43] W. S. James, "The discovery of the gas laws. II. Gay-Lussac's law", *Science Progress in the Twentieth Century (1919-1933)* **24** (1929), no. 93, p. 57-71.
- [44] H. Chang, "The hidden history of phlogiston", *HYLE – International Journal for Philosophy of Chemistry* **16** (2010), no. 2, p. 47-79.
- [45] J. H. Lambert, *Les propriétés remarquables de la route de la lumière*, N. van Daalen, La Haye, 1759.
- [46] E. Halley, "Some remarks on the allowances to be made in astronomical observations for the refraction of the air", *Phil. Trans. Roy. Soc.* **31** (1721), p. 169-172.
- [47] F. Baily, "An Account of the Revd. John Flamsteed", p. 134-153, Lords Commissioners of the Admiralty, 1835.
- [48] J. B. Biot, "Sur les réfractions astronomiques", *C. R. Acad. Sci.* **3** (1836), p. 237-244.
- [49] J. B. Biot, "An account of the Rev. John Flamsteed, etc.", *Journal des Savants* (1836), p. 156-166, 205-223, 641-658.
- [50] J. B. Biot, "Analyse des Tables de réfraction construites par Newton, avec l'indication des procédés numériques par lesquels il a pu les calculer", *Journal des Savants* (1836), p. 735-754.
- [51] D. T. Whiteside, "The Mathematical Papers of Isaac Newton, Vol. VI: 1684-1691", p. 431-436, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.
- [52] B. Taylor, *Methodus Incrementorum directa & inversa*, Prostant apud Gul. Innys, London, 1715.
- [53] J.-L. Lagrange, "Sur les réfractions astronomiques", *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres (Berlin), Année MDCCLXXII [1772]* (1774), p. 259-282.
- [54] B. Oriani, "De refractionibus astronomicis", in *Ephemerides astronomicae Anni Intercalaris 1788*, Apud Joseph Galeatium, Mediolani [Milan], 1787, p. 164-227.
- [55] B. Oriani, "De refractionibus astronomicis", in *Opuscula Astronomica ex Ephemeridibus Mediolanensibus ad annos 1788 & 1789 excerpta*, Joseph Galeatium, Mediolani [Milan], 1787, p. 44-107.
- [56] A. Bemporad, "Besondere Behandlung des Einflusses der Atmosphäre (Refraktion und Extinktion)", in *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Band VI, Teil 2, Astronomie, Erste Hälfte* (K. Schwarzschild, S. Oppenheim, eds.), B. G. Teubner, 1907, p. 287-334.
- [57] C. Kramp, *Analyse des Réfractions Astronomiques et Terrestres*, E. B. Schwikkert, Leipzig, 1799.
- [58] E. E. Kummer, "Über atmosphärische Strahlenbrechung", *Monatsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* **5** (1860), p. 405-420.
- [59] P. S. Laplace, *Traité de Mécanique Céleste*, t. 4, book 10, chap. 3, Chez J. B. M. Duprat, Paris, 1805.
- [60] N. Bowditch, *Mécanique Céleste. By the Marquis de La Place, translated, with a commentary*, vol. VI, Little and Brown, Boston, 1839.
- [61] A. T. Young, "Annotated bibliography of mirages, green flashes, atmospheric refraction, etc.", <https://aty.sdsu.edu/bibliog/bibliog.html>.
- [62] T. Young, "The variation of the Temperature of the atmosphere deduced from the mean Refraction.", *Quart. J. Sci. Lit. & Arts* **12** (1822), p. 396-398.
- [63] J. Ivory, "Postscript", *Phil. Mag.* **58** (1821), p. 420-421.
- [64] J. Ivory, "On the astronomical refractions", *Phil. Trans. Roy. Soc.* (1823), p. 409-495.
- [65] J. Ivory, "Letter on the astronomical refractions", *Phil. Mag.* **63** (1824), p. 418-427.
- [66] J. Ivory, "On the constitution of the atmosphere", *Phil. Mag.* **66** (1825), p. 81-93, 241-250.
- [67] J. Ivory, "Atmospheric refraction at very low temperatures and altitudes", *Phil. Mag.* **68** (1826), p. 177-180.
- [68] J. Ivory, "On the theory of the astronomical refractions", *Phil. Trans. Roy. Soc.* **128** (1838), p. 169-229.
- [69] F. Arago, "Instructions concernant la Météorologie et la Physique du globe", *C. R. Acad. Sci.* **7** (1838), p. 206-224.
- [70] J. B. Biot, "Note additionnelle à un mémoire sur les réfractions atmosphériques", *C. R. Acad. Sci.* **3** (1836), p. 504.
- [71] J. B. Biot, "Sur les réfractions astronomiques", *Additions à la Connaissance des Temps, pour l'An 1839* (1836), p. 3-114.
- [72] L. Auer, E. M. Standish, *Astronomical Refraction: Computational Method for all Zenith Angles*, Yale University Astronomy Dept., New Haven, 1979.
- [73] L. Auer, E. M. Standish, "Astronomical Refraction: Computational Method for all Zenith Angles", *A. J.* **119** (2000), p. 2472-2474.
- [74] J. B. Biot, "Sur la vraie constitution de l'atmosphère terrestre déduit de l'expérience, avec ses applications à la mesure des hauteurs par les observations barométriques, et au calcul des réfractions", *C. R. Acad. Sci.* **6** (1838), p. 390-401.
- [75] J. B. Biot, "Mémoire sur la vraie constitution de l'atmosphère terrestre déduite de l'expérience, avec ses applications

- à la mesure des hauteurs par les observations barométriques, et au calcul des réfractions”, *Additions à la Connaissance des Temps, pour l’An 1841* (1838), p. 3-112.
- [76] J. B. Biot, “Note de M. Biot sur l’ensemble des articles relatifs aux réfractions atmosphériques insérés par lui dans les Comptes rendus précédents”, *C. R. Acad. Sci.* **40** (1855), p. 597-604.
- [77] R. Emden, “Beiträge zur Thermodynamik der Atmosphäre. I. Mitteilung: Über polytrope Atmosphären”, *Met. Zs.* **33** (1916), no. 8, p. 351-360.
- [78] R. Emden, “Über astronomische Refraktion”, *A. N.* **219** (1923), p. 45-56.
- [79] W. Fabritius, “Die astronomische Refraction bei Annahme einer constanten Temperaturabnahme”, *A. N.* **93** (1878), p. 17-28.
- [80] C. M. Bauernfeind, “Die atmosphärische Strahlenbrechung”, *Astron. Nachrichten* **62** (1864), p. 209-252.
- [81] R. Radau, “Recherches sur la théorie des réfractions astronomiques”, *Annales de l’Observatoire de Paris* **16** (1882), p. B.1-B.114.
- [82] R. Radau, “Essai sur les réfractions astronomiques”, *Annales de l’Observatoire de Paris* **19** (1889), p. G.1-G.80.
- [83] S. Newcomb, “A Compendium of Spherical Astronomy”, p. 173-224, Macmillan, New York, 1906.
- [84] J. Glaisher, “An account of meteorological and physical observations in three balloon ascents made in the years 1865 and 1866”, *Report of the Thirty-Sixth Meeting of the British Association for the Advancement of Science* (1867), p. 367-401.
- [85] E. von Oppolzer, “Strahlenbrechung”, in *Handwörterbuch der Astronomie Vol. IIIb* (W. Valentiner, ed.), Verlag von Eduard Trewendt, Breslau, 1901, p. 548-601.
- [86] T. A. Banakhevich, “Tri eskiza po teorii refraksii”, *Ucheniya Zapiski* **82** (1915), no. 10, p. 1-27.
- [87] B. Garfinkel, “An investigation in the theory of astronomical refraction”, *A. J.* **50** (1944), p. 169-179.
- [88] B. Garfinkel, “Astronomical refraction in a polytropic atmosphere”, *A. J.* **72** (1967), p. 235-254.
- [89] A. Wegener, “Drachen- und Fesselballonaufstiege”, *Meddelelser om Grønland* **42** (1909), no. 1, p. 1-76.
- [90] A. Wegener, “Meteorologische Terminbeobachtungen am Danmarks-Havn”, *Meddelelser om Grønland* **42** (1911), p. 125-356.
- [91] T. Zona, “Deformazioni del Sole all’Orizzonte”, *Atti R. Accad. Palermo* **6** (1902), p. 1-7.
- [92] L. Rudaux, “Déformations du soleil à l’horizon”, *Bull. Soc. Astron. Française (L’Astronomie)* **20** (1906), p. 283-285.
- [93] A. Wegener, “Über die Ursache der Zerrbilder bei Sonnenuntergängen”, *Beitr. Physik d. freien Atmos.* **4** (1912), p. 26-34.
- [94] A. Wegener, “Elementare Theorie der atmosphärischen Spiegelungen”, *Annalen der Physik* **57** (1918), p. 203-230.
- [95] W. J. Fisher, “Low-Sun phenomena in Luzon III. Marine sunsets and the duration of sunset on Manila Bay and the China Sea”, *Philippine J. Sci.* **17** (1920), p. 607-614.
- [96] J. F. Chappell, “Apparent distortions of the setting Sun”, *Pub. Astr. Soc. Pacific* **45** (1933), p. 281-282.
- [97] D. J. K. O’Connell, *The Green Flash and Other Low Sun Phenomena*, North-Holland, Amsterdam, 1958.
- [98] A. T. Young, G. W. Kattawar, P. Parviainen, “Sunset Science. I. The Mock Mirage”, *Appl. Opt.* **36** (1997), p. 2689-2700.
- [99] E. E. Gossard, “Formation of elevated refractive layers in the oceanic boundary layer by modification of land air flowing offshore”, *Radio Science* **17** (1982), no. 2, p. 385-398.
- [100] B. B. Balsley, R. G. Frehlich, M. L. Jensen, Y. Meillier, A. Muschinski, “Extreme gradients in the nocturnal boundary layer: structure, evolution, and potential causes”, *J. Atmos. Sci.* **60** (2003), p. 2496-2508.
- [101] H. Bruns, “Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung”, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Classe* **43** (1891), p. 164-227.
- [102] F. Hausdorff, “Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung.”, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Classe* **43** (1891), p. 491-566.
- [103] F. Hausdorff, “Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. II.”, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Classe* **45** (1893), p. 120-162.
- [104] F. Hausdorff, “Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. III.”, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Classe* **45** (1893), p. 758-804.
- [105] F. Hausdorff, “Ueber die Absorption des Lichtes in der Atmosphäre”, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Classe* **47** (1895), p. 401-482.
- [106] J. D. Forbes, “On the transparency of the atmosphere and the law of extinction of the solar rays in passing through it”, *Phil. Trans.* **132** (1842), p. 225-273.
- [107] N. K. Johnson, O. F. T. Roberts, “The measurement of the lapse rate of temperature by an optical method”, *Q. J. Roy. Met. Soc.* **51** (1925), p. 131-138.
- [108] K. Brocks, “Eine Methode zur Beobachtung des vertikalen Dichte- und Temperaturgefälles in den bodenfernen Atmosphärenschichten”, *Met. Zs.* **57** (1940), p. 19-26.
- [109] R. Geiger, *Das Klima der bodennahen Luftschicht*, Vieweg, Braunschweig, 1927.
- [110] K. A. Christian, C. R. Tracy, “Measuring air temperature in field studies”, *J. Therm. Biol.* **10** (1985), no. 1, p. 55-56.
- [111] K. Brocks, “Eine räumlich integrierende optische Methode für die Messung vertikaler Temperatur- und Wasserdampfgradienten in der untersten Atmosphäre”, *Arch. Meteor. Geophys. Bioklim. A* **6** (1954), no. 3/4, p. 370-402.

- [112] K. P. Gaykovich, A. S. Gurvich, A. P. Naumov, "On a reconstruction of meteorological parameters from intra-atmospheric measurements of optical refraction of cosmic sources", *Izv. Atmos. Ocean. Phys.* **19** (1983), p. 507-512.
- [113] S. V. Zagoruyko, V. Kan, "Reconstruction of the profile of the index of refraction and of the temperature from measurements of optical refraction", *Radio Eng. Electron. Phys.* **29** (1984), p. 95-99.
- [114] W. D. Bruton, G. W. Kattawar, "Unique temperature profiles for the atmosphere below an observer from sunset images", *Appl. Opt.* **36** (1997), p. 6957-6961.
- [115] W. D. Bruton, G. W. Kattawar, "Unique temperature profiles for the atmosphere below an observer from sunset images: erratum", *Appl. Opt.* **37** (1998), p. 2271.
- [116] A. T. Young, E. Frappa, "Mirages at Lake Geneva: the Fata Morgana", *Appl. Opt.* **56** (2017), no. 19, p. G59-G68.
- [117] J. Bauschinger, "Untersuchungen über die astronomische Refraction", *München Sternw. Neue Ann.* **3** (1896), p. 41-229.
- [118] A. Bemporad, "Saggio di applicazione dei metodi di calcolo dell' astronomia teorica a problemi di fisica matematica", *Mem. Soc. Spett. Ital.* **36** (1907), p. 79-87.
- [119] A. Bemporad, P. Puiseux, "VII. 2. Réfraction et Extinction", in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*, Gauthier-Villars, Paris, 1913, p. 14-67.
- [120] G. C. Comstock, "Atmospheric refraction near the horizon", *Pop. Astr.* **27** (1919), p. 529-530.
- [121] C. Y. Hohenkerk, A. T. Sinclair, *The computation of angular atmospheric refraction at large zenith angles (NAO Technical Note No. 63, 1985 April)*, H. M. Nautical Almanac Office, Royal Greenwich Observatory, London, 1985.
- [122] P. K. Seidelmann, *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, University Science Books, Mill Valley, 1992.
- [123] S. Y. v. d. Werf, "Comment on 'Improved ray tracing air mass numbers model'", *Appl. Opt.* **47** (2008), p. 153-156.
- [124] P. Bouguer, *Essai d'Optique sur la Gradation de la Lumiere*, Claude Jombert, Paris, 1729.
- [125] M. J. Maurer, *Die Extinction des Fixsternlichtes in der Atmosphäre in ihrer Beziehung zur astronomischen Refraction*, David Bürkli, Zürich, 1882.
- [126] A. Bemporad, "Zur Theorie der Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre", *Mitt. Grossherzogl. Sternwarte Heidelberg* (1904), no. 4, p. 1-78.
- [127] F. Link, "Théorie photométrique des éclipses de Lune", *Bull. Astron.* **8** (1933), p. 77-108.
- [128] F. Link, "Nouvelles Tables de masses d'air", *J. Obs.* **17** (1934), no. 3, p. 41-48.
- [129] F. Link, "Masses d'air et réfractions sous différentes latitudes et en différentes saisons de l'année", *J. Obs.* **20** (1937), p. 165-171.
- [130] F. Kasten, A. T. Young, "Revised optical air mass tables and approximation formula", *Appl. Opt.* **28** (1989), p. 4735-4738.
- [131] Committee on Extensions to the Standard Atmosphere, *U.S. Standard Atmosphere, 1976*, U.S. Government Printing Office, Washington, 1976.
- [132] J. W. Strutt (Lord Rayleigh), "On the transmission of light through an atmosphere containing small particles in suspension, and on the origin of the blue of the sky", *Phil. Mag.* **47** (1899), p. 375-384.
- [133] J. W. Strutt (Lord Rayleigh), "On the transmission of light through an atmosphere containing small particles in suspension, and on the origin of the blue of the sky", in *Selected Papers on Scattering in the Atmosphere* (C. F. Bohren, ed.), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, Bellingham, 1989, p. 26-34.
- [134] A. T. Young, "Rayleigh scattering", *Phys. Today* **35** (1982), p. 42-48.
- [135] A. T. Young, "Rayleigh scattering", in *Selected Papers on Scattering in the Atmosphere* (C. F. Bohren, ed.), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, Bellingham, 1989, p. 118-124.
- [136] H. Naus, W. Ubachs, "Experimental verification of Rayleigh scattering cross sections", *Optics Letters* **25** (2000), no. 5, p. 347-349.
- [137] M. Sneep, W. Ubachs, "Direct measurement of the Rayleigh scattering cross section in various gases", *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **92** (2005), no. 3, p. 293-310.
- [138] R. Thalman, K. J. Zarzana, M. A. Tolbert, R. Volkamer, "Rayleigh scattering cross-section measurements of nitrogen, argon, oxygen and air", *JQSRT* **147** (2014), p. 171-177.
- [139] R. Thalman, K. J. Zarzana, M. A. Tolbert, R. Volkamer, "Erratum to 'Rayleigh scattering cross-section measurements of nitrogen, argon, oxygen and air'", *JQSRT* **189** (2017), p. 281-282.
- [140] A. T. Young, "Observational technique and data reduction", in *Methods of Experimental Physics, Vol. 12, Astrophysics; Part A: Optical and Infrared*, (N. Carleton, ed.), Academic Press Inc., New York, 1974, p. 123-192.
- [141] I. Petropavlovskikh, P. K. Bhartia, J. DeLuisi, "New Umkehr ozone profile retrieval algorithm optimized for climatological studies", *Geophysical Research Letters* **32** (2005), article no. L16808.
- [142] H. Matsumoto, "The refractive index of moist air in the 3- $\mu\text{m}$  region", *Metrologia* **18** (1982), p. 49-52.
- [143] K. P. Birch, M. J. Downs, "The results of a comparison between calculated and measured values of the refractive index of air", *J. Phys. E: Sci. Instrum.* **21** (1988), p. 694-695.
- [144] J. Beers, T. Doiron, "Verification of revised water vapour correction to the refractive index of air", *Metrologia* **29** (1992), p. 315-316.



- [145] G. Bönsch, E. Potulski, "Measurement of the refractive index of air and comparison with modified Edlén's formulae", *Metrologia* **35** (1998), p. 133-139.
- [146] R. J. Mathar, "Calculated refractivity of water vapor and moist air in the atmospheric window at 10  $\mu\text{m}$ ", *Appl. Opt.* **43** (2004), p. 928-932.
- [147] J. Vaquero-Martínez, M. Anton, "Review on the role of GNSS meteorology in monitoring water vapor for atmospheric physics", *Remote Sens.* **13** (2021), p. 2287-2315.
- [148] Í. Rapp-Arrarás, J. M. Domingo-Santos, "Extinction, refraction, and delay in the atmosphere", *J. Geophys. Res.* **113** (2008), article no. D20116.
- [149] G. Hänel, "The Properties of atmospheric aerosol particles as functions of the relative humidity at thermodynamic equilibrium with the surrounding moist air", in *Advances in Geophysics* (H. E. Landsberg, ed.), Academic Press Inc., New York, 1976, p. 73-188.
- [150] E. P. Shettle, R. W. Fenn, "Models for the aerosols of the lower atmosphere and the effects of humidity variations on their optical properties", in *AFGL-TR-79-0214, Environmental Research Papers, No.676*, Air Force Geophysics Laboratory, 1979.
- [151] A. T. Young, "Air mass and refraction", *Appl. Opt.* **33** (1994), p. 1108-1110.
- [152] H. Atkinson, "On astronomical and other Refractions; with a connected Inquiry into the Law of Temperature in different Latitudes and at different Altitudes", *Mem. Roy. Astr. Soc.* **2** (1826), p. 137-260.
- [153] H. Atkinson, "On the fluctuations of the atmosphere near the earth's surface; and On the effect of such fluctuations upon the refraction at the horizon, and at very low altitudes, especially on the dip of the horizon at sea", *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **1** (1830), p. 192-193.
- [154] H. Atkinson, "Of the fluctuations of the atmosphere near the earth's surface; and of their effects upon the refraction at very low altitudes. With an Appendix on the dip of the horizon", *Mem. Roy. Astr. Soc.* **4** (1831), p. 517-530.
- [155] M. E. Tschudin, S. R. Schroeder, "Time constant estimates for radiosonde temperature sensors", *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology* **30** (2013), p. 40-56.
- [156] A. Mahesh, V. P. Walden, S. G. Warren, "Radiosonde temperature measurements in strong inversions: correction for thermal lag based on an experiment at the South Pole", *J. Atmos. Oceanic Technol.* **14** (1997), p. 45-53.
- [157] E. E. Gossard, J. E. Gaynor, R. J. Zamora, W. D. Neff, "Finest structure of elevated stable layers observed by sounder and *in situ* tower sensors", *J. Atmos. Sci.* **42** (1985), p. 2156-2169.
- [158] F. Dalaudier, C. Sidi, M. Crochet, J. Vernin, "Direct evidence of 'sheets' in the atmospheric temperature field", *J. Atmos. Sci.* **51** (1994), no. 2, p. 237-248.
- [159] C. E. Coulman, J. Vernin, A. Fuchs, "Optical seeing—mechanism of formation of thin turbulent laminae in the atmosphere", *Appl. Opt.* **34** (1995), no. 24, p. 5461-5474.
- [160] A. T. Young, G. W. Kattawar, "Sunset science. II. A useful diagram", *Appl. Opt.* **37** (1998), p. 3785-3792.
- [161] A. T. Young, "O'Connell's green flashes", <https://aty.sdsu.edu/explain/observations/OConnell.html>.
- [162] R. A. Minzer, *A Status report on atmospheric density models and observations*, GCA Corp., Bedford, 1966.
- [163] A. Toussaint, "Étude des performances d'un avion muni d'un moteur suralimenté", *l'Aéronautique* **1** (1919), no. 5, p. 188-196.
- [164] W. R. Gregg, "The standard atmosphere", *Monthly Weather Review* **48** (1920), p. 272-273.
- [165] P. W. White, J. Hoffman, *Earth Global Reference Atmospheric Model (Earth-GRAM): User Guide [NASA/TM-20210022157]*, NASA Langley Research Center, Hampton, 2021.
- [166] M. E. Tschudin, "Refraction near the horizon – An empirical approach. Part 2: variability of astronomical refraction at low positive altitude (LPAAR)", *Observatory* **139** (2019), p. 29-68.
- [167] J. de Graaff Hunter, *Professional paper – No. 14: Formulae for atmospheric refraction and their application to terrestrial refraction and geodesy*, Survey of India, Dehra Dun, 1913.
- [168] E. Livieratos, "On the Refraction Problem of Ground Target Photography with Stellar Background as Applied in the 3-D Terrestrial Triangulation by Using Pure Satellite Triangulation Methods", *Bollettino de Geodesia e Scienze Affini* **35** (1976), no. 4, p. 425-432.
- [169] C. A. Whitney, G. Veis, "A flashing satellite for geodetic studies", *SAO Special Report* (1958), no. 19, p. 9-20.
- [170] S. C. McCluskey, "Archaeoastronomy and refraction near the earth's surface", *Journal for the History of Astronomy* **48** (2017), no. 3, p. 329-345.
- [171] S. C. McCluskey, "Archaeoastronomical refraction reconsidered", *Mediterranean Archaeology and Archaeometry* **18** (2018), no. 4, p. 477-484.



---

Astronomie, atmosphères et réfraction / *Astronomy, Atmospheres and Refraction*

# Study of atmospheres in the solar system, from stellar occultation or planetary transit

## *Étude des atmosphères au sein du système solaire, par occultations stellaires ou transits planétaires*

Bruno Sicardy<sup>✉</sup>\*, <sup>a</sup>

<sup>a</sup> LESIA, Observatoire de Paris, Université PSL, CNRS, Sorbonne Université, Université de Paris, 5 place Jules Janssen, 92195 Meudon, France

E-mail: [bruno.sicardy@obspm.fr](mailto:bruno.sicardy@obspm.fr) (B. Sicardy)

**Abstract.** Stellar occultations and transits occur when a planetary body passes in front of a star (including our Sun). For objects with an atmosphere, refraction plays an essential role to explain the drops of flux and the aureoles observed during these events. This can be used to derive key parameters of the atmospheres, such as their density, pressure and temperature profiles, as well as the presence of atmospheric gravity waves and zonal winds. Here we derive from basic principles the equations that rule the ray propagation in planetary atmospheres, and we show how they can be used to derive the physical parameters of these atmospheres.

**Résumé.** Les occultations stellaires et les transits se produisent lorsqu'un corps planétaire passe devant une étoile (y compris notre Soleil). Pour les objets avec une atmosphère, le rôle de la réfraction est essentiel pour expliquer les chutes de flux et les auréoles observées lors de ces événements. Ces derniers peuvent être utilisés pour déduire des paramètres clés des atmosphères, comme leurs profils de densité, de pression et de température, ainsi que la présence d'ondes de gravité ou de vents zonaux. À partir des principes fondamentaux, nous déduisons les équations qui régissent la propagation des rayons dans les atmosphères planétaires, et nous montrons comment elles peuvent être utilisées pour déduire les paramètres physiques de ces atmosphères.

**Keywords.** Refraction, Planetary Atmospheres, Stellar Occultations, Transits, gravitational lenses.

**Mots-clés.** Réfraction, Atmosphères Planétaires, Occultations Stellaires, Transits, lentilles gravitationnelles.

**Funding.** The work leading to these results has received funding from the European Research Council under the European Community's H2020 2014-2021 ERC Grant Agreement no. 669416 "Lucky Star".

*Published online: 20 December 2022, Issue date: 11 August 2023*

---

\* Corresponding author.

## 1. Introduction

As planetary bodies move in space, they may pass in front of another object, as seen from an observer on Earth or from an instrument on board a spacecraft. Different terminologies are used to describe these phenomena. An *occultation* occurs when a body blocks the light from a background object. A typical example is a stellar occultation, where a planetary body passes in front of a star. In these cases, the physical disk of the star usually appears as much smaller than the size of the occulting body itself. For instance, the angular diameter of a star projected at the typical distances of an asteroid amounts to a kilometer at most, while the asteroid itself may have a diameter of tens of kilometers.

Conversely, *transits* occur when the foreground object is angularly much smaller than the background object. Famous examples are transits of Mercury or Venus in front of the Sun as seen from Earth. In the last two decades, transits of exoplanets in front of their stars have been a very powerful tool to discover exoplanets, assess their sizes and orbital periods, measure perturbations from other exoplanets around the same star, or detect chemical species in their atmospheres.

Finally, the term *eclipse* refers to a body casting its shadow on another body. A well known example is given by lunar eclipses<sup>1</sup>. While eclipses of the Galilean satellites have been observed since their discovery by Galileo, these phenomena among satellites of Jupiter and Saturn have been widely observed. In the last decades to pin down their orbital elements and assess secular trends caused for instance by tidal effects.

Here we focus on stellar occultations and transits involving bodies with atmospheres. During a stellar occultation by an opaque object, the star abruptly disappears when reaching the limb of that object. More precisely, the sharpness of the disappearance and reappearance of the star are only limited by the stellar diameter and diffraction effects, and typically last for a fraction of a second only.

In contrast, occultations by objects with an atmosphere are gradual and may last for several minutes. In fact, even if the occultation is diametric, the occulted star may remain faintly visible during the entire event, due to the refraction of the stellar rays by the atmosphere. Contrarily to what is often thought, the gradual character of atmospheric occultations is usually *not* caused by absorption (due for instance to hazes). In fact, even a completely transparent atmosphere can cause the gradual disappearance of the star (or on the contrary, its brightening), through refraction effects.

In fact, the atmosphere acts as a lens that may focus or defocus the stellar flux. As we will see, the observed phenomena bear some resemblance with gravitational lenses, where the ray bending stems from gravity instead of gas refraction.

## 2. The equations of refraction from basic principles

We recall here a few basic principles that provide the equations of propagation of a luminous ray in an atmosphere. The first principle was stated by Fermat, who noted that during its propagation between two points  $A$  and  $B$ , a luminous ray minimizes the time of travel between  $A$  and  $B$ . Since the velocity of light is  $v = c/n$ , where  $c$  is the speed of light in the vacuum and  $n$  is the index of refraction, Fermat's principle may be expressed as the fact that the optical path  $l$ , where

---

<sup>1</sup>In this context, solar eclipses should actually be referred to as "solar occultations".

$$l = \int_A^B n ds, \quad (1)$$

is stationary (and usually minimal) during the ray propagation.

Fermat's principle can be derived from the undulatory nature of light (Huygens' principle), and more generally, from the more modern principle of least action, widely used in Quantum Mechanics<sup>2</sup>. In practice, the problem of minimizing the integral  $l$  above is solved by the classical Euler and Lagrange equation, which provides ([2, p. 1.20–24])

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{\nabla}n, \quad (2)$$

with  $\vec{\tau} = n\hat{u}$ , where  $\hat{u}$  is the unit vector tangent to the ray at  $\vec{\tau}$  and  $\vec{\nabla}n$  is the gradient of  $n(\vec{r})$ .

In the case where the ray propagates in a plane, the equation above can be written in another way. During an elementary displacement  $ds$ , the ray is deflected by an elementary angle  $d\omega$ , so that  $\hat{u}$  suffers a deviation  $d\omega$  given by

$$d\hat{u} = \hat{v}d\omega, \quad (3)$$

where  $\hat{v}$  is the unit vector perpendicular to  $\hat{u}$ . Using Eqs. (2) and (3), we obtain after elementary calculations

$$\frac{d\omega}{ds} = \left( \frac{\vec{\nabla}n}{n} \right) \cdot \hat{v}, \quad (4)$$

which will be used in the rest of this chapter. Note that Eq. (4) is equivalent to Eq. (2) only in the case of a *planar propagation of the ray*. This is not true anymore for a 3D propagation, where the torsion of the ray must also be accounted for.

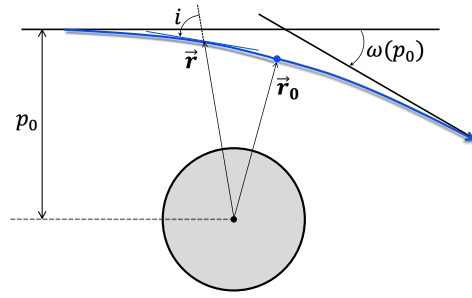
### 3. Refraction by planetary atmospheres

The effects of refraction by a planetary atmosphere during Venus transits have been studied quite long ago, with articles dating back to the eighteenth and nineteenth centuries, see Section 7. Applications to stellar occultations, on the other hand, started to be discussed one century ago or so, in particular by Anton Pannekoek [3] in 1903 and by Charles Fabry [4] in 1929.

Observations of stellar occultations were difficult at that time, though, because they required a fast and sensitive photometric recording device. Only on 20 November 1952 was an occultation of the star  $\sigma$  Arietis by Jupiter recorded [5]. Another occultation was monitored on 7 July 1959, involving Venus that passed that time in front of the bright star  $\alpha$  Leonis (alias Regulus) [6]. More than one decade was necessary to have another event recorded, on 13 May 1971, when Jupiter occulted the star  $\beta$  Scorpis [7–9].

The formal equations describing the effects of atmospheres during occultations are found in various works from the beginning of the 1970's [8–10]. They consider the simplest possible case: a planet with a spherically symmetric and transparent atmosphere. Its refractive index  $n(r)$  then depends only on the distance  $r$  to the planet's center. A ray coming from infinity from the left with impact parameter  $p_0$  is refracted by the atmosphere and returns to infinity at the right with a total deviation  $\omega(p_0)$ , after passing at a closest distance  $r_0(p_0)$  from the planet's center (Figure 1). From the symmetry of the problem, the ray propagates in the plane that passes through the center of symmetry of the atmosphere, as depicted in Figure 1.

<sup>2</sup> See the book by Feynman, where the connection between light and quantum electrodynamics (QED) is described for an informed but wide public [1].



**Figure 1.** A ray coming from infinity from the left with impact parameter  $p_0$  is refracted by the atmosphere of a planet. It reaches its closest approach at  $\vec{r}_0$  and goes to infinity again with a total deviation of  $\omega(p_0)$  that depends only on the incoming impact parameter. Note that by convention here, the angle  $\omega$  is negative while  $i$  is positive.

### 3.1. Bouguer's rule

Let us denote  $i$  the angle between the position vector  $\vec{r}$  of the current point along the ray path and the tangent to the path, see Figure 1. We have

$$\sin(i) = (\hat{u} \times \hat{r}) \cdot \hat{z},$$

where  $\hat{u}$  is the unit vector in the direction of the ray propagation,  $\hat{r}$  is the unit radial vector  $\hat{r} = \vec{r}/r$ , and  $\hat{z}$  is the unit vector perpendicular to the plane of Figure 1. Using  $\vec{t} = n\hat{u}$ , we define  $B$  as

$$B = nr \sin(i) = (\vec{t} \times \vec{r}) \cdot \hat{z}.$$

As the ray progresses by a displacement  $ds$  along the path,  $B$  varies at the rate

$$\frac{dB}{ds} = \left( \frac{d\vec{t}}{ds} \times \vec{r} \right) \cdot \hat{z} + \left( \vec{t} \times \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \cdot \hat{z} = (\vec{\nabla}n \times \vec{r}) \cdot \hat{z} + (\vec{t} \times \hat{u}) \cdot \hat{z} = 0.$$

This directly results from the fact that the atmosphere is spherically symmetric, so that  $\vec{\nabla}n$  is parallel to  $\vec{r}$ , and from the fact that  $\vec{t}$  is parallel to  $\hat{u}$  by definition. We then obtain the *Bouguer's rule*,  $dB/ds = 0$ , i.e.

$$nr \sin(i) = \text{constant along the path.}$$

Very far away from the planet (at left in Figure 1), there is no atmosphere ( $n = 1$ ) and  $r \sin(i) = p_0$ . At closest approach,  $i = \pi/2$  and  $B = n_0 r_0$ , where  $n_0 = n(r_0)$ . Hence

$$nr \sin(i) = n_0 r_0 = p_0, \quad (5)$$

which relates the impact parameter  $p_0$ , the closest approach distance  $r_0$  of the ray and the index of refraction  $n_0$  at that point.

### 3.2. Total deviation of the ray

Since the ray propagates in a plane in the case examined here, we can use Eq. (4) to calculate the ray deviation  $\omega$  as the ray progresses in the atmosphere. For a spherically symmetric atmosphere,  $\vec{\nabla}n$  can be expressed as

$$\vec{\nabla}n = \frac{dn}{dr} \hat{r} = \frac{1}{r} \frac{dn}{dr} \vec{r}.$$

Hence

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} (\hat{r} \cdot \hat{v}).$$

We see in Figure 2 that  $\hat{r} \cdot \hat{v} = \sin(i)$ , where  $\sin(i) = p_0/rn$  (Eq. (5)), thus

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{p_0}{rn^2} \frac{dn}{dr}.$$

Moreover, again from Figure 2 we see that  $dr = -\cos(i)ds$ . From  $\cos(i) = \sqrt{1 - \sin^2(i)}$  and  $\sin(i) = p_0/rn$ , we finally arrive at

$$\frac{d\omega}{dr} = -\frac{p_0}{n} \frac{dn}{dr} \frac{1}{\sqrt{r^2 n^2 - p_0^2}}.$$

By integrating  $d\omega/dx$  from  $+\infty$  (corresponding to a ray coming from infinity at the left of Figure 1) to  $r_0$  (the closest approach to the planet), we obtain half of the total deviation, so that the total deviation is

$$\omega(p_0) = 2 \int_{r_0(p_0)}^{+\infty} \frac{p_0}{n} \frac{dn}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 n^2 - p_0^2}}, \quad (6)$$

where we recall that  $p_0 = r_0 n_0$ .

Suppose that we know the refractive structure of the atmosphere, i.e. the profile  $n(r)$ . Then, for each impact parameter  $p_0$ , we can determine the closest approach distance  $r_0$  by solving the equation  $r_0 n(r_0) = p_0$ . This entirely determines  $\omega(p_0)$  using a numerical scheme to calculate the integral above. In other words, to each impact parameter  $p_0$ , we can associate a deviation angle  $\omega(p_0)$ .

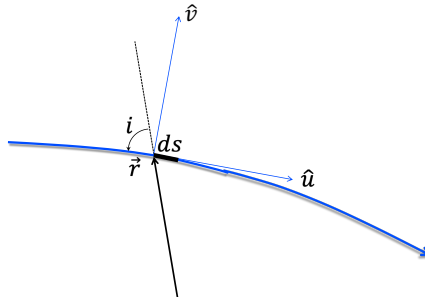
#### 4. Retrieval of the atmospheric structure

Figure 3 summarizes the principle of differential refraction in an atmosphere, and defines the various geometrical quantities used in the text. For the commodity of plotting, the deviation is sketched as an abrupt change of propagation, which it is actually gradual (Figure 1).

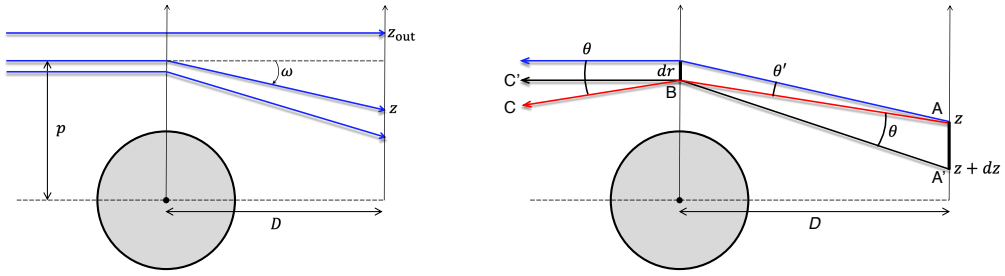
##### 4.1. Abel inversion

Stellar occultations provide the deviation  $\omega$  of the ray and the corresponding impact parameter  $p$  at the various instants of the event, thus yielding  $p(\omega)$ . The problem is now to derive the value of  $n(r_0)$  using all these values  $p(\omega)$ . This is done through an *Abel inversion* of Eq. (6), which is detailed for instance in [8–10] and provides

$$n_0 = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{\omega=0}^{\omega(p_0)} \ln \left[ \frac{p(\omega)}{p_0} + \sqrt{\left( \frac{p(\omega)}{p_0} \right)^2 - 1} \right] d\omega \right\}, \quad (7)$$



**Figure 2.** The definitions of the vectors and angles used in the text. The ray is in blue.



**Figure 3.** *Left:* The geometry of a refractive occultation. The stellar rays come from infinity at left with impact parameter  $p$ . They are differentially refracted as they probe deeper atmospheric layers, and reach the observer located at  $z$  after traveling the distance  $D$ . Outside the atmosphere (e.g. at  $z_{out}$ ), the deviation  $\omega$  is zero. *Right:* A sketch illustrating the relation between the angular diameter  $\theta$  of a star and the angular diameter of its refracted image,  $\theta'$ . See text for details.

which is a relation between  $n_0$  and  $p_0 = r_0 n_0$ , from which  $n_0$  corresponding to the distance  $r_0$ , i.e.  $n(r_0)$ , is retrieved.

During an occultation by a transparent planetary atmosphere, the flux of the star gradually dims due to the *differential deviation* of the stellar rays. Thus in this case, the dimming of the flux is not caused by absorption or scattering (due for instance to hazes) or but by refraction.

Consider in Figure 3 a planet with an atmosphere that deviates a stellar ray with impact parameter  $p$  by an angle  $\omega$  (which is negative by convention, see Figures 1 and 3), and reaches the observer at  $z$ . We have

$$z = p + D\omega, \quad (8)$$

which provides

$$d\omega = \frac{1 - (dp/dz)}{D} dz.$$

If the atmosphere is transparent, the luminous flux contained in the beam of width  $dp$  is retrieved in the beam of width  $dz$ . Consequently, the stellar flux at  $z$  is “diluted” and yields the irradiance<sup>3</sup>:

$$\phi = \frac{dp}{dz}, \quad (9)$$

taking a stellar irradiance outside the occultation normalized to unity. Thus we obtain  $\omega(z)$  by

$$\omega(z) = \frac{1}{D} \int_{+\infty}^z (1 - \phi) dz. \quad (10)$$

In practice, it is enough to start the integration just outside the occultation, at some level  $z_{out}$  where we have  $\phi = 1$  and  $\omega = 0$ , see Figure 10. This is reached rapidly, as planetary atmospheres decay exponentially in density, and become undetectable by the observer above a certain level. Once  $\omega(z)$  is known,  $p(z)$  is given by Eq. (8), which provides  $\omega(p)$ . This is finally introduced in Eq. (7) to obtain the refractivity profile  $n_0$  at radius  $r_0$ .

Here we drop for sake of simplicity the index 0 and we use  $r$  instead of  $r_0$ . The refractivity of the gas at a given radius is defined as  $\nu(r) = n(r) - 1$ . It is related to the molecular density of the gas  $n_g$

<sup>3</sup> We ignore for moment the curvature of the planetary limb. It becomes relevant near the shadow center, where it causes a “flash”, see Section 6.

by  $v = Kn_g$ , where  $K$  is the molecular refractivity of the gas under consideration. Consequently, the Abel inversion eventually provides the density profile of the atmosphere through

$$n_g(r) = \frac{v(r)}{K}. \quad (11)$$

On the other hand, the hydrostatic equation provides the pressure  $p$  by integration of the equation

$$\frac{dp}{dr} = -\mu n_g(r)g(r), \quad (12)$$

where  $\mu$  is the molecular mass and  $g(r)$  the acceleration of gravity at radius  $r$ . Finally, the ideal gas equation  $p = n_g k_B T$  (where  $k_B$  is Boltzmann's constant) provides

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dr} = - \left[ \frac{\mu g(r)}{k_B T} + \frac{1}{n_g} \left( \frac{dn_g}{dr} \right) \right] \quad (13)$$

Both Eqs. (12) and (13) are first order differential equations. As such, they require a boundary condition, i.e. the value of  $p$  and  $T$  at some prescribed radius  $r$ , respectively. This is not too much of a problem for the pressure, as the atmosphere decays exponentially with radius. Thus, we can safely take  $p = 0$  at  $z_{out}$ , as we did for  $\omega$ .

This approximation cannot be used for the temperature, as it is usually *not* known at  $z_{out}$ , and it is certainly *not* zero. In fact, integrating Eq. (13) requires an independent knowledge of  $T$  at some given radius. Otherwise, an infinity of profiles  $T(r)$  can explain the same observable (here, the occultation light curve). This ambiguity can be resolved for instance by using other ground-based observations or spacecraft measurements that have access to the level probed by the occultation. Another approach is to propose physical arguments (such as a radiative transfer model) that restrict the range of plausible values of  $T$  at some level.

#### 4.2. Conservation of energy, primary and secondary stellar images

We now consider the problem of stellar images during a refractive occultation. For this, we have to reverse the diagram displayed in the left panel of Figure 3, as shown in the right panel of this same figure. Let us consider an observer at coordinate  $z$  (point  $A$ ) who watches through the atmosphere a star at infinity with angular diameter  $\theta$ , subtended by the blue and red rays in the figure. These two rays are deflected by the atmosphere and reach the observer at  $A$ , where they subtend an angle  $\theta'$ . This angle defines the angular diameter of the stellar image after refraction. We now rotate the red ray around  $B$  by an angle  $\theta$ ,  $A$  and  $C$  will superimpose onto  $A'$  and  $C'$ , respectively. In that case,  $BC'$  is parallel to the outgoing blue ray.

For large distances  $D$ ,  $\theta = dz/D$  and  $\theta' = dr/D$ . Using Figure 3 and  $p \sim r$ , we have from the conservation of energy in a transparent atmosphere

$$\frac{\theta'}{\theta} = \phi. \quad (14)$$

This means that the stellar image is compressed by a factor of  $\phi$  perpendicularly to the limb of the planet. Consequently, the brightness of the stellar image through the atmosphere (i.e. the flux received per unit surface and unit angle at the observer) is the same as the brightness of the stellar image outside the atmosphere. The equation above actually states the conservation of the specific intensity (also called radiance or brightness) of the ray as it propagates through the transparent atmosphere, a theorem due to Clausius (see [11] and the discussion in [2, p. 1.25]). Another, equivalent way to state this conservation law is to say that the observed irradiance is proportional to the angular dimension of the stellar image seen through the atmosphere.

For the moment, we have considered that the refraction acts in the plane of the figure. In reality, the limb curvature also causes a deviation of the rays, perpendicular to that limb. It is then



easy to extend the result obtained above to a full 2D image, replacing the angle  $\theta$  (resp.  $\theta'$ ) by the solid angle  $\Omega$  (resp.  $\Omega'$ ) subtended by the star (resp. its image). Then Eq. (14) can be re-written as

$$\frac{\Omega'}{\Omega} = \phi, \quad (15)$$

which states again that the received flux during an occultation by a transparent atmosphere is directly proportional to the apparent size of the refracted stellar image.

## 5. Useful approximations

### 5.1. The straight line approximation

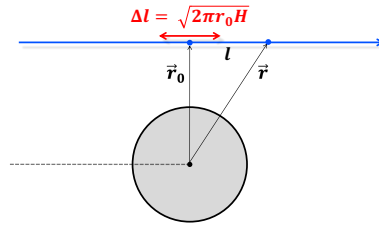
For ground-based stellar occultations, the deflection angle  $\omega$  (Eq. (10)) is very small because the distance  $D$  is very large. This angle is actually of the order of the angular diameter of the observed body, typically a few arc seconds, i.e. less than  $10^{-5}$  radian. From Eq. (5), this implies that  $r_0$  is very close to  $p_0$ , to within  $p_0\omega$ , so that  $n_0$  is very close to unity. Consequently, in Eq. (6), we can write  $n \sim 1$  and  $p_0 \sim r_0$ . Moreover,  $dn/dr = dv/dr$ , so that

$$\omega(r_0) \sim 2 \int_{r_0}^{+\infty} r_0 \frac{dv}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}},$$

One can change the variable  $r$  to  $l = \sqrt{r^2 - r_0^2}$  (Figure 4), which leads to

$$\omega(r_0) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right) \left(\frac{dv}{dr}\right) dl, \quad (16)$$

where  $r = \sqrt{r_0^2 + l^2}$ . Note that the equation above can be used for ray tracing purposes, once a density profile  $n_g(r)$  — and thus a refractivity profiles  $v(r)$ , see Eq. (11) — has been prescribed.



**Figure 4.** The straight line approximation for refractive occultations by remote bodies in the solar system with radius  $r_0$  and atmospheric scale height  $H$ . The deviation angle of  $\omega(r_0)$  in Eq. (16) is so small that it is not perceptible at the scale of the figure. The length  $\Delta l$  (Eq. (19)) corresponds to the interval where most of the ray deviation occurs.

### 5.2. The small scale height approximation

In most of the cases, planets have atmospheres with a roughly constant *density* scale height  $H$ , defined as

$$H = -\frac{n_g}{(dn_g/dr)}.$$

In usual cases,  $T$  varies much more slowly than  $n_g$ , so that  $H$  also varies slowly with  $r$ . Moreover, it is usually much smaller than the planet typical radius, i.e.

$$H \ll r. \quad (17)$$

Then

$$v(r) \sim v_0 \exp\left[-\left(\frac{r-r_0}{H}\right)\right] \quad \text{and} \quad \frac{dv}{dr} \sim -\left(\frac{v_0}{H}\right) \exp\left[-\left(\frac{r-r_0}{H}\right)\right],$$

where  $v_0 = v(r_0)$ . Furthermore, we will see that most of the refractive deviation occurs over a distance  $\Delta l$  that is significantly smaller than  $r_0$ . Thus,

$$r = \sqrt{r_0^2 + l^2} = r_0 \sqrt{1 + l^2/l_0^2} \sim r_0 (1 + l^2/2r_0^2),$$

so that  $r - r_0 \sim l^2/2r_0$  and  $r_0/r \sim 1$ . Using those approximations, introducing in Eq. (16) the expression of  $dv/dr$  obtained above and using  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du = \pi$ , we obtain

$$\omega(r_0) \sim -v_0 \sqrt{\frac{2\pi r_0}{H}}. \quad (18)$$

By writing  $(dv/dr)_{r_0} = -v_0/H$ , we obtain  $\omega(r_0) \sim (dv/dr)_{r_0} \sqrt{2\pi r_0 H}$ . This shows that the deviation angle mainly comes from a interval along the ray path of characteristic length

$$\Delta l \sim \sqrt{2\pi r_0 H}. \quad (19)$$

For Jupiter,  $r_0 \sim 70,000$  km and  $H \sim 30$  km, so that  $\Delta l \sim 3,500$  km, which is significantly smaller than  $r_0$ , as announced. For Pluto or Triton,  $r_0 \sim 1500$  km and  $H \sim 20 - 50$  km we obtain  $\Delta l \sim 400 - 700$  km. The approximation  $\Delta l \ll r_0$  is not so good in those cases, but Eq. (18) still captures the correct orders of magnitude.

### 5.3. The Baum and Code equation

Baum and Code [5] derived a simple equation that describes how the stellar flux decrease when observed from Earth when observing a stellar occultation by a planetary atmosphere. Using Figure 3, Eq. (9) and  $p \sim r$  (the straight line approximation), we obtain

$$\frac{1}{\phi} = 1 + D \left( \frac{d\omega}{dr} \right). \quad (20)$$

We note that in Eq. (18), the rapidly varying factor in an exponential atmosphere is  $v_0$ , not  $r_0$ . More precisely, we have  $d\omega/dr \sim -\omega/H$ , so that, dropping from now on the index 0 in Eq. (18)

$$\frac{1}{\phi} = 1 - \frac{D\omega}{H} = 1 + v \sqrt{\frac{2\pi r D^2}{H^3}}. \quad (21)$$

This shows that the stellar flux has dropped by a factor of two (the “half light level”, denoted here by a subscript 1/2) for

$$\omega_{1/2} = -H/D, \quad \text{so that} \quad z_{1/2} = r_{1/2} - H. \quad (22)$$

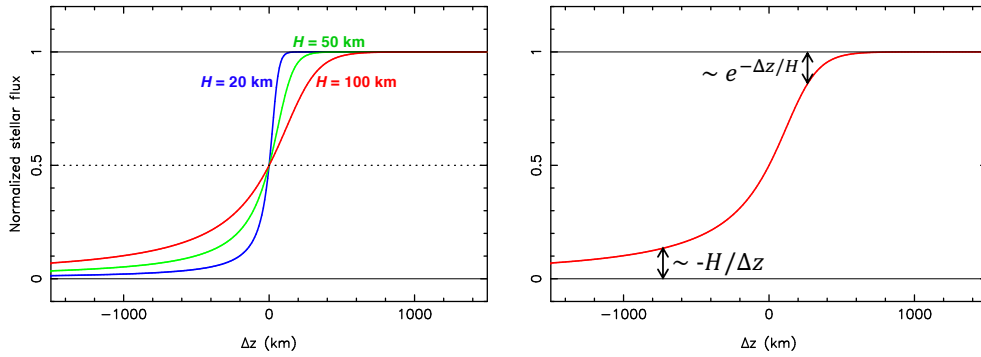
This means that the ray corresponding to the half light level has been deviated by one scale height  $H$  when it arrives at the observer. This occurs for

$$v_{1/2} = \sqrt{\frac{H^3}{2\pi r_{1/2} D^2}}, \quad (23)$$

corresponding to a molecular density  $n_{g,1/2} = v_{1/2}/K$ .

From Eqs. (8) and (21) and from the definition of the half light level, we have

$$\frac{1}{\phi} = 1 + \frac{r-z}{H} \quad \text{and} \quad 2 = 1 + \frac{r_{1/2} - z_{1/2}}{H}.$$



**Figure 5.** *Left:* Examples of solutions to the Baum and Code equation (27) for typical values of the scale height  $H$ . *Right:* The asymptotic behavior of the Baum and Code solution for large values of  $\Delta z$  (positive or negative), see Eqs. (29) and (30)

Thus

$$\frac{1}{\phi} - 2 = \frac{r - r_{1/2}}{H} - \frac{\Delta z}{H}, \quad (24)$$

where

$$\Delta z = z - z_{1/2}.$$

Using the fact that  $\omega/\omega_{1/2} \sim v/v_{1/2} = \exp[-(r - r_{1/2})/H]$ , and from Eq. (22), we have

$$\omega = -\frac{H}{D} \exp\left[-\left(\frac{r - r_{1/2}}{H}\right)\right] \quad (25)$$

and thus from Eq. (21)

$$\frac{1}{\phi} - 1 = \exp\left[-\left(\frac{r - r_{1/2}}{H}\right)\right]. \quad (26)$$

This permits to express  $r - r_{1/2}$  as a function of  $\phi$  in Eq. (24), and finally get

$$\left(\frac{1}{\phi} - 2\right) + \ln\left(\frac{1}{\phi} - 1\right) = -\frac{\Delta z}{H}, \quad (27)$$

known as the Baum and Code equation [5].

Classical numerical schemes can be used to invert this equation so that to provide  $\phi$  as a function of  $\Delta z$ , the distance traveled by the observer in the shadow plane (Figure 5). Once this is done, Eq. (24) provides the radius of closest approach  $r$  probed by the ray as a function of  $z$ :

$$r = z + H\left(\frac{1}{\phi} - 1\right). \quad (28)$$

Asymptotic expressions of  $\phi$  can be obtained for  $\Delta z \rightarrow +\infty$ , i.e. when the star is observed far away from the planet. Then  $\phi$  approaches unity, so that Eq. (27) yields

$$\phi \sim 1 - \exp\left(-\frac{\Delta z}{H}\right). \quad (29)$$

Consequently, the light curve approaches very rapidly (in fact, exponentially) the unocculted stellar flux unity as the star probes a few scale heights only above the half light radius. To take an example, suppose that the photometric quality of the occultation light curve is such that a drop of flux by at least 1% is necessary to be detected, a common situation in practical cases. This means that we must have  $\exp(-\Delta z/H) > 0.01$  for detecting the stellar drop. In other words, we can probe only levels below  $r_{1/2} - \ln(0.01)H \sim r_{1/2} + 4.6H$ .

At the other extreme, in the case  $\Delta z \rightarrow -\infty$  (i.e. when the star probes deep layers of the atmosphere), Eq. (27) provides

$$\phi \sim -\frac{H}{\Delta z}. \quad (30)$$

Thus, the stellar flux goes to zero rather mildly ( $\propto 1/|\Delta z|$ ) when compared to its exponential behavior near  $\phi \sim 1$ . The asymptotic behaviors of  $\phi$  are summarized in the right panel of Figure 5.

#### 5.4. Applications to planetary atmospheres

Eq. (23) shows that the larger the scale height  $H$ , the denser the half light level probed in the atmosphere. Conversely, the larger the distance  $D$ , the smaller  $n_{g,1/2}$ . This explains why ground-based observations, for which  $D$  is very large (up to billions of kilometers), can probe very tenuous pressure levels and still cause significant stellar drops. Using the ideal gas equation and the classical expression  $H \sim k_B T / \mu g(r_{1/2})$ , Eq. (23) provides the expression of the pressure  $P_{1/2}$  probed by the half light rays:

$$P_{1/2} \sim \frac{GM\mu}{KD} \sqrt{\frac{H^5}{2\pi r_{1/2}^5}}, \quad (31)$$

where  $M$  is the mass of the body and  $G$  is the constant of gravitation. Using this equation and the parameters listed in Table 1, we obtain order-of-magnitude estimations of  $P_{1/2}$ .

**Table 1.** Estimation of the half light pressure level  $P_{1/2}$  probed during ground-based stellar occultations.

Object	$GM$ ( $\text{m}^3 \text{s}^{-2}$ )	$r_{1/2}$ (km)	$D$ (ua)	$H$ (km)	gas composition	$\mu$ ( $10^{-26}$ kg)	$K$ ( $10^{-29}$ $\text{m}^3 \text{ molecule}^{-1}$ )	$P_{1/2}$ (Pa)
Jupiter	$1.21 \times 10^{17}$	71840	4.2	25	90% H <sub>2</sub> +10% He	0.37	0.479	0.1
Saturn	$3.79 \times 10^{16}$	61000	8.5	55	90% H <sub>2</sub> +10% He	0.37	0.479	0.2
Uranus	$5.79 \times 10^{15}$	25900	18.2	65	90% H <sub>2</sub> +10% He	0.37	0.479	0.2
Neptune	$6.84 \times 10^{15}$	25100	29.0	50	90% H <sub>2</sub> +10% He	0.37	0.479	0.1
Titan	$8.98 \times 10^{12}$	3070	8.5	45	N <sub>2</sub>	4.7	1.11	0.3
Triton	$1.43 \times 10^{12}$	1440	29.0	25	N <sub>2</sub>	4.7	1.11	0.02
Pluto	$8.70 \times 10^{11}$	1300	32.0	65	N <sub>2</sub>	4.7	1.11	0.2

In Table 1, we assume that the objects are observed from Earth near opposition, providing a heliocentric distance  $D$  that is roughly the orbital radius of the object minus 1 au. In spite of very large ranges of values for the masses, radii, molecular masses and distances, we see that the combination of these parameters eventually provides a rather narrow range for  $P_{1/2}$ , typically a fraction of a Pascal, corresponding a few  $\mu\text{bar}$ , using  $1 \text{ Pa} = 10 \mu\text{bar}$ .

The analysis presented in this Section assumes an atmosphere with constant scale height  $H$  and adopts approximations that permit the use of the Baum and Code equation. In view of the increasing quality of the occultation light curves and the significant departure of certain density profiles from having a constant  $H$ , it is now customary to use “brute force” ray tracing that numerically integrate Eqs. (6) and (13), and then Eqs. (8)–(10). This allows one to generate synthetic light curves with any atmosphere profiles, and compare them with observations, even in the case of strong local variations of  $H$ . Moreover, ray tracing has the advantage to account for the limb curvature, which is not necessarily circular, or not even smooth, as developed in the next Section 6.

In any case, the stellar occultation method has been very unique and productive for studying planetary atmospheres. Besides the historical cases evoked in Section 3, and without being

exhaustive, we may cite the structure and extinction of the Martian upper atmosphere [12], the study of waves in Uranus' stratosphere [13], the discovery of Pluto's atmosphere in the 1980's [14–16], its seasonal three-fold pressure increase between 1988 and 2020 [17–19], the wave forcing by solar-induced sublimation at Pluto's surface [20, 21], the structure and evolution of Neptune's stratosphere [22], the structure, zonal wind regime and haze properties of Titan's stratosphere [23, 24] and Triton's atmosphere [25].

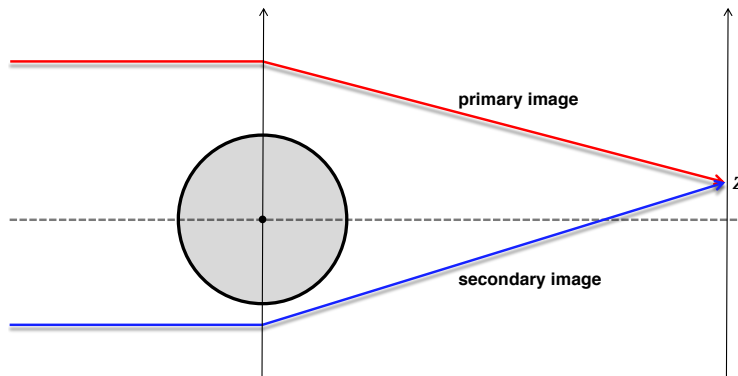
An important point is the complementarity between those ground-based observations and space exploration. They may access different regions of the studied atmospheres and thus, provide a synoptic description of these atmospheres. Stellar, solar or radio occultations have been performed by various spacecraft. As they are much closer to the body than terrestrial observers, they probe much deeper layers as the quantity  $D$  in Eq. (31) is much smaller.

For instance, while ground-based Titan occultations typically probe a few  $\mu\text{bar}$  to some 100  $\mu\text{bar}$  pressure levels, the solar occultations observed by the Cassini spacecraft could reach layers with pressure of more than 10 mbar [26].

## 6. Central flashes

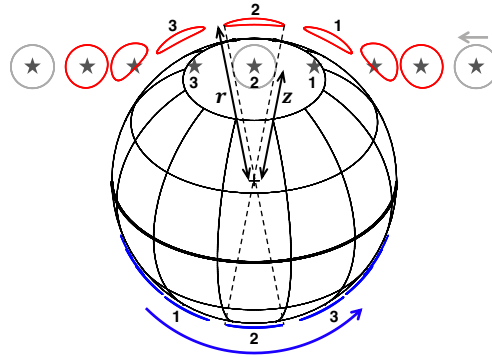
### 6.1. Primary and secondary images

From now on, we will consider the curvature of the planetary limb, which creates a “central flash” effect. First, as illustrated in Figure 6, we see that a spherical planetary atmosphere generally produces two images, a *primary* image (sometimes called the near-limb image) and a *secondary* (or far-limb) image. More complex situations where several images are produced by non-spherical atmospheres will be considered later in this chapter.



**Figure 6.** Stellar rays coming from infinity at left can be refracted to the observed at  $z$  following two paths. One produces the primary (or near-limb) image and corresponds to the less refracted ray, plotted here in red. The other ray (in blue) produces a secondary (or far-limb) image that comes from the other side of the planetary disk, and thus suffers a stronger deviation. If  $z$  is negative, the primary and secondary characters of the images are swapped.

The Figure 7 displays the compression and stretching suffered by the two stellar images in the spherical case, which eventually explains the variation of flux observed during an occultation (Eq. (15)). The compression of the image perpendicular to the limb (which decreases the received flux) is due to the differential refraction that defocuses the stellar rays (Figure 3) by a factor  $1 + D(d\omega/dr)$  (Eq. (20)). On the other hand, the stretching of the image along the limb (which



**Figure 7.** The stellar images caused by refraction during a stellar occultation by an atmosphere. Here, we consider a planet with radius  $\sim 1200$  km and an atmosphere with a scale height  $H \sim 50$  km. The gray circles with a star symbol at their centers delineate the apparent stellar disk projected at the planet distance, here with a radius  $r_\star = 180$  km. The plus symbol marks the planet center, assumed here to be spherical. The occultation proceeds as the star moves from right to left relative to the planet. The value of  $r_\star$  has been greatly exaggerated here in order to illustrate the mechanism at play. In real cases,  $r_\star$  is at most a few kilometers when considering occultations by solar system objects. At any moment (for instance at points 1, 2 and 3), the stellar disk has two images. One is the primary (or near-limb, in red) image caused by the refraction due to the nearest point of the limb. The other is the secondary (or far-limb, in blue) image caused by the opposite point of the limb, i.e. rays that pass by the other side of the planet before reaching the observer. The stellar images are compressed perpendicular to the limb due to differential refraction (Eq. (14)), and they are stretched parallel to the limb due to the focusing caused by the limb curvature (Eq. (32)). The stellar flux caused by a particular image is then proportional to the area encircled in the stellar image. This latter can be calculated using the dashed lines. They show that the stretching greatly increases as the star approaches the planet center, as projected in the sky plane. This leads to the detection of a central flash, see Figure 8.

increases the received flux) is caused by the limb curvature that focuses the stellar rays toward the shadow center by a factor  $f$  (Figure 7). Thus, the normalized irradiance received by the observer from any of the two (or more) images produced by the limb is

$$\phi = \left( \frac{1}{1 + D \frac{d\omega}{dr}} \right) f \exp(-\tau) = \left( \frac{1}{1 + D \frac{d\omega}{dr}} \right) \left( \frac{r}{|z|} \right) \exp(-\tau). \quad (32)$$

The first equation above assumes that the stellar radius  $r_\star$  projected at the planet distance<sup>4</sup> is small compared to the atmospheric scale height  $H$ , so that the factor  $dp/dz$  in Eq. (9) can be considered constant across the star diameter. This is usually the case for planetary occultations, where  $r_\star$  is of the order of a few kilometers and  $H$  is of the order of a few tens of kilometers. If  $r_\star$  is comparable to or larger than  $H$  (as it is the case in Figure 7), then from Clausius' theorem,  $\phi$  is given by the surface area of the image normalized to  $\pi r_\star^2$ . No analytical expression of this surface area is available in this case, but it can be easily obtained numerically.

<sup>4</sup>This is obviously different from the actual physical size of the star.

The second equation (32) is restricted to the case of a spherical atmosphere, for which  $f = r/|z|$  from the examination of Figure 7. We have ignored this term so far because it is very close to unity near the half light level. From Eq. (22),  $z_{1/2} = r_{1/2} - H$ . Thus at that level  $f = r_{1/2}/|z_{1/2}| = r_{1/2}/(r_{1/2} - H) \sim 1$  because usually  $H \ll r_{1/2}$ . In other words, the focusing effect due to the limb curvature is in general noticeable only near the shadow center. Moreover, the second equation (32) is valid only if  $|z|$  is larger than a few times  $r_*$ . We will see in the next subsection that the finite stellar size actually prevents the singularity that occurs at  $|z| = 0$  in Eq. (32).

We have also added in Eq. (32) a term  $\exp(-\tau)$  which accounts for the presence of hazes that scatter and absorb the light, where  $\tau$  denotes the optical depth of the atmosphere along the line of sight. In several cases examined here, the atmosphere is transparent ( $\tau = 0$ ). However, we will give examples on non-zero  $\tau$ , which leads to a decrease of flux not only because of refraction, but also because of scattering and absorption.

Once the irradiances of each image produced by the limb have been calculated using Eq. (32), they are summed up to derive the synthetic light curve to be compared with the observations. Note that in some cases, the planet is angularly large enough to distinguish the various stellar images moving along the limb. Then, Eq. (32) can be used to produce synthetic light curves for each of these images.

## 6.2. Central flashes: the spherical case

The equation (32) predicts that  $\phi$  diverges to infinity at  $z = 0$ , causing a “central flash”. This is true in the limiting case of a point-like source and geometric optics. In actual cases, the star has a finite angular size, so that  $f$  (and  $\phi$ ) actually remains finite at the shadow center<sup>5</sup>.

The entire atmosphere can be seen as a lens that focuses the stellar rays toward the shadow center, that can be seen as the focal point of that lens. More precisely, there is one layer (called the flash layer hereafter) in the atmosphere that has the right focal length  $D$ , i.e. that causes the right deviation of the ray so that the observer can see the central flash. Thus, the flash can be observed for any value of  $D$ , the flash layer being located deeper and deeper as  $D$  decreases. Note that the flash ceases to be observed if the flash layer reaches the planet surface, in which case the stellar image vanishes behind the limb.

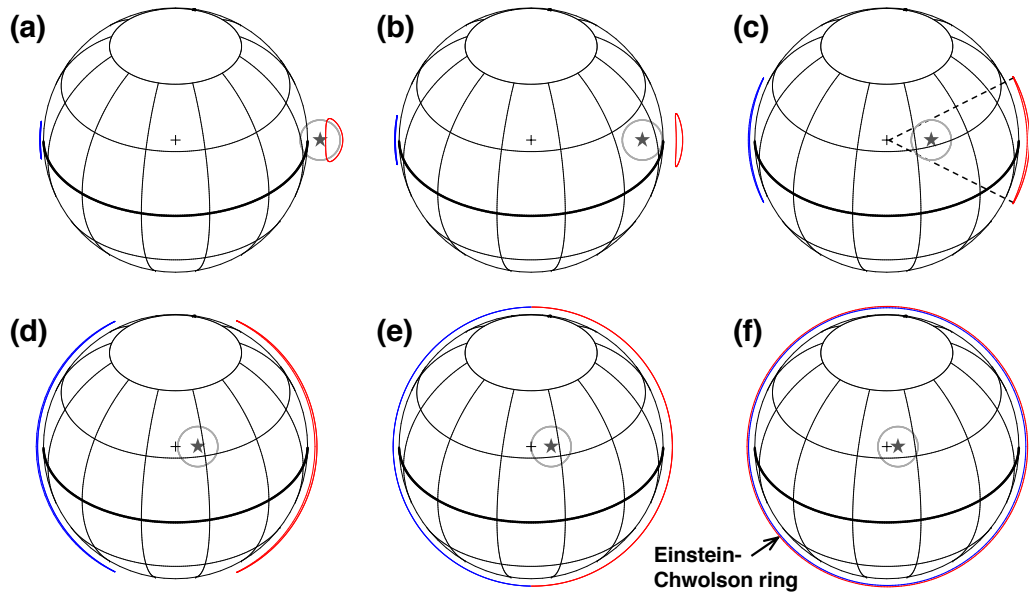
The Figure 8 summarizes the flash process. As long as the apparent stellar disk (delineated in gray in Figure 8) does not overlap with the planet center (the plus symbol), the primary and secondary images are disconnected. As soon as the stellar disk covers the center, these two images merge into a luminous ring surrounding the planet (panel (f)). This ring actually reveals the flash layer, i.e. the layer that focuses the stellar rays towards the shadow center. This phenomenon is akin to the “Einstein–Chwolson ring” caused by the gravitational lensing of rays coming from a remote galaxy or star by an intervening massive object. So, although the causes of the bending are different (refraction vs. gravitation), atmospheric occultations and gravitational lenses share the same basic process<sup>6</sup>.

For a transparent atmosphere, the brightness of that ring is the same as the brightness of the unocculted star (see the Clausius theorem discussed after Eq. (14)). so the flux received at perfect alignment star-planet-observer remains finite, contrarily to what is expected from Eq. (32). From Eq. (14) the width of the Einstein–Chwolson ring is

$$w_{EC} = 2r_*\phi_c, \quad (33)$$

<sup>5</sup>However, even for a point-like source, the flux does not diverges at  $z = 0$  due to diffraction effects that are not considered here.

<sup>6</sup>For massive planets like Jupiter, the ray bending caused by the gravity of the planet is not negligible compared to the bending caused by refraction. However, its derivative  $d\omega/dr$  is negligible and thus does not affect significantly the stellar flux in Eq. (32).



**Figure 8.** The sequence leading to a central flash. This is the same as Figure 7, but for a star that goes just behind the planet center (cross). In steps (a)–(c), the primary image is first compressed parallel to the limb, and then stretched parallel to it due to, as illustrated by the dashed lines. As the star aligns with the planet center, the primary and secondary images continue to stretch, until they connect (step (e)) when the stellar limb intersects the planet center (i.e. the cross). At this point, the two images merge into one and form a luminous “Einstein–Chwolson ring” around the body, as illustrated in step (f).

where  $\phi_c$  is the stellar flux at the shadow center *without* the focusing term  $f$  in Eq. (32). Thus, the total area of the ring is  $(2\pi r_{cf}) w_{EC}$ , where  $r_{cf}$  is the radius of the flash layer. As the surface area of the star projected at the planet is  $\pi r_\star^2$ , the maximum height of the flash at shadow center is, normalized to the unocculted stellar flux and from Clausius theorem,

$$\phi_{cf} = \frac{(2\pi r_{cf}) w_{EC}}{\pi r_\star^2} = 4 \left( \frac{r_{cf}}{r_\star} \right) \phi_c, \quad (34)$$

where the second equation stems from Eq. (33). For order of magnitude considerations, we can use  $\phi_c \sim H/r_{cf}$  (Eq. (30)), so that

$$\phi_{cf} \sim 4 \left( \frac{H}{r_\star} \right). \quad (35)$$

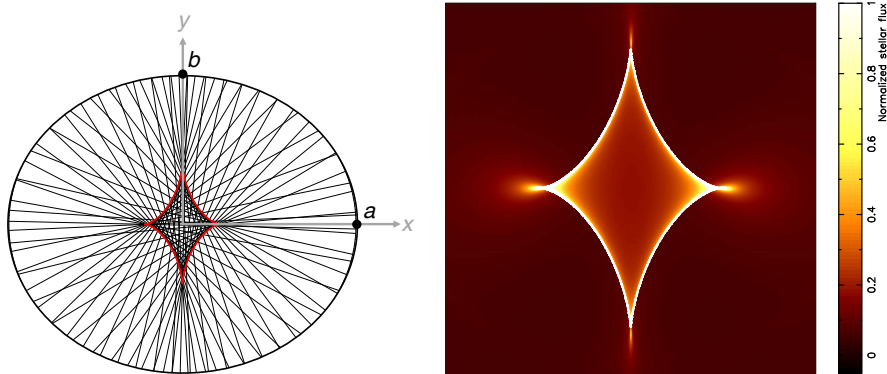
The height of the flash decreases as  $r_\star$  increases because the flash gets more and more convolved by the stellar disk. Typical values of  $H$  are  $\sim 20$ – $50$  km depending on the planet, while  $r_\star$  is typically of the order of one kilometer. Thus,  $\phi_{cf}$  may reach values as large as one hundred or more at the very center of the shadow of a spherical and transparent atmosphere. This is indeed the case for Pluto and Triton’s atmospheres, as seen later in this section.

### 6.3. Central flashes: the non spherical case

If the atmosphere is not spherical, the equation (32) is still valid, but the factor  $|z|$  must be understood as the distance of the observer to the center of curvature of the flash layer.



A simple case is when the flash layer assumes a spheroid shape, i.e. an ellipsoid with equatorial and polar radii  $a$  and  $b$ , respectively (Figure 9). due to the flattening of the solid planet itself (as it is the case for Mars [12]), or may be maintained by zonal winds, i.e. an atmospheric flow parallel to the equator. These winds create a centrifugal acceleration in a reference frame rotating with the planet. It results in a flattening of the atmosphere under the combined effect of gravity. Elliptical shapes have been used to describe central flashes observed during occultations by Mars [12] or Neptune [27].



**Figure 9.** *Left:* a sketch showing the stellar ray deflected perpendicular to the limb of an oblate (here elliptical) atmosphere. The rays converge towards the centers of curvature (or evolute) of each point of the limb. Thus the stellar rays are everywhere tangent to the evolute. This creates a caustic (in red) where the observer detects discontinuous variations of flux. *Right:* a close-in view of the left panel, showing the intensity map of the flash near the shadow center. Note the abrupt variation of flux along the caustic.

Each stellar ray is then deflected perpendicular to the limb of the planet, and converge towards the centers of curvature of the limb (called the evolute) to which the rays are tangent. This creates a caustic where the stellar flux suffers a sudden increase. In the example of Figure 9, the flash layer appears with an elliptical shape whose equation is

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

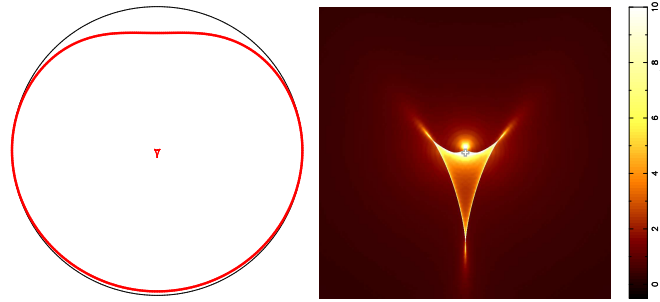
The evolute of the ellipse has then the following equation (see e.g. [28, see p. 319]),

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3},$$

which is shown in red in Figure 9.

This said, there is no reason why the simple elliptical shape applies in all circumstances. For instance, at its solstice, Titan has weak zonal wind regime in its summer hemisphere (which is then essentially spherical), and a strong jet in the winter hemisphere around the latitude 60 degrees [23, 24]. The resulting shape of the atmosphere is delineated in red in the left panel of Figure 10, with an expansion factor of twenty applied for a better viewing. The resulting intensity map (right panel) is then quite different from the elliptical case shown in Figure 9.

An observer who is far away from the shadow center receives the flux from the two classical stellar images (primary and secondary) moving in opposite directions (the blue arrows in panel (a) of Figure 11). The crossing of the caustic causes the sudden appearance of two bright stellar images that moves in opposite directions (red arrows in panel (b)), so that four images are



**Figure 10.** *Left:* Titan’s central flash layer (as observed in November 2003) is delineated in black. It has a non-circular shape (red line) that is made more visible by expanding by a factor of twenty its departure from circularity. While Titan’s southern hemisphere is very close to spherical, its northern hemisphere is flattened by a strong zonal wind of about  $200 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  near latitude  $60 \text{ deg}$  north. The limb evolute is plotted in red near the shadow center. *Right:* A close-in view of the central flash, with Titan’s center marked by a gray cross.

now seen. As the observer proceeds towards the other side of the caustic, the two top-most images approaches each other (blue and red arrows in panel (c)). They coalesce into a bright image at the crossing of the caustic, before disappearing suddenly. As the observer recedes away from the caustic, only the two classical primary and secondary images remain (panel (d)). The right panel of Figure 11) illustrates how the positions of the four images can be determined at any moment from the shape of the caustic in the case (b).

#### 6.4. *Einstein–Chwolson ring and Einstein cross*

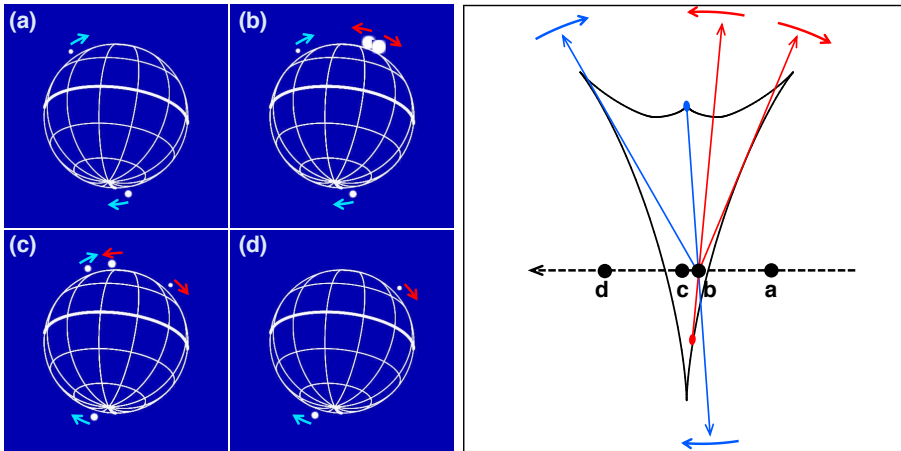
In the case of stellar occultations by bodies such as Titan, Pluto or Triton, the angular resolution of classical imaging is usually not sufficient to resolve the disk of these objects (that are at the level of one arcsec or less) and thus see the stellar images moving along the limb.

As mentioned earlier, gravitational lenses act on objects like galaxies that are much more extended angularly than the planetary bodies mentioned above. It is then possible to resolve the images and obtain a direct illustration of the Einstein–Chwolson ring. If the source is a point-like object (like a quasar), it is even possible to see the various images provided by the foreground lens, for instance the four images seen in panels (b) and (c) of Figure 11, often dubbed as the “Einstein cross”. An example of Einstein cross is provided in the left panel of Figure 12. The right panel displays an image where both the Einstein cross and the Einstein–Chwolson ring are seen.

#### 6.5. *Effect of atmospheric waves*

The left panel of Figure 13 displays the intensity map of the Titan’s flash already shown in Figure 10. It stems from a flash layer which has a smooth profile. Observations of various occultations by giant planets or Titan, however, reveal irregular structures of the flash. More precisely, rapid fluctuations of the stellar flux (or “spikes”) are superimposed to the general smooth increase of signal observe during the flash episode, see an example in Figure 14.

These fluctuations are caused by internal gravity waves that propagate in Titan’s upper atmosphere. They create small “corrugations” of the central flash layer that break down the smoothing varying centers of curvature of the limb into many centers of curvature. This results into a blurring of the central flash intensity map. In the case of Titan, these corrugations amount to some hundreds meters and cause the blurring illustrated in Figure 13 [24].



**Figure 11.** *Left:* the motion of the stellar images during an occultation by Titan, observed from Gifberg (Republic of South Africa) on 14 November 2008 [24]. These stellar images are *reconstructed* from the observations of the flash. They could not be seen individually in the data, as Titan was too small (about one arcsec) to be resolved by the instruments used during this campaign. As long as the observer is outside the region delimited by the caustic (see right panel), only the two classical primary and secondary stellar images are detected. When the observer is inside this region, four images contribute to the total flux. They move rapidly along the limb, eventually leading to the coalescence and disappearance of two of them as the observer leaves the caustic domain. *Right:* A close in view of the shadow center. It shows the position of the observer relative to the caustic, at each steps (a), (b), (c) and (d) illustrated at left. The straight arrows point to the stellar images seen by the observer at step (b). Those straight lines are the four solutions that pass through the point b, while being tangent to the caustic.

## 6.6. Opacity

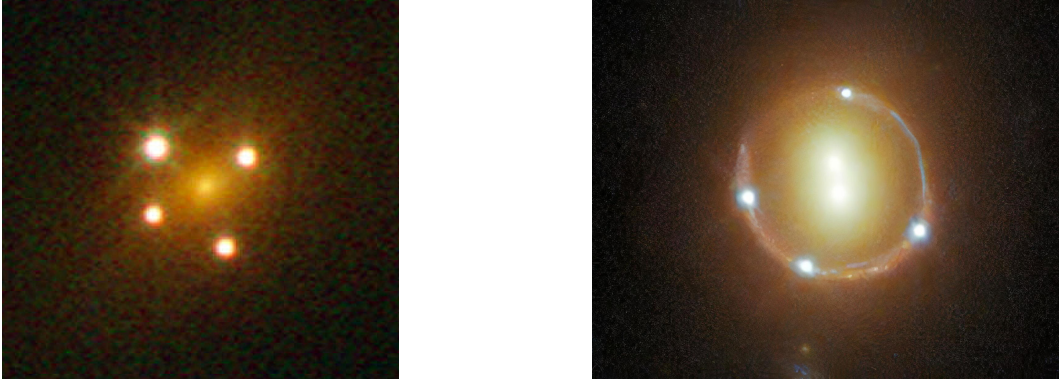
In Eq. (32), we mentioned the existence of the factor  $\exp(-\tau)$  which stems from the possible presence of an absorbing material in the atmosphere. In fact, depending on the body, this term may become dominant compared to the effect of refraction.

An example of haze absorption is given in the upper panel of Figure 14. A clear difference between the two flashes is observed, due to the differential extinction between the I (visible) and the K (near infrared) bands<sup>7</sup>. More precisely, the chromatic dependence of  $\tau$  vs. wavelength is such that the atmosphere is essentially transparent in the infrared, while being quite absorbant in the visible.

Since the flash strongly increases the flux when the star is deeply immersed in the atmosphere, it is a useful tool to probe haze properties, and in particular its chromatic dependence. As the zero stellar flux is usually ill-defined (due to the contribution of the occulting body), it is difficult to assess the haze optical depth outside the flash region, where the residual stellar flux is small.

The other example of Figure 14 is a flash observed during an occultation by Triton. Contrarily to Titan, Triton's flash is completely explained (to within the noise in the data) by a spherical and transparent atmosphere: in that sense, Triton's atmosphere appears as a "perfect lens".

<sup>7</sup>A difference also stems from the chromatic dependence of the refraction index, but this effect is too small to be relevant here.



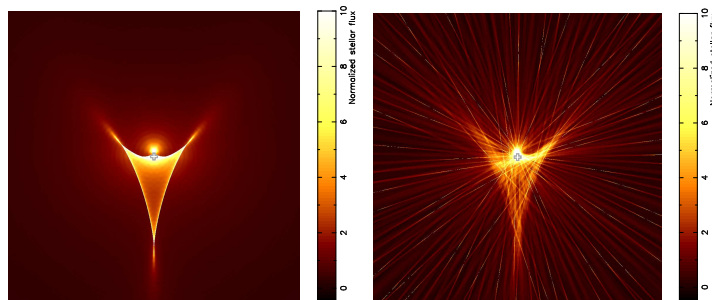
**Figure 12.** *Left:* An example of a quadruple image (or Einstein cross) caused by a gravitational lensing of a remote quasar by the foreground galaxy UZC J224030.2 032131, the diffuse object seen inside the four quasar images. This is similar to the quadruple images seen in the images (b) and (c) Figure 11 (left panel). *Right:* the same where the lens is now a double galaxy (the diffuse objects at the center). Again an Einstein cross is visible, with four images of the quasar 2M1310-1714, but also an Einstein–Chwolson ring, which is the image by the lens of the extended galaxy which hosts the quasar. Credit: ESA/Hubble and NASA.

## 7. Transits

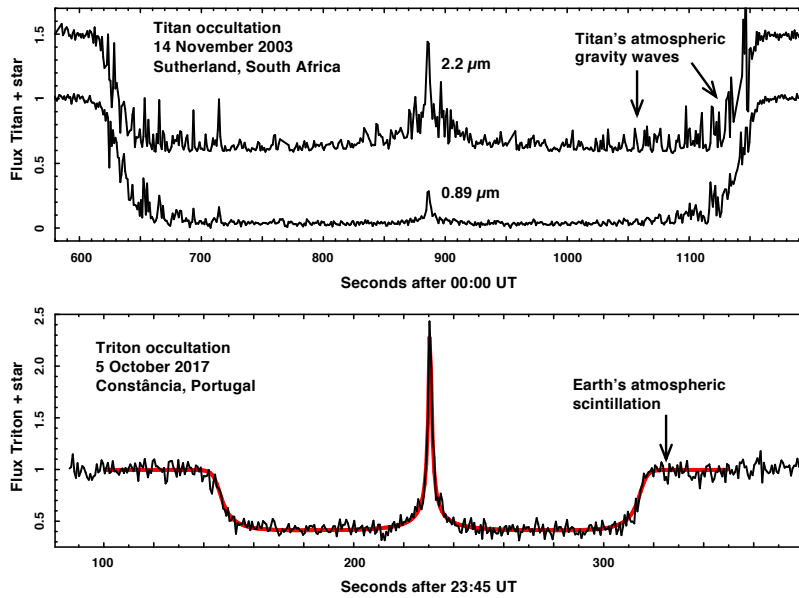
### 7.1. Principle

We now turn to the case where the occulted background star is angularly much larger than the foreground occulting body. As mentioned in the Introduction, this situation is described as a *transit* (instead of an occultation). This occurs for instance when an exo-planet passes in front of its star, or when the planet Venus is seen transiting in front of the solar disk.

As an example, the geometry of a Venus transit is sketched in Figure 15, where  $D$  and  $D'$  are the distance of Venus to the Earth and to the Sun, respectively. Without refraction by Venus' atmosphere, an observer would receive a ray from a point  $S$  on the Sun that intersects the plane perpendicular to the line of sight passing through Venus' center at ordinate  $y_i$ . Due to refraction,

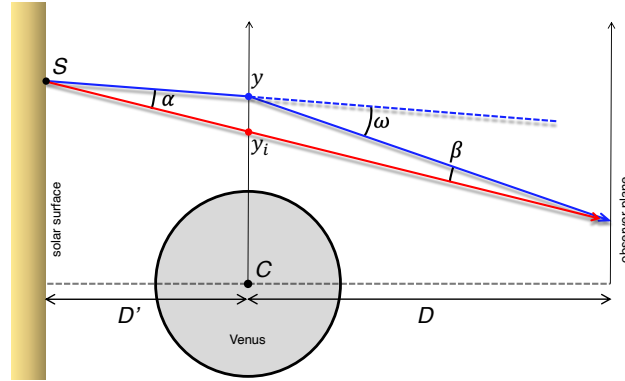


**Figure 13.** *Left:* The same as the right panel of Figure 10. *Right:* The effect of small vertical corrugations of the order of 100 m have been added to the general smooth shape of the flash layer (left panel of Figure 10). In the case of Titan, these corrugations are caused by fluctuations induced by atmospheric gravity waves. They cause many streaks in the flash region that result in flux fluctuations, or spikes, in the light curves (Figure 14).



**Figure 14.** *Upper panel:* the occultation by Titan’s atmosphere observed on 14 November 2003 at the Sutherland in South Africa. The lower curve shows the event as observed in the visible ( $0.89\ \mu\text{m}$ ), while the upper curve shows the same event in the near infrared ( $2.2\ \mu\text{m}$ , shifted vertically by  $+0.5$  for a better viewing). Conspicuous flux variations (or “spikes”) are seen everywhere during the occultation, including in the central flash. The spikes are caused by gravity waves that propagate in Titan’s atmosphere, creating in particular the streaks in the flash region (Figure 13). Note that the flash observed in the visible light is much weaker than its counterpart observed in the infrared. This difference stems from absorption by hazes that are more opaque at  $0.89\ \mu\text{m}$  than at  $2.2\ \mu\text{m}$  [24]. *Lower panel:* the occultation by Triton observed on 5 October 2017 at Constância in Portugal. This station passed at a mere 6-km distance to Triton’s shadow center. The red line is a fit to the data assuming a spherical and transparent atmosphere. The height of the flash represents more than three times the flux of the unocculted star, a current record for this kind of observations. The flux fluctuations seen in the light curve are caused by the Earth atmosphere, not by Triton’s atmospheric waves that are much weaker than for Titan. This observation shows that, contrarily to Titan, Triton’s atmosphere is essentially spherical and transparent [25].

however, the ray is deflected and appears to come from another ordinate  $y$ . In other words, the point  $S$  that should be seen at  $y_i$  has an image that is seen at  $y$ .



**Figure 15.** The geometry of a transit phenomenon, with the definitions of the angles and other quantities used in the text. The case examined here is the transit of Venus in front of the Sun.

Taking by convention  $\omega$  negative (as in Figure 1) and  $\alpha$  and  $\beta$  positive, we have  $\omega = -(\alpha + \beta)$ . In the limit of small angles, we have  $\alpha = (y - y_i)/D'$  and  $\beta = (y - y_i)/D$ , thus

$$\omega = -\frac{D + D'}{DD'} (y - y_i).$$

On the other hand, we can express  $\omega$  as a function of  $y$  (Eq. (25)), so that the equation above can be re-written

$$y = y_i + gH \exp\left[-\left(\frac{y - r_{1/2}}{H}\right)\right], \tag{36}$$

which defines  $r_{1/2}$  and where  $g$  is the dimensionless geometric factor<sup>8</sup>

$$g = \frac{D'}{D + D'}.$$

Eq. (36) provides implicitly  $y$  as a function of  $y_i$ , that is, the position of the image of  $S$  as seen in Venus' atmosphere by the observer. This equation can be solved numerically. Alternatively, we can introduce the quantity  $\phi$  used before (but now as in auxiliary variable) by defining it as  $(1/\phi) - 1 = \exp[-(y - r_{1/2})/H]$  in analogy to (Eq. (26)). From  $y - y_i = y - r_{1/2} + r_{1/2} - y_i$ , we finally obtain

$$g\left(\frac{1}{\phi} - 1\right) + \ln\left(\frac{1}{\phi} - 1\right) = -\frac{y_i - r_{1/2}}{H}. \tag{37}$$

This is similar to the Baum and Code equation (27), except from the appearance of the geometrical factor  $g$  and from the fact that the term  $(1/\phi - 2)$  has been replaced by  $(1/\phi - 1)$ . We will refer to this equation as the “modified Baum and Code equation”. For a given  $y_i$ , the inversion of the modified Baum and Code equation provides  $\phi$ , which in turn yields  $y$  through

$$y = y_i + gH\left(\frac{1}{\phi} - 1\right). \tag{38}$$

In this equation, we can choose without loss of generality  $y > 0$ . In this case,  $y_i > 0$  (resp.  $y_i < 0$ ) corresponds to the primary (resp. secondary) image of  $S$ . More generally, this equation can be used to relate the vector position  $\vec{r}_i$  of  $S$  projected at Venus to the vector position  $\vec{r}$  of its image (Figure 16). Denoting  $r_i = \|\vec{r}_i\|$ , we can re-write Eq. (38) in a vectorial form. We can encapsulate

<sup>8</sup> Not to be confounded with the acceleration of gravity  $g(r)$  of the planet, see e.g. Eq. (12).

in the same equations the cases of the primary images and secondary images. This is done by defining a parameter  $\epsilon = +1$  (resp.  $\epsilon = -1$ ) for primary (resp. secondary) images. Then we pose

$$\Delta r = \epsilon r_i - r_{1/2} \quad \text{and} \quad u = \frac{1}{\phi} - 1, \quad (39)$$

so that the equations relating  $\vec{r}$  and  $\vec{r}_i$  are

$$\begin{cases} gu + \ln(u) = -\frac{\Delta r}{H} \\ \vec{r} = \left(1 + \frac{gHu}{\epsilon r_i}\right) \vec{r}_i, \end{cases} \quad (40)$$

In numerical schemes, one can get rid of the factor  $\epsilon$  in Eqs. (39) and (40) by adopting  $r_i > 0$  for primary images and  $r_i < 0$  for secondary images. This trick must be used with care, however, as  $r_i$  classically denotes the modulus of  $\vec{r}_i$  and thus, is in principle always positive.

For a given  $r_i$ , the first equation of the system (40) (i.e. the modified Baum and Code equation) provides  $u$ . Once this is done, the second equation provides the vector position  $\vec{r}$  of the image of the point S located at  $\vec{r}_i$ . For  $D' \rightarrow +\infty$ , we have  $g = 1$ , and the second equation of the system above reduces to Eq. (28), as expected.

It is instructive to consider the asymptotic behavior of  $\vec{r}$  for  $\Delta r/H$  approaching  $-\infty$ , corresponding to  $\phi$  approaching zero (or equivalently,  $u$  approaching  $+\infty$ ), i.e. images of S that are deeply immersed into the atmosphere, referred to as the “deep image regime” hereafter.

The modified Baum and Code equation provides a first estimation  $u \sim -\Delta r/(gH)$  by neglecting  $\ln(u)$  with respect to  $u$ . Introducing this expression of  $u$  back into the modified Baum and Code equation, we obtain  $gHu \sim -\Delta r - H \ln(-\Delta r/(gH))$ . Finally, using this approximation of  $gHu$  in the second equation of the system (40), we see that in the deep image regime, the image is located at distance

$$r \sim r_{1/2} - H \ln\left(\frac{-\Delta r}{gH}\right) \quad (41)$$

from the planet center.

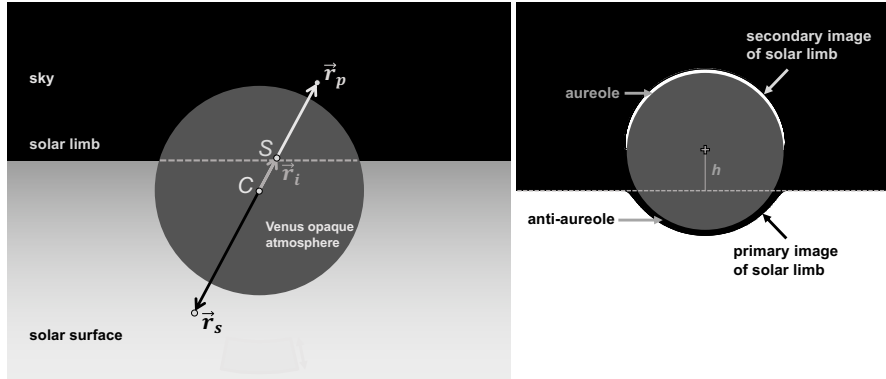
Because of the weak logarithmic dependence, even for large negative values of  $\Delta r$ , the deep image of S probes atmospheric layers that are only a few scale heights below the half light radius  $r_{1/2}$ . At this point, other effects can dominate the aspect of the image. For instance, if the atmosphere is tenuous enough, the image may hit at some point the surface of the planet and merely disappears. In some other cases, the deep atmosphere may be hazy or cloudy, and the image may enter opaque regions, causing also its disappearance. This point is now discussed further in the particular case of Venus transits.

## 7.2. The Lomonossov effect

The discovery of Venus’ atmosphere is traditionally attributed to Mikhail Lomonossov, who observed the Venus transit of 6 June 1761 from St Petersburg Observatory [30]. The credit of this original discovery by Lomonossov is debated, though [29, 31–33]. However, Lomonossov’s basic interpretation was correct, that is, the luminous ring appearing along Venus’ limb as the planet emerges from the apparent solar disk is caused by atmospheric refraction. A complementary and extensive discussion of the Lomonossov arc and Venus atmosphere is also presented in this special issue [34].

This effect should not be confused with the extension of Venus’ crescent near inferior conjunction, caused by the quasi forward-scattering of light by hazes, another evidence that Venus does possess an atmosphere. This point is discussed in the next subsection, and we will see that forward-scattering plays a negligible role during Venus transits, when compared to refraction.





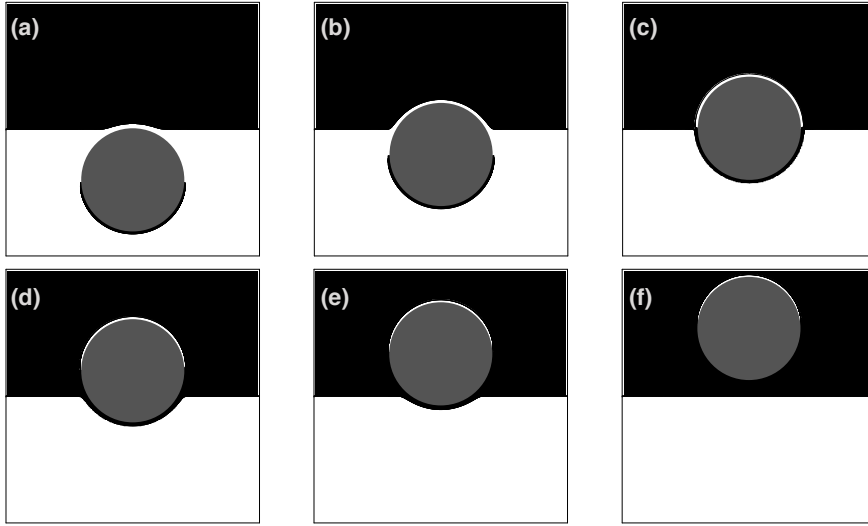
**Figure 16.** *Left:* the point  $S$  of the solar limb has two images after being refracted by the planet's atmosphere, assumed here to be spherical. The primary (resp. secondary) image is located at  $\vec{r}_p$  (resp.  $\vec{r}_s$ ). *Right:* the case shown here is the transit of Venus in front of the Sun, using here a radius of 6130 km for the opaque atmosphere [29]. The quantity  $h$  denotes the position of Venus' center (cross) relative the solar limb. By convention,  $h$  is positive (resp. negative) if Venus' center is above (resp. below) the solar limb. Two edgings appears along Venus' limb, an upper bright one (the "aureole") and a lower dark one (the "anti-aureole"). They are obtained by using Eq. (40) to calculate the primary and secondary images of the solar limb. If Venus' center were below the projected solar limb (as it is in the left panel), then the primary and secondary nature of the images would be swapped. Assuming a transparent atmosphere, the conservation of radiance implies that the aureole has the same brightness as the Sun. Likewise, the anti-aureole has the same brightness as the background sky, in black color here. For a better viewing of the aureole and the anti-aureole, the scale height  $H$  of Venus' atmosphere used here has been largely exaggerated (100 km) compared to the actual value of about 4 km [29]. Also, Venus' disk is plotted here in gray for better visibility, but it is by no way luminous in actual observations. It has actually the same brightness as the background sky.

The Lomonossov effect is visualized by calculating the primary and secondary images of the point  $S$  as this point is moved along the solar limb (Figure 16). The time series of Figure 17 shows in more details the evolution of the two "edgings" resulting from the Lomonossov effect. The bright edging (called the "aureole" for short hereafter) is always outside the solar limb, while the dark edging (called the "anti-aureole") is always inside the solar limb. In practice, the anti-aureole goes unnoticed in the case of Venus, as it is confounded with the planet dark side. However, it must be accounted for when simulating transit light curves involving exo-planets. For instance, the panel (c) of Figure 17 shows that when the planet center projects itself on the solar limb, the contributions of the aureole and the anti-aureole cancel out. Then, the flux taken away by the planet just corresponds to the flux blocked by its own disk.

The visibilities of the aureole and anti-aureole depend on the value of  $r_{opa}$ , the radius of the opaque atmosphere. The image of a given point  $S$  on the solar limb is located at a distance  $r$  of Venus' center which is given by Eq. (41), i.e.  $r \sim r_{1/2} - H \ln(-\Delta r / (gH))$ . This image is effectively observed if  $r > r_{opa}$ . Using the definition of  $\Delta r$  (Eq. (39)), the condition of visibility is

$$\epsilon r_i > r_{1/2} - gH \exp\left(\frac{r_{1/2} - r_{opa}}{H}\right). \quad (42)$$





**Figure 17.** A sequence of images showing the evolution of the aureole and anti-aureole as Venus emerges from the apparent solar disk. In the various images, the projected Venus' center is respectively located at 6000 and 3000 km below the solar limb (panels (a) and (b)), and at 100, 3000, 5000 and 8000 km above the solar limb (panels (c), (d), (e) and (f)). Note that the aureole and the anti-aureole have the same width when Venus' center is aligned with the solar limb (panel (c)). When Venus is far down in front of the Sun, the anti-aureole disappears behind the opaque Venus' atmosphere. The same occurs with the aureole when Venus is far up in front of the background sky.

We can consider two cases, depending on the sign of  $h$ , the height of Venus' center above the solar limb, see Figure 18. For  $h < 0$  (left panel of Figure 18), the aureole is the primary image of the limb, so that  $\epsilon = +1$ , and the condition of visibility of the aureole is

$$r_i > r_{cut} = r_{1/2} - gH \exp\left(\frac{r_{1/2} - r_{opa}}{H}\right), \quad (43)$$

where we define the cutoff value  $r_{cut}$ .

Geometrical considerations based on the examination of Figure 18 (left panel) show that the aureole is visible if its angle with the vertical is larger than the cutoff angle

$$\theta_{cut} = \arccos\left(\frac{|h|}{r_{cut}}\right),$$

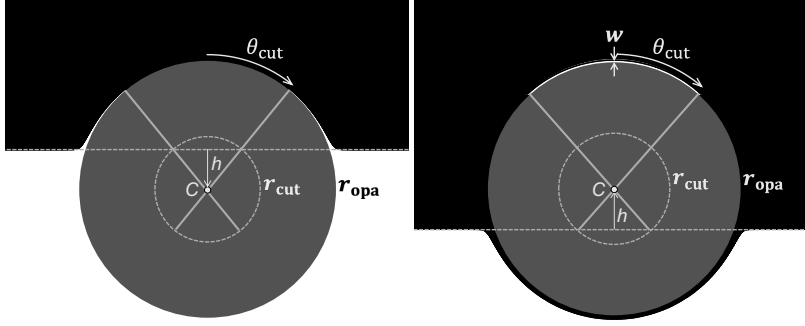
As  $r_{opa}$  decreases,  $r_{cut}$  decreases as well, until it reaches the value of  $|h|$ . At this point, and for all values of  $r_{cut}$  between 0 and  $h$ , we have  $\theta_{cut} = 0$  and the aureole is uninterrupted along the upper limb of Venus, as illustrated for instance in panel (b) of Figure 17.

For  $r_{cut} = 0$ , the aureole is complete when  $h = 0$  and extends over  $\pi$  radians, a situation illustrated in panel (c) of Figure 17. A new regime sets in for  $h > 0$ , as the aureole now corresponds to secondary images of the solar limb ( $\epsilon = -1$ ), so that Eq. (42) reads

$$r_i < r_{cut} = -r_{1/2} + gH \exp\left(\frac{r_{1/2} - r_{opa}}{H}\right). \quad (44)$$

This situation is depicted in the right panel of Figure 18. The aureole now extends over an angle  $2\theta_{cut}$ , where again we have  $\theta_{cut} = \arccos(|h|/r_{cut})$ .

As  $r_{opa}$  decreases,  $r_{cut}$  increases until it is larger than the planet diameter. Then, the aureole remains visible even if the planet disk is completely detached from the solar disk. This is indeed



**Figure 18.** *Left:* condition of visibility for the aureole for  $h < 0$ , i.e. when Venus' center is below the solar limb (Eq. (43)). The aureole disappears behind the opaque atmosphere if its angle with the vertical is less than  $\theta_{cut}$ . *Right:* the reversed situation for  $h > 0$ . Now the aureole is visible when its angle with the vertical is less than  $\theta_{cut}$ . In both cases,  $\theta_{cut} = \arccos(|h|/r_{cut})$ , see text for details.

the case for Venus. During the 8 June 2004 transit, estimates of the various quantities entering the expression of  $r_{cut}$  were derived [29]:  $H \sim 4$  km,  $r_{1/2} \sim 6170$  km and  $r_{opa} \sim 6130$  km. Using the geometrical factor  $g = 0.716$  relevant to that event, we obtain  $r_{cut} \sim 57,000$  km. This means that the aureole could be observed even in Venus' disk is completely detached from the solar disk, a situation illustrated in panel (f) of Figure 17.

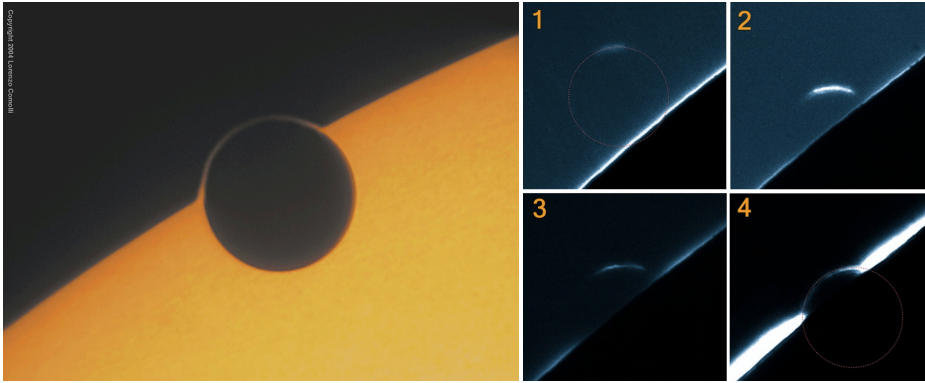
Beyond the distance of 57,000 km, the aureole disappears behind Venus' opaque atmosphere. As Venus is at  $\sim 0.3$  au from Earth under these circumstances, this corresponds to an angular separation of a mere 4 arcmin between Venus and the solar limb.

The equation  $\theta_{cut} = \arccos(|h|/r_{cut})$  shows that for  $r_{cut}$  very large,  $\theta_{cut}$  approaches  $\pi/2$ , but it cannot go beyond this value. In other words, the aureole can be observed only along the Venus limb opposite to the Sun, and cannot exceed an angular extension of  $\pi$  radians. This is expected from the fact that solar rays passing near the lower limb of Venus (panel (f) of Figure 17) cannot be refracted back to Earth, as the curvature of the ray is always pointing to the direction of increasing refractive index (Eq. (2)).

Another aspect, however, limits the observation of the aureole. Even though the brightness of the luminous arc is very high (it is actually the brightness of the solar surface), it becomes very narrow for large values of  $r_i$ . The maximum width  $w$  of the aureole is reached at the top of Venus' limb (Figure 18), where  $r_i = h$ . Thus, the maximum width reached by the aureole is  $w = r - r_{opa}$ , where  $r$  is given by Eq. (41), with  $\Delta r = -h - r_{1/2}$ , so that

$$w \sim r_{1/2} - r_{opa} - H \ln \left( \frac{h + r_{1/2}}{gH} \right), \quad (45)$$

where we recall that here  $h > 0$ . As an example, we take  $h = r_{opa}$ , corresponding to the situation where Venus' disk is tangent to the solar limb (called the first and fourth contacts in the terminology of Venus' transits). Adopting the numerical values mentioned before, we obtain  $w \sim 6.5$  km. This width cannot be resolved using any imaging technique from Earth. Under usual seeing conditions, the Point Spread Function (PSF) due to our atmosphere of typically one arcsec. This corresponds to about 210 km projected at the planet, which was at 0.288 au from Earth on 8 June 2004. In the example taken above, the PSF dilutes the apparent brightness of the aureole by a factor of  $210/6.5 \sim 30$ . As Venus' disk recesses away from the solar disk, the width  $w$  of the aureole de-



**Figure 19.** *Left:* The Lomonossov aureole observed from Tradate (Italy) during the Venus transit of 8 June 2004, see [www.astrosurf.com/comolli/cong5e.htm](http://www.astrosurf.com/comolli/cong5e.htm) (copyright Lorenzo Comolli). It can be compared to the synthetic time series displayed in Figure 17. *Right:* The passage of Venus in front of the solar limb during the transit of 5/6 June 2012, observed from Lowell Observatory in Arizona, USA (copyright Paolo Tanga). One can note the irregular aspect of the aureole, possibly due to the varying altitude of the cloud deck in Venus' atmosphere. See text for discussion.

creases and the dilution factor increases. At some point, the aureole, although intrinsically very bright, becomes too narrow, and thus too faint, to be detected.

In the particular case of Venus' transits observed from Earth, the particular values of  $r_{1/2}$ ,  $r_{opa}$  and  $H$  are such that  $w$  in Eq. (45) is (coincidentally) quite small. Thus, a small variation of  $r_{opa}$  induces a large relative variation of  $w$ . This creates a patchy aspect of the aureole (Figure 19) and is a way to map the altitude of the cloud deck along Venus' limb.

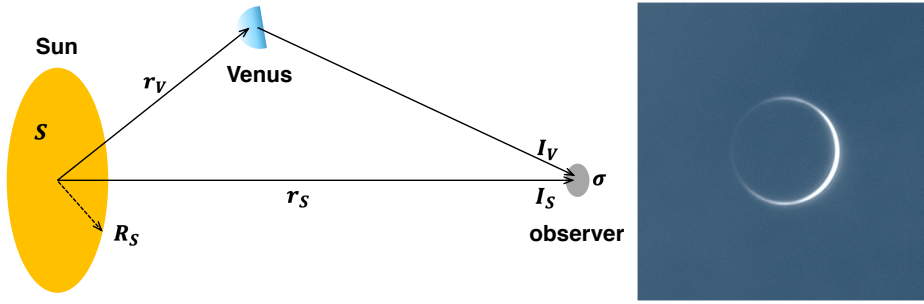
The same kind of behaviors occur symmetrically for the anti-aureole. In particular, if Venus' disk is deep inside the solar disk, it disappears behind the opaque layer. Then, it is very difficult by direct imaging to know that the planet has an atmosphere, since the brightness of the Sun, even when observed through the atmosphere, remains unchanged. In this case, the only way to detect the atmosphere is to observe the passage of Venus in front of a sunspot. The image of the spot will be distorted in the same as a stellar disk is distorted when observed through the atmosphere (Figure 7). This would be an alternative to study Venus' atmosphere. However, such an event has a low probability to occur. Note that another way to detect Venus' atmosphere would be to perform spectroscopic transit observations to detect the gaseous  $\text{CO}_2$ .

As a final remark, we note that the general formalism developed here can be applied to exoplanets transiting in front of their stars. Some detailed calculations and applications to exoplanetary atmospheres are given in [35].

### 7.3. Refraction vs. forward-scattering

Near inferior conjunction, Venus' crescent extends beyond 180 degrees, the value expected for an opaque, airless planet. This was first reported by Johann Schröter in 1790, three decades after Lomonossov's observations [36], and then by various observers during the nineteenth century, see the review by Henry Norris Russell in 1899 [37]<sup>9</sup> and the example displayed in Figure 20.

<sup>9</sup>This was the first paper published by Russell, at the age of twenty-two, well before he became famous for his work on stellar classification, which led to the Hertzsprung–Russell diagram.



**Figure 20.** *Left:* The geometry of light scattered by Venus back to Earth. See text for details. *Right:* The extension of Venus’ crescent caused by haze forward-scattering. This picture was taken on 2 June 2020, as Venus was at about two degrees of the Sun within one degree of the Sun during inferior conjunction (Copyright Thierry Legault).

Russell considered refraction and haze scattering as a possible causes for the extension of Venus’ crescent. He then inferred (rightly) that such extension was likely caused by haze scattering rather than refraction. This is in line with the results obtained in the previous subsection: as soon as Venus projects itself at more than a few arcmin from the solar limb, the “refractive aureole” disappears due to the presence of an opaque layers in the atmosphere, leaving only a “haze aureole”.

However, during a transit the aureole is largely dominated by refraction, not by haze scattering. Let us consider for this the solar disk with radius  $R_S$  and apparent surface area  $S = \pi R_S^2$ , emitting rays with radiances (or intensities)  $I_S$  towards an observer at distance  $r_S$ , who receives the solar flux over a surface area  $\sigma$  (Figure 20). Ignoring factors of order unity that account for the angles of emission or reception, the luminous power received from the Sun at  $\sigma$  is  $\Phi_S = I_S S \sigma / r_S^2$ , so the solar flux  $f_S$  (also called the solar constant) is  $f_S = \Phi_S / \sigma = I_S S / r_S^2$ . Let us denote  $f_V$  the solar constant at Venus, at distance  $r_V$  from the Sun. Then, Venus’ lit hemisphere re-emits towards  $\sigma$  rays with radiance  $I_V = p \Phi(\alpha) f_V / \pi$ . Here,  $p$  is the geometric albedo and  $\Phi(\alpha)$  is the phase function of the atmosphere, where  $\alpha$  is the angle Sun-Venus-observer. Consequently, the ratio  $I_V / I_S$  is

$$\frac{I_V}{I_S} = p \Phi(\alpha) \left( \frac{R_S}{r_V} \right)^2. \quad (46)$$

As  $R_S \sim 700,000$  km and  $r_V \sim 0.7$  au  $\sim 10^8$  km, and because  $p \Phi(\alpha)$  is of order unity, we obtain  $I_V / I_S < 10^{-2} \ll 1$ . As mentioned before,  $I_S$  is also the brightness of the refractive aureole, while  $I_V$  is the brightness of the lit side of Venus, as seen from the surface element  $\sigma$ . The radiance (or brightness) on the rays forward-scattered by hazes to Earth is itself much less than  $I_V$ , so that the brightness of the haze aureole is several orders of magnitude fainter than the brightness of the refractive aureole. This makes impossible the detection of the haze aureole, for instance along the limb that is nearest to the Sun when Venus’ disk is completely outside the solar disk (panel (f) of Figure 17).

More discussion on the respective roles of refraction and scattering in the case of exoplanet transits is provided in [35]. In particular, we note that in exoplanetary cases, the solar radius  $R_S$  and Venus heliocentric distance  $r_V$  in Eq. (46) are replaced by the stellar radius  $R_\star$  and the planet distance  $r_p$ , respectively. As  $R_\star$  and  $r_p$  may be comparable, the contribution of forward-scattering relative to refraction may be not overwhelmingly small, and thus should be considered when generating synthetic transit light curves.

## 8. Conclusion

The various aspects of refraction during stellar occultations and transits described in this chapter illustrate the long-standing interest of the astronomical community in refraction phenomena. Transits permitted to discover Venus' atmosphere in the eighteenth century, and occultations revealed Pluto's atmosphere in the years 1980's, thus paving the way to the NASA New Horizons flyby of the dwarf planet in 2015.

Meanwhile, occultations and transits still continue to raise great interest. They are used to monitor long-term seasonal evolutions of the atmospheres of Titan, Triton and Pluto, among others. They also probe subtle dynamical effects such as gravity waves that are just impossible to track using any other Earth-based methods.

Occultations and transits have a bright future in store for us. The discovery of tenuous atmospheres around remote Trans-Neptunian Objects will only be possible by observing stellar occultations, to a sensitivity as good as a few nanobars. Also, time series such the one displayed in Figure 17 can be applied to the study of atmospheres of exoplanets. By comparing transit photometric light-curves with models, one can constrain key parameters such as the scale height, cloud altitude and density profiles of the atmospheres of these remote worlds.

## Conflicts of interest

The author has no conflict of interest to declare.

## Acknowledgements

I thank Luc Dettwiler and an anonymous reviewer for corrections and constructive comments.

## References

- [1] R. P. Feynman, *QED. The strange theory of light and matter*, Princeton University Press, Princeton, 1985.
- [2] D. S. Goodman, "General Principles of Geometric Optics", in *Handbook of Optics, volume I. Fundamentals, Techniques, and Design* (M. Bass *et al.*, eds.), McGraw-Hill, New York, 2nd ed., 1995, p. 1.3-1.109.
- [3] A. Pannekoek, "Über die Erscheinungen, welche bei einer Sternbedeckung durch einen Planeten auftreten", *Astron. Nachr.* **164** (1903), no. 1, p. 5-10.
- [4] Ch. Fabry, "Le rôle des Atmosphères dans les Occultations par les Planètes", *Journal des Observateurs* **12** (1929), no. 1, p. 1-10.
- [5] W. A. Baum, A. D. Code, "A photometric observation of the occultation of  $\sigma$  ARIETIS by Jupiter", *Astron. J.* **58** (1953), no. 1208, p. 108-112.
- [6] G. de Vaucouleurs, D. H. Menzel, "Results of the Occultation of Regulus by Venus, July 7, 1959", *Nature* **188** (1960), no. 4744, p. 28-33.
- [7] J. Veverka, J. L. Elliot, C. Sagan, L. H. Wasserman, "Jupiter Occultation of Beta Scorpii: Are the Flashes Time-symmetric?", *Nature* **240** (1972), no. 5380, p. 344-345.
- [8] L. Vapillon, M. Combes, J. Lecacheux, "The beta Scorpii occultation by Jupiter. II. The temperature and density profiles of the Jupiter upper atmosphere", *Astron. Astrophys.* **29** (1973), p. 135-149.
- [9] L. H. Wasserman, J. Veverka, "On the reduction of occultation light curves", *Icarus* **20** (1973), no. 3, p. 322-345.
- [10] G. Fjeldbo, A. J. Kliore, R. Von Eshleman, "The Neutral Atmosphere of Venus as Studied with the Mariner V Radio Occultation Experiments", *Astron. J.* **76** (1971), no. 2, p. 123-140.
- [11] R. Clausius, "Ueber die Concentration von Wärme- und Lichtstrahlen und die Grenzen ihrer Wirkung", *Annalen der Physik und Chemie* **197** (1864), no. 1, p. 1-44.
- [12] J. L. Elliot, R. G. French, E. Dunham, P. J. Gierasch, J. Veverka, C. Church, C. Sagan, "Occultation of epsilon Geminorum by Mars. II. The structure and extinction of the Martian upper atmosphere", *Astrophys. J.* **217** (1977), p. 661-679.
- [13] R. G. French, J. L. Elliot, B. Sicardy, P. Nicholson, K. Matthews, "The upper atmosphere of Uranus: A critical test of isotropic turbulence models", *Icarus* **51** (1982), no. 3, p. 491-508.

- [14] N. Brosch, “The 1985 stellar occultation by Pluto”, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **276** (1995), no. 2, p. 571-578.
- [15] W. B. Hubbard, D. M. Hunten, S. W. Dieters, K. M. Hill, R. D. Watson, “Occultation evidence for an atmosphere on Pluto”, *Nature* **336** (1988), p. 452-454.
- [16] J. L. Elliot, E. W. Dunham, A. S. Bosh, S. M. Slivan, L. A. Young, L. H. Wasserman, R. L. Millis, “Pluto’s atmosphere”, *Icarus* **77** (1989), no. 1, p. 148-170.
- [17] J. L. Elliot, A. Ates, B. A. Babcock, A. S. Bosh, M. W. Buie, K. B. Clancy, E. W. Dunham, S. S. Eikenberry *et al.*, “The recent expansion of Pluto’s atmosphere”, *Nature* **424** (2003), p. 165-168.
- [18] B. Sicardy, T. Widemann, E. Lellouch, C. Veillet, J.-C. Cuillandre, F. Colas, F. Roques, W. Beisker *et al.*, “Large changes in Pluto’s atmosphere as revealed by recent stellar occultations”, *Nature* **424** (2003), p. 168-170.
- [19] B. Sicardy, N. M. Ashok, A. Tej, G. Pawar, S. Deshmukh, A. Deshpande, S. Sharma, J. Desmars *et al.*, “Pluto’s Atmosphere in Plateau Phase Since 2015 from a Stellar Occultation at Devasthal”, *Astrophys. J., Lett.* **923** (2021), no. 2, article no. L31.
- [20] A. D. Toigo, P. J. Gierasch, B. Sicardy, E. Lellouch, “Thermal tides on Pluto”, *Icarus* **208** (2010), no. 1, p. 402-411.
- [21] R. G. French, A. D. Toigo, P. J. Gierasch, C. J. Hansen, L. A. Young, B. Sicardy, A. Dias-Oliveira, S. D. Guzewich, “Seasonal variations in Pluto’s atmospheric tides”, *Icarus* **246** (2015), p. 247-267.
- [22] F. Roques, B. Sicardy, R. G. French, W. B. Hubbard, A. Barucci, P. Bouchet, A. Brahic, J.-A. Gehrels *et al.*, “Neptune’s upper stratosphere, 1983-1990: ground-based stellar occultation observations III. Temperature profiles”, *Astron. Astrophys.* **288** (1994), p. 985-1011.
- [23] W. B. Hubbard, B. Sicardy, R. Miles, A. J. Hollis, R. W. Forrest, I. K. M. Nicolson, G. Appleby, W. Beisker *et al.*, “The occultation of 28 SGR by Titan”, *Astron. Astrophys.* **269** (1993), p. 541-563.
- [24] B. Sicardy, F. Colas, T. Widemann, A. Bellucci, W. Beisker, M. Kretlow, F. Ferri, S. Lacour *et al.*, “The two Titan stellar occultations of 14 November 2003”, *J. Geophys. Res. (Planets)* **111** (2006), no. E11, article no. E11S91.
- [25] J. Marques Oliveira, B. Sicardy, A. R. Gomes-Júnior, J. L. Ortiz, D. F. Strobel, T. Bertrand, F. Forget, E. Lellouch *et al.*, “Constraints on the structure and seasonal variations of Triton’s atmosphere from the 5 October 2017 stellar occultation and previous observations”, <https://arxiv.org/abs/2201.10450>, 2022.
- [26] A. Bellucci, B. Sicardy, P. Drossart, P. Rannou, P. D. Nicholson, M. Hedman, K. H. Baines, B. Burrati, “Titan solar occultation observed by Cassini/VIMS: Gas absorption and constraints on aerosol composition”, *Icarus* **201** (2009), no. 1, p. 198-216.
- [27] E. Lellouch, W. B. Hubbard, B. Sicardy, F. Vilas, P. Bouchet, “Occultation determination of Neptune’s oblateness and stratospheric methane mixing ratio”, *Nature* **324** (1986), no. 6094, p. 227-231.
- [28] W. H. Beyer, S. M. Selby, *Standard Mathematical Tables*, 24th ed., CRC Press, 1976.
- [29] P. Tanga, T. Widemann, B. Sicardy, J. M. Pasachoff, J. Arnaud, L. Comolli, A. Rondi, S. Rondi, P. Sütterlin, “Sunlight refraction in the mesosphere of Venus during the transit on June 8th, 2004”, *Icarus* **218** (2012), no. 1, p. 207-219.
- [30] M. Y. Marov, “Mikhail Lomonosov and the discovery of the atmosphere of Venus during the 1761 transit”, in *IAU Colloq. 196: Transits of Venus: New Views of the Solar System and Galaxy* (D. W. Kurtz, ed.), Cambridge University Press, 2005, p. 209-219.
- [31] F. Link, *Eclipse phenomena in astronomy*, Springer, New York, 1969.
- [32] J. M. Pasachoff, G. Schneider, T. Widemann, “High-resolution Satellite Imaging of the 2004 Transit of Venus and Asymmetries in the Cytherean Atmosphere”, *Astron. J.* **141** (2011), no. 4, article no. 112.
- [33] J. M. Pasachoff, W. Sheehan, “Lomonosov, the discovery of Venus’s atmosphere, and the eighteenth-century transits of Venus”, *Journal of Astronomical History and Heritage* **15** (2012), no. 1, p. 3-14.
- [34] S. Koutchmy, “The Lomonossov art: refraction and scattering in Venus atmosphere during solar transits”, *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 243-268.
- [35] W. B. Hubbard, J. J. Fortney, J. I. Lunine, A. Burrows, D. Sudarsky, P. Pinto, “Theory of Extrasolar Giant Planet Transits”, *Astrophys. J.* **560** (2001), no. 1, p. 413-419, astro-ph/0101024.
- [36] J. H. Schröter, *Aphroditographische Fragmente zur genauern Kenntniss des Planeten Venus*, C. G. Fleckeisen, Helmstedt, 1796.
- [37] H. N. Russell, “The Atmosphere of Venus”, *Astrophys. J.* **9** (1899), p. 284-299.





---

Astronomie, atmosphères et réfraction / *Astronomy, Atmospheres and Refraction*

# The Lomonossov arc: refraction and scattering in Venus atmosphere during solar transits

*L'arc de Lomonossov : réfraction et diffusion dans l'atmosphère de Vénus pendant un transit solaire*

Serge Koutchmy<sup>® a</sup>

<sup>a</sup> Institut d'Astrophysique de Paris (IAP), CNRS and Sorbonne Université,  
98 Bis Boulevard Arago, Paris F-75014, France  
E-mail: [koutchmy@iap.fr](mailto:koutchmy@iap.fr)

**Abstract.** The main observations of 1761 by M. Lomonossov and those that followed are recalled by extending the discussion to other remarkable visual observations of the passages, then with more and more powerful imagers producing images in profusion. The modern treatment of parasitic effects is briefly recalled by focusing on the expert observation of 1761 which has recently been widely commented on and criticized. It included a spurious effect called the “black drop effect”. The shell or aureole or atmospheric ring of Venus observed outside the solar disk is considered with reference to the today parameters of the Venus atmosphere. The contacts during the transit are discussed taking into account effects of scattering, absorption, and the dominant effects of the refraction at the small angular distances found to be comparable to a fraction of the angular dimension of the planet. Modern observations of the 2004 and the 2012 transit are tentatively discussed to elucidate what is the arc of Lomonossov.

**Résumé.** Lors du transit — ou passage — du 6 juin 1761 de la planète Vénus devant le Soleil, Mikhaïl Lomonossov annonça la mise en évidence par l'observation d'une atmosphère plutôt épaisse autour de la planète; l'interprétation s'est avérée correcte : effets de la réfraction des rayons solaires sensiblement déviés autour de la planète durant les passages au bord solaire en projection sur le ciel et convergents. L'interprétation de Lomonossov est loin d'être évidente, surtout pour l'époque, et l'annonce doit être en fait replacée dans un contexte historique. Les principales observations de 1761 et celles qui ont suivi sont rappelées en étendant la discussion sur d'autres observations visuelles remarquables des passages, puis avec des imageurs de plus en plus performants produisant des images à profusion, tout en maintenant une certaine confusion. Le traitement moderne de ces effets, qui sont certes plus facilement observés dans le contexte des éclipses de Lune, est brièvement rappelé en se concentrant sur l'expertise de l'observation de 1761 qui a été récemment largement commentée et critiquée, y compris en ce qui concerne un effet parasite appelé « effet de la goutte noire » et produit par le manque de résolution. L'enveloppe, ou auréole ou anneau atmosphérique, de Vénus est également observée en dehors du disque solaire, c'est-à-dire pour des rayons divergents issus du Soleil. Le phénomène de diffusion Mie vers l'avant par les aérosols de la haute atmosphère de Vénus peut donc également être appréhendé lors des conjonctions inférieures. Au niveau des contacts durant le transit ces effets de diffusion peuvent s'ajouter aux effets évidemment dominants de la réfraction aux petites distances angulaires qui sont comparables à une fraction de la dimension angulaire de la planète, sans compter les phénomènes adverses d'absorption sensibles plutôt dans l'infrarouge. Cet aspect peut être fondamental dans le contexte de la recherche des signatures d'atmosphères lors des passages d'exoplanètes



de type Terre, avec atmosphères, devant leur étoile parente, ce qui renforce l'importance de bien comprendre les différentes signatures relevées à l'occasion des très rares transits de Vénus devant le Soleil.

**Keywords.** Venus, Transit, Refraction effect, Atmosphere, Lomonossov arc.

**Mots-clés.** Transit, Venus, Atmosphères, Réfraction, Lomonossov.

*Published online: 6 January 2023, Issue date: 11 August 2023*

## 1. Introduction

During the transit (or passage) of the planet Venus in front of the Sun on June 6, 1761, Academician M. Lomonossov from St. Petersburg announced the evidence of a thick atmosphere around the planet [1–3]. This interpretation turned out later to be correct: solar rays reaching the observer are significantly deviated by refraction around the planet during its passage at the solar limb, as viewed in projection on the sky. Lomonossov's interpretation is far from obvious, especially for the time, and the announcement must be placed in its historical context, since passages deserved study as they had important cosmogonic consequences.

The modern treatment of these effects, which are certainly more easily observed in the context of lunar eclipses, is briefly recalled by focusing on the expert observation of 1761. This observation has recently been widely commented and criticized, as it included a spurious effect, called the “black drop effect” and produced by the lack of angular resolution when imaging a sharp edge, as also observed during passages of the planet Mercury. The shell (or aureole or atmospheric ring) of Venus is also observed when the planet is viewed outside the solar disk, i.e. for rays coming from the Sun and deviated in both directions towards the observer. Another phenomenon—the forward Mie scattering by the aerosols of the upper atmosphere of Venus—can also be observed during its lower conjunctions. At the moment of contacts during the transit, these scattering effects can possibly be added to the dominant effects of the refraction, at angular distances remaining small compared to the planetary diameter. Finally, the adverse effect of absorption, especially in the infrared, may have to be accounted for.

A quite similar situation is met when interpreting the light curve of the transit of a giant exoplanet across the disk of a distant star (Hubbard *et al.* [4]), but in case of Venus, the planet is small and rather distant from the parent star.

Given the current and important searches for signature of atmospheres during the transits of exoplanets, habitable or not, in front of their parent star, it reinforces the need to understand the various signatures observed at the occasions of the very rare transits of Venus in front of the Sun, as seen from Earth or low orbit satellites.

## 2. Some historical aspects on the evaluation of Lomonossov's role

There is an abundant literature relating and discussing what is nowadays called “the Lomonossov effect” [1, 2] or “the Venus halo” [5] or, better and more precisely, the Lomonossov arc [3, 6], these references being considered as fairly representative. Yet, it seems unthinkable to analyze the discovery of an atmosphere around a planet other than our Earth, without placing it first in the context of the time, more than two and a half centuries ago.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Note that the spelling of the name has been adapted in English [3, 7], which made it lose an “s” but it is the phonetically more correct French spelling that has been kept in this article or often the whole name will be replaced by “ML”, to avoid too many unnecessary repetitions.

### 2.1. *Lomonossov, an outstanding figure*

The French Wikipedia article dedicated to Mikhail Lomonossov (ML) (see Mikhail Lomonossov) is a very good and easily accessible source to get to know the character. The article is largely based on the quite fundamental and somewhat committed work of Luce Langevin [6] who paints a laudatory and edifying portrait of the man without, however, dwelling on his achievements in optics nor, moreover, on his observation of Venus transit in front of the Sun in 1761. The article in English on Wikipedia (see Mikhail Lomonosov) is more explicit with a chapter on the physicist, then on the astronomer, with surprisingly no reference to the French work of Luce Langevin [8]. Comparing these two considerable texts of Wikipedia already shows the ambiguities on the evaluation of Lomonossov's role, without speaking about the article of Wikipedia in Russian which is still different and certainly more "Lomonossovian" (see Ломоносов, Михаил Васильевич). It would take many pages to discuss the matter in depth. In short, we can arbitrarily but probably objectively quote these few lines taken from one of the most popular "English Wikipedia" articles:

*"Mikhail (Mikhaylo) Vasilyevich Lomonosov (/lʊməˈnɒsɒf/;<sup>[1]</sup> Russian: Михаил (Михайло) Васильевич Ломоносов; November 19 [O.S. November 8] 1711—April 15 [O.S. April 4] 1765) was a Russian polymath, scientist and writer, who made important contributions to literature, education, and science. Among his discoveries were the atmosphere of Venus and the law of conservation of mass in chemical reactions. His spheres of science were natural science, chemistry, physics, mineralogy, history, art, philology, optical devices and others. Founder of modern geology, [2] [3] Lomonosov was also a poet and influenced the formation of the modern Russian literary language."*

It is thus possible to classify him as one of the great encyclopedists of the 18th century whose influence was very significant during his lifetime in his country, as for the reform of the Russian language and the creation of the Moscow University bearing his name and which today includes an important Institute conducting research in astronomy and astrophysics, (Figure 1). Besides, the article in French of Wikipedia notes:

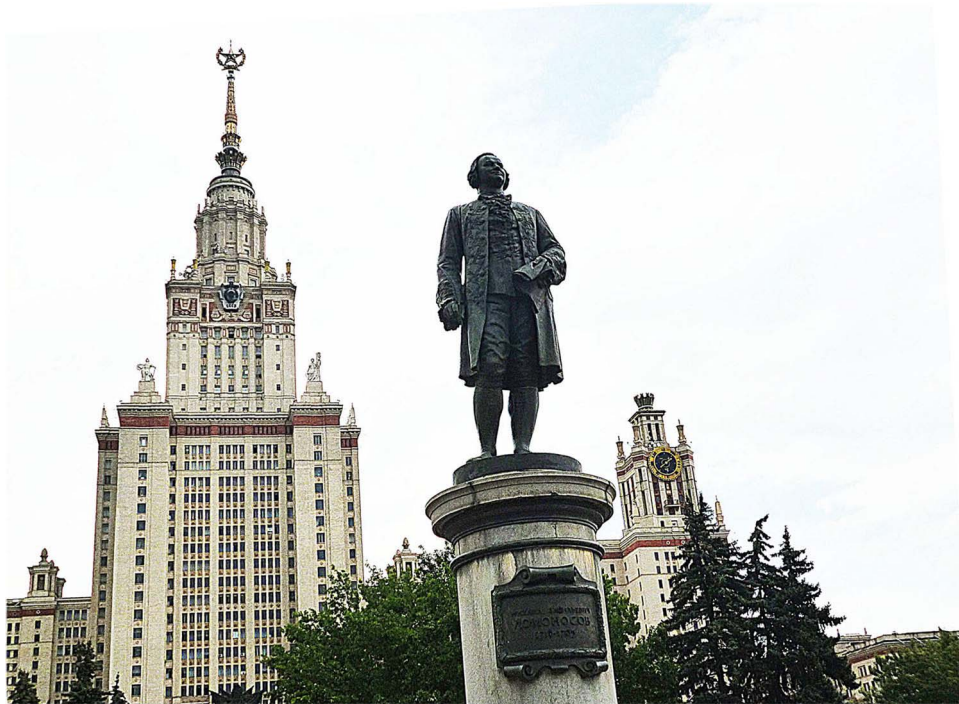
*"A convinced patriot, an enthusiastic polymath, a lover of science, he was a professor at the Academy of Sciences of St. Petersburg and founder of the University of Moscow (which bears his name); Alexander Pushkin even said of him that he was "the first university in Russia" (author's translation).*

When reading Lomonossov's report, written practically on the spot, of the observation of the arc phenomenon at the time of the contacts during the transit of 1761, it is not out of place to remember him as a poet and brilliant discoverer.

### 2.2. *In 1761, the challenge of an unsuccessful method*

For most of the many astronomers who observed the Venus transit of 1761, the main goal was to carry out a precise dating of the different contacts, in order to determine with parallax measurements taking advantage of observations made from sites sufficiently separated in longitude, the absolute distances between the celestial bodies Earth–Venus–Sun. At that time, this was felt of fundamental cosmogonic importance. One of the recommended methods had been discussed and proposed by the great E. Halley, who died in 1742—thus before the transit of Venus. Halley had a great influence during his lifetime and his intellectual heritage was widely propagated during the whole 18th century. In France, J.-N. Delisle was a fervent supporter to observe transits of Mercury and even more so, of Venus [7].

These measurements of contacts in 1761 and thereafter have been the subject of countless interpretations as they are at least affected by significant errors with respect to the sought precision. The fault is possibly in the existence of this thick atmosphere of Venus which completely



**Figure 1.** Statue of Lomonossov erected in front of the Moscow University that he created in the 18th century (Photo taken by the author on the occasion of the 2014 COSPAR congress). ML is often considered in Russia as the first real scientist of this country.

hides the planet's ground and makes questionable to use for Venus the method proposed by Halley, while it worked for the frequently observed transits of Mercury, this planet having no atmosphere. When applied to the rare couples of transits of Venus, these dating methods finally proved to be less precise than other astrometric methods applied to the same problem. Yet, one will not blame the illustrious promoter who so brilliantly succeeded on the comet bearing his name!

Venus transits remain so spectacular and rare that these measurements have lasted for at least the two couples of transits following those of 1761 and 1769, leading to the famous if not considerable expeditions in 1874 and 1882, and even nowadays in 2004 and 2012. Let simply observe that the ML discovery of a "rather thick" or dense atmosphere around Venus could have led to reconsider these expensive and often strictly astrometric efforts for distant missions.

### 2.3. *Lomonossov: the Astronomer*

During the years preceding the famous Venus transit of 1761, and even after, ML had worked on the construction of a telescope intended for twilight and night observation onboard ships, as well as on an off-axis telescope with a rather ingenious focal occulting system. There he was the forerunner of what is today named the Herschel type telescope, possibly not rendering justice to ML. This project was partly intended to observe the next transit of 1769, which he could not carry as he died in 1765. Being philosophically convinced of the plurality of the Worlds, he was opposed to the Russian Church and its hierarchy, at a time when the Russian translation of Fontenelle's book had been censored in Russia (1756). This and other subjects earned him academic animosities which hindered his activity. He was certainly convinced of the existence of

an atmosphere around Venus, which he considered as the sister planet of the Earth. Therefore, the transit of Venus was for him a well-prepared observation, essentially to demonstrate the existence of such atmosphere through imagery.

To conclude this historical overview of the discovery of the Venusian atmosphere from the observation of transits, it is necessary to recall the strong links existing then between the Academy of Saint Petersburg and other Academies, especially with the French Academies. Voltaire was an associate member of the Russian Academy during approximately 32 years; the famous astronomer J-N. Delisle worked for several years in St. Petersburg, where he had a great influence until 1745, when he had academic problems and returned to France. Later, he favored the long—over 2 years—and famous mission of Abbé Chappe d’Auteroche, immediately after his election in 1759 to the Academy of sciences, succeeding to Lalande [Wikipedia and Chappe (cosmovisions.com)]. This mission led Chappe to Tobolsk in Siberia, i.e. well beyond the Urals, to observe with great success the Venus transit of 1761. Chappe, very prolific in other respects, is nevertheless famous for reporting facts that he himself did not always live.

Finally, skipping almost two centuries let mention that, on the occasion of the bi-centenary of the announcement of the discovery of the Venus atmosphere by ML, the USSR launched towards Venus its first heavy satellite of the series “Venera”, intended to analyze this atmosphere. In 1975, Venera 9 transmitted the first and still unique optical images of the planet’s ground. It is likely that Lomonossov work contributed setting the priority given by USSR to its enormous space program towards Venus, perhaps to the detriment of the study of the planet Mars by this country.

### 3. Observations of the refraction effects during the passages of Venus in front of the Sun

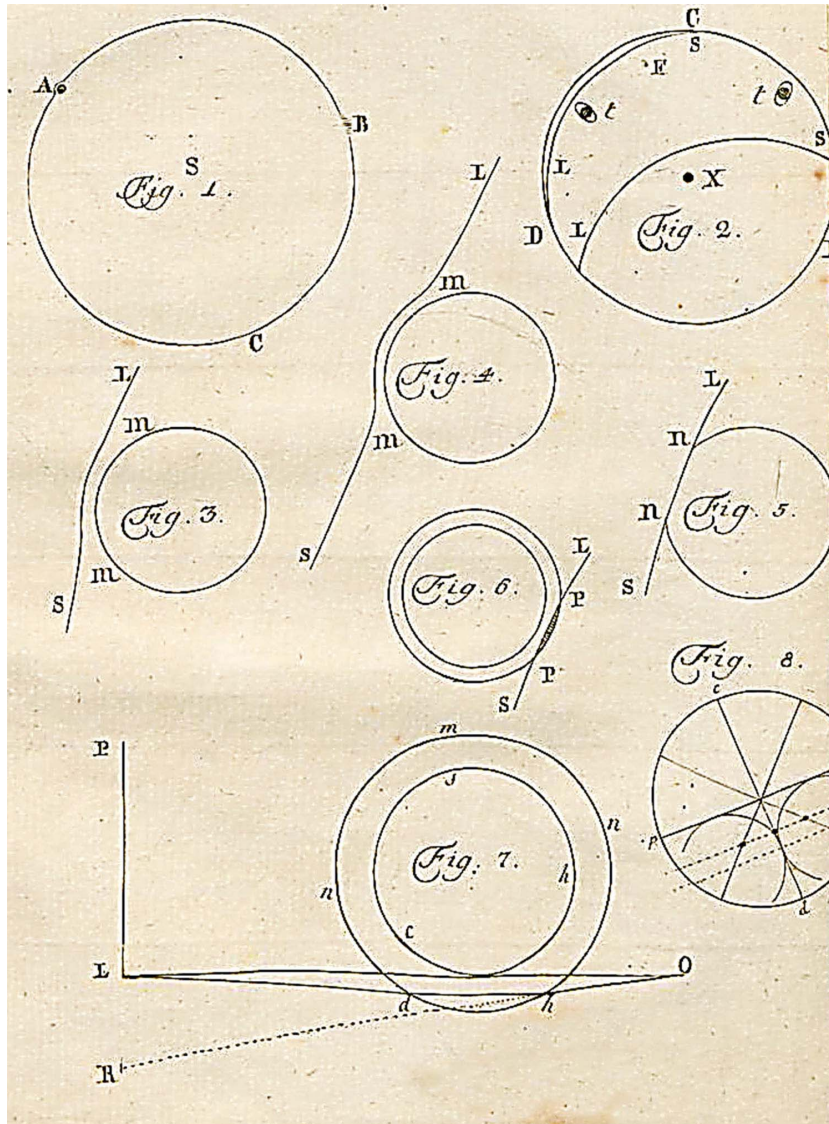
#### 3.1. Lomonossov’s observations of 1761

It is after observing the transit of Venus on June 6, 1761, that ML announces to have for the first-time observed effects due to refraction in the atmosphere of a planet passing in front of the Sun and, consequently, that the planet possesses an atmosphere. This was a crucial point considering the state of knowledge at the time. Let notice that he describes these effects only in connection with the observation of the contacts<sup>2</sup> and in particular just after the third contact, lasting about 1 min, reporting an effect that he himself calls “pupyr” (as transcribed from Russian), a word that can be translated as “bump” or “blister” or “bulge”, protruding at the edge of the Sun, as seen on his Figs. 3 and 4 (Figure 2).

A detailed description of what he saw has been published several times: e.g. the most serious and recent paper by Shiltsev [3] containing many references to and discussion of previous papers; [9] comments the original ML paper, making this very short and critical statement : “...*Mr. Councilor Lomonosov concludes that the planet Venus is surrounded by a significant atmosphere of air similar to that which surrounds our terrestrial globe.*”. Figs. 1 to 8 in Figure 2 appear to speak enough by themselves. Let underline the famous Fig. 7 giving the basic scheme of the refraction effect that ML has been the first to propose in the case of the atmosphere of a planet different from Earth, including the bending of rays coming from the Sun.

---

<sup>2</sup>Contacts observed during the transit of a planet before the solar disk are supposed to correspond to moments (i) when the planet seems first to touch the Sun (1st contact) also called the ingress; (ii) when after, the planet get fully immersed (2d contact); at the exit of the planet, also called the egress, there are, well after, the symmetric 3d and 4th contacts.



**Figure 2.** Reproduction of the plate of the original drawings of ML provided in his report written after the observation of 1761, published in Russian and German [9] after 3 months. Visual observation made with one of the first refractors of Dollond (England) with a smoked glass of low optical density held at the focus [3]. The “Fig. 7” of the plate illustrates the interpretation given by ML in terms of refraction of the light rays coming from the Sun through the rather thick atmosphere supposed to exist around Venus and represented by an extended shell. It is the basic schematic of the refraction effect as studied after in many papers, using the bending of rays by refraction. No “black-drop” effect reported.

### 3.2. Other observations from 1761 to 1882

In fact, about sixty expeditions [1, 2] and more than 110 other observation sites can be counted in 1761 on the occasion of this rare astronomical event (period of 113 years) which takes place on different parts of the globe twice with an eight years interval. In 1761 the passages were

not visible from France, but Eastern Europe and Siberia offered many possibilities. A review of selected observations has been made by several authors, for example Link [1, 2, 7] in his well-known article devoted to an interpretation of the phenomenon, or more recently by Shiltsev in his extensive article focusing on the 1761 passage [3]. As each observer has his own perception of the visually observed phenomenon, one might as well say that the testimonies diverge. Afterwards it is tempting to make a selection and only keep what seems plausible, but this is moving away from a strictly scientific method. Thus, many authors reporting the observations of 1761, 1769 then 1874 and 1882, have described quite systematically to see a halo or ring around the planet in projection on the solar disk. This appears doubtful for today's knowledge (see Section 6 below). These claims are presumably to be rejected due to their limited spatial resolution.

Nevertheless, surprisingly, let consider the arc appearing at the second contact, i.e. during the ingress or immersion when the planet is almost completely superposed to the solar disk, or at the third contact, i.e. during the egress or exit when the planet starts to leave the solar disk. This arc is rather well reported in 1761, but not so well in 1769, perhaps contrary to logic. In 1874 and later, the arc and the thin envelope or aureole around the planet seen after the first contact and before the fourth are perfectly described in a convincing way by Lagrange *et al.* [10] observing in almost perfect conditions in Chile. Their observations thus definitively confirmed the discovery of ML. Nevertheless, as noticed by Link [1, 2], ML's drawings of the arc are not without ambiguities and they leave an open door to criticism [1–3, 11].

Chappe d'Auteroche, already mentioned above for his fascinating trip to Siberia which lasted more than a year and his observation of the 1761 transit, reports later in 1762–1768 [7, 12] what seems to be beautiful observations of the phenomenon of aureole or ring and perhaps even an arc. He used two remarkable refractors of different focal lengths, equipped with a micrometer.

In his successive reports to the Academy of sciences, he discusses at length how his measurements of different Venus diameters at ingress and egress, compared to the values reported by other observers. He also discusses the effects appearing around the disk of Venus in projection on the solar disk, which appear rather confused when related to the modern observations: e.g. he draws a ring or aureola around the planet when well projected on the disk. As he was focusing on measurements with his web-wire micrometer, it is possible that he was a victim of a Mach effect induced by some defocusing (for a description of the Mach effect, see<sup>3</sup>). At the transit of 1769 he did not see this halo phenomenon at all and reports instead a “black drop” effect (see below) during the second and third contacts (ingress and egress), which does not fail to raise question (<http://www.cosmovisions.com/Chappe.htm>). He never noted the role of refraction in a possible planetary atmosphere.

Unfortunately, he died shortly after the transit and his descriptions of 1761–62 were subsequently taken up again but in second hand.

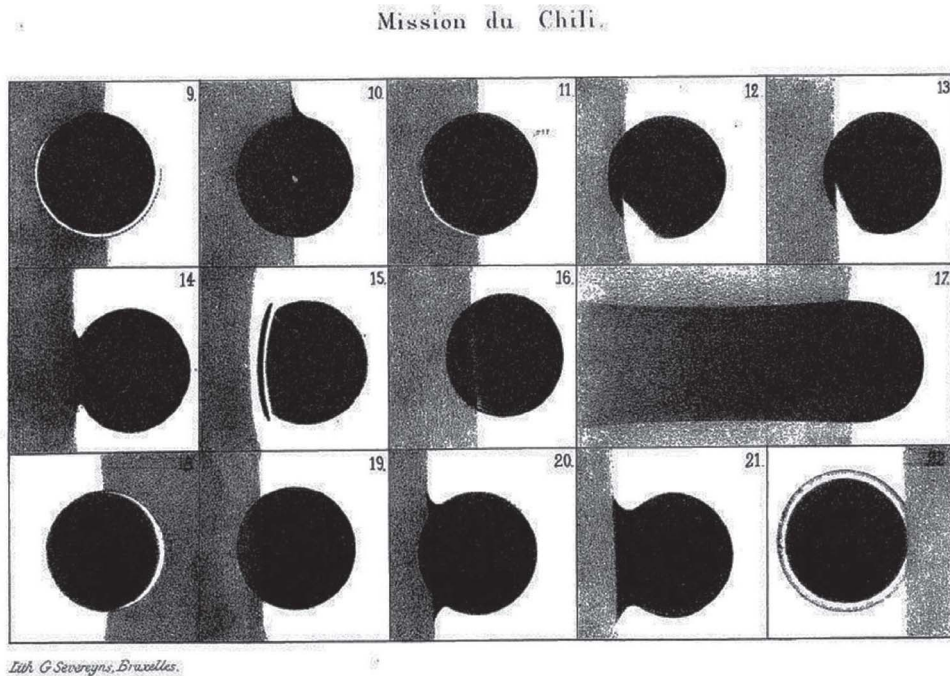
The observation of the transit of 1882 by the Lagrange group (Royal Observatory of Brussels in Uccle) deserves a special mention because it includes a visual observation relation [10] (pp. 118 to 120 of the report) made with an achromatic refractor called Dollond's of the same nature as the one used by ML in 1761 and with the same method. The Dollond's refractor was invented and then produced in England a few years earlier. The author is the leader of the Belgian mission; the chosen site in Chile, near Santiago's Observatory, is excellent for astronomical observation, often having quiet and sharp images as claimed by Lagrange *et al.*

The instrument is of presumably higher quality than the one used in 1761 by ML but the method is quite comparable, for example with the use of a blackened (smoked) glass near the focus. No mention of refraction effects is made by the authors of 1882. With a better sky than that

---

<sup>3</sup>The Mach effect is an optical illusion, due to retinal lateral inhibition, which causes edges of darker objects adjacent to lighter objects to appear lighter than they truly are and vice versa thereby creating a false shadow, which may mimic injury or disease, etc. (from Wikipedia Mach bands).





Ann. Ast. Obs. Brux. V.

**Figure 3.** Plate extracted from the report of the mission to Chile of the Brussels Observatory [10] during the transit of 1882. Visual observations made with excellent instruments, like Dollond’s achromatic refractor of about 1 m focal length, in a clear sky with visually stable images, at least during the ingress. Images 9 to 16, during the ingress part of the transit; image 18, during the egress. Image 9 seems to have exaggerated the perception of the envelope or aureole, especially in projection on the solar disk and as an extension of the arc seen outside the Sun. Image 18 of the arc on 1/2 of the planet’s circumference seems to be a disputable representation of reality because the arc due to refraction is presumably thinner (indeed “less intense”) at the top due to the limb darkening at the limb of the Sun.

of Saint Petersburg and without almost any image motions according to their report, the details reported on the shell or aureole and on the arc (in fact called “horns”) are certainly remarkable, not so far of what is done much later in 2004 and 2012 with large telescopes (see below). This is the case for the thickness of the envelope or aureole considered as very thin and stable by these authors; they call “light net” (namely “filet lumineux” in the original report in French). The plates of images attached to the report (e.g. Figure 3) are edifying if one puts oneself in the context of the description of ML of 1761 (see [3, 9]).

This point deserves some careful comment. Focusing on images 9, 11, 15 and 18 the assertions of ML’s article (see [3, 9]) become clearer and justified; while, as shown in drawing 22 of this plate, the entire aureole or envelope is shown in projection on the disk, this seems hardly credible and possibly due to the Mach effect. The “black drop” effect is illustrated on pictures 20 and 21 taken at the end of the observations when the seeing became definitely poor; we discuss this below because this effect has nothing to do with refraction. Finally, image 15 also recalls one of the descriptions of ML at the time of the second contact of 1761 and it confirms, with drawings 12 and 13, the existence of effects which are difficult to interpret and sometimes at the

origin of confusions, as described by Link in [1, 2], on the evaluation of the set of observations. Let us however notice that the interesting image 15 looks like the superposition of the black-drop effect and the effect of the arc seen at the extreme limb.

### 3.3. *Modern observations*

To better understand the effect of refraction during a solar transit of Venus during the crucial arc phase, it is now interesting to extract images from contemporary observations made from space. Indeed, they are free of the parasitic effects produced by the Earth's atmosphere, turbulence and stray light. During the 2004 transit, the NASA TRACE mission telescope observed in several spectral channels, including a so-called "visible" channel. Its images were widely used by Pasachoff *et al.* (in 2004 see [11] and especially in 2011, see [13]), who also gives a good description of the TRACE mission imaging instrument, as well as important parameters for image evaluation. The pixel size gives an excellent resolution, better than  $1''$  on the disk images, while not so good or more difficult to evaluate on the arc or aureole where the signal to noise is much worse. Unfortunately, only the qualitative aspects of the observation of transits are really discussed by Pasachoff and Schneider. More annoying, only composite images are given, as a disk fraction "juxtaposed" to the fraction outside the disk and amplified to appear with the same intensity. This is obviously far from reality (see [6]). The discussion is limited to these images which, although excellent and "speaking", do not allow an objective comparison with the visual data of historical transits, including that of 1761. Moreover, the images presented by Pasachoff *et al.* [13] are "cleaned" of instrumental effects such as ghost images due to spurious reflections of instrumental origin.

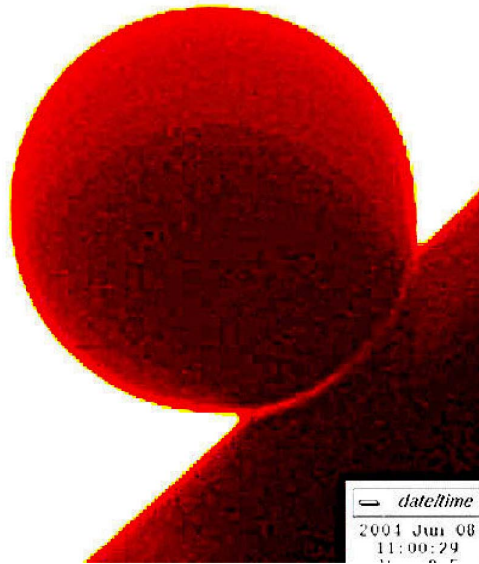
For these reasons, in Figure 4 an unretouched image from the originals is shown with amplified contrast to indicate what is perceived near a contact (second or third). Here the arc is shown by overexposing the disk and the result may be comparable to what ML and other historical observers described as a protruding arc from the solar limb. Using such image, it is possible to guess what is perceived when the resolution is less good, as for the instruments used in 1761 and after, and the influence of the atmosphere more significant, a factor difficult to apprehend. After some tests, it seems that an angular resolution of about  $3''$  to  $4''$  is sufficient to justify the historical assertions, provided that the sky is clear without any clouds.

The 2012 transit provides even more recent images from the HMI experiment onboard the NASA SDO mission (SDO HMI Continuum | NASA, [12]). Images of the entire disk at  $1''$  resolution were taken about every 5 min in the red continuum (617.3 nm). Focusing on the frames taken near contacts, one may examine the arc as it must have been visually apprehended in 1761: Figure 5 gives an example of (a) an original image and (b) the same after overexposure in order to see the arc.

### 3.4. *The black drop parasitic effect*

Inconsistencies in the various accounts of visual transit observations have been mentioned above, but no spurious effect has been as much in the news as the so-called black drop effect (see [7, 11, 14] for example). This effect is particularly noticeable just after the second contact and just before the third during the more "popular" and frequent transits of planet Mercury, as convincingly described by Pasachoff *et al.* [11]. It has poisoned all Venus transit observations intending to accurately measure the instants of the contacts and by extension, measure the much sought-after Halley effect—or its variants based on parallax measurements on the planet Venus only. There is another and quite simple reason for this usurped popularity of the black-drop. Its origin is relatively well understood [11] and moreover, it is often observed and therefore well-known [7]. Mercury has no atmosphere and does not show a ML arc. On Figure 3

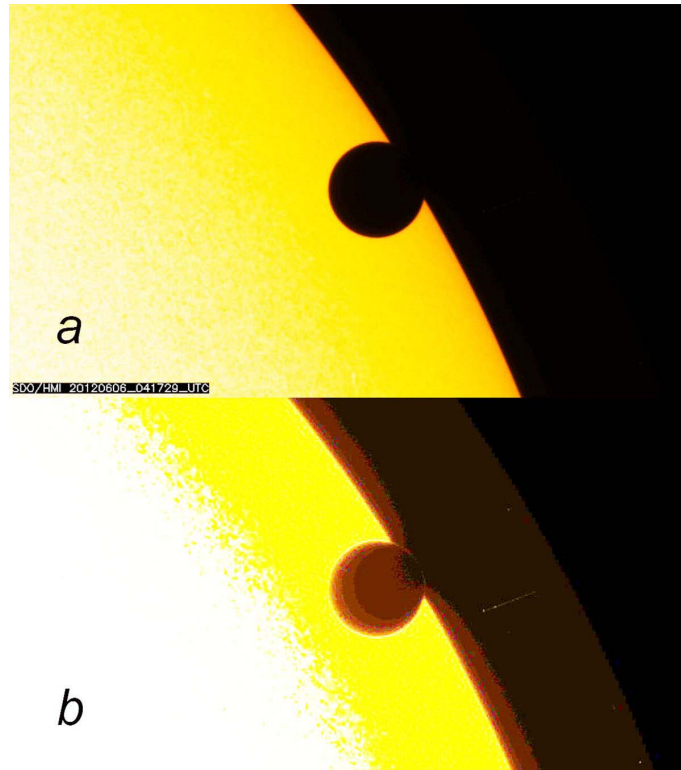




**Figure 4.** Overexposed print of one of the images obtained with the TRACE mission by NASA during the 2004 transit, without performing any processing to show at the same time the disk and what is protruding outside the limb of about 1/10 of the diameter of the planet Venus as in the description of the arc by ML. See [11] and [13] for other qualitative images obtained by a posteriori computer compositing, with normally exposed parts of the solar disk adjoined by overexposed parts outside the disk, which hardly corresponds to what is observed visually without focal plane occultation.

drawings or images 14 and 21 perfectly illustrate the effect noted during a Venus transit. The explanation is therefore to be found in image smearing, essentially due to image motion produced by turbulence or to diffraction and scattering in the optics and the Earth atmosphere. Imperfect focusing aggravates it, as may happen when using eyepieces equipped with an additional micrometric system at the prime focus, as was recommended for precise measurements of contacts as early as 1761, the very bright Sun adds blurring and dazzling effects. An edifying description of these associated parasitic effects can be found as early as 1762 in the scientific report of Chappe d'Auteroche, following his 1761 transit campaign in Tobolsk. Extensive studies by Pasachoff *et al.* [11] and [14] have shown the black drop effect and its origin. Subtler seems to be a “sub-effect” as in Figure 3, drawing 15, which can be found in other authors, including in modern photographic observations. These are fleeting images captured just after the second contact and just before the third one. Even after the exit of the planet at the third contact (egress) it is still possible to detect these, but only on the stray light of the disk (Figure 5b).

ML's observations never mentioned nor described the black drop effect, and described an excess of brightness, contrary to the black drop effect which corresponds to a “lack” of luminous flux in the image. On the basis of this important remark and in a description mentioning a bump on the solar edge or better a bright arc, it makes sense to interpret it as a refraction in a thick atmosphere, as first claimed by ML and others afterwards. Recent observations made with larger aperture telescopes do not report the “black-drop” effect when watching the transit of Venus (see further in Section 6); it is reported only for the transit of the Mercury planet, much smaller in size, that incidentally does not have an atmosphere!

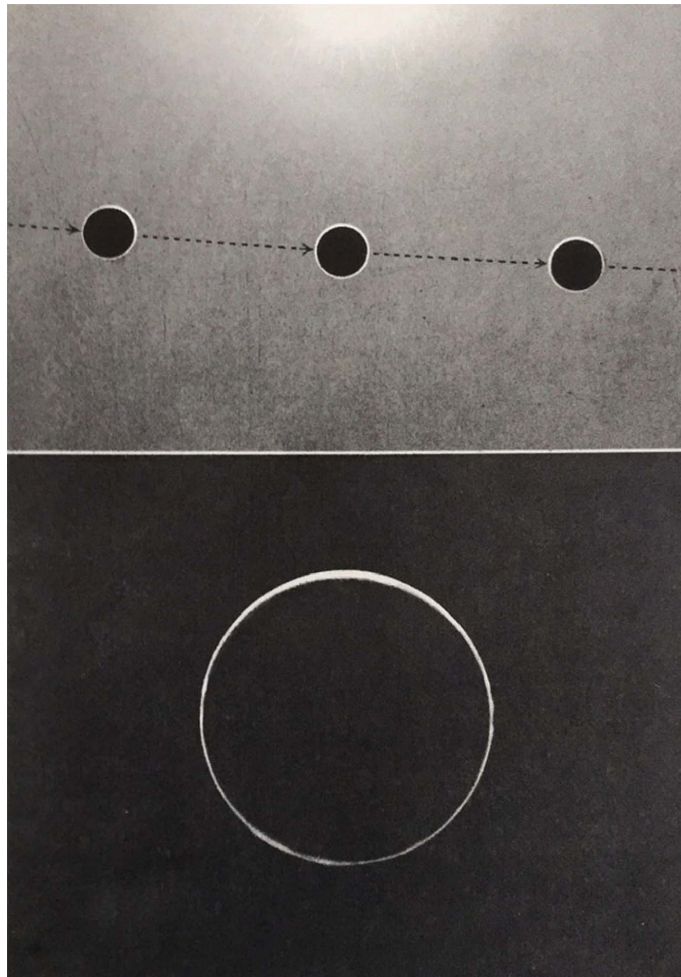


**Figure 5.** Extract of an image from the HMI instrument of the SDO mission of NASA to show the arc during the egress of the planet Venus for the most recent transit of June 8, 2012. Images are taken with a narrow passband filter in the red. Colors are false colors in this presentation in order to show low contrast details. (a) With a reproduction of the original image to show the solar disk at the limb; (b) by overexposing the image to show the arc with an exit of the planet of about 1/10 of the value of its angular diameter, as for the relation of the phenomenon by ML in 1761. No processing is applied to enhance the fine details or improve the resolution. On image (b), one notices the stray light beyond the solar edge as well as on the image of the planet showing a pseudo “black-drop” effect on the stray light outside the disk, which is not due to a lack of angular resolution for fine details.

## 4. The atmosphere of Venus confirmed

### 4.1. Confirmation after 1761

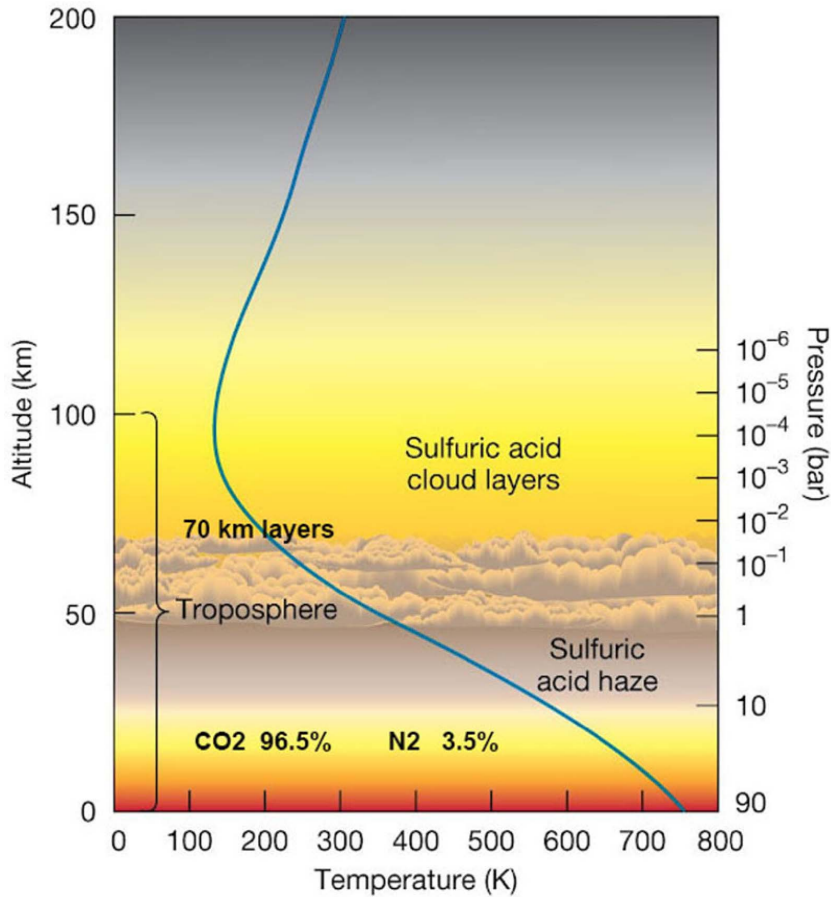
After the transit of 1761 the existence of a Venusian atmosphere was confirmed independently, thanks to the observation of the planet during the lower conjunctions. Then, horns or even a luminous and thin shell or ring around Venus were at first attributed to the effects of refraction of solar rays, as for the ML arc. The first observations [7] are attributed to Johann Schröter (1745–1816). He reported having observed horns on the Venus crescent beyond what could have been produced by the phase effect on the supposed ground of an illuminated planet without atmosphere, even if he was somewhat mistaken about the origin of the phenomenon. This phase effect is well-observed in the case of the Moon. Russell later [15] observed in 1898 the horns phenomenon with larger modern instruments. He is not immune from criticism on his interpretation in terms of scattering in the high layers of the Venus atmosphere, which led him



**Figure 6.** Observation of the shell, or ring, or atmospheric aureole around the planet Venus during an inferior conjunction with the Sun (in the northern hemisphere) during the conjunction in projection on the sky. Bottom: image selected as close as possible to the Sun. Note the irregularities in the distribution of the light scattered in the atmosphere, as well as the beginning of the crescent partly due to the phase effect.

to neglect refraction and to predict an atmosphere of Venus much more tenuous than the one known today, a widespread error at the time and even up to the time of the space missions in the 1970s.

The history of these observations of Venus' inferior conjunctions is somewhat epic and, fortunately, later on other famous observers repeated them, until today when they are a prime target for advanced amateurs [16]. Figure 6, extracted from an atlas made several decades ago by Guérin [17], perfectly shows a complete shell (envelope) during an inferior conjunction as well as the phase effect. This effect is very sensitive between the part located on the Sun side compared to the opposite part, located at only about 1 arc minute, i.e.  $1/32$  of the 32 arcmin solar diameter.



**Figure 7.** Variations of composition, temperature and pressure in the atmosphere of Venus, between 0 and 200 km of altitude (from Pearson Education and T. Lombry-adaptation and added labels by the author). Notice the cloudy layer located immediately under the layers considered today as responsible for the arc of ML by refraction during the transit in front of the Sun (end of the 2nd contact at ingress and beginning of the 3rd contact at egress). These layers would be loaded with fine droplets of sulfuric acid giving a yellowish tint to the scattered light with a high albedo for the planet, close to 0.7.

This kind of observation, repeated at more recent conjunctions by astute and skillful observers with modest instruments, demonstrates unambiguously the importance of the thick atmosphere of Venus producing a ring of scattered light with a planet yet observed from “behind”. Unique measurements of the polarization of the radiation from this shell were even made by B. Lyot as early as 1924 in his thesis work. These measurements, well summarized by Dollfus (see [18]), indicate that the radiation was probably dominated by scattering on fine particles of about  $2\ \mu\text{m}$  in diameter.

#### 4.2. *The Venus atmosphere today*

Contemporary data on the atmosphere of Venus (Figure 7) concur with the existence of such aerosol layer or cloud.

This layer is located above the thick lower atmosphere mainly composed of CO<sub>2</sub>, between about 45 and 70 km altitude. It is moreover suggested that these particles would be clear (sulfuric acid droplets) or even white [12, 19], located below an upper atmosphere that could extend up to 90 km and more. The problem of scattering by such particles is complex, even using a simplified Mie scattering approach as attempted by Link [1, 2] at a time when the composition of the upper layers of the Venus atmosphere was very poorly known. Link made then an analogy with the case of the much fainter terrestrial atmosphere. To explain the ring or aureole of Figures 4–6, including its thickness or intensity, it would be necessary today not only to imply the possible refraction in the lower layers of the atmosphere—the classical explanation introduced since ML and taken up 120 years later by Russell [15] in the case of the transit—but possible effects of multiple scattering according to the phase and especially, the scattering in the higher layers by taking into account the aerosols, and the Rayleigh scattering (for a more complete discussion [4, 20, 21]).

Finally let recall that Venus albedo is high, almost twice as high as the Earth albedo in the visible.

## **5. On the modeling of the refraction phenomenon in the atmosphere of Venus and the important associated effects**

In order to explain the observed effect of refraction near the solar limb, let now introduce more quantitative aspects.

### *5.1. The classical treatment: a transparent atmosphere*

The modeling of the refraction phenomenon in Venus atmosphere during a transit or passage of the planet has been classically tried (e.g. [1–3, 6]). These efforts were partly inspired by analyzing phenomena like lunar eclipses in the case of the much fainter terrestrial atmosphere, and especially the passage of a bright star behind the atmosphere of a planet [22, 23]. An abundant literature exists, essentially using geometrical and optical descriptions, as it becomes clear by examining the extended studies described in Link's book [1, 2] which, incidentally, takes up ML's suggestion. It seems difficult to add much to this classical work which includes distortion effects in 2D and a treatment of the phenomenon at a time when the specificities of Venus' atmosphere were not well known and, as already suggested by ML, this atmosphere could be denser than on Earth. Let observe that the classical interpretations are made with several simplifying hypotheses such as a fully transparent atmosphere for horizontal path, with a homogeneous and isothermal layer in order to simplify the geometrical parameters of the problem. These analyses ignore quantitative photometry and attenuation, by absorption and especially scattering, of the radiation passing through the various layers [4].

Today, progress is possible thanks to the measurements made with radio waves which penetrate the cloudy layer and, above all, the space missions. These include the Soviet probes which progressively succeeded in penetrating the dense atmosphere of Venus and even reached the ground. There the conditions are extremely unfriendly for instruments beyond a few tens of minutes: the atmospheric pressure exceeds 90 bars and temperature reaches approximately 750 K (Figure 7). Without being exhaustive, let mention the most recent mission by ESA called "Venus Express" or VeX. It even carried a photometer (SPICAV/SOIR) allowing to probe the atmosphere by observing from a Venusian orbit the occultation of the Sun by the planet. These measurements could thus be used to interpret the last historical transit of Venus in front of the Sun of June 5–6, 2012, with a special mention to the thesis work of Pere [12] and the most recent article that summarizes his results (see [24]), with an analysis that follows the main lines previously defined by

the precursors such as Tanga and collaborators (see [6]). Another interesting work in this context is the thesis of Marcq (see [25]) on the infrared spectra of the atmosphere of Venus confirming the important differences with the terrestrial atmosphere.

## 5.2. *Some simple naive considerations to start with*

As is sometimes done, reference to the case of the Earth's atmosphere seems useful in addressing the phenomenon when trying to evaluate the order of magnitudes. Both the diameter and the gravity are close for the sister planets. At ultimate grazing incidence (zenith angle is then  $90^\circ$ ) it is well known that the light is refracted by typically  $38'$  for an observer on the Earth at ground level [26] where the pressure is 1 bar, or, accordingly, by more than  $1^\circ$  for a ray tangentially crossing the whole atmosphere. In the limited case of the ML arc, we are dealing with a smaller amplitude effect [1, 2], that is produced by less dense layers than the ones at the Earth's ground, typically 100 times less, bending the light to give a "mirror" image<sup>4</sup> of the solar limb reflected above the planet limb of  $60''$  diameter. This mirrored image appears above the cloud layers when the Venus atmosphere emerges from the Sun, as depicted in Figure 7. Assuming in first approximation that the pressure reflects the atmospheric densities, without paying attention to the temperature variations and to the composition, the relevant altitudes  $h$  reaches 75 km, where the pressure is  $10^{-2}$  bars, well above the cloud layer. Beyond Figure 7 and making use of modern data on planetary atmospheres, the values taken from the classical and revised Allen's book [26] are quite appropriate. The pressures, temperatures, and densities of particles—nitrogen and oxygen molecules essentially—are given for the Earth's atmosphere in tables 11–21 of [26], from the surface to 1000 km altitude. The review paper [27] can also be consulted. Let us consider the layer of the atmosphere that provides the radiation observed in the arc or the ring (or halo). Let  $r$  be the radius of the planet reached by grazing rays but weakly bent by refraction;  $\delta h$  the effective thickness of the layer concerned in a one-layer model, a value equal in first approximation, to the hydrostatic height scale at the considered altitude:

$$\delta h = \Pi T / \mu \cdot g \quad (1)$$

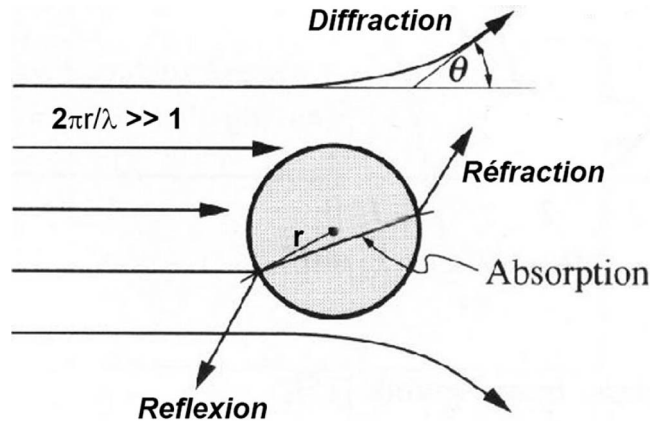
with  $\Pi$  the universal constant of perfect gases,  $T$  the absolute temperature of the layer,  $g$  the gravity considered as constant in the thickness of the layer and  $\mu$  the average molecular mass. The value of  $\delta h$  is about 8 km for the Earth's atmosphere near the ground—they vary mostly with  $T$ , of course, but for refraction it is not very important. For the atmosphere of Venus, with a slightly lower gravity than the Earth and a somewhat different composition, with a dominance of carbon dioxide giving a higher  $\mu$  because of  $\text{CO}_2$  of higher molecular weight compared to  $\text{N}_2$  and  $\text{O}_2$  for the Earth atmosphere,  $\delta h$  varies between 4 and 7 km. To obtain  $h$  one must take into account the effective length  $d$  of the grazing rays. By simplifying and considering a straight trajectory in a homogeneous stratified curved atmosphere,  $d$  is easily evaluated:

$$d = (8 \cdot r \cdot \delta h)^{1/2} \quad (2)$$

This length  $d$  is derived with a slightly different approach giving a similar numerical coefficient ( $2\pi$  instead of 8) in [6, 12, 23, 24] and in the present special issue in the article by Sicardy [22], formula (25).

To begin with, taking  $\delta h = 4$  km for Venus at  $T \approx 200$  K and  $r = 6100$  km, slightly above the cloud layer,  $d$  typically appears 100 times greater than  $\delta h$ . This could lead to another way to evaluate the height of the rays in the atmosphere of Venus, as discussed below.

<sup>4</sup>We use "mirrored" in the sense of "making an image". It has nothing to do with the image reflected by a plan mirror by it could be compared to what is done with the grazing incidence concave mirrors used to produce an image or a spectrum in X-rays telescope.



**Figure 8.** Different processes identifiable during the interaction of the grazing solar rays in the upper atmosphere of Venus by meeting the droplets or aerosols, as present in the atmosphere given by Figure 7. The refracted light is then much more dispersed than by the gas molecules producing the ML arc during the transits.

### 5.3. An atmosphere with scattering and absorption

Atmospheric attenuation was ignored above in the modeling of refraction effects during the transit of Venus; the atmosphere of Venus was considered transparent. This is a severe approximation to deal with a useful treatment of the refraction phenomenon observed after the light rays exit the atmosphere and certainly even more, to deal with the scattering that is superimposed on it. The case of the terrestrial atmosphere, well-illustrated by the Sun setting and rising, or the Moon sets and rises observed successively from the orbital space stations, e.g. [28–30], is edifying in this respect. Furthermore, it seems important to fully address the issue for the future searches of extra-solar planets likely to show signs of life (exo-Earths). This will require the “deep” interpretation of light curves and spectra obtained during transits or passages of extra-solar planets in front of their parent star. For the advanced amateur, another application would be the interpretation of images and color index during total and even partial eclipses of the Moon.

To find the true height reached in the atmosphere by the emerging rays, it is necessary to account for the atmospheric attenuation at the time of the crossing, always neglected by the traditional treatment. This is indeed an unknown in the treatment of refraction and is often ignored by treating the outgoing radiation with an intensity coming from the source—here the surface of the Sun—*without any attenuation*. This is obviously false. The refraction of light rays depends, apart from a refraction coefficient to be considered later, on the density  $N$  of the transmitting gas. A compromise is therefore established between the maximum density encountered by the bent light rays, and the re-absorption and/or dispersion by light scattering, allowing the light rays pass. At the concerned densities, the effects which matter are:

(i) Molecular scattering (Rayleigh scattering, see for e.g. [4, 26]) which is very sensitive in the violet and blue (efficiency in  $\lambda^{-4}$  with  $\lambda$  wavelength of the radiation). The directional pattern of the scattered intensities (or phase function) is in  $(1 + \cos^2 \theta)$  (Figure 8). Hence and at a good approximation, the efficiency can be considered as isotropic over a range of a few degrees around the planet. Thus, the radiation scattered in the upper atmosphere produces a blue fringe of weak intensity, when compared to the refracted radiation as shown in [29, 30] for the case of the terrestrial atmosphere.

(ii) Mie diffusion or scattering on aerosols, which for the Earth are of anthropic origin in addition to volcanic and meteorites origins (e.g. [20]), and on droplets or crystals of radii  $a > \lambda$  (or even  $a \gg \lambda$ ). When these radii are quite comparable to the wavelength, the scattering efficiency is in  $\lambda^n$  with  $n > 2$ , and the directional patterns give significant intensities forwards, as shown Figure 8 and in Koutchmy and Koutchmy in [31]. In the case of Venus, these patterns must be convolved by the extent of the solar disk seen from the planet on about  $45'$  with a non-negligible limb darkening. This component dominates at the time of the inferior conjunctions of Venus (Figure 6).

In the case of the terrestrial atmosphere [26], the optical thickness  $\tau_0$  from ground at zenith, in the visible range, (see table 11.25 of [26]) is about 0.4 (i.e. a transmission of 0.64), which slowly improves towards the infra-red, except obviously in the molecular absorption bands of  $\text{CO}_2$ , abundantly present in the infra-red [25]. In the case of Venus, a focused study made by Ehrenreich *et al.* [32] shows that the attenuation at the concerned altitudes (heights above 70 km) do not indicate a great difference compared to the terrestrial case, with Mie scattering largely dominating Rayleigh scattering above 500 nm wavelength. To simplify, we consider in (2) a linear relationship, in order to evaluate the attenuation along the path see and therefore treat the optically thin case. To obtain a typical transmission of  $1/e$ , i.e. 4 times more than for a terrestrial type atmosphere, considering grazing on a homogeneous layer, it is enough to have a gas pressure—given by the density of the gas since we neglect the variation of temperatures—of  $100/4$  or 25 times less than the pressure of the sea level. This corresponds to an altitude of about 20 km on Earth (table 11.21 of [26]). The corresponding pressure  $P$  is about  $1/25$  bar which gives typically 75 km of altitude for Venus, using Figure 7. As indicated above, this altitude corresponds to the layers above the cloud layer found during surveys made with space missions, an agreement which is reassuring: the radiation will be able to go out of the crossed layer. Reference [32] gives a more extended treatment accounting for the wavelength, in particular towards the infra-red.

This evaluation of the order of magnitude can thus be refined to take into account the specific composition of the atmosphere of Venus and the obviously curved trajectory of the light rays, although, by definition, this curvature is limited according to the calculation of  $d$  (2). Nevertheless, further analysis shows that a multi-layer model should be developed [12]. Estimating orders of magnitude seems sufficient to evaluate the intensities (fluxes) observed in the arc and the variation of these intensities as a function of angular distance from the solar limb. Yet, observed intensities and the true width of the arc or aureole are indeed dominated by other factors, related to the considerable smearing showed by the point spread function of the instrument and including a defocusing factor, as well as by image motion due to the Earth's atmosphere. This factor, almost never analyzed, varies between values of the order of several arcsec for old observations and of the order of 0.2 or 0.3 arcsec for the best recent observations (transit of 2012) made with large and excellent telescopes on the ground and in space.

#### 5.4. An improvement of the model

The study of the refraction of the rays starts from the discussion of the index  $n_i$  of refraction of the atmosphere for the layer of density  $N_i$  or better, of the so-called refractivity  $(n_i - 1)$  known to be related to  $N_i$ :

$$(n_i - 1) = (n_0 - 1)N_i / N_0 \quad (3)$$

where  $(n_0 - 1)$  and  $N_0$  are the values taken at the reference level. The values are well known for the terrestrial atmosphere at sea level and above [26]; the refractive index is  $n_0 = 1.00029$  at  $T = 0^\circ\text{C}$ , see [26]. For the Venus atmosphere [33] with a composition where  $\text{CO}_2$  dominates,  $n_0$  is evaluated to be 1.00045 at the reference level (1 bar). It is then interesting to evaluate the refraction angle that presumably should be bigger than, or of the same order as the amplitude of the emerging



part of the planet Venus transiting before the Sun for the ML arc observation of a “mirrored” image of the solar limb. This amplitude was of the order of 1/10 of the Venus diameter or 6 arcsec. The refraction angle  $\alpha_i$  (in radian) by definition [1, 2, 6, 23] etc., would be, making simplifying assumptions as a constant temperature  $T_i$  of the effective atmospheric layer of length  $d$  bending (refracting) the rays:

$$\alpha_i \approx (n_i - 1)d/\delta h \quad (4)$$

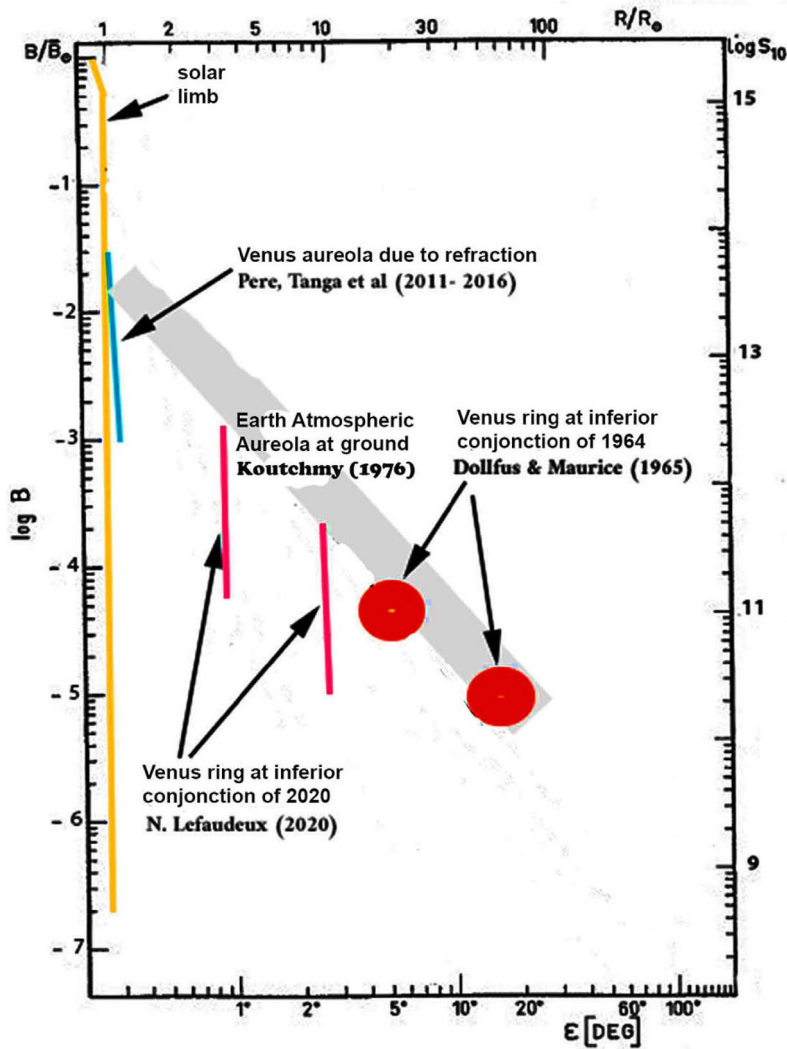
$d$  was defined above in (2) and its numerical value was found of order of 400 km. Let adopt a scale height  $\delta h$ , estimated equal to 4 km in the Venus atmosphere above the cloud layer at  $T \approx 200$  K at the altitude  $h$  near 70 km (Figure 7); this value is generally accepted in the literature [6, 12]. Using a typical density 3 orders of magnitude lower than the reference values,  $(n_i - 1) \approx 10^{-3}(n_0 - 1)$ . This leads to a refraction angle of order of 10 arcsec, as needed to explain the ML arc. This value is still compatible with the evaluation<sup>5</sup> made by Link [1, 2] for Venus, (see his formula (5.17)). Larger values for  $\alpha_i$  would possibly better explain the sensitivity of the ML arc intensity, taking into account the large limb darkening effect at the extreme limb of the Sun especially in the blue region.

Intensities of the arc observed outside the solar limb at distances much further out than the ML arc (see [6, 12]) drop quickly with the distance to the solar limb (see Figure 9). A correct and more valuable calculation must be done with many layers (see [6, 12] and the Baum and Code paper [23]).

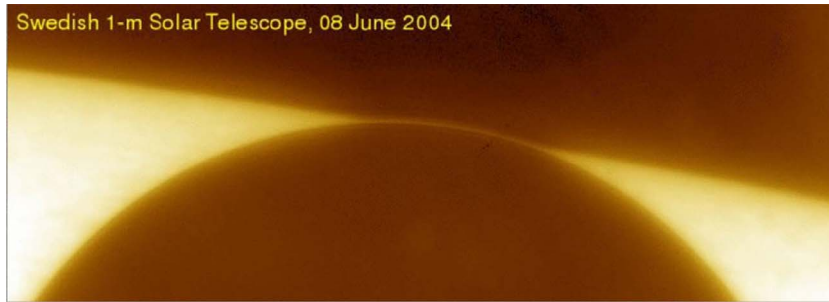
For a more elaborated treatment of the refraction effects in planetary atmospheres, with an application to the case of the ML arc and especially taking into account the differential refraction effect due to the radial gradient of atmospheric densities, the reader may refer to the article devoted to the analysis of refraction in astrophysics by Bruno Sicardy, in this special issue [22]. This elaborated theory is based on the analysis of the refraction for explaining the attenuation of light when observing the flux of a bright star at infinity crossing a transparent planetary atmosphere belonging to an object in the solar system. The light is then dispersed by the crossing of different layers of different gas densities and, accordingly, different values of refraction angles. There is an apparent decrease of the flux (magnitude) of the star when the beam approaches the surface of the planet, leading to the introduction of a parameter called the “half light level”. It is applied to the case of a finite distance source of light like our Sun to explain the sort of “mirrored” highly distorted image of the limb producing an arc and further out, an aureola or ring effect, including the radial variations of the intensities of the refracted images (see [6, 12, 24]). In case of the atmosphere of Venus a complication is appearing because one deals with a haze-polluted atmosphere with aerosols and clouds (Figures 7 and 8 and Section 5.3 above).

Finally, to better understand the attenuation due to aerosols and show their importance, it is wise to consider again the phenomenon of halo that appears at lower conjunctions (Figure 6), to be compared with the arc of ML measured by Pere, Tanga *et al.* (2011–2016) (see [6, 12] and Figure 9). Very close to the solar limb, it is the refraction that produces an intense arc that can be compared to a sort of “mirrored” highly distorted image of the solar limb, while further away, with Venus well outside the disk, it is the scattering on aerosols that dominates in first approximation, making a bright ring appear around the planet. In fact, it would probably be necessary to consider the phase effects on the planet reflecting the solar light beyond the planetary limb and the double scattering, to better explain the intensities in the ring. Figure 9 summarizes different measurements, according to the distance to the limb of the Sun. Aureoles and rings have undoubtedly variable thicknesses, hence there is an obvious difficulty to compare

<sup>5</sup>Where the refraction angle is given in arcmin, the pressure in mm of Hg and the temperature in absolute unit. We take  $T = 190$  K (see Figure 7) and get with his evaluated parameters for an atmosphere made of CO<sub>2</sub>, and a pressure of 1 mm of Hg, a typical refraction angle of 17 arcsec.



**Figure 9.** A synthetic figure representing the radial variations of intensities ( $B$ -brightness or luminance of visible light) of the aureole and rings of Venus seen at inferior conjunctions, including transits at the limb of the sun. The arc of ML would be very close to the limb and it is therefore part of the radial variation shown in blue of the aureole according to Pere, Tanga *et al.* (2011–2016) [6]. Further in light gray, typical variations of the luminance of the solar aureole with a clear daytime sky (according to Koutchmy [31]) at sea level or moderate altitude are shown to evaluate the contrasts of the rings of Venus during inferior conjunctions, according to Dollfus and Maurice [19] in red-brown and according to Lefaudeux 2020 in red see 2020 inferior conjunction of Venus—HDR astrophotography by Nicolas Lefaudeux ([hdr-astrophotography.com](http://hdr-astrophotography.com)). Note the log–log scale. On the right the luminance scale is in  $S_{10}$  units (number of stars of magnitude 10 per square degree) and at left, in units of the average brightness of the solar disk in the visible light. The position of the solar limb with its limb darkening is shown in yellow on the left.



**Figure 10.** Unretouched selected frame from the best film obtained on the SST of La Palma (Canary Islands) during the transit of 2004. Wavelength 705 nm. The arc of ML is possibly almost resolved with this beautiful image where nevertheless the quality is still limited by the image motion, the blur and the distortion (PSF equal to  $0.3''$  on average whereas the theoretical resolution should be  $0.15''$ ). The “bump” at the limb of the Sun is easily guessed. No black-drop effect perceptible even for a distance limb of Sun-outer limb of the Venus planet atmosphere of order of 1 arcsec and an intensity comparable to the solar intensity at the extreme limb.

the reported intensities. Ultimately, it would be necessary to correct the reported values for the considerable spread and blur in the images with respect to the true value of the thicknesses.

## 6. Modern measurements of the Lomonosov arc

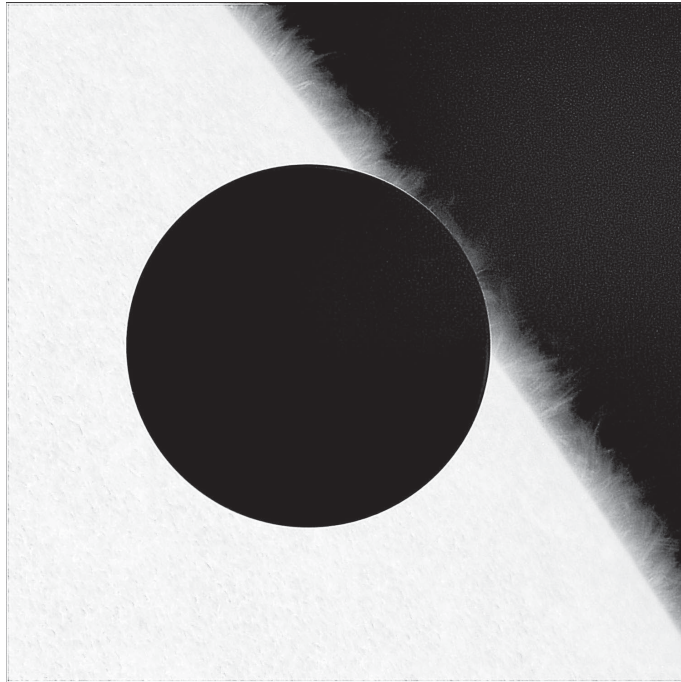
Let here conclude with two modern observations of the ML arc during the most recent transits of 2004 and 2012.

### 6.1. *The ground-based high-resolution observation of 2004*

The Swedish Solar Telescope (SST) is in 2004 the best ground-based solar telescope with an effective aperture diameter of 95 cm. It has taken many images from the excellent site of La Palma (Canary Islands), as well as filmed sequences, with many high frame rate images (see [vt-2004.kva.astro.su.se/movies/](http://vt-2004.kva.astro.su.se/movies/)). The wavelength (705 nm) is in the near infrared to reduce the smearing effects of the Earth’s atmosphere. Figure 10 is an image extracted from the best film; it has been severely selected to eliminate images with motion and distortions, in order to provide the best possible quality at the time of the egress, the planet Venus appearing as described by ML, i.e. slightly off the limb of the Sun. No processing was made on this image. The “bump” or “blister” or “bulge” is easily guessed and, moreover, no trace of a black drop effect is perceptible. This is obviously due to the excellent quality of the image, since the smearing, although not perfectly uniform, is evaluated as an average  $0.3''$ , but also to the fact that the planet is completely outside the solar limb. The ML arc is perfectly seen, and its intensity approximately corresponds to the intensity at the extreme solar limb, at  $0.3''$  from the limb or a little less. At the wavelength of observation, the theoretical resolution of the telescope is  $0.15''$  for the PSF full width at mid height. A measurement of the arc width gives  $0.25''$  which in 2004 provided the best evaluation ever made.

### 6.2. *The space observation of 2012*

The best measurements so far was obtained in 2012 by the largest existing solar telescope in space, the SOT of the Japanese Hinode mission. Without any smearing due to the Earth’s

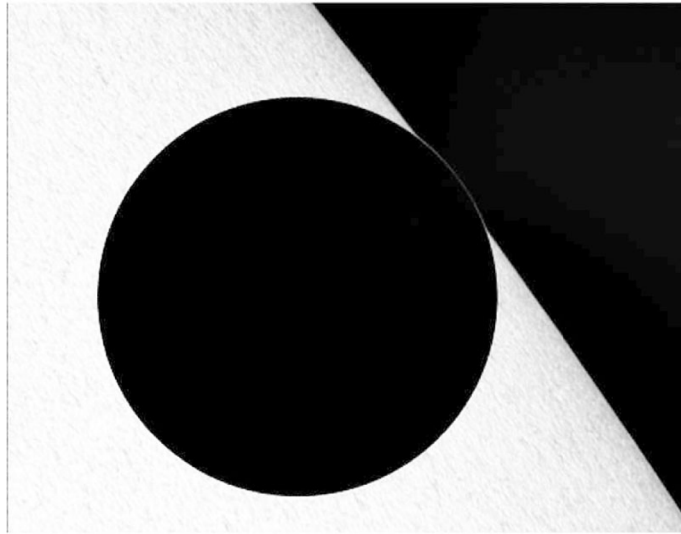


**Figure 11.** Extract of one of the very high-resolution images obtained with the SOT of the Hinode mission, during the 2012 transit. The filter used (width 0.4 nm) is the one used to show the spicules or solar prominences thanks to the large emission in the broad chromospheric line called H of CaII. The chromospheric emission line fringe above the solar limb is on average 7 arcsec wide, i.e. about 4500 km on the Sun and about 3 times less at the distance of Venus. The ML arc is very thin and shows that the horns (parts of the arc closer to the solar limb) are thicker and more intense than the top of the loop or arc. Note that the solar disk is slightly overexposed on this reproduction in log I (logarithm of intensities), although the solar structures are still perceptible. No darkening at the extreme limb in this bandwidth and virtually no artifacts recorded in this image. Image by Goodarzi and Koutchmy [34, 35].

atmosphere, the spatial resolution is thus completely determined by the instrument alone and the results are perfectly reproducible, even at the shortest wavelengths of the narrow band imaging filter where the resolution is less limited by diffraction.

Using these data, an extensive study was done in the thesis of Hadis Goodarzi [34, 35] about umbral dots in sunspots. The PSF<sup>6</sup> has been deduced [34] during the transit of Venus, for different filters, with two assumptions: (i) that no stray light should appear on the disk of Venus in projection on the solar disk nor on the sky background beyond the solar limb; (ii) using a very narrow solar limb as given by the most recent solar atmosphere model, in particular in the vicinity of the so-called temperature minimum region where the hypothesis of a stratified atmosphere in hydrostatic equilibrium is still perfectly valid. This region is located at about 500 km of altitude in the Sun with respect to the reference model level at the disk center. The author deduces a real solar limb smearing, similar to what the most recent solar atmosphere model gives, found

<sup>6</sup>The point spread function or PSF was deduced without assuming a gaussian type behavior in its far wings that extend to large distances, but assuming a shift-invariant and axi-symmetric PSF with a core corresponding to a diffraction limited resolution for the corresponding wavelength.

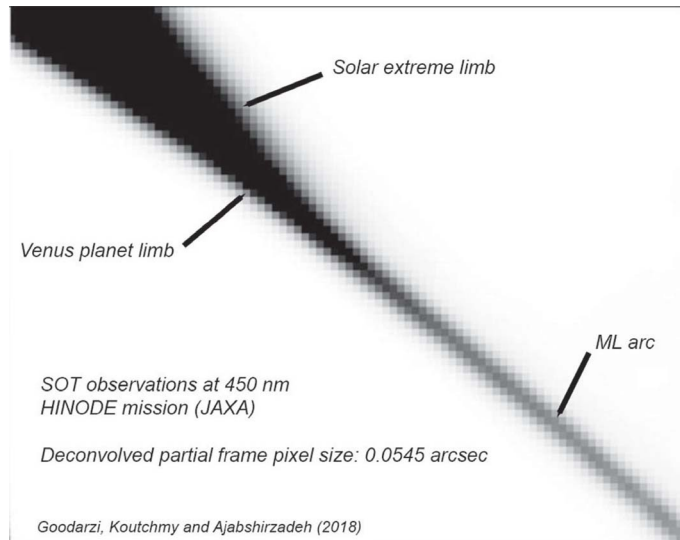


**Figure 12.** Image of the planet Venus in the blue (450 nm; 0.4 nm FWHM filter) of an image obtained with the SOT of the Hinode mission after the 3d contact at egress. Illustration to show the effects on the solar disk at the limb with a large center-limb darkening effect reaching a large value at the extreme limb in the arcsec range. The refraction effects in the atmosphere of the planet is shown by selecting a good exposure and a low contrast to show the variations all around the planet at different distance of the solar limb. Note the elongated granulation near the solar limb due to the limb shortening effect on granules.

to be  $0.215''$  as seen from Earth. The PSF has been deduced with an excellent signal-to-noise ratio and can therefore be applied to the images, in order to improve the resolution by 2D deconvolution (see [35]). The resulting images have a uniform resolution corresponding to the theoretical resolution given by the width at half intensity of the PSF, accounting also for the far wings of the smearing function due to diffraction effects on the mirrors, the secondary's spider supports and the filter, up to a significant distance quantified in arc minutes for intensity levels below  $1/1000$  (see [34]).

To discuss the ML arc with the best possible resolution, we selected images obtained with the blue filter in the pseudo continuum—avoiding as much possible the deep dark lines of the Fraunhofer spectrum—of the solar spectrum at 460 nm with a bandwidth of 0.4 nm. The deconvolution of the images was done by seeking the best compromise in terms of signal to noise ratio and avoiding the Gibbs effects.<sup>7</sup> The result is interesting (Figure 12 illustrates the effects). The ring or arc or halo is observed not only outside the solar edge, but also inside the disk but with a limited extent. The interpretation seems obvious as long as one takes into account the center-limb effect of the solar disk, quite strong in the blue: the refraction reproduces a portion of the solar disk farther from the edge and therefore brighter as predicted by Link (see [1, 2]). The parts farther from the limb hardly show this effect anymore and in fact the solar granulation is visible up to the edge of the Venus image as for example at the side opposite to the solar edge. Thus, the specificities of the refraction mechanism in the atmosphere of Venus are illustrated on this figure. Let us recall that the spatial resolution in these images, of the order of  $0.1''$ , is largely superior to all that could be reported with visual observations of the transit, by about a ratio 30, which makes it a little illusory to make quantitative comparisons with former observations, without saying that

<sup>7</sup>See the definition in Gibbs phenomenon—Wikipedia.



**Figure 13.** 16 times enlarged part of Figure 12 in negative with high contrast to show the arc of light due to refraction, about the solar disk near the limb and outside the disk (ML arc) after deconvolution. The scale is given by the size of the pixel, i.e.  $0.0545''$  or 11 km at the planet Venus distance, permitting a quick evaluation of the apparent width of the arc.

these new results are photometrically (quantitatively) correct (see Figures 13 and 14). It should be noted that the refraction-bent solar rays seen in the arc and partially on the disk are hardly attenuated in the Venus atmosphere. They come from high layers where the pressure is low and refraction is limited as in [6] and [12]. Without extinction, the intensity of bended rays giving the arc would show the solar intensity.

To go further and derive some quantitative values on the ML arc, one may enlarge considerably the images, about 16 times, showing the pixels. Figure 13 shows a small part of Figure 12 located on the arc, both outside the solar disk and on the disk, upper part, with the same orientation. The scale is now given by the pixel size equal to  $0.0545''$  or 11.1 km on Venus. We estimate the half width at mid-intensity of the arc outside the disk at about 2.5 px or 28 km. In fact, this width varies along the arc around 2.5 px and it would be necessary to make an analysis all along the arc to determine these inequalities or dispersion. They presumably reflect effects of the cloud cover, which is more or less changing with the retrograde rotation of the atmosphere in 4 days of the atmosphere, as well as the position in latitude and longitude. In fact, other diagnostics can be proposed such as obtaining spectra of different regions of the atmosphere in projection on the disk [32] or on the arc of ML and thus outside the solar disk. This has been attempted with the Yunnan NVST ground-based 98 cm aperture telescope (see Bazin *et al.* [36]).

These spectroscopic results are numerous, but their analysis is not yet finished, and, after cleaning of instrumental effects, they will be published later.

## 7. Conclusions

The study of the phenomena occurring during the transits of Venus in front of the Sun is relevant to the contemporary research in exoplanets, including exo-Earths and exo-Solar systems, when transits are observed e.g. [21]. This theme becomes a priority in astronomical and astrophysical research for the coming decades, on the ground and in space. Thus, the discovery of a rather



**Figure 14.** Partial frame of the deconvolved image of Figure 12 in positive to show the whole ML arc outside the solar disk. Note the slightly heterogeneous distribution of light along the arc suggesting that the resulting resolution after deconvolution is barely sufficient to guess the details of the heterogeneous atmosphere of Venus at the altitude where the refraction is efficient. The relative intensities recorded in the arc vary in relative units from 370 (solar side) to 80 in the arc near its top; at the center of the Sun the average disk intensity is 800. On the disk of Venus the intensities are almost zero, as in the sky beyond the solar limb, after deconvolution. The impression here is that the arc outside the solar limb is attenuated in a significant way, contrary to the case of Figure 10 made in the near IR or of Figure 11 made in the broad chromospheric line of CaII H with a much less limb darkening of the solar disk.

thick atmosphere around Venus in 1761 by ML was a major step on the rocky path which may someday lead to another invaluable discovery long awaited, one that would ultimately provide evidence of life elsewhere than on our planet. This is an exhilarating and certainly historic task that Academician M. Lomonosov has accordingly contributed to tackle by making the first step: suggesting the existence of an atmosphere around our sister planet Venus.

In this sense, as Zeliony [37] has recently pointed out, ML can be considered a precursor of the philosophical current known as the Russian cosmism—opposed to Marxist thought—at the origin of the space exploits of the former USSR, which the Russian Federation of today is trying to take over. As mentioned in [37], not only has this led to the huge investments made in the past with the “Venera” program, but the IKI (Moscow Center for Space Studies) is preparing two new missions at the end of the present decade to the planet Venus for searching there signs of life, in its atmosphere and even on the ground, in response to the hopes of habitability largely but somehow exaggeratedly expressed in the 18th century by ML and his contemporaries. Note that NASA has also planned a new space mission to Venus after 2030, with the goal of landing a probe on the ground. It is also speculated that the planet may be showing much sought-after signs of microbial life even in the very hostile atmosphere at the surface [37].

In this conclusion, let also remember in passing that Halley’s method, so much claimed and developed on the transits of Venus to measure absolute distances in the solar system, turned

out to be based on a kind of misunderstanding for the precise measurements and dating of contacts. The fault was to neglect the effects due to the thick atmosphere of the planet and the effects of refraction, quite unequal otherwise, effects which had been neither anticipated nor even definitively recognized for more than one century. Let us finally notice that what we systematically described in this paper as the ML arc is based on modern knowledge and measurements. It cannot be straightforwardly identified with what Lomonossov described in 1761 claiming that the planet Venus owns an atmosphere as the Earth, or even thicker. Although the method he used and his instrumentation were optimum for his time, what really Lomonossov could have seen with his eyes and brain remains partly unproven and possibly affected by a kind of “psycho-physiological” effect not considered in this article and likely to be of little interest.

### Conflicts of interest

The author has no conflict of interest to declare.

### Acknowledgments

Many people helped me during the elaboration of this article. First of all, I thank my University teachers of the 1960ies and among them, the late F. Link who introduced me to the effects of refraction for the Earth's atmosphere and showed me the “vase atmosphérique” concept when rising together to the Pic du Midi Observatory at sunrise. I thank William Sheehan for meaningful discussions that sometimes went far beyond Venus. Remarks of Jay Pasachoff were also greatly appreciated. Hadis Goodarzi, Paolo Tanga, François Sèvre and Nicolas Lefaudeux provided material, advices and discussions for preparing the paper; Bruno Sicardy has been a meaningful and professional reviewer of the first draft of this paper. David Valls-Gabaud and Cyrille Bazin worked on the topic together with the author and the Chinese team headed by Zhi Xi, to perform the Yunnan experiment. Finally, Pierre Léna and Luc Dettwiller friendly helped me with the editing.

Several selected images from NASA, ESO and JAXA space missions were used in the course of this work; these international providers of images made freely available are highly appreciated.

### References

- [1] F. Link, *Eclipse Phenomena in Astronomy*, Springer, New York, 1969, p. 215-216.
- [2] F. Link, “Passages de Vénus sur le Soleil”, *Bull. Astron. Inst. Czech.* **10** (1959), no. 4, p. 105-115.
- [3] V. Shiltsev, “The 1761 discovery of Venus' atmosphere: Lomonosov and others”, *J. Astron. Hist. Herit.* **17** (2014), no. 1, p. 85-112.
- [4] W. B. Hubbard, J. J. Fortney, J. I. Lunine, A. Burrows, D. Sudarsky, P. Pinto, “Theory of extra-solar giant planet transits”, *Astrophys. J.* **560** (2001), no. 1, p. 413-419.
- [5] ESO, [www.eso.org/public/outreach/eduoff/vt-2004/](http://www.eso.org/public/outreach/eduoff/vt-2004/).
- [6] P. Tanga, T. Widemann, B. Sicardy, J. M. Pasachoff, J. Arnaud, L. Comolli, A. Rondi, S. Rondi, P. Sutterling, “Sunlight refraction in the mesosphere of Venus during the transit on June 8th, 2004”, *Icarus* **218** (2012), no. 1, p. 207-219.
- [7] W. Sheehan, J. Westfall, *The Transits of Venus*, Prometheus Book Publ., Amherst, NY, 2004.
- [8] L. Langevin, *Lomonossov, 1711–1765, Sa vie, son œuvre*, 1st ed., Éditions Sociales, Paris, 1967, 320 pages.
- [9] M. V. Lomonosov, “The appearance of Venus on Sun as it was observed at the St. Petersburg Emperor's Academy of Sciences on May 26, 1761 (St. Petersburg, Russia). (Petersburg: Academy of Science Office)”, in *Memoirs in Physics, Astronomy and Instruments Building* (M. V. Lomonosov, ed.), U.S.S.R. Academy of Sciences, Leningrad, 1955 (see also references in [4]).
- [10] C. Lagrange, “Transit of Venus on December 6, 1882. Documents and observations. Mission of Chile”, *Ann. Obs. Brux.* **5b** (1884), p. 81-123, <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/1884AnOBN...5b.81N/abstract>.
- [11] J. M. Pasachoff, G. Schneider, L. Golub, “The black-drop effect explained”, in *Transits of Venus: New Views of the Solar System and Galaxy Proceedings IAU Colloquium No. 196* (D. W. Kurtz, ed.), Cambridge University Press, 2004.



- [12] C. Pere, "Study of the atmosphere of Venus using a refraction model during the transit in front of the Sun of June 5–6, 2012", PhD Thesis, 2016, University of Nice Sophia Antipolis, Nice, France.
- [13] J. M. Pasachoff, G. Schneider, Th. Widemann, "High resolution satellite imaging of the 2004 transit of venus and asymmetries in the cytheran atmosphere", *Astron. J.* **141** (2011), no. 4, article no. 112, 9 pages.
- [14] J. M. Pasachoff, W. Sheehan, "Lomonosov, the discovery of Venus's atmosphere, and Eighteenth century transits of Venus", *J. Astron. Hist. Herit.* **15** (2012), no. 1, p. 3-14.
- [15] H. N. Russell, "The Atmosphere of Venus", *Astrophys. J.* **9** (1899), p. 284-299.
- [16] A. Young, L. Young, "Observing Venus near the Sun?", *Sky. Tel.* **43** (1972), p. 140-144.
- [17] P. Guérin, *Planètes et satellites*, Larousse, Paris, 1967, 158 pages.
- [18] A. Dollfus, "Polarization studies of planets", in *Planets and Satellites* (G. P. Kuiper, B. M. Middlehurst, eds.), The University of Chicago Press, Chicago, 1961, Chapter 9, p. 343-399.
- [19] A. Dollfus, E. Maurice, "Physique planétaire-Etude de l'allongement des cornes du croissant de Vénus en juin 1964", *C. R. Acad. Sci.* **260** (1965), no. 3, p. 427-430.
- [20] L. Li, H. Che, X. Zhang, C. Chen, X. Chen, K. Gui, Y. Liang, F. Wang, Y. Derimian, D. Fuertes, O. Dubovik, Y. Zheng, L. Zhang, B. Guo, Y. Wang, X. Zhang, "A satellite-measured view of aerosol component content and optical property in a haze-polluted case over North China Plain", *Atmos. Res.* **266** (2021), article no. 105958.
- [21] Y. Bétrémieux, L. Kaltenecker, "Impact of atmospheric refraction: how deeply can we probe exo- earth's atmospheres during primary eclipse observations?", *Astrophys. J.* **791** (2014), no. 1, article no. 7.
- [22] B. Sicardy, "Study of atmospheres in the solar system, from stellar occultation or planetary transit", *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 213-241.
- [23] W. A. Baum, A. D. Code, "A photometric observation of the occultation of sigma Arietis by Jupiter", *Astrophys. J.* **58** (1953), no. 1208, p. 112-116.
- [24] C. Pere, P. Tanga, Th. Widemann, Ph. Bendjoya, A. Mahieux, V. Wilquet, A. C. Vandaele, "Multilayer modeling of the aureole photometry during the Venus transit", *Astron. Astrophys.* **595** (2016), article no. A115.
- [25] E. Marcq, "Prélude à la mission Vénus Express: étude de l'atmosphère par spectro-imagerie infrarouge", PhD Thesis, Université Paris VII, LESIA Obs. de Paris-Meudon, Paris, France, 2006.
- [26] G. Schubert, R. L. Walterscheid, "Earth", in *Allen's Astrophysical Quantities* (A. N. Cox, ed.), AIP Press and Springer, New York, NY, 2000, Chapter 11, p. 239-292.
- [27] A. T. Basilevsky, J. W. Head, "The surface of Venus", *Rep. Prog. Phys.* **66** (2003), no. 10, p. 1699-1734.
- [28] S. Koutchmy, G. Nikolsky, "The night sky from Salyut 7", *Sky Telesc.* **65** (1983), no. 1, p. 23-25.
- [29] G. M. Nikol'skii, Yu. V. Platov, M. Belmahdi, V. V. Butov, E. S. Vanyarkha, E. S. Dzhaniybekov, J.-L. Chretien, S. Koutchmy, "Stratospheric luminescence observed on the Salyut-7 orbital station", *Issled. Zemli Kosmosa* **6** (1987), p. 3-8.
- [30] Yu. V. Platov, S. Koutchmy, S. Sh. Nikolayshvili, "Atmospheric emission layers according to photographic observations from the international space station", *Geomagn. Aeron.* **59** (2019), no. 3, p. 351-355.
- [31] O. Koutchmy, S. Koutchmy, "The coronal aureole in the time of total solar eclipse", *Astron. Astrophys. Suppl.* **13** (1976), p. 295-303.
- [32] D. Ehrenreich, A. Vidal-Madjar, T. Widemann, G. Gronoff, P. Tanga, M. Barthélemy, J. Lilensten, A. Lecavelier des Etangs, L. Arnold, "Transmission spectrum of Venus as a transiting exoplanet", *Astron. Astrophys.* **537** (2012), p. L2-8.
- [33] A. Stolzenbach, "Étude de la photochimie de Vénus à l'aide d'un modèle de circulation générale", PhD Thesis, UPMC—Université Paris 6 Pierre et Marie Curie, Paris, France, 2016, Planétologie. in French. See also <https://www.researchgate.net/profile/Aurelien-Stolzenbach>.
- [34] H. Goodarzi, S. Koutchmy, A. Adjabshirizadeh, "Improved SOT (Honode mission) high resolution imaging observations", *Astrophys. J.* **358** (2015), article no. 25, arXiv:1290160.
- [35] H. Goodarzi, S. Koutchmy, A. Adjabshirizadeh, "Proper motions of sunspots umbral dots at high temporal and spatial resolution", *Astrophys. J.* **860** (2018), no. 2, article no. 168, arXiv:1807.05531.
- [36] C. Bazin, X. Zhi, D. Valls-Gabaud, S. Koutchmy, P. Rocher, Z. Y. Zin, Y. Fu, L. Yang, G. Q. Liu, Z. Liu, K. Ji, H. Goodarzi, "The June 6 2012 transit of venus: imaging and spectroscopic analysis of the upper atmosphere emission", in *SF2A 2014* (J. Ballet, F. Bounaud, F. Martins, R. Monier, C. Reyle, eds.), 2014.
- [37] L. Zeliony, "At the edge of the Sun, a pupyr appeared", in *The Kommersant, 28 November 2021 in Science, Lomonosov Readings, held in Arkhangelsk and Kholmogory*, 2021.



---

Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

# Les effets optiques de la turbulence atmosphérique dans les images astronomiques

## *Optical effects of atmospheric turbulence in astronomical images*

Daniel Bonneau<sup>ⓧ a</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire Lagrange, Université Côte d'Azur, Observatoire de la Côte d'Azur, CNRS,  
Blvd de l'Observatoire, CS 34229, F-06304 Nice, France  
*Courriel*: [daniel.bonneau@oca.eu](mailto:daniel.bonneau@oca.eu)

**Résumé.** L'aspect souvent flou des images astronomiques au foyer d'un télescope est attribué à l'agitation atmosphérique.

L'étude de la propagation des ondes lumineuses à travers l'atmosphère terrestre turbulente a permis de comprendre l'existence d'une turbulence optique résultant des phénomènes de diffraction qui accompagnent la réfraction des rayons lumineux.

La turbulence optique est décrite par des paramètres (paramètre de Fried, angle d'isoplanétisme, temps de cohérence, échelle externe) qui caractérisent l'amplitude et la phase du front d'onde sur la pupille du télescope.

On en déduit les propriétés des images (à courte ou longue pose) formées au foyer du télescope ainsi que la description des effets de la turbulence sur ces images (scintillation, agitation, étalement) et sur les observations interférométriques (effet piston).

**Abstract.** The often blurry appearance of astronomical images at a telescope focus is attributed to atmospheric agitation.

The study of the light propagation through the turbulent Earth atmosphere has made it possible to understand the existence of optical turbulence resulting from diffraction phenomena that accompany the refraction of light rays.

Optical turbulence is described by parameters (Fried parameter, isoplanetism angle, coherence time, external scale) which characterize the amplitude and the phase of the wave front on the telescope pupil.

We deduce the properties of the images (short or long exposure) formed at the telescope focus as well as the description of the effects of turbulence on these images (scintillation, agitation, spreading) and on interferometric observations (piston effect).

*Published online: 8 February 2023, Issue date: 11 August 2023*

## 1. Introduction

Dès le XVIII<sup>e</sup> siècle, l'*agitation atmosphérique* est identifiée par les astronomes comme une cause majeure de dégradation des images télescopiques. Ainsi, Isaac Newton, écrit-il dans la troisième édition de son livre "Optiks" (1717) : "*Long telescopes may cause objects to appear brighter and larger than short ones can do, but they cannot be so formed as to take away the confusion of the rays which arises from the tremors of the atmosphere*" [1].

Seule, la *scintillation* de l'éclat des étoiles brillantes ainsi que les *ombres volantes* apparaissant sur le sol durant les éclipses de Soleil sont perceptibles à l'œil nu.

Au foyer d'un petit télescope on constate que l'image stellaire, en *agitation* permanente, permet cependant d'atteindre le pouvoir de résolution angulaire théorique du télescope, alors que dans un grand télescope, l'image plus stable, devient floue sous l'effet de l'*étalement*.

Les observateurs ont également noté l'aspect inhomogène et rapidement variable de l'éclairement de l'objectif du télescope, associé aux *ombres volantes*.

Des observations visuelles et des images photographiques à très court temps de pose obtenues au moyen d'un fort grossissement, montrent l'aspect granuleux de ces images en "*grappe de raisins*", décrite notamment par Jean Rösch [2].

Les phénomènes de la *scintillation*, l'*agitation* et l'*étalement* ainsi que les *ombres volantes*, sont reconnus comme des effets dus à la structure thermique inhomogène de l'atmosphère (voir par exemple [3, 4]) dont l'étude, pour les besoins de la météorologie, conduit à l'élaboration des premières théories de la *turbulence atmosphérique* [5, 6]. Les performances des observations astronomiques étant limitées par la qualité des images en fonction des conditions atmosphériques variables dans le temps et selon le site d'observation, William Pickering [7] et André Danjon [8] élaborent de façon empirique des méthodes pour estimer quantitativement, au moyen d'un petit télescope, la dégradation des images par rapport à la tache d'Airy théorique fixée par la diffraction de la lumière.

Pour remédier à la perte en résolution angulaire des observations stellaires due à la turbulence atmosphérique, les astronomes ont tout d'abord utilisé avec succès la méthode interférométrique imaginée par Hyppolite Fizeau, mais cela a été au prix d'une perte significative en sensibilité [9].

L'astronome américain Horace Welcome Babcock en 1953 [10] et l'opticien soviétique Vladimir Pavlovich Linnik en 1957 [11] furent les premiers à envisager la possibilité de compenser les effets de la turbulence atmosphérique au moyen d'une *optique adaptative* ; une idée bien en avance sur les possibilités théoriques et techniques de leur époque.

Au début des années 1960, Jean Texereau interprète l'image observée au foyer d'un grand télescope comme produite par la surface d'onde déformée par les effets de la turbulence qui se comporte comme un *écran de phase* [12], alors que Georges Courtes, dans les actes du colloque UAI N°19 consacré au choix des sites astronomiques, écrit : "*Tous les phénomènes constatés, agitation, étalement, scintillation et distorsion sont les effets d'une seule et même cause : les déformations de la surface d'onde, causées par les inhomogénéités d'indice de réfraction de l'atmosphère.*" [13].

Pour aller au-delà, il manque encore une théorie de la formation des images en présence de turbulence.

L'invention du *laser*, source de lumière cohérente aux longueurs d'ondes optiques, conduit les physiciens à s'intéresser à l'interaction entre la lumière et la matière ainsi qu'à la propagation de la lumière à travers un milieu turbulent.

Vers 1965, notamment motivé par des applications militaires du laser, le physicien américain David L. Fried (alors membre du Conseil Scientifique de l'armée américaine) réalise une première étude correcte du problème, jetant les bases théoriques nécessaires à la compréhension

des effets de la turbulence atmosphérique et ouvrant la voie à l'optique adaptative qui vise à les éliminer.

De son côté, Antoine Labeyrie, familiarisé avec l'optique cohérente, assimile la structure tachetée des images stellaires aux *speckles* observés quand un faisceau de lumière laser est réfléchi par une surface diffusante. Il en déduit que les images brouillées par la turbulence atmosphérique contiennent des informations jusqu'à la résolution angulaire du télescope limitée par la diffraction et invente en 1970 la technique de *speckle interferometry* ou *interférométrie des tavelures* [14].

Le gain d'un facteur d'environ 40 en résolution angulaire obtenu au foyer des plus grands télescopes de l'époque (aux longueurs d'ondes visibles) a des répercussions importantes notamment dans le domaine des observations astronomiques.

L'étude des étoiles doubles, importante pour la détermination des paramètres stellaires fondamentaux et l'étude de l'évolution stellaire, s'en trouve rajeunie [15, 16].

Les étoiles géantes rouges dont les diamètres avaient été mesurés par Michelson et Pease avec l'interféromètre du Mont Wilson en 1920 sont observables avec plus de détails. Ainsi, la structure complexe de l'atmosphère étendue de Betelgeuse et Mira est révélée en combinant résolution angulaire et spectrale [17]. Le développement de méthodes modifiées de l'interférométrie des tavelures permet d'obtenir les premières images du disque de Betelgeuse [18] et de résoudre la structure en amas de l'objet R136a au centre de la nébuleuse 30 Dor du Grand Nuage de Magellan [19].

L'extension des observations aux longueurs d'ondes infrarouges ouvre notamment la voie à l'étude de la morphologie d'objets dans les phases précoces de l'évolution stellaire [20].

Les progrès réalisés à la fois dans l'instrumentation et le traitement des données ont conduit à accroître les performances des observations et la qualité des résultats astrophysique, jusqu'à permettre l'étude d'objets extragalactiques comme les régions centrales de la galaxie à noyau actif NGC 1068 dans le visible [21] et l'infrarouge [22].

Ceci donne une nouvelle impulsion aux techniques d'imagerie à haute résolution angulaire et pousse au développement de la théorie de formation des images à travers la turbulence atmosphérique.

Dans ce contexte du début des années 1980, Roddier publie une présentation détaillée de la théorie décrivant les effets de la turbulence atmosphérique en astronomie optique [23] alors que Woolf donne ses arguments en faveur de la construction de grands télescopes au sol pour l'imagerie à haute résolution angulaire [24] et que Léna met en avant l'intérêt des observations à haute résolution angulaire dans l'infrarouge sur les grands télescopes [25].

Nous verrons dans la Section 2 que cette théorie repose sur la connaissance de l'atmosphère terrestre ainsi que sur la description des phénomènes physiques qui se déroulent dans ce milieu turbulent présentant des inhomogénéités d'indice de réfraction.

La propagation de la lumière dans l'atmosphère ainsi que les propriétés du front d'onde bosselé à l'origine de la formation des images au foyer du télescope seront évoquées dans la Section 3.

Dans la Section 4 sont rappelées les définitions des paramètres (*paramètre de Fried*, *angle d'isoplanétisme*, *temps de cohérence* et *échelle externe*), servant à caractériser les effets de la turbulence atmosphérique sur les images.

La formation et les propriétés des images à courte et longue poses, perturbées par la turbulence sont décrits dans la Section 5.

Les effets de la turbulence (*scintillation*, *agitation* et *étalement*) sur les images et en interférométrie stellaire à grande base (*effet piston*) sont abordés en Section 6.

La caractérisation de la turbulence optique est devenue un outil indispensable pour optimiser les méthodes d'observation à haute résolution angulaire. Les grands télescopes sont tous

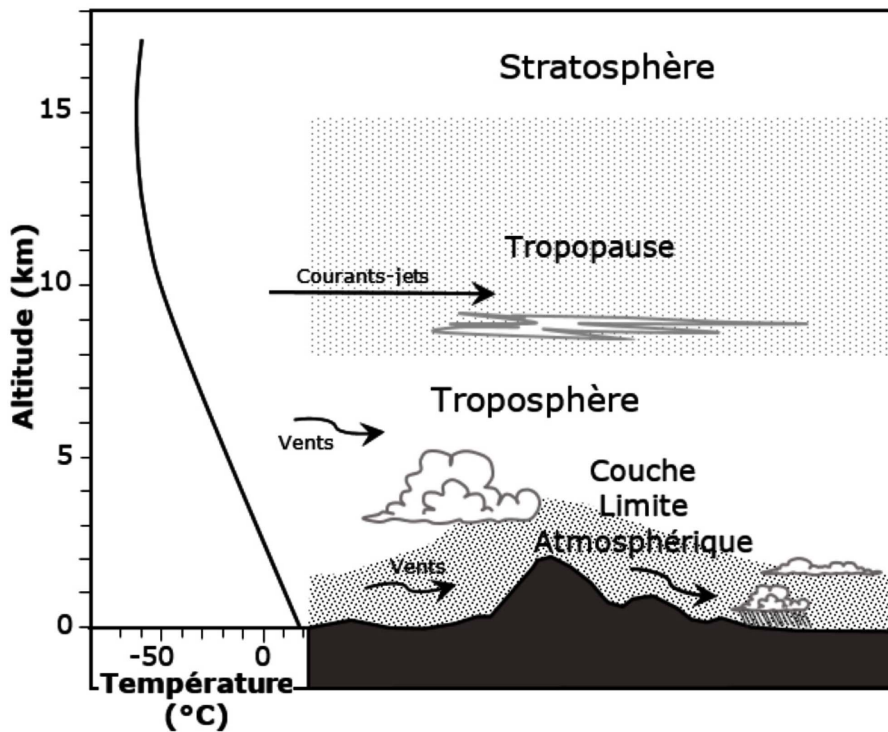


FIGURE 1. La troposphère : représentation schématique de sa structure (à droite) et de la variation de température (à gauche) en fonction de l'altitude.

maintenant équipés d'optiques adaptatives leur offrant des gains significatifs en résolution angulaire conduisant à des découvertes majeures en astrophysique stellaire et galactique évoquées dans la conclusion. Ainsi, les astronomes sont-ils en train de gagner la bataille contre le flou évoquée par Pierre Léna [26].

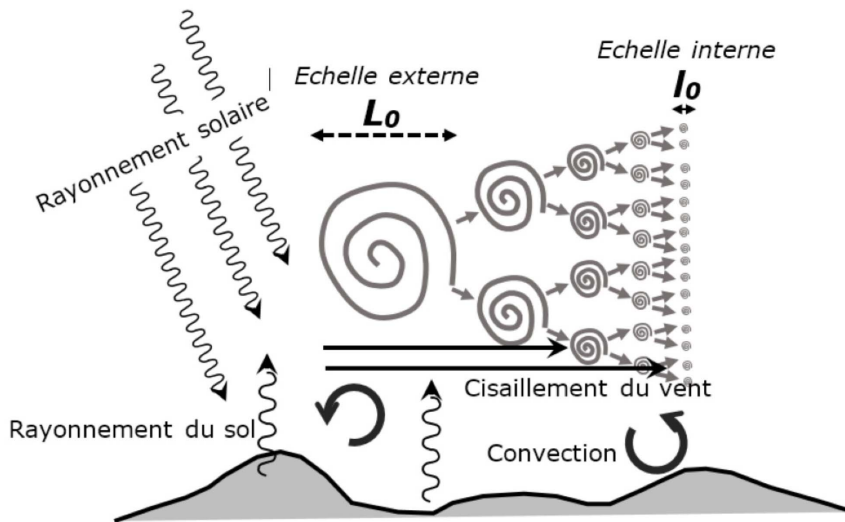
## 2. Propriétés de la turbulence atmosphérique

### 2.1. Sa localisation : la troposphère

L'observation des ombres volantes et de la scintillation a permis d'attribuer la dégradation des images astronomiques aux turbulences agitant l'air dans la partie basse de l'atmosphère terrestre, nommée *troposphère*, qui s'étend entre le sol et la *stratosphère* à une altitude variable de 8 km à 15 km (Figure 1). Siège des phénomènes météorologiques, la troposphère est structurée en trois grandes zones : la *couche limite atmosphérique* (CLA) au voisinage du sol et à basse altitude, l'*atmosphère libre* et la *tropopause* où circulent les *courants-jets* (*jet-streams*).

Parcourue de mouvements verticaux (convection thermique) et horizontaux (vents) qui tendent à la structurer en couches, elle constitue un milieu physiquement inhomogène et agité propice au développement de turbulences.

Elle constitue également un milieu transparent aux longueurs d'ondes visibles et infrarouges mais dont la mauvaise qualité optique est la cause principale de la dégradation des images astronomiques.



**FIGURE 2.** Représentation schématique de la production de turbulence dans l'atmosphère. De l'énergie thermique et cinétique est produite par le rayonnement solaire, le rayonnement du sol, la convection et les effets de cisaillement des vents. Elle est transférée selon le processus de *cascade de Kolmogorov* des plus grands tourbillons (taille caractéristique  $L_0$ ) vers les plus petits (taille  $l_0$ ) qui la dissipent.

## 2.2. La turbulence atmosphérique

### 2.2.1. Structure de la turbulence

L'atmosphère terrestre est le siège d'échanges thermiques entre le sol et l'air ou entre masses d'air accompagnés de phénomènes de cisaillement entre les couches d'air entraînées par les vents. Les énergies thermiques et cinétiques en jeu dans ces phénomènes produisent le développement de turbulences au sein de l'atmosphère (Figure 2).

A la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, Osborne Reynolds introduit en mécanique des fluides un paramètre, le *nombre de Reynolds*, pour caractériser le type régime (laminaire, transitoire, turbulent) d'un écoulement défini par :

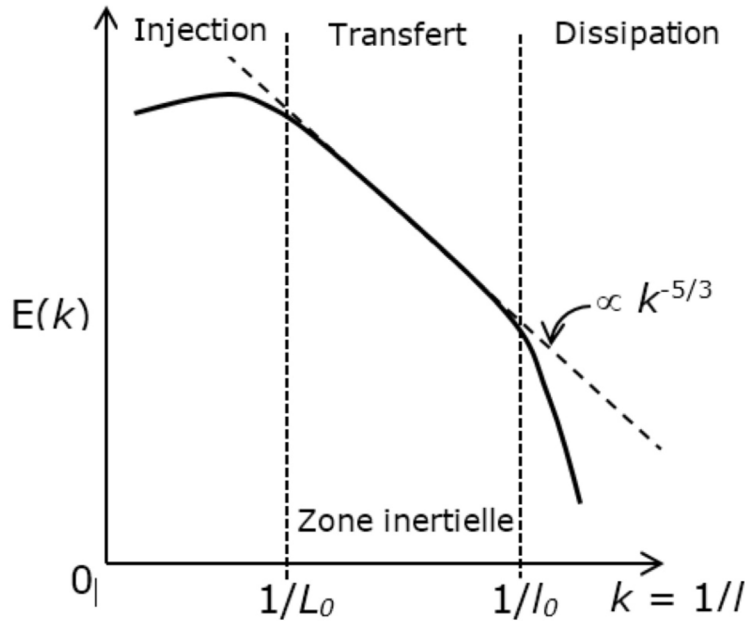
$$Re = \frac{VL}{\nu} \quad (1)$$

avec,  $V$  ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ) la vitesse d'écoulement,  $L$  (m) une dimension caractéristique de l'écoulement (longueur parcourue par le fluide) et  $\nu$  ( $\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ ) la viscosité cinématique du fluide. L'expérience montre qu'un écoulement passe du régime laminaire au régime turbulent pour une valeur de  $Re \gtrsim 2000$ . Dans l'atmosphère, la viscosité cinématique de l'air étant de l'ordre de  $\nu \sim 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ , les écoulements sont le plus souvent turbulents.

Vers 1920, Lewis Fry Richardson a décrit qualitativement le processus par lequel, dans un fluide turbulent, un tourbillon cède de l'énergie à des tourbillons plus petits et introduit un critère d'apparition de la turbulence atmosphérique [27], le *nombre de Richardson* :

$$R_i = \frac{\text{gradient vertical de température}}{\text{gradient de vitesse entre couche atmosphérique}} = \frac{g}{T} \frac{\partial T / \partial z}{(\partial V / \partial z)^2}; \quad (2)$$

où  $g$  est l'accélération de la gravité,  $T$  la température et  $V$  la vitesse du vent. Il est établi que l'écoulement devient turbulent si  $R_i < 0,25$ , ce qui est souvent le cas dans la troposphère en raison de sa stratification et de la présence de vent [28].



**FIGURE 3.** Modèle de Kolmogorov de la turbulence atmosphérique. La densité spectrale de l'énergie cinétique  $E(k)$  des tourbillons suit la loi de puissance  $-5/3$  dans la zone inertielle ( $1/L_0 < k < 1/l_0$ ).

En 1941, Andreï Kolmogorov formalise le transfert progressif de l'énergie cinétique des tourbillons à grande échelle vers les petites échelles pour lesquelles le nombre de Reynolds devenant petit, le processus s'arrête, l'énergie cinétique se dissipant sous forme de chaleur par friction visqueuse. Ce phénomène, appelé *cascade de Kolmogorov*, est à l'origine du spectre d'énergie turbulente  $E(\vec{\kappa})$  dans un écoulement en fonction du vecteur d'onde  $\vec{\kappa}$ , qui s'écrit sous la forme du *spectre de Kolmogorov* :

$$E(\kappa) = C_K \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}; \quad (3)$$

avec  $C_K$  la *constante de Kolmogorov*,  $\varepsilon$  le taux de production (ou de dissipation) d'énergie et  $\kappa = |\vec{\kappa}|$ . Cette expression n'est valable que dans le domaine inertiel ( $1/L_0 < \kappa < 1/l_0$ ), l'échelle externe  $L_0$  étant la taille des plus grands tourbillons et l'échelle interne  $l_0$  celle des plus petits, entre lesquels le transfert d'énergie s'effectue en cascade avec une dissipation négligeable (Figure 3) [29].

### 2.2.2. Fluctuations de température et d'humidité

Le développement de la turbulence dans une couche d'air atmosphérique produit des fluctuations de température et d'humidité.

Alexandre Mikhailovich Obukhov a montré que la concentration d'un constituant passif (sans effet sur les propriétés dynamiques de la turbulence) et conservatif (sans interaction chimique avec le fluide), introduit dans un fluide turbulent, obéit au spectre de Kolmogorov avec cependant des échelles internes et externes différentes mais du même ordre de grandeur [30]. Ce résultat s'applique aux mélanges air froid/air chaud et air/vapeur d'eau dans l'atmosphère.

En 1961, Valerian Ilich Tatarskii applique la notion de cascade de Kolmogorov à la turbulence de l'air dans l'atmosphère. Il suppose que les inhomogénéités de la température de l'air constituent des bulles dont la distribution des tailles suit un spectre de Kolmogorov [31]. Il introduit la fonction de structure  $D_T(\bar{\rho})$  des fluctuations de température, qui dans le domaine inertiel s'écrit

d'après Obukhov [30] en fonction de la distance horizontale de deux points de la couche turbulente  $\rho = |\vec{\rho}|$ , sous la forme :

$$D_T(\vec{\rho}) = C_T^2 \rho^{2/3}. \quad (4)$$

Le coefficient  $C_T^2$  est appelé *constante de structure des fluctuations de température*. Tatarskii [31] a montré que le spectre de puissance  $\Phi_T(\vec{\kappa})$  des fluctuations de température s'écrivait alors :

$$\Phi_T(\vec{\kappa}) = 0,033 C_T^2 \kappa^{-11/3}. \quad (5)$$

La force de la turbulence dans l'atmosphère en fonction de l'altitude peut être décrite en déterminant la valeur de  $C_T^2(h)$  à partir de la mesure de la fonction de structure  $D_T(\vec{\rho})$  réalisée lors de sondages effectués au moyen de sondes thermométriques fixées sur des mâts ou à accrochées à un ballon-sonde.

Les propriétés des fluctuations d'humidité sont décrites par des expressions similaires.

Généralement, les sites astronomiques sont choisis pour bénéficier d'une atmosphère sèche et aux longueurs d'ondes optiques, les fluctuations de température sont alors prédominantes ; les fluctuations de l'humidité pouvant cependant intervenir dans les régions du spectre infrarouge en bordure des bandes d'absorption de la vapeur d'eau ou lors d'observations basses sur l'horizon.

### 2.2.3. Fluctuations de l'indice de réfraction de l'air et turbulence optique

L'indice de réfraction de l'air étant une fonction de la température et de l'humidité, leurs fluctuations entraînent des fluctuations de l'indice de réfraction.

Transposant les résultats obtenus pour les fluctuations de températures à celles de l'indice de réfraction, Tatarski [31] introduit la *constante de structure de l'indice de réfraction*  $C_n^2$  et la *fonction de structure* associée  $D_n(\vec{\rho})$  écrite selon la relation d'Obukhov,

$$D_n(\vec{\rho}) = C_n^2 \rho^{2/3}. \quad (6)$$

Le spectre de puissance des fluctuations de l'indice de réfraction s'exprimant sous la forme :

$$\Phi_n(\vec{\kappa}) = 0,033 (2\pi)^{-2/3} C_n^2 f \kappa^{-11/3} \quad (7)$$

expression analogue au spectre de Kolmogorov, valide dans le domaine inertiel avec  $1/L_0 \ll f \ll 1/l_0$ .

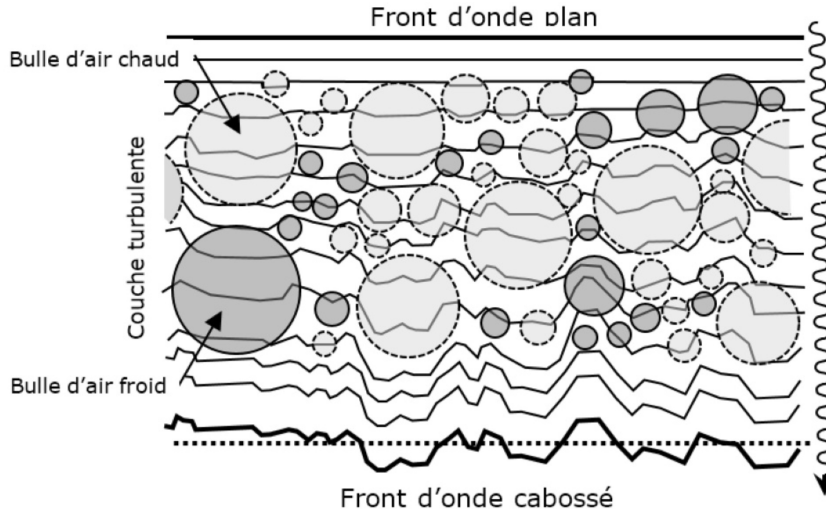
Dans le modèle de Kolmogorov, il est supposé que  $L_0 = \infty$  et  $l_0 = 0$ . Afin de tenir compte de la baisse de l'énergie au-delà des échelles externe  $L_0$  et interne  $l_0$ , des expressions modifiées du spectre, notamment par Von Kármán [32] et Tatarski [33], sont parfois utilisées.

Le paramètre  $C_n^2(h)$  mesure l'intensité des fluctuations de l'indice de réfraction de l'air en fonction de l'altitude, dont les effets sur la propagation des ondes lumineuses traversant l'atmosphère sont désignés sous le nom de *turbulence optique*.

La détermination de  $C_n^2$  permet l'étude et la caractérisation de la turbulence optique, l'expérience montrant qu'elle trouve son origine dans cinq zones de la troposphère :

- l'air autour du télescope et sa coupole ;
- la *couche limite du sol* (CLS), d'épaisseur limitée à quelques dizaines de mètres, généralement fortement turbulente avec des variations de  $C_n^2$  soumises au cycle diurne.
- la *couche limite atmosphérique* (CLA) jusqu'à une altitude de quelques kilomètres où la turbulence se développe en raison de la convection thermique formée au-dessus du sol et des effets du relief environnant. La turbulence y évolue sur des échelles de quelques minutes à plusieurs heures.
- l'*atmosphère libre* au-dessus de la CLA où la turbulence est générée par la rencontre entre les masses d'air. La turbulence y est généralement plus faible que dans la CLA ;





**FIGURE 4.** La *turbulence optique* est générée par les fluctuations de l'indice de réfraction de l'air. La vitesse de propagation de l'onde variant en fonction de la température des bulles d'air, le front d'onde plan à l'entrée dans l'atmosphère, subit localement des déphasages et devient un front d'onde cabossé après avoir traversé les couches turbulentes.

- la tropopause où circulent des vents violents, les *courants-jets* à des altitudes comprises entre 7 et 15 km. La turbulence y est créée par des effets de cisaillement associés à de fortes valeurs de  $C_n^2$ .

Les turbulences formées dans le télescope, sa coupole et la CLS, peuvent être limitées lors de la conception de l'instrument.

Les effets de la turbulence optique provenant, de la CLA, de l'atmosphère libre et de la tropopause peuvent être limités par le choix du site d'observation.

Par la suite, on ne considère que la turbulence optique engendrée par les trois niveaux situés dans l'atmosphère et auxquels correspondent des valeurs différentes du  $C_n^2(h)$  en fonction de l'altitude des couches turbulentes.

### 3. Propagation de la lumière dans l'atmosphère

La lumière stellaire arrivant au-dessus de l'atmosphère sous la forme d'un front d'onde plan traverse un milieu dont l'indice de réfraction fluctue, la propagation de l'onde subissant des avances et des retards qui se traduisent par des fluctuations aléatoires de la phase dans l'espace et le temps (Figure 4).

#### 3.1. Cas d'une couche de turbulence isolée

La description détaillée de la propagation d'une onde plane à travers la turbulence atmosphérique est faite par Roddier [23]. On considère que l'atmosphère est constituée d'une succession de couches turbulentes horizontales dont l'épaisseur est supposée grande devant la longueur de corrélation des inhomogénéités de l'indice de réfraction mais assez fine pour rendre négligeables les effets de la diffraction à l'intérieur d'une couche.

Dans l'approximation de l'optique géométrique, on considère la propagation rectiligne et verticale (observation au zénith) d'une onde plane  $\psi_\infty(\vec{x}) = 1$  quasi monochromatique de longueur

d'onde  $\lambda$ , traversant une couche de turbulence d'altitude  $h$  et d'épaisseur  $\Delta h$  ; en sortie, l'amplitude complexe de l'onde s'écrit :

$$\psi_h(\vec{x}) = \exp[i\varphi_h(\vec{x})] \quad \varphi_h(\vec{x}) = k \int_h^{h+\Delta h} n(\vec{x}, h) dh \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (8)$$

où  $\varphi_h(\vec{x})$  est le déphasage introduit par les fluctuations de l'indice de réfraction  $n(\vec{x}, h)$  dans la couche et  $k$  le nombre d'onde. La phase  $\varphi_h$  est une variable aléatoire de distribution gaussienne à moyenne nulle, la *fonction de cohérence de l'onde* étant définie par :

$$B_h(\vec{\xi}) = \langle \psi_h(\vec{x}) \psi_h^*(\vec{x} + \vec{\xi}) \rangle = \exp \left[ -\frac{1}{2} \langle |\varphi_h(\vec{x}) - \varphi_h(\vec{x} + \vec{\xi})|^2 \rangle \right]. \quad (9)$$

Les propriétés statistiques du front d'onde se déduisent de celles des fluctuations de l'indice de réfraction. en introduisant la *fonction de structure spatiale de la phase* :

$$D_\varphi(\vec{\xi}) = \langle |\varphi_h(\vec{x}) - \varphi_h(\vec{x} + \vec{\xi})|^2 \rangle = 2,91 k^2 C_n^2 \Delta h \xi^{5/3}. \quad (10)$$

Expression dans laquelle  $C_n^2$  est la *constante de structure de l'indice de réfraction*.

En sortie de la couche turbulente la fonction de cohérence de l'onde s'écrit :

$$B_h(\vec{\xi}) = \exp \left[ -\frac{1}{2} D_\varphi(\vec{\xi}) \right]. \quad (11)$$

Les longueurs d'onde optiques étant beaucoup plus petites que l'échelle spatiale des perturbations du front d'onde, l'approximation de la diffraction de Fresnel peut être utilisée pour exprimer l'amplitude complexe de l'onde reçue au sol :

$$\psi_0(\vec{x}) = \psi_h(\vec{x}) * \frac{1}{i h \lambda} \exp \left[ i \pi \frac{\vec{x}^2}{\lambda h} \right] \quad (12)$$

où  $*$  est l'opérateur de convolution. La fonction de cohérence  $B_h(\vec{\xi})$  étant invariante par diffraction de Fresnel et l'on a  $B_0(\vec{\xi}) = B_h(\vec{\xi})$  au niveau du sol.

### 3.2. Généralisation à de multiples couches turbulentes

Roddier [23] a montré que les fluctuations produites au sol par plusieurs couches turbulentes s'ajoutent linéairement. Puisqu'elles sont statistiquement indépendantes, leurs densités spectrales s'ajoutent aussi linéairement.

En considérant une répartition verticale continue de la turbulence, pour une observation faite à une distance zénithale  $\gamma$ , ce qui équivaut à traverser une plus grande épaisseur d'atmosphère, la fonction de cohérence de l'onde à l'entrée du télescope s'écrit :

$$B_0(\vec{\xi}) = \exp \left[ -1,455 k^2 (\cos \gamma)^{-1} \xi^{5/3} \int_0^\infty C_n^2(h) dh \right]. \quad (13)$$

Ce résultat, qui établit le lien entre la fonction de cohérence spatiale du front d'onde associée à la traversée de chaque couche turbulente et la cohérence du front d'onde résultant au sol, est utilisé pour les calculs des grandeurs statistiques associées au front d'onde perturbé reçu au niveau du sol.

## 4. Paramètres caractérisant la turbulence optique

On donnera ici la définition des paramètres servant à caractériser les effets de la turbulence atmosphérique sur les images astronomiques : le *paramètre de Fried*, l'*angle d'isoplanétisme*, le *temps de cohérence* et l'*échelle externe*.

#### 4.1. Paramètre de Fried

Les propriétés statistiques de l'onde reçue au sol  $\psi_0(\vec{x})$  sont décrites par sa fonction de cohérence spatiale  $B_0(\vec{\xi})$ , qui représente la perte de cohérence spatiale de l'onde après sa propagation à travers l'atmosphère turbulente au moyen de la fonction de structure de la phase  $D_\varphi(\vec{r})$  pour laquelle Fried [34] propose l'expression :

$$D_\varphi(\vec{r}) = 6,88 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{5/3}. \quad (14)$$

Le paramètre  $r_0$ , appelé *paramètre de Fried*, s'exprime en fonction de la constante de structure des fluctuations d'indice de réfraction  $C_n^2(h)$  :

$$r_0 = \left[ 0,423 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cos \gamma^{-1} \int_0^\infty C_n^2(h) dh \right]^{-3/5} \quad (15)$$

pour une turbulence produite par une multitude de couches atmosphériques et une observation faite à une distance zénithale  $\gamma$ . Fried définit le paramètre  $r_0$  comme la taille de l'aire de cohérence sur laquelle le déphasage du front d'onde est inférieur à 1 rad, soit une aberration de la surface d'onde inférieure à  $\lambda/6$ .

On note le caractère chromatique de ce paramètre dont la valeur est  $\propto \lambda^{6/5}$ .

Nous verrons plus loin que le paramètre de Fried est associé à la résolution angulaire effective d'un télescope dont les images sont dégradées par la turbulence.

#### 4.2. Angle d'isoplanétisme

La question s'est posée de savoir comment évoluaient les cohérences des fronts d'ondes lorsque l'on observe deux étoiles dans des directions faisant un angle  $\theta$ . Dans le cas d'une couche turbulente unique d'altitude  $h$ , le phénomène d'anisoplanétisme peut être caractérisé en considérant la fonction de structure de la phase (Section 3.1) en écrivant :

$$D_\varphi(\theta h) = \langle [\varphi(\vec{r} + \theta h, h) - \varphi(\vec{r}, h)]^2 \rangle \simeq 6,88 \left( \frac{\theta h}{r_0} \right)^{5/3}. \quad (16)$$

Pour caractériser l'importance de l'effet d'anisoplanétisme, Fried [35] introduit le paramètre  $\theta_0$  qui correspond au domaine isoplanétique, champ pour lequel la décorrélation angulaire de la turbulence reste faible.

Dans le cas d'une turbulence distribuée de façon continue dans l'atmosphère, l'expression de  $\theta_0$  en fonction de la constante de structure des fluctuations d'indice de réfraction de l'air  $C_n^2(h)$ , pour une observation faite à la distance zénithale  $\gamma$ , s'écrit :

$$\theta_0 = \left[ 2,905 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 (\cos \gamma^{-1})^{8/3} \int_0^\infty C_n^2(h) dh \right]^{-3/5}. \quad (17)$$

Fried définit  $\theta_0$  comme l'écart angulaire pour lequel  $D_\varphi(\theta h) \leq 1 \text{ rad}^2$ , sous la forme :

$$\theta_0 \simeq 0,314 \frac{r_0}{h} \quad (18)$$

en définissant  $\bar{h}$  comme l'altitude moyenne des couches turbulentes pondérée par les valeurs de  $C_n^2(h)$ .

Pour deux directions de visées de séparation angulaire  $\theta$ , Fried montre que la fonction de transfert optique est réduite d'un facteur  $\exp[-(\theta/\theta_0)^{5/3}]$ .

La valeur du champ d'isoplanétisme est chromatique puisque  $\theta_0 \propto \lambda^{6/5}$ .

La détermination de la valeur du paramètre  $\theta_0$  est importante, notamment lors d'observations au télescope d'étoiles doubles écartées ou d'objets étendus (planètes, Lune, Soleil) ainsi que lors du choix d'une étoile de référence pour des observations par optique adaptative.

### 4.3. Temps de cohérence

La turbulence dynamique étant un phénomène variable dans le temps, les distorsions du front d'onde reçu au sol caractérisant la turbulence optique le sont aussi. Par analogie avec la fonction de structure spatiale de la phase (Section 3.1), on définit une fonction de structure temporelle en un point  $\vec{r}$  et à un instant  $t$  sous la forme :

$$D_{\varphi,t,\vec{r}}(\Delta t) = \langle |\varphi(\vec{r}, t) - \varphi(\vec{r}, t + \Delta t)|^2 \rangle. \quad (19)$$

En faisant l'hypothèse de Taylor de «turbulence gelée» [36], on peut considérer la turbulence optique produite par une succession d'écrans de phase indépendants, chacun en translation uniforme à la vitesse  $v(h)$  sous l'effet du vent.

Au niveau du sol, on peut définir le paramètre  $\tau_0$  comme le temps mis pour que le front d'onde se déplace d'une distance égale à la taille du paramètre de Fried  $r_0$ , durée pendant laquelle la phase du front d'onde ne change pas de plus d'un radian, ce qui s'écrit :

$$\tau_0 \approx \frac{r_0}{\bar{v}} \quad (20)$$

où  $\bar{v}$  (en m/s) est la vitesse horizontale moyenne des couches turbulentes pondérée par l'indice de structure de l'indice de réfraction  $C_n^2(h)$ .

La valeur du temps de cohérence est chromatique puisque  $\propto \lambda^{6/5}$ .

Nous verrons plus bas que l'on utilise en pratique plusieurs définitions du temps de cohérence.

### 4.4. L'échelle externe

On introduit la notion d'*échelle externe de cohérence spatiale*  $L_0$  pour décrire les grandes échelles spatiales du front d'onde perturbé reçu au sol.

Dans le modèle de Kolmogorov (Section 2.2.1), dans chaque couche atmosphérique d'altitude  $h$ , l'échelle externe  $L_0(h)$  est la taille caractéristique des plus grands tourbillons dans lesquels la turbulence prend naissance.

On définit un paramètre d'échelle externe du front d'onde  $L_0$  à partir de la combinaison des échelles externes locales  $L_0(h)$  des couches turbulentes pondérées par le profil de la constante de structure des fluctuations de l'indice de réfraction  $C_n^2(h)$  sous la forme [37] :

$$\mathcal{L}_0 = \left[ \frac{\int_0^\infty L_0^{-1/3}(h) C_n^2(h) dh}{\int_0^\infty C_n^2(h) dh} \right]^{-3}. \quad (21)$$

Le paramètre d'échelle externe  $L_0$  est relié aux basses fréquences spatiales des déformations du front d'onde reçues au sol et il intervient dans plusieurs types d'observations astronomiques (astrométrie, imagerie). La valeur de  $L_0$  intervient dans les performances d'un système d'optique adaptative. En interférométrie à grande base, la connaissance de  $L_0$  est également importante notamment pour la spécification d'un système de stabilisation des franges.

Il est à noter que la valeur de ce paramètre varie beaucoup entre quelques mètres et la centaine de mètres en fonction du site d'observation ainsi que des conditions atmosphériques mais également de la technique utilisée pour sa mesure [38].

## 5. Formation de l'image perturbée par la turbulence optique

La formation des images en présence de diffraction et la relation entre l'objet et son image sont traités par ailleurs (voir notamment [39]) et la formation des images en présence de turbulence atmosphérique a été exposée en détail par Roddier [23]. On se limitera ici à rappeler quelques résultats essentiels.

### 5.1. Relation entre l'objet et son image

Lors d'une observation astronomique, un objet étendu est caractérisé par la distribution de son éclairement (ou irradiance) dans le plan focal du télescope que l'on peut noter  $O(\vec{\alpha})$  en fonction de la distance angulaire  $\vec{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y)$  projetée sur le ciel. Cet éclairement est fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ , et éventuellement du temps. Les objets astronomiques sont considérés comme des sources lumineuses incohérentes. L'éclairement de l'image de l'objet produite au foyer du télescope  $I(\vec{\alpha})$  est donné par la relation de convolution :

$$I(\vec{\alpha}) = O(\vec{\alpha}) * S(\vec{\alpha}). \quad (22)$$

Dans laquelle  $S(\vec{\alpha})$  est l'image d'une source ponctuelle formée par le télescope, appelée *fonction d'étalement de point* ou *réponse impulsionnelle du système*.

Si l'on passe dans le domaine des fréquences spatiales  $\vec{f} = 1/\vec{\alpha}$ , on peut utiliser la transformée de Fourier  $\tilde{I}(\vec{f})$  de l'image  $I(\vec{\alpha})$  et la relation objet — image s'écrit alors :

$$\tilde{I}(\vec{f}) = \tilde{O}(\vec{f}) \cdot \tilde{S}(\vec{f}). \quad (23)$$

Dans laquelle  $\tilde{O}(\vec{f})$  est la transformée de Fourier de l'éclairement de l'objet  $O(\vec{\alpha})$  et  $\tilde{S}(\vec{f})$  celle de la fonction d'étalement de point  $S(\vec{\alpha})$ , appelée *fonction de transfert de modulation* du système constitué par le télescope et l'atmosphère.

Il s'agit dans la suite de relier la fonction de transfert de modulation  $\tilde{S}(\vec{f})$  aux propriétés de la turbulence optique en considérant l'observation d'une source lumineuse ponctuelle (étoile simple) à une longueur d'onde  $\lambda$ , au moyen du système optique constitué par le télescope et l'atmosphère.

Deux cas seront examinés : celui des images à longues poses, obtenues avec une durée d'intégration nettement supérieure au temps de cohérence  $\tau_0$  de la turbulence (Section 4.3), puis celui des images à court temps de pose, obtenues avec une durée d'intégration au plus égale à  $\tau_0$ .

### 5.2. Image instantanée

A chaque instant, la pupille d'entrée du télescope intercepte le front d'onde reçu dont l'amplitude complexe est notée  $\psi(\vec{r})$  avec  $\vec{r}$  la variable de position dans le plan pupille. L'amplitude complexe diffractée dans le plan focal du télescope,  $\mathcal{A}(\vec{\alpha})$ , est la transformée de Fourier de la distribution d'amplitude complexe de l'onde sur la pupille du télescope :

$$\mathcal{A}(\vec{\alpha}) \propto \int \psi(\vec{r}) P(\vec{r}) \left[ \exp\left(-2i\pi\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{r}}{\lambda}\right) \right] d\vec{r} \quad (24)$$

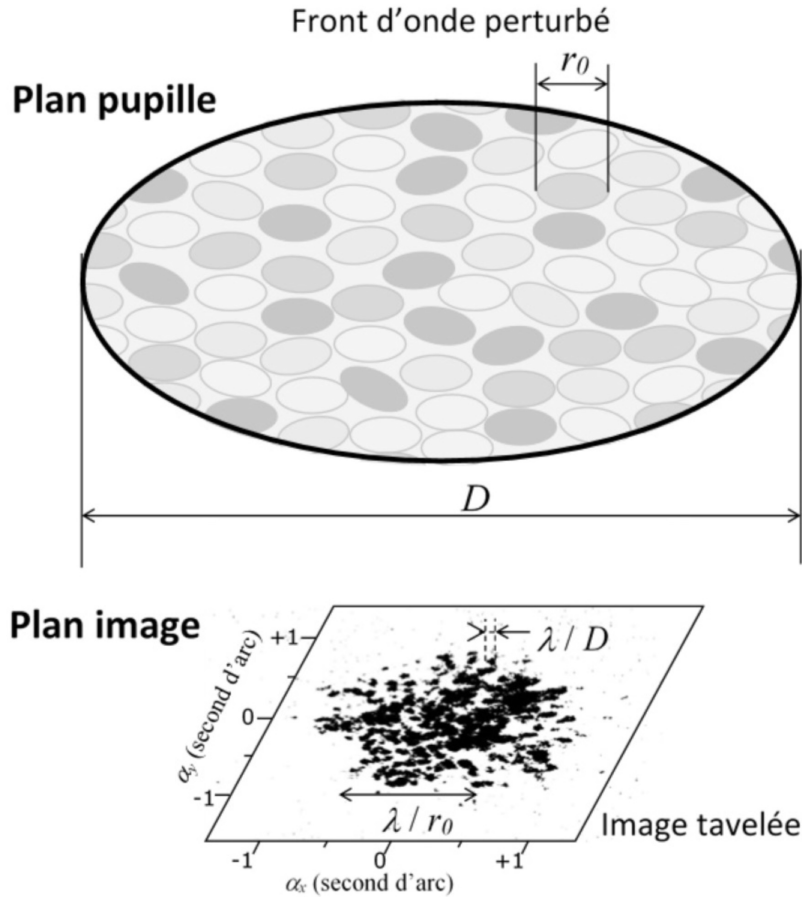
où  $P(\vec{r})$  est la fonction de transmission du télescope ou *fonction pupille*.

La fonction d'étalement de point instantanée est alors  $S(\vec{\alpha}) = |\mathcal{A}(\vec{\alpha})|^2$  dont la transformée de Fourier est la fonction de transfert de modulation instantanée  $\tilde{S}(\vec{f})$  s'écrit comme la fonction d'autocorrélation normalisée de la distribution d'amplitude complexe de l'onde sur la pupille :

$$\tilde{S}(\vec{f}) = \mathcal{D}^{-1} \int \psi_0(\vec{u}) \psi_0^*(\vec{u} + \vec{f}) P(\vec{u}) P^*(\vec{u} + \vec{f}) d\vec{u} \quad (25)$$

où  $\mathcal{D} = (\pi/4)(D/\lambda)^2$  est l'aire de la pupille du télescope exprimée en unité  $\lambda^2$  et  $\vec{u} = \vec{r}/\lambda$  une variable réduite sans dimension [23].

En présence de turbulence, la fonction de transfert instantanée est une fonction à valeurs complexes avec pour  $f > r_0/\lambda$ , une composante haute fréquence, dont la moyenne temporelle est nulle.



**FIGURE 5.** Formation de l'image tavelée. Le front d'onde perturbé intercepté par la pupille circulaire du télescope constitué par un ensemble de zones cohérentes dont le diamètre est défini par le paramètre de Fried  $r_0$ . Dans le plan focal, l'image résultant des interférences entre les rayons diffractés dans le plan pupille, se présente sous l'aspect de grains lumineux (les tavelures) de diamètre angulaire  $\lambda/D$  distribués dans une tache dont le diamètre angulaire  $\lambda/r_0$  varie en fonction de la turbulence optique.

En l'absence de turbulence, et en supposant que l'onde reçue est plane avec  $\psi_0(\vec{u}) = 1$ , la fonction de transfert de modulation se réduit à la fonction de transfert du télescope :

$$\tilde{S}(\vec{f}) = \mathcal{D}^{-1} \int P(\vec{u})P^*(\vec{u} + \vec{f}) d\vec{u} = T(\vec{f}). \quad (26)$$

La fonction de transfert de modulation  $T(\vec{f})$  du télescope est la fonction d'autocorrélation de la fonction pupille.

La Figure 5 illustre la formation de l'image instantanée obtenue au foyer d'un grand télescope. Elle présente l'aspect d'une tache de diamètre  $\sim \lambda/r_0$  variable en fonction de la qualité de la turbulence atmosphérique, parsemée aléatoirement de grains brillants (les tavelures ou speckles). Sa structure peut s'interpréter comme le résultat d'un phénomène d'interférence entre les rayons lumineux traversant l'écran de phase constitué par le front d'onde perturbé par la turbulence optique. On en déduit les dimensions caractéristiques de cette image : la taille des tavelures  $\approx \lambda/D$ , analogue à l'interfrange fixé par la plus grande distance entre deux rayons interférents

égale au diamètre du télescope  $D$  et l'étalement de l'image de diamètre  $\approx \lambda/r_0$ , imposé par la diffraction de la lumière par les aires de cohérences du front d'onde caractérisées par le paramètre de Fried  $r_0$ .

### 5.3. Image à longue pose

C'est le type d'image astronomique obtenue avec un temps de pose allant de la seconde à plusieurs heures, par imagerie sur plaque ou film photographique et maintenant par imagerie électronique au moyen des capteurs CCD. Dans ce cas, les images instantanées sont moyennées sur la durée de la pose et l'image obtenue au foyer du télescope perdant tout caractère aléatoire, apparait sous la forme d'une tache lumineuse plus ou moins étalée.

La fonction de transfert de modulation moyenne s'écrit comme le produit de la fonction de cohérence du front d'onde perturbé  $B(\vec{f}) = \langle \psi_0(\vec{u}) \psi_0^*(\vec{u} + \vec{f}) \rangle$ , avec la fonction de transfert du télescope  $T(\vec{f})$  :

$$\langle \tilde{S}(\vec{f}) \rangle = B(\vec{f}) \cdot T(\vec{f}). \quad (27)$$

En l'absence de turbulence, en supposant que l'onde incidente est plane avec  $\psi_0(\vec{u}) = 1$  ou dans le cas d'un petit télescope pour lequel on peut négliger les effets de la turbulence en supposant  $B(\vec{f}) \approx 1$ , la fonction de transfert de modulation moyenne est la fonction de transfert du télescope  $\langle \tilde{S}(\vec{f}) \rangle \approx T(\vec{f})$ , égale à la fonction d'autocorrélation de la fonction pupille. Une pupille circulaire de diamètre  $D$  se comporte comme un filtre passe bas des fréquences spatiales avec une fréquence de coupure  $f_D = D/\lambda$ .

Pour un télescope de grand diamètre, on peut considérer que la fonction de transfert de modulation moyenne ne dépend que des effets de la turbulence et écrire [23] :

$$\langle \tilde{S}(\vec{f}) \rangle \approx B(\vec{f}) = \exp \left[ -3,44 \left( \frac{\lambda f}{r_0} \right)^{5/3} \right] \quad (28)$$

où  $r_0$  est le paramètre de Fried (Section 4.1). Comme illustré par la Figure 6, le profil en cloche de la fonction  $\langle \tilde{S}(\vec{f}) \rangle$  montre que sa valeur devient proche de zéro pour  $f_0 = r_0/\lambda$  qui peut être considérée comme la fréquence de coupure des fréquences spatiales transmises par la pupille du télescope en présence de turbulence. Fried [40] a défini le paramètre  $r_0$  comme le diamètre d'une pupille circulaire qui donnerait une image limitée par la diffraction (tache d'Airy) de même résolution que l'image dégradée par la turbulence obtenue avec le télescope.

On appelle *angle de seeing*, le paramètre  $\epsilon = 0,976\lambda/r_0$ , défini comme la largeur à mi-hauteur de la tache image à longue pose qui constitue la *fonction d'étalement de point* du système télescope et atmosphère [41]. Noter que  $\epsilon \propto \lambda^{-1/5}$  est peu chromatique.

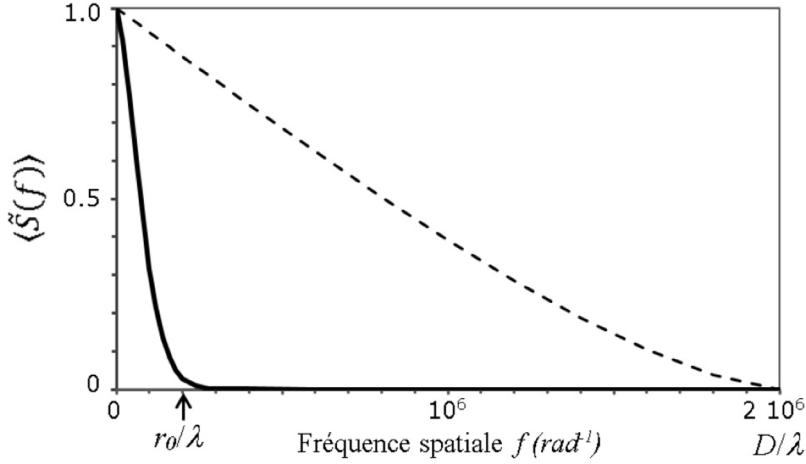
### 5.4. Image à courte pose et fonction de transfert speckle

Dans le cas où la durée de la pose est inférieure ou égale au temps de cohérence de la turbulence  $\tau_0$  (Section 4.3), on peut considérer que la turbulence est figée et que l'on obtient une *image instantanée*.

Un moyen pour ne pas perdre l'information à haute fréquence spatiale contenue dans cette image, consiste à moyenner non pas l'image, mais le carré du module de son spectre de puissance :

$$\langle |\tilde{I}(\vec{f})|^2 \rangle = |\tilde{O}(\vec{f})|^2 \cdot \langle |\tilde{S}(\vec{f})|^2 \rangle. \quad (29)$$

Avec  $|\tilde{O}(\vec{f})|^2$  le spectre d'énergie de l'objet supposé constant et  $\langle |\tilde{S}(\vec{f})|^2 \rangle$ , la moyenne du carré du module de la fonction de transfert de modulation instantanée de l'image d'une source ponctuelle, appelée *fonction de transfert speckle*.



**FIGURE 6.** Fonction de transfert de modulation  $\langle \tilde{S}(\vec{f}) \rangle$  pour une image à longue pose. Sa valeur devient proche de zéro pour la fréquence spatiale  $f_0 = r_0/\lambda$ , inférieure à la fréquence spatiale de coupure de la pupille du télescope limité par la diffraction  $D/\lambda$ . Ceci traduit la perte en pouvoir de résolution des images à longue pose dégradées par la turbulence. Exemple calculé pour la longueur d'onde  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$  et un paramètre de Fried  $r_0 = 10 \text{ cm}$  (angle de seeing  $S = 1,03$  seconde d'arc), pour un télescope à pupille circulaire de diamètre  $D = 1 \text{ m}$  (résolution angulaire théorique est  $1,22 \lambda/D = 0,126$  seconde d'arc).

Dans d'un grand télescope c'est-à-dire avec  $D \gg r_0$  et en considérant les hautes fréquences spatiales telles que  $f \gg r_0/\lambda$ , il est montré [23] que la fonction de transfert speckle peut s'écrire sous la forme :

$$\langle |\tilde{S}(\vec{f})|^2 \rangle \approx \frac{\sigma}{\mathcal{P}} T(\vec{f}). \quad (30)$$

Avec  $\sigma = 0,342(r_0/\lambda)^2$  l'aire de cohérence de Fried du front d'onde perturbé,  $\mathcal{P}$  l'aire de la pupille du télescope exprimée en unité  $\lambda^2$  et  $T(\vec{f})$  la fonction de transfert de la pupille du télescope limité par la réfraction pour  $f \leq D/\lambda$ .

En faisant l'hypothèse que la statistique du front d'onde est gaussienne et circulaire, l'expression complète de la fonction de transfert de modulation  $\langle |\tilde{S}(\vec{f})|^2 \rangle$ , s'écrit comme la somme du carré de la fonction de transfert de modulation des images à longue pose (Section 5.3) et de la composante à hautes fréquences spatiales donnée par l'équation (32) :

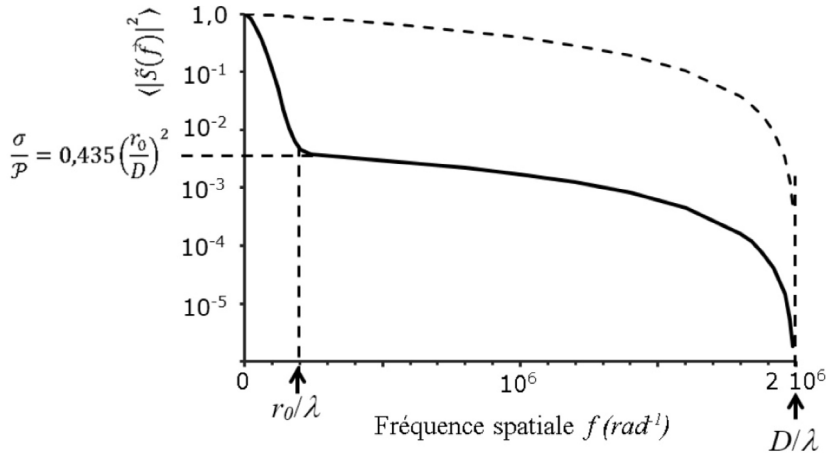
$$\langle |\tilde{S}(\vec{f})|^2 \rangle = \langle |\tilde{S}(\vec{f})|^2 \rangle + \frac{\sigma}{\mathcal{P}} T_0(\vec{f}). \quad (31)$$

Cette formulation, illustrée par la Figure 7, montre que les fréquences spatiales sont effectivement transmises jusqu'à la fréquence de coupure de la pupille  $D/\lambda$  avec un facteur d'atténuation constant  $\sigma/\mathcal{P} = 0,435(r_0/D)^2$ . Les images à courte pose permettent donc des observations jusqu'à la limite de résolution angulaire du télescope malgré la dégradation des images par la turbulence.

Le nombre de tavelures présentes dans l'image est donc  $N_{\text{tav}} \approx \mathcal{P}/\sigma \sim 2,3(D/r_0)^2$ .

Pour caractériser la dégradation d'une image, le physicien allemand Karl Strehl introduit le rapport  $S = I_{\text{max}}/I_0$  de l'intensité maximale  $I_{\text{max}}$  de l'image dégradée par des aberrations optiques à l'intensité maximale  $I_0$  d'une image limitée par la diffraction. Ce paramètre, nommé *Rapport de Strehl*, est également utilisé pour caractériser l'étalement d'une image stellaire dégradée par la turbulence optique. Sa valeur peut être exprimée en fonction de la variance  $\delta^2$





**FIGURE 7.** Fonction de transfert de modulation  $\langle |\bar{S}(f)|^2 \rangle$  pour une image à pose courte. On note que les fréquences spatiales entre la fréquence de coupure des images à longue pose  $r_0/\lambda$  et la fréquence de coupure de la pupille  $D/\lambda$  sont transmises avec un facteur d'atténuation constant. Exemple calculé  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ ,  $r_0 = 10 \text{ cm}$ , pour une pupille circulaire de diamètre  $D = 1 \text{ m}$  dont Fonction de transfert de modulation est représentée en pointillés. Les ordonnées sont représentées en échelle logarithmique.

des fluctuations de phase de la surface d'onde perturbée :  $S \approx \exp[-\delta^2] \leq 1$ , avec  $\delta^2(\text{rad}^2) \approx 1,03(D/r_0)^{5/3}$ .

Par ailleurs, ayant établi les propriétés statistiques de la géométrie d'un front d'onde perturbé par la turbulence atmosphérique, Fried publie en 1978 un article dans lequel il conclut que parmi les images à courtes poses obtenues à travers la turbulence atmosphérique il y a quelques chances pour qu'une image puisse être quasiment limitée par la diffraction. Pour un  $D/r_0 \geq 3,5$ , il estime la probabilité de trouver une telle image à  $P \sim 5,6 \exp[-0,1557(D/r_0)^2]$  [42].

Les fluctuations temporelles aléatoires de la phase du front d'onde incident se traduisent par un *bouillonnement des tavelures*. On montre [43] que ce phénomène est lié au temps caractéristique  $\Delta\tau$  des fluctuations aléatoires du front d'onde perturbé par la turbulence atmosphérique, exprimé par :

$$\Delta\tau = 0,36r_0/\Delta v \quad (32)$$

où  $\Delta v$  est la dispersion de la distribution des vitesses des vents  $\bar{v}(h)$  pondérée par la constante de structure des fluctuations de l'indice de réfraction  $C_n^2(h)$  en fonction de l'altitude.

Le phénomène fixe une limite supérieure au temps de pose  $\mathcal{T}$  qu'il faut utiliser pour figer la turbulence. Pour  $\mathcal{T} > \Delta\tau$ , l'aile des hautes fréquences spatiales de la fonction de transfert de modulation de l'image courte pose est affaibli par un facteur  $\Delta\tau/\mathcal{T}$  [43].

## 6. Les effets de la turbulence

Comme évoqué dans l'introduction, les observateurs ont depuis longtemps identifié les différents aspects de la dégradation des images astronomiques. Nous savons maintenant que le front d'onde provenant d'une étoile, initialement plan, arrive au niveau du sol comme un front d'onde présentant des fluctuations aléatoires de la phase qui sont à l'origine des effets perceptibles à l'œil nu ou dans l'image formée au foyer d'un télescope comme illustrés dans la Figure 8.

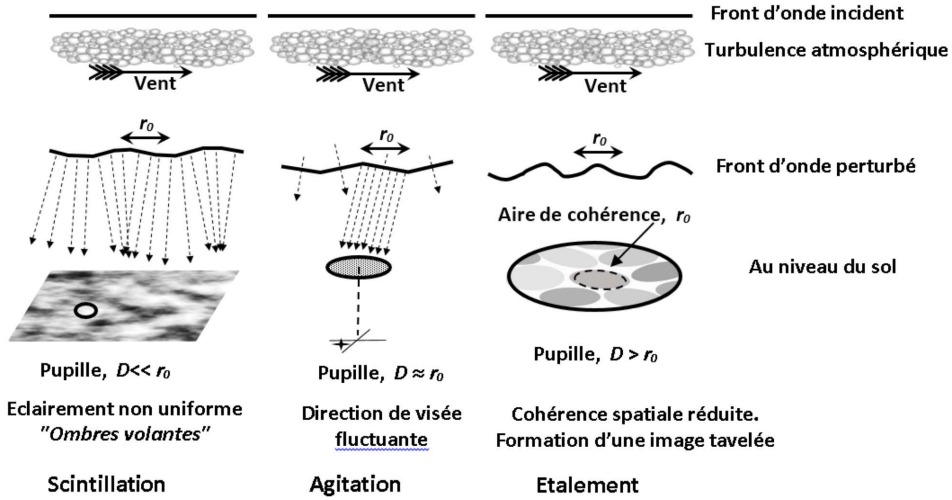


FIGURE 8. Schéma illustrant les principaux effets de la turbulence atmosphérique sur les images. On note que le rapport  $D/r_0$  du diamètre de la pupille à la taille de l'aire de cohérence du front d'onde perturbé détermine l'effet dominant observé.

### 6.1. Scintillation

Dans le cas de l'observation d'une étoile à l'œil nu ou au moyen d'un petit télescope, la scintillation provoque une modulation aléatoire de l'intensité globale de la pupille, visible sous la forme des *ombres volantes* et résultant de la dilution ou de la concentration de l'énergie du front d'onde.

La scintillation est décrite par les fluctuations de l'intensité  $I(\vec{x}) = |\psi_0(\vec{x})|^2$ , définie comme le carré du module de l'amplitude complexe de l'onde.

Le taux (ou indice) de scintillation  $\sigma_I^2$  est défini comme la variance des fluctuations relatives d'éclairage

$$\sigma_I^2 = \frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2} \quad (33)$$

où  $\langle I \rangle$  est l'intensité moyenne.

En considérant la variance des fluctuations relatives d'amplitude  $\sigma_\chi^2$  égale à l'intégrale du spectre de puissance des fluctuations  $\chi(\vec{x})$  de l'éclairage :

$$\sigma_\chi^2 = \int_0^\infty \phi_\chi(\vec{f}) df \quad (34)$$

dans l'hypothèse des faibles perturbations,  $I(\vec{x}) \approx (1 + \chi(\vec{x}))^2$ , le taux de scintillation s'écrit  $\sigma_I^2 = 4\sigma_\chi^2$ .

Dans le modèle de Kolmogorov, pour une distribution continue des couches turbulentes et une observation à une distance zénithale  $\gamma$ , l'expression du spectre de puissance des fluctuations d'éclairage  $\phi_I(\vec{f})$ , s'écrit [23] :

$$\phi_I(\vec{f}) = 4\phi_\chi(\vec{f}) = 0,383\lambda^{-2}(\cos\gamma)^{-11/6}f^{-11/3} \int_0^\infty C_n^2(h) \sin^2(\pi\lambda h f^2) dh \quad (35)$$

où  $C_n^2(h)$  est la constante de structure de l'indice de réfraction en fonction de l'altitude.

En intégrant sur l'ensemble des fréquences spatiales, on déduit l'expression de l'indice de scintillation :

$$\sigma_I^2 = 19,12\lambda^{-7/6}(\cos\gamma)^{-11/6} \int_0^\infty h^{5/6} C_n^2(h) dh. \quad (36)$$

En raison de la dépendance en  $h^{5/6}$ , la contribution des couches turbulentes sur  $\sigma_I^2$  décroît lorsque l'on se rapproche du sol. On note la chromaticité de la scintillation qui décroît fortement dans l'infrarouge.

Les fluctuations temporelles aléatoires du flux lumineux engendrées par la turbulence atmosphérique se traduisent par un *bruit de scintillation* qui limite la précision des mesures photométriques faites depuis le sol, notamment pour les observations d'occultations et la détection des transits exoplanétaires [44] ainsi qu'en astérosismologie [45].

La scintillation est mesurée au moyen plusieurs instruments comme le SCIntillation Detection And Ranging (SCIDAR) [46], le Multi Aperture Scintillation Sensor (MASS) [47] et le Lunar Scintillometer (LuSci) [48] notamment dans le but de déterminer le profil vertical de la constante de structure de l'indice de réfraction  $C_n^2(h)$ .

## 6.2. Agitation

Le déplacement aléatoire du photocentre de l'image à courte pose observé au foyer des petits télescopes est désigné sous les termes d'*agitation* ou *tip-tilt*, phénomène du aux fluctuations de l'angle d'arrivée de la lumière stellaire produites par les variations aléatoires de la forme du front d'onde  $\psi_0(\vec{r})$  intercepté par la pupille du télescope.

Ces variations sont décrites par les fluctuations de la phase  $\varphi_0(\vec{r})$  et les écarts au plan d'onde moyen  $z(\vec{r}) = (\lambda/2\pi)\varphi_0(\vec{r})$ , avec  $\vec{r}$  la variable de position dans le plan pupille [23].

Les propriétés statistiques de l'agitation sont déterminées par celles de la fonction de phase  $\varphi_0(\vec{r})$  du front d'onde  $\psi_0(\vec{r})$ . La dispersion de l'angle d'arrivée  $\sigma_A$  est donné par :

$$\sigma_A^2 = \lambda^2 \int_0^\infty f^2 \phi_{\varphi_0}(\vec{f}) df \quad (37)$$

où  $\vec{f}$  est la fréquence spatiale et  $\phi_{\varphi_0}(\vec{f})$  le spectre de puissance des fluctuations de la phase.

Pour une distribution continue des couches turbulentes, l'expression du spectre de puissance des fluctuations de la phase pour une observation au zénith, est :

$$\phi_{\varphi_0}(\vec{f}) = 0,38\lambda^{-2} f^{-11/3} \int_0^\infty C_n^2(h) dh. \quad (38)$$

Ce qui conduit à l'expression de la dispersion (variance) de l'angle d'arrivée associé au mouvement aléatoire bidimensionnel du photocentre de l'image dégradée par la turbulence :

$$\sigma_A^2 \simeq 0,36 \left(\frac{\lambda}{D}\right)^{1/3} \left(\frac{\lambda}{r_0}\right)^{5/3}. \quad (39)$$

Etablie dans la cadre d'un modèle de turbulence de Kolmogorov, cette expression n'est donc valable que dans me domaine inertiel, c'est-à-dire pour des fréquences spatiales supérieures à  $\lambda/L_0$  où  $L_0$  est le l'échelle externe associé aux déformations du front d'onde perturbé par la turbulence atmosphérique.

Il a été montré que la valeur de l'agitation dépend fortement de l'échelle externe. Une évaluation plus rigoureuse de l'agitation a été faite en utilisant un modèle de la turbulence atmosphérique de Kolmogorov modifié comme celui proposé par Von Kármán [49].

Pour les observations astronomiques, l'agitation génère un bruit qui limite la précision des mesures astrométriques de position faites au moyen de télescopes au sol, constituant un argument en faveur du développement de l'astrométrie spatiale qui s'est concrétisé par les missions HIPARCOS et GAIA [50].

## 6.3. Étalement

L'étalement de l'image obtenue au foyer d'un grand télescope est l'effet le plus pénalisant produit par la turbulence atmosphérique puisqu'il dégrade la résolution angulaire des observations.

Dans le cas où le bruit dans l'image enregistrée n'est pas exclusivement limité par le bruit de photons du signal, la sensibilité des observations est également réduite en raison de la dilution de l'énergie lumineuse.

Pour une image longue pose l'étalement observé résulte de la combinaison de l'étalement intrinsèque des images instantanées décrites au Section 4.3 et de l'agitation de ces images.

A chaque instant, l'image résultant de la convolution de la distribution d'intensité sur l'objet  $O(\vec{\alpha})$  avec la fonction d'étalement de point  $S(\vec{\alpha})$  du système télescope et atmosphère, sera floue.

En raison de l'agitation, l'étalement observé sur l'image à longue pose sera plus important que celui d'une image à courte pose ce qui dégrade la résolution angulaire du système télescope et atmosphère.

L'effet de l'agitation peut être éliminé dans l'image à longue pose au moyen d'un système automatique de guidage rapide (correcteur de *tip-tilt*) [51]. La résolution angulaire de l'image à longue pose est alors donnée par l'angle de seeing défini au Section 4.2 :  $\varepsilon = 0,98\lambda/r_0$ . La dégradation de l'image restante constitue un flou (*image blurring*) qui ne peut être réduit qu'en choisissant un site d'observation jouissant d'une faible turbulence atmosphérique (caractérisé par un grand  $r_0$  et des vents faibles).

Un gain important en résolution angulaire est obtenu en utilisant la technique du *Lucky imaging*, imaginée par Fried basée sur un tri sévère des images à courte pose puis sur l'addition des images sélectionnées recentrées (*shift and add*) [52]. La résolution angulaire de l'image composite est alors proche de la résolution limitée par la diffraction, mais cette technique n'est vraiment efficace que pour un  $D/r_0 < 10$  [42].

Les effets de l'étalement des images peuvent être éliminés en utilisant une technique *d'optique adaptative* basée sur la correction en temps réel des aberrations optiques du front d'onde dues à la turbulence atmosphérique. On obtient alors une image dont la résolution angulaire est quasiment celle du télescope limitée par la diffraction, dans la mesure où l'objet dont on fait l'image est tout entier dans champ d'isoplanétisme [53].

#### 6.4. Effets de la turbulence sur les observations en interférométrie optique à longue base

Les effets de la turbulence atmosphérique sur les observations aux longueurs d'ondes optiques par interférométrie stellaire de Michelson ont été étudiés en détail notamment par Roddier [23] et Roddier et Léna [54, 55].

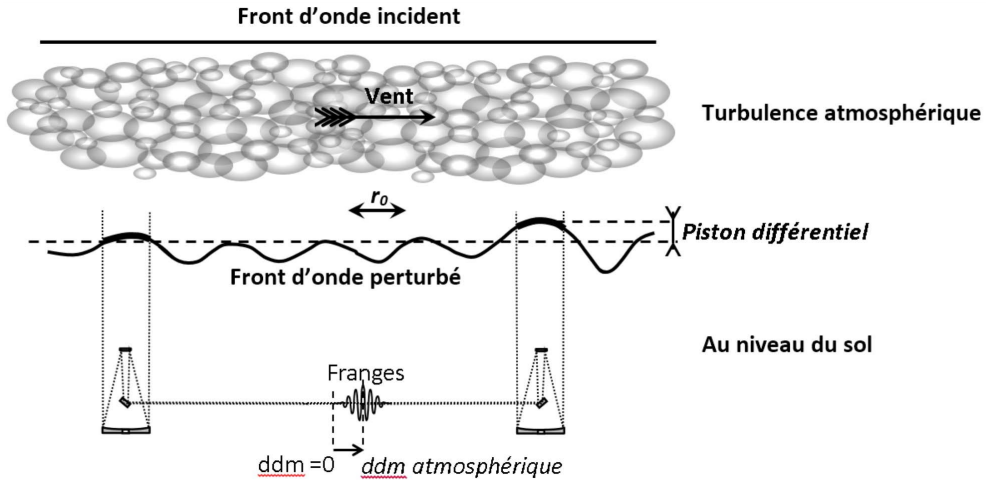
Le principal effet de la turbulence atmosphérique pour les observations faites avec un interféromètre stellaire de Michelson est le *piston atmosphérique*.

Le *piston atmosphérique* désigne l'écart entre la valeur moyenne de la phase de la portion de front d'onde interceptée par la pupille d'un télescope et la valeur moyenne de la phase du front d'onde qui traverse l'atmosphère. Dans un interféromètre stellaire de Michelson, les télescopes étant éloignés, leurs pupilles interceptent des portions de front d'onde dont les pistons atmosphériques sont différents. Ce *piston différentiel*, produit des fluctuations aléatoires de la longueur des chemins optiques dans l'interféromètre qui décalent la position de différence de marche nulle autour de laquelle se forment les franges d'interférence (Figure 9).

Pour un interféromètre à deux télescopes, l'effet de piston différentiel se traduit par une fluctuation de la valeur de la différence de marche optique dont l'écart type est donné, selon le modèle de turbulence Kolmogorov, par l'expression :

$$\sigma_z(L) = 0,417\lambda(L/r_0)^{5/6} \quad (40)$$

dans laquelle,  $L$  est la distance entre les télescopes (longueur de base interférométrique),  $r_0$  le paramètre de Fried et  $\lambda$  la longueur d'onde d'observation.



**FIGURE 9.** Illustration de la différence de marche ( $ddm$ ) introduite par l'effet de piston atmosphérique dans un interféromètre stellaire de Michelson.

Le temps de cohérence des fluctuations du piston différentiel, défini comme la durée pendant laquelle les franges d'interférence ne se déplacent pas de plus d'un radian [56], est :

$$\Delta\tau = 0,21 r_0 / v^* \quad (41)$$

où  $v^*$  est la moyenne des vitesses des vents  $\bar{v}(h)$  pondérée par la constante de structure des fluctuations de l'indice de réfraction  $C_n^2$  en fonction de l'altitude.

A l'effet du piston différentiel, il convient d'associer d'autres effets dont l'importance dépend essentiellement du diamètre  $D$  des télescopes et du paramètre de Fried  $r_0$ .

Pour un interféromètre constitué de petits télescopes (avec  $D \leq r_0$ ), chacun d'eux formant une image dont la qualité est limitée par la diffraction (tache d'Airy), les effets dominants sont la scintillation et l'agitation.

La scintillation produit des variations aléatoires de l'éclairement des faisceaux qui interfèrent. L'agitation des images se traduit par une fluctuation de leurs positions dans le plan focal de recombinaison, rendant leur superposition aléatoire, les franges n'apparaissant que dans les zones communes des images de diffractions produites par chacun des télescopes. En conséquence, la valeur de la visibilité des franges sera elle-même une fonction aléatoire du temps, et à chaque instant, de la position de l'image dans le plan focal de recombinaison.

Dans le cas d'un interféromètre constitué de grands télescopes (avec  $D > r_0$ ), l'effet dominant est l'étalement des images qui à chaque instant présentent une structure tavelée décrite au Section 4.2. Quand l'égalité des trajets optiques des faisceaux produits par chacun des télescopes est assurée, les franges apparaissent dans chacune des tavelures superposées de l'image formée dans le plan focal de recombinaison. La phase des franges variant d'une tavelure à l'autre, la distribution des tavelures dans l'image recombinaison évolue de façon aléatoire en fonction du temps. La technique d'interférométrie des tavelures s'applique à l'analyse des franges d'interférences produites par ce type d'interféromètre stellaire [54].

## 7. En guise de conclusion

Les progrès réalisés dans l'étude de la propagation de la lumière à travers la turbulence atmosphérique et de ses effets sur les images astronomiques ont permis de définir les paramètres

caractéristiques de la turbulence optique dont la connaissance est nécessaire pour combattre ses effets et améliorer les performances des observations.

Les résultats de ces travaux théoriques ont de nombreuses applications.

Ils ont conduit au développement d'outils de mesure des paramètres de la turbulence permettant la sélection des sites d'observation en fonction de la qualité des images (seeing). Noter que la plupart des observatoires sont maintenant équipés de *moniteurs de seeing* (voir par exemple [57]).

Ils sont pris en compte dans la conception et l'exploitation des réseaux interférométriques de télescopes opérant en synthèse d'ouverture optique, pour obtenir des images d'une résolution angulaire nettement supérieure à celle des télescopes conventionnels.

Ce sujet est abordé par Koechlin & Dettwiller dans ce numéro spécial, sous le titre « Correction de la dispersion atmosphérique dans l'imagerie par les grands télescopes et les interféromètres optiques » [58].

La théorie de la propagation de la lumière à travers l'atmosphère terrestre est à la base du développement de la technique d'optique adaptative, sujet traité en détail dans ces pages par Rousset & Fusco sous le titre « Optique adaptative : correction des effets de la turbulence atmosphérique sur les images astronomiques » [59].

Ainsi, ils permettent une exploitation optimale des techniques d'observations à haute résolution angulaire en termes de précision et sensibilité, conduisant à des succès notables notamment en physique stellaire [60]. Dans le domaine de la physique galactique un résultat remarquable est la confirmation de l'existence du trou noir central de la Galaxie dont la position et la masse ont été déterminées à partir d'observations à haute résolution angulaire d'étoiles de son voisinage conduisant à l'attribution du Prix Nobel de Physique 2020 à Genzel [61] et Ghez [62].

Ainsi, les astronomes se donnent-ils les moyens de tirer le meilleur parti des très grands télescopes optiques de la prochaine décennie avec l'objectif de gagner la bataille contre le flou évoquée par Léna [26].

## Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

## Remerciements

Cette recherche a utilisé le *NASA's Astrophysics Data System* ainsi que le Service des Bibliothèques de l'OCA que je tiens à remercier. Merci à P. Léna pour ses commentaires utiles à l'amélioration du manuscrit.

## Références

- [1] I. Newton, *Optics*, 4<sup>e</sup> éd., 1730, Book I, Part I, Prop. VIII, Prob. III, <https://archive.org/details/opticksoratreat00newtgoog/page/n6/mode/2up>, 98 pages.
- [2] J. Rösch, « Expériences préliminaires sur la selection dans le temps des images stellaires les mieux définies », *C. R. Acad. Sci. B (Paris)* **247** (1958), p. 422-425.
- [3] G. Bigourdan, « La scintillation des étoiles », *L'Astronomie (Paris)* **29** (1915), p. 203-209.
- [4] C. Fabry, « A propos du phénomène des ombres volantes », *L'Astronomie (Paris)* **33** (1919), p. 17-21.
- [5] G. I. Taylor, « Eddy motion in the atmosphere », *Phil. Trans.* **215** (1915), p. 1-26.
- [6] C.-G. Rossby, « The theory of atmospheric turbulence-an historical résumé and an outlook », *Mon. Weather Rev.* **55** (1927), p. 6-10.
- [7] W. H. Pickering, « Astronomical possibilities at considerable altitudes », *Obs* **15** (1892), p. 283-286.
- [8] A. Danjon, « Etude interférentielle de la scintillation et des conditions de stabilité des images télescopiques », *C. R. Acad. Sci. B (Paris)* **183** (1926), p. 1032-1034.

- [9] D. Bonneau, *Mieux voir les étoiles – 1<sup>er</sup> siècle de l'interférométrie optique*, EDP Sciences, Les Ulis, 2019.
- [10] H. W. Babcock, « The possibility of compensating astronomical seeing », *Publ. Astron. Soc. Pac.* **65** (1953), p. 229-236.
- [11] V. P. Linnik, « Possible development of astronomy from the instrumental viewpoint », in *Transactions of the Twelfth Astrometric Conference of the USSR (December 7–9, 1955, Pulkovo) Leningrad, 1957*, p. 179-185.
- [12] J. Texereau, « Limitation à la qualité des images d'un grand télescope », *Appl. Opt.* **2** (1963), p. 23-30.
- [13] G. Courtes, « Instruments et techniques », *Bull. Astron.* **24** (1964), p. 239-254.
- [14] A. Labeyrie, « Attainment of diffraction limited resolution in large telescopes by Fourier analysing speckle patterns in star images », *Astron. Astrophys.* **6** (1970), p. 85-87.
- [15] A. Labeyrie, D. Bonneau, R. V. Stachnik, D. Y. Gezari, « Speckle interferometry. III. High-resolution measurements of twelve close binary systems », *Astrophys. J.* **194** (1974), p. L147-L151.
- [16] H. A. McAlister, « Spectroscopic binaries as a source for astrometric and speckle interferometric studies », *Publ. Astron. Soc. Pac.* **88** (1976), p. 317-322.
- [17] D. Bonneau, A. Labeyrie, « Speckle interferometry : Color-dependent limb darkening evidenced on alpha orionis and omicron ceti », *Astrophys. J.* **181** (1973), p. L1-L4.
- [18] M. J. McDonnell, R. H. T. Bates, « Digital restoration of an image of Betelgeuse », *Astrophys. J.* **208** (1976), p. 443-452.
- [19] G. Weigelt, G. Baier, « R 136a in the 30 Doradus nebula resolved by holographic speckle interferometry », *Astron. Astrophys.* **150** (1985), p. L18-L20.
- [20] A. Chelli, P. Léna, F. Sibille, « Angular dimensions of accreting young stars », *Nature* **278** (1979), p. 143-146.
- [21] J. Meaburn, B. L. Morgant, H. Vinet, A. Pedlar, R. Spencer, « Speckle observations of the nucleus of NGC1068 », *Nature* **296** (1982), p. 331-333.
- [22] D. W. McCarthy, F. J. Low, S. G. Kleinmann, F. C. Gillett, « Infrared speckle interferometry of the nucleus of NGC 1068 », *Astrophys. J. Lett.* **257** (1982), p. L7-L11.
- [23] F. Roddier, « The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy », *Prog. Opt.* **19** (1981), p. 281-376.
- [24] N. J. Woolf, « High resolution imaging from the ground », *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **20** (1982), p. 367-398.
- [25] P. Léna, « High angular resolution in the infrared with a single very large telescope (VLT) », in *Workshop on ESO's Very Large Telescope, Cargese, Corse, France, May 16–19, 1983, Proceedings (A84-48051 23-89)*, European Southern Observatory, Garching, West Germany, 1983, p. 163-169.
- [26] P. Léna, *Une histoire de flou – Miroirs, trous noirs et autres mondes*, Le Pommier, Paris, 2019, Traduit en anglais. "Astronomy's Quest for Sharp Images. From blurred pictures to the Very Large Telescope", Springer, Germany, 2020.
- [27] L. F. Richardson, « The supply of energy from and to atmospheric eddies », *Proc. R. Soc.* **97** (1920), p. 354-373.
- [28] J. D. Woods, « On Richardson's number as a criterion for laminar-turbulent-laminar transition in ocean and atmosphere », *Radio Sci.* **4** (1969), p. 1289-1298.
- [29] A. N. Kolmogorov, « The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers », *Dan. S.S.S.R.* **30** (1941), p. 301-305.
- [30] A. M. Obukhov, « Structure of the temperature field in a turbulent flow », *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser Geograf. Geofiz* **13** (1949), p. 58-69.
- [31] V. I. Tatarskii, *Wave Propagation in a Turbulent Medium*, Dover, New York, 1961.
- [32] T. Von Kármán, « Progress in the statistical theory of turbulence », *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **34** (1948), p. 530-539.
- [33] V. I. Tatarski, *The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1971, <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1971etaw.book.....T/abstract>.
- [34] D. L. Fried, « Statistics of a geometric representation of wavefront distortion », *J. Opt. Soc. Am.* **55** (1965), p. 1427-1435.
- [35] D. L. Fried, « Anisoplanatism in adaptive optics », *J. Opt. Soc. Am.* **72** (1982), p. 52-61.
- [36] G. I. Taylor, « The spectrum of turbulence », *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A* **164** (1938), p. 476-490.
- [37] J. Borgnino, « Estimation of the spatial coherence outer scale relevant to long baseline interferometry and imaging in optical astronomy », *Appl. Opt.* **29** (1990), p. 1863-1865.
- [38] J. Maire, « Modélisation des effets optiques de la turbulence atmosphérique pour les grands télescopes et les observations à Haute Résolution Angulaire », Thèse, Université Nice-Sophia-Antipolis, 2007, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00192172>.
- [39] P. Léna, D. Rouan, F. Lebrun, F. Mignard, D. Pelat, L. Mugnier, *L'observation en Astrophysique*, EDP Sciences/CNRS Editions, Paris, 2008.
- [40] D. L. Fried, « Limiting resolution looking down through the atmosphere », *J. Opt. Soc. Am.* **56** (1966), p. 1380-1384.
- [41] M. Sarazin, F. Roddier, « The ESO differential image motion monitor », *Astron. Astrophys.* **227** (1990), p. 294-300.
- [42] D. L. Fried, « Probability of getting a lucky short-exposure image through turbulence », *J. Opt. Soc. Am.* **68** (1978), p. 1651-1658.
- [43] F. Roddier, G. M. Gilli, G. Lund, « On the origin of speckle boiling and its effects in stellar speckle interferometry », *J. Opt.* **13** (1982), p. 263-271.
- [44] J. Osborn, D. Föhring, V. S. Dhillon, R. W. Wilson, « Atmospheric scintillation in astronomical photometry », *Mon. Notices Royal Astron. Soc.* **452** (2015), p. 1707-1716.

- [45] J. N. Heasley, K. Janes, B. Labonte, D. Guenther, D. Mickey, P. Demarque, « The prospects for asteroseismology from ground-based sites », *Publ. Astron. Soc. Pac.* **108** (1996), p. 385-394.
- [46] R. Avila, J. Vernin, E. Masciadri, « Whole atmospheric-turbulence profile with generalized scidar », *Appl. Opt.* **36** (1997), p. 7898-7905.
- [47] V. Kornilov, A. A. Tokovinin, O. Vozyakova, A. Zaitsev, N. Shatsky, S. F. Potanin, M. S. Sarazin, « MASS : a monitor of the vertical turbulence distribution », *SPIE* **4839** (2003), p. 837-845.
- [48] J. Rajagopal, A. A. Tokovinin, E. Bustos, J. Sebag, « LuSci : a lunar scintillometer to study ground layer turbulence », *SPIE* **4013** (2008), p. 1-9.
- [49] A. Ziad, J. Borgnino, F. Martin, A. Agabi, « Experimental estimation of the spatial-coherence outer scale from a wavefront statistical analysis », *Astron. Astrophys.* **282** (1994), p. 1021-1033.
- [50] J. Kovalevsky, « Prospect for space stellar astrometry », *Space Sci. Rev.* **39** (1984), p. 1-63.
- [51] S. S. Olivier, « Tip-tilt compensation for astronomical imaging », *J. Opt. Soc. Am. A* **11** (1994), p. 368-378.
- [52] J. Hecquet, G. Coupinot, « Gain en résolution par superposition de poses courtes recentrées », *J. Opt. (Paris)* **16** (1985), p. 21-26.
- [53] J. M. Beckers, « Adaptive optics for astronomy: principles, performance, and applications », *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **31** (1993), p. 13-62.
- [54] F. Roddier, P. Léna, « Long-baseline Michelson interferometry with large ground-based telescopes operating at optical wavelengths I. General formalism. Interferometry at visible wavelengths », *J. Opt. (Paris)* **15** (1984), p. 171-182.
- [55] F. Roddier, P. Léna, « Long-baseline Michelson interferometry with large ground-based telescopes operating at optical wavelengths II. Interferometry at visible wavelengths », *J. Opt. (Paris)* **15** (1984), p. 363-374.
- [56] M. M. Colavita, J. K. Wallace, B. E. Hines, Y. Gursel, F. Malbet, D. L. Palmer, X. P. Pan, M. Shao, J. W. Yu, A. F. Boden, P. J. Dumont, J. Gubler, C. D. Koresko, S. R. Kulkarni, B. F. Lane, D. W. Mobley, G. T. Van Belle, « The Palomar testbed interferometer », *Astrophys. J.* **510** (1999), p. 505-521.
- [57] F. Martin, A. Ziad, R. Conan, J. Borgnino, A. Tokovinin, « Optical parameters for high resolution astronomy estimated from the GSM (Generalized Seeing Monitor) experimented at several major astronomical sites in the world », *ASP Conf. Ser.* **266** (2002), p. 138-141.
- [58] L. Koechlin, L. Dettwiller, « Correction de la dispersion atmosphérique dans l'imagerie par les grands télescopes et les interféromètres atmosphériques », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 345-364.
- [59] G. Rousset, T. Fusco, « Optique adaptative : correction des effets de la turbulence atmosphérique sur les images astronomiques », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 293-344.
- [60] F. Millour, A. Chiavassa, L. Bigot, O. Chesneau, A. Meilland, P. Stee (éds.), *What the Highest Angular Resolution Can Bring to Stellar Astrophysics? The 2013 VLTI School*, EAS Publications Series, vol. 69-70, EDP sciences, 2015.
- [61] R. Genzel, F. Eisenhauer, S. Gillessen, « The galactic center massive black hole and nuclear star cluster », *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010), p. 3121-3195.
- [62] A. M. Ghez, B. L. Klein, M. Morris, E. E. Becklin, « High proper-motion stars in the vicinity of Sagittarius A\* : Evidence for a supermassive black hole at the center of our galaxy », *Astrophys. J.* **509** (1998), p. 678-686.







---

Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

# Optique adaptative : correction des effets de la turbulence atmosphérique sur les images astronomiques

## *Adaptive optics: correcting atmospheric turbulence effects on astronomical images*

Gérard Rousset<sup>\*, a</sup> et Thierry Fusco<sup>b, c</sup>

<sup>a</sup> LESIA, Université Paris Cité, Observatoire de Paris, Université PSL, Sorbonne Université, CNRS, F-92190 Meudon, France

<sup>b</sup> DOTA, ONERA, Université Paris Saclay (COMUE), Palaiseau, France

<sup>c</sup> Aix Marseille Univ, CNRS, CNES, LAM, Marseille, France

Courriels : [gerard.rousset@obspm.fr](mailto:gerard.rousset@obspm.fr) (G. Rousset), [thierry.fusco@onera.fr](mailto:thierry.fusco@onera.fr) (T. Fusco)

**Résumé.** L'optique adaptative (OA), installée aujourd'hui sur tous les très grands télescopes astronomiques, permet de s'affranchir de la limitation en résolution angulaire imposée aux grands télescopes au sol par les perturbations de la turbulence atmosphérique. Cet article de revue présente l'état de l'art du domaine pour les applications astronomiques. Il donne les principes de l'OA et décrit ses composants principaux que sont les miroirs déformables, les analyseurs de surface d'onde et les algorithmes de commande. L'article présente aussi les principales réalisations récentes et les projets en cours. D'abord pour l'imagerie directe des planètes extrasolaires par OA extrême et coronagraphie, en prenant comme exemple l'instrument SPHERE. Ensuite pour résoudre par étoile guide laser la problématique de la couverture du ciel trop faible et étendre la correction de l'OA au-delà du domaine isoplanétique. Ainsi les systèmes d'OA tomographiques assistés par laser sont présentés avec à chaque fois des exemples de réalisation comme pour l'OA à tomographie laser, l'OA multiconjuguée et l'OA multi-objet. Enfin les défis des télescopes géants, dits extrêmes, sont abordés en fin d'article avec un focus particulier sur le projet européen de l'Extremely Large Telescope (ELT).

**Abstract.** Today, adaptive optics (AO) is installed on all very large astronomical telescopes. It allows to overcome the limitation in angular resolution imposed on large ground-based telescopes by the atmospheric turbulence perturbations. This review paper presents the state of the art of the field for astronomical applications. It gives the principles of AO and describes its main components which are the deformable mirrors, the wavefront sensors and the control algorithms. The paper also presents the main recent achievements and ongoing projects. First, for the direct imaging of extra-solar planets by extreme AO and coronagraphy, taking as example the SPHERE instrument. Then to solve the problem of the very limited sky coverage by using laser guide star and to extend the AO correction beyond the isoplanatic patch. Thus, the various laser-assisted tomographic AO concepts are presented with examples of each realization as for the laser tomography AO, the multi-conjugate AO and the multi-object AO. Finally, the challenges of the new generation of giant telescopes

---

\* Auteur correspondant.

are discussed at the end of the paper with a particular focus on the European Extremely Large Telescope (ELT) project.

**Mots-clés.** turbulence atmosphérique, imagerie, optique adaptative, analyse de surface d'onde, tomographie, étoile laser, miroir déformable.

**Keywords.** atmospheric turbulence, imaging, adaptive optics, wavefront sensing, tomography, laser guide star, deformable mirror.

*Published online: 3 March 2023, Issue date: 11 August 2023*

## 1. Introduction

La turbulence atmosphérique induit des fluctuations spatiales et temporelles de l'indice de réfraction de l'air qui perturbent la propagation des ondes lumineuses arrivant des astres observés en introduisant des avances et des retards de phase qui dégradent sévèrement les images produites par les grands télescopes astronomiques au sol [1]. L'optique adaptative (OA) est une technique d velopp e depuis 30 ans en astronomie pour corriger en temps réel la dégradation des images et atteindre ainsi la limite de la diffraction des télescopes. Les principes en ont été proposés pour la première fois par H. Babcock en 1953 [2] puis indépendamment par V. Linnik en 1957 [3]. L'OA consiste à corriger directement les aberrations évolutives de la surface d'onde à l'aide d'un miroir que l'on déforme en fonction des mesures faites par un appareil sensible aux perturbations de la surface d'onde. Dans les années 50, les technologies nécessaires à la réalisation d'une OA n'étaient pas encore matures. Il a donc fallu attendre les années 70-80 pour voir les toutes premières démonstrations faites dans le domaine de la défense associant des industriels [4], pour les applications à la focalisation de faisceaux lasers et à l'observation des satellites artificiels depuis le sol, principalement aux  tats-Unis mais aussi en Europe et en particulier en France. Les astronomes se sont aussi rapidement intéressés à ces technologies d velopp es pour la défense et la première démonstration pour l'astronomie infrarouge ([5, instrument COME-ON]) a été faite en 1989 à l'Observatoire de Haute Provence par une équipe d'ingénieurs et de chercheurs français associ e à l'European Southern Observatory (ESO) dans le cadre de la préparation du Very Large Telescope (VLT). Les travaux ont ensuite rapidement évolué dans la communauté astronomique pour conduire dans les années 2000 à l'équipement de tous les très grands télescopes de classe 8-10 m tels que Keck [6], Subaru [7], VLT [8], Gemini [9] et Large Binocular Telescope (LBT) [10]. Enfin dans les années 2010, de nouveaux concepts ont été développés et testés sur le ciel et certaines OA se sont même sp cialis es pour répondre de manière plus performante à des programmes astrophysiques ciblés comme dans le cas de l'imagerie directe des planètes extrasolaires par exemple.

Cet article présente une revue du domaine actuel de l'OA incluant des développements les plus récents. Tout d'abord, la section suivante, la deuxième, introduit les fondamentaux de l'OA en partant de la formation d'image et en donnant les principes généraux. Une description des éléments clés constitutifs d'une OA est faite, passant en revue les miroirs déformables, les analyseurs de surface d'onde de types Shack-Hartmann et pyramide et le calcul de la commande. Cette partie se termine par les éléments permettant une évaluation des performances de l'OA en termes de qualité d'image et de variance résiduelle de phase. La troisième section porte sur les avanc es récentes ayant conduit à la mise sur le ciel des instruments d'imagerie directe d'exoplanètes équipés d'OA extrême et inclut quelques résultats marquants. La section suivante, la quatrième, aborde le domaine des OA tomographiques assist es par laser pour accroître les performances des instruments et en particulier le champ de vue corrigé. Le principe des étoiles guides lasers est introduit pour solutionner le problème de la très faible couverture du ciel en OA classique. Les limitations rencontr es dans la mise en œuvre de ces étoiles lasers sont pr sent es.

Ensuite les systèmes tomographiques sont décrits comme l'OA dite à tomographie laser, l'OA multiconjugu ee et l'OA distribuée dite multi-objet. A chaque fois, des exemples de systèmes op eracionnels ou en projet sont données avec quelques résultats marquants. Enfin, la cinquième section porte sur les défis soulev es par les t elescopages géants, dits extrêmes, en projet qui seront tous  equip es d'OA d'un niveau de complexité encore jamais atteint.

## 2. Les fondamentaux de l'Optique Adaptative

### 2.1. Formation d'image

Pour comprendre le principe de l'OA, il faut partir de la théorie de la formation des images en lumière incohérente, caractérisée par la réponse impulsionnelle de l'instrument appelée en optique : Fonction d'Etallement de Point (FEP) (Point Spread Function (PSF) en anglais). C'est l'image monochromatique d'une étoile non résolue par le télescope. Son expression pour la longueur d'onde d'observation  $\lambda$  est donnée par la diffraction de Fraunhofer, c'est-à-dire le carr e du module de la transformée de Fourier (TF) du champ électromagnétique scalaire  $\Psi\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda}\right)$  incident dans la pupille d'entrée :

$$FEP(\boldsymbol{\alpha}) = \left| TF\left(\Psi\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda}\right)P\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda}\right)\right) \right|^2 \quad (1)$$

où  $\boldsymbol{\alpha}$  est la direction angulaire dans le plan image,  $\frac{\mathbf{r}}{\lambda}$  la coordonnée dans le plan pupille duale de  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $P\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda}\right)$  la fonction définissant la transmission de la pupille.  $P\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda}\right)$  vaut 1 dans la pupille et 0 à l'extérieur. Le champ incident peut être défini par :

$$\Psi\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda}\right) = A\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda}\right) \exp\left(i\varphi\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda}\right)\right) \quad (2)$$

où  $A$  et  $\varphi$  sont respectivement l'amplitude et la phase du champ. La surface sur laquelle la phase  $\varphi$  est constante est appelée surface d'onde. Par exemple, elle est plane pour une onde dite « plane » comme c'est le cas au-dessus de l'atmosphère pour les ondes nous arrivant des étoiles qui sont à très grande distance. De plus pour une onde plane, l'amplitude  $A$  est une constante. Dans le cas d'une onde plane incidente sur la pupille, la FEP est dite limitée par la diffraction et est simplement donnée par le module carr e de la TF de la fonction pupille  $P$  à une constante près. Pour une pupille dont la forme est un disque, la FEP est la tache d'Airy. Sa largeur angulaire à mi-hauteur est alors donnée par  $\lambda/D$  où  $D$  est le diamètre du télescope. Cette largeur donne la résolution angulaire ultime de l'instrument. Par exemple, elle vaut 0,01 seconde d'arc ou 10 mas (mas : milli-seconde d'arc) pour un télescope de 10 m   une longueur d'onde de 0,5  $\mu\text{m}$ .

Par contre en imagerie à travers l'atmosphère,  $A$  et  $\varphi$  vont fluctuer dans la pupille comme conséquence de la propagation des ondes à travers la turbulence atmosphérique (voir D. Bonneau dans ce numéro [11] et [1]). Les surfaces d'onde ne sont plus planes. La phase  $\varphi$  dans la pupille présente des avances et des retards locaux. Les fluctuations de  $A$  se traduisent par le phénomène de scintillation des étoiles observable à l'oeil nu. Mais sur les sites des grands t elescopages astronomiques, l'impact de ces fluctuations d'amplitude reste très faible par rapport à celui induit par les fluctuations de la phase. On peut généralement faire l'hypothèse dite de champ proche qui revient à n egligier la scintillation pour la formation des images comme si toute la turbulence était localisée au niveau du sol [1]. La FEP est alors donnée par :

$$FEP(\boldsymbol{\alpha}) = \left| TF\left(A_0 \exp\left(i\varphi\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda}\right)\right)P\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda}\right)\right) \right|^2 \quad (3)$$

où  $A_0$  est l'amplitude supposée constante dans la pupille. Ainsi pour recouvrer une FEP à la limite de la diffraction (donnée par une onde plane non perturbée), il faut compenser en temps réel les fluctuations de  $\varphi$ .

D'après les propriétés de l'atmosphère [11], la turbulence induit des fluctuations de l'indice de l'air qui se traduisent directement par des fluctuations (appelées écart aberrant  $\delta$ ) du chemin optique des rayons incidents. Comme l'indice de l'air est très faiblement dépendant de la longueur d'onde, l'écart aberrant peut être consid er e en première approximation comme achromatique.   la longueur d'onde  $\lambda$ , les fluctuations de phase résultantes exprimées en radians sont simplement données par :

$$\varphi = 2\pi\delta/\lambda \quad (4)$$

  noter que les fluctuations turbulentes de  $\varphi$  sont donc par définition chromatiques. Ainsi plus la longueur d'onde d'observation sera courte, plus  $\varphi$  sera grand et donc, plus la FEP sera dégradée par la turbulence comme on peut le montrer à partir de l'équation (3).

Si l'on considère maintenant une image longue pose, du fait des fluctuations temporelles de la phase turbulente, la FEP moyenne est lissée et se révèle être très élargie par rapport à la limite de diffraction. Sa largeur à mi-hauteur, appelée le *seeing*, est comprise entre typiquement 0,5 et 1,5 seconde d'arc sur les meilleurs sites astronomiques. Elle est donnée par le rapport  $\lambda/r_o$  où  $r_o$  est le diamètre de Fried [12] correspondant à un diamètre équivalent de télescope [11] et pouvant atteindre de l'ordre de 10 cm pour les longueurs d'onde du visible, donc bien plus petit que les diamètres des grands télescopes astronomiques. L'expression du diamètre de Fried est donnée par :

$$r_o = \left[ 0,423 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{\cos\gamma} \int_0^{+\infty} C_n^2(h) dh \right]^{-\frac{3}{5}} \quad (5)$$

où  $C_n^2(h)$  est le profil de la constante de structure des fluctuations de l'indice de réfraction de l'air en fonction de l'altitude  $h$  et  $\gamma$  la distance zénithale pour la ligne de visée [11]. Le diamètre de Fried sera d'autant plus petit (et donc le seeing large, dit aussi *mauvais*) que la longueur d'onde sera courte, la constante de structure de l'indice  $C_n^2(h)$  forte et que l'observation se fera loin du zénith. Le diamètre de Fried peut aussi être relié directement à la phase turbulente. Le calcul de la variance spatiale de la phase sur la pupille en moyenne sur la statistique de la turbulence, notée ici  $\sigma_\varphi^2$ , conduit à :

$$\sigma_\varphi^2 = \left\langle \frac{1}{S_{pupille}} \int_{pupille} (\varphi(\mathbf{r}) - \bar{\varphi})^2 d\mathbf{r} \right\rangle = 1,03 \left( \frac{D}{r_o} \right)^{\frac{5}{3}} r ad^2 \quad (6)$$

où  $\langle \rangle$  est la moyenne statistique,  $S_{pupille}$  la surface de la pupille et  $\bar{\varphi}$  la phase moyenne sur la pupille. Dans cette équation, le chromatisme de la phase est porté par le diamètre de Fried qui varie selon  $\lambda^{6/5}$ . Cette équation montre que sur une pupille de diamètre  $r_o$ , l'écart quadratique moyen de la phase turbulente  $\sigma_\varphi$  vaut 1 rad (c'est-à-dire en écart aberrant  $\sigma_\delta \sim \lambda/6$ ) ce qui est une valeur plutôt faible en terme de perturbation et correspond à des images peu dégradées. Dans ce cas, la FEP instantanée est très proche de la limite de diffraction et essentiellement affect e d'un déplacement aléatoire autour du foyer du télescope correspondant en terme de surface d'onde à un angle d'arrivée (basculement du plan d'onde) fluctuant dans le temps. C'est la situation rencontrée sur des télescopes d'amateur de petit diamètre.

Enfin les fluctuations spatiales de la phase peuvent être caractérisées par leur spectre  $\Phi_\varphi$  (en fait la densité spectrale de puissance) directement déduit des fluctuations d'indice (voir [1] et [11]) :

$$\Phi_\varphi(\mathbf{k}) = 0,023 r_o^{-\frac{5}{3}} |\mathbf{k}|^{-\frac{11}{3}} \quad (7)$$

où  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  est la fréquence spatiale duale de la coordonn e spatiale  $\mathbf{r} = (x, y)$  sur la surface d'onde. Il s'agit du spectre de Kolmogorov exprimé pour la phase avec sa loi de puissance caractéristique en  $-11/3$ . Il est valide sur le domaine inertiel entre la grande échelle à laquelle est injectée l'énergie turbulente et la petite échelle à laquelle l'énergie se dissipe par viscosité. Ce spectre nous dit que les perturbations de phase sont dominées par les très basses fréquences

spatiales avec une décroissance très rapide de la force des hautes fréquences. Sur une pupille de télescope, cela se traduit par la prépondérance des fluctuations du basculement de l'onde devant les fréquences spatiales plus  lev es déformant la surface d'onde.

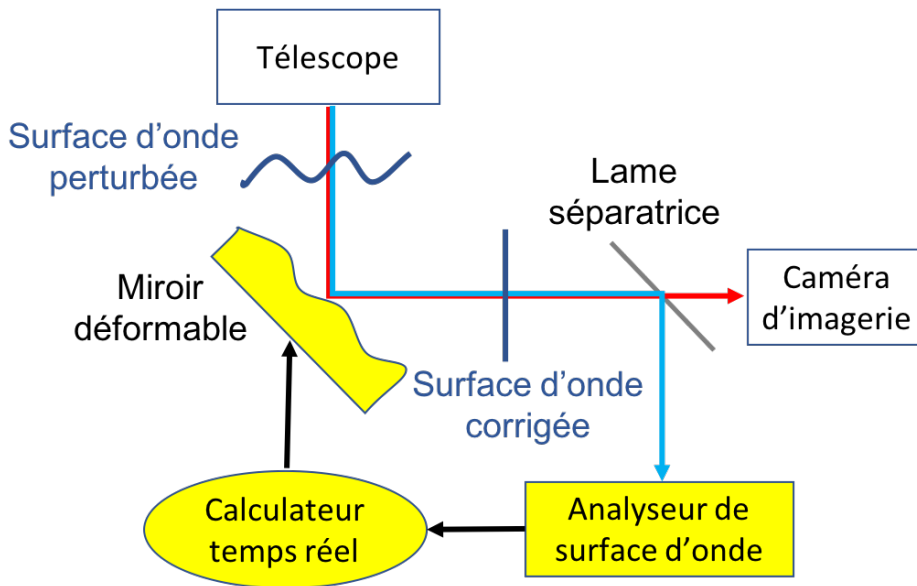
## 2.2. Principe de l'Optique Adaptative

Le principe de l'OA en astronomie repose sur la compensation des perturbations turbulentes de chemin optique par un miroir déformable (MD) introduisant un écart aberrant opposé dans l'air, donc lui aussi achromatique. L'instrument équipé d'une OA peut ainsi fonctionner sur une large bande spectrale. Le schéma de principe de l'OA est présenté sur la figure 1. L'onde perturb e issue du télescope est réfléchie sur le MD dont la forme est adaptée à chaque instant. Après réflexion, la surface d'onde corrigée est proche d'une onde plane. La lumière est ensuite s par e en deux voies, l'une pour former l'image proche de la limite de la diffraction et l'autre pour mesurer les perturbations de la surface d'onde par un analyseur de surface d'onde (ASO). La lame séparatrice est le plus souvent de type dichroïque, par exemple : l'image est observ e dans le domaine infrarouge où la dégradation des images est moins sévère et l'analyse de surface d'onde se fait dans le domaine visible en profitant de l'achromaticit  des perturbations de chemin optique. Les mesures de l'ASO sont trait es par un calculateur pour déterminer la forme à donner à la surface du MD et lui appliquer la commande correspondante en temps réel. Ce schéma représente un asservissement en boucle ferm e où l'ASO ne mesure que les erreurs laiss es sur la surface d'onde par la correction apport e par le MD et où la forme du MD est r ajust e à chaque nouvelle commande à partir de la mesure de ces erreurs. Ces erreurs ont différentes sources qui seront pr sent es dans la section 2.6. Nous allons maintenant nous intéresser aux caractéristiques des composants d'un système d'OA avant de chiffrer ses performances. Pour approfondir ces sujets, le lecteur est invité à consulter les deux livres suivants : [13] et [14].

## 2.3. Miroirs déformables

Nous présentons ici un survol des MD les plus utilisés en astronomie. Le principe général en est donné sur la figure 2. Le miroir est lui-même une plaque très mince (ou une membrane) réfléchissante à l'arrière de laquelle sont « fixés » des actionneurs. Ceux-ci poussent ou tirent sur la surface arrière du miroir en fonction de l'amplitude et du signe de la commande électrique (tension ou courant) qui leur est appliqu e, ce qui se traduit par une déformation de la surface supérieure où se réfléchit la lumière. L'écart aberrant ainsi induit sur la surface d'onde est le double de la déformation mécanique du miroir. Cette déformation reste dans le domaine élastique car elle est typiquement inférieure ou de l'ordre de la dizaine de micromètres; la valeur requise de la déformation dépend des conditions d'observation et du diamètre du télescope. Le temps de réponse du MD doit être court, typiquement inférieur à la milliseconde pour pouvoir assurer une correction efficace. Le plus souvent, le MD est installé dans un plan conjugué de la pupille sur le trajet optique de la lumière se propageant dans l'instrument scientifique. Le maillage des actionneurs à l'arrière du miroir doit être régulier et couvrir toute la pupille afin d'agir sur la totalité de la surface d'onde; les mailles utilis es sont généralement carr es ou triangulaires.

Le nombre total d'actionneurs requis sur le MD peut varier considérablement en fonction des conditions expérimentales consid r es. Ce nombre d'actionneurs est typiquement donné par le rapport  $(D/r_o)^2$  pour obtenir des performances satisfaisantes que nous discuterons en section 2.6. Compte tenu de la chromaticité de  $r_o$ , ce rapport montre déjà que les OA pour la correction dans le proche infrarouge seront bien moins complexes à réaliser que pour le domaine du visible. Ainsi aujourd'hui, les systèmes opérationnels sont dimensionnés pour le proche



**FIGURE 1.** Schéma de principe de l'optique adaptative. Le système est constitué d'un miroir déformable qui corrige la surface d'onde, d'une lame séparatrice qui partage la lumière entre la voie d'imagerie et la voie d'analyse de surface d'onde. L'analyseur mesure les erreurs sur la surface d'onde qui sont utilis es par le calculateur temps réel pour mettre à jour la forme à donner au miroir. Il s'agit d'un asservissement en boucle ferm e car l'analyseur voit l'effet de la correction apport e par le miroir déformable.

infrarouge. Par ailleurs, plus le nombre d'actionneurs sera élevé, plus le MD pourra corriger les hautes fréquences spatiales de la surface d'onde, sans bien sûr négliger la correction des basses fréquences! Le plus souvent, on dédie un miroir plan adaptatif, basculant autour des deux axes  $x$  et  $y$  de la pupille, à la correction des basculements de l'onde qui dominent la perturbation. Ainsi l'amplitude de la déformation demand e au MD s'en trouve réduite.

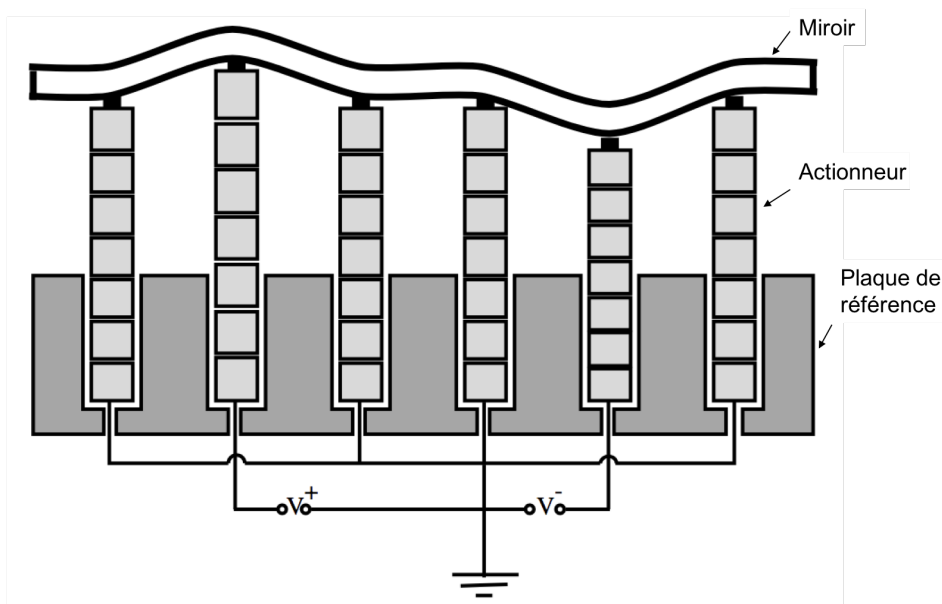
On trouve aujourd'hui des MD allant de quelques dizaines d'actionneurs jusqu'à plusieurs milliers! Ce qui correspond à avoir typiquement entre 5 et 70 actionneurs dans le diamètre du télescope. Plusieurs technologies sont exploitées pour fabriquer un MD (voir par exemple [14] et [15]).

- Les actionneurs peuvent être réalisés à partir d'un matériau piézoélectrique qui soumis à une haute tension va se dilater ou se contracter suivant le signe. L'intensité de la force appliqu e par l'actionneur sur le miroir est importante; celui-ci peut être constitué d'une plaque mince de verre de l'ordre de 2 mm d'épaisseur. Le pas interactionneur minimal est de l'ordre de 5 mm ce qui conduit à des MD de taille importante pour les grands nombres d'actionneurs.   noter qu'on trouve aussi des MD utilisant ces matériels piézoélectriques sous forme de plaques coll es directement à l'arrière du miroir et qui exploitent un effet bimorphe pour déformer le miroir.
- Les actionneurs peuvent être de type électromagnétique : constitués d'une microbobine (fix e à la plaque de référence) qui en fonction de l'intensité du courant électrique circulant va attirer ou repousser un petit aimant fixé lui en regard à l'arrière du miroir. La force produite étant plus faible que dans le cas de l'effet piézoélectrique, les miroirs sont des membranes de silicium, de l'ordre de la centaine de micromètres d'épaisseur, flottantes

devant les bobines et uniquement tendues et fix es sur leur pourtour (contrairement au dessin de la figure 2). Le pas interactionneur peut être de l'ordre du millimètre, permettant une haute densité d'actionneurs pour une taille raisonnable du MD ce qui résulte en un encombrement limité de l'instrument dans lequel il sera intégré.

- Mais la plus haute densité d'actionneurs peut être obtenue à partir des technologies des microsystèmes électro-mécaniques (en anglais Micro Electro-Mechanical System (MEMS)) atteignant un pas interactionneur de 300  $\mu\text{m}$ . L'actionneur est alors constitué de deux électrodes aux bornes desquelles on applique une tension qui crée une force électrostatique attirant ou repoussant l'électrode mobile fix e au miroir. Ici la force étant très faible, le miroir est une membrane extrêmement mince de quelques micromètres d'épaisseur.   noter que l'amplitude maximale utile de la déformation est très limit e sur ces miroirs, de l'ordre du micromètre. Par ailleurs, ces microsystèmes sont très fragiles : ils sont donc protégés par une fenêtre optique plac e devant le miroir.

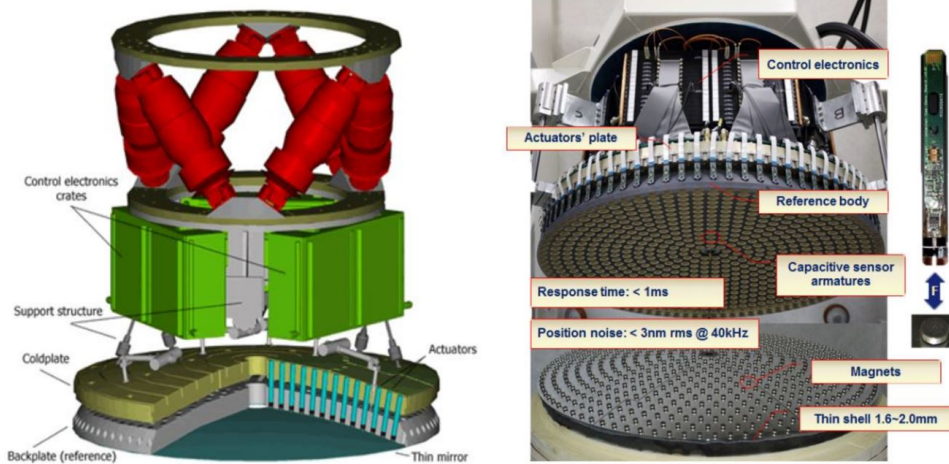
Les technologies rapidement pr sent es ci-dessus sont celles des MD implantés dans les instruments scientifiques accrochés aux foyers des télescopes. Ces instruments nécessitent l'utilisation de nombreuses pièces optiques pour transporter les faisceaux, conjuguer les plans pupilles et les plans focaux et adapter les grandissements au besoin. Les nombreuses surfaces optiques mises en jeu induisent une perte en transmission des photons incidents et donc une réduction de la sensibilité de l'instrument. Par exemple, si chaque surface a une transmission de 95 %, pour un instrument en comptant une vingtaine la transmission globale n'est plus que de 36 %. Dans le domaine de l'infrarouge thermique, se rajoute en plus l'émissivité propre, même très faible, de chaque surface qui conduit à accroître le fond thermique si ces surfaces ne sont pas refroidies et



**FIGURE 2.** Schéma de principe d'un miroir déformable (Source : O. Lai 1996). Les actionneurs sont fixés à une plaque de référence rigide et à l'arrière du miroir à déformer. Pour une tension respectivement positive ou négative, un actionneur pousse ou tire sur le miroir, le déformant localement. Sa surface supérieure ainsi d form e où se réfléchit la lumière, introduit alors l'écart aberrant souhaité.



donc à limiter aussi la sensibilité aux sources faibles. Ceci a conduit les astronomes à proposer d'intégrer le MD dans le télescope : sur le miroir secondaire dénommé alors secondaire adaptatif [16] et [17]. Le secondaire adaptatif est d'abord constitué d'une coque mince de verre convexe ou concave, d'épaisseur typique de 2 mm et de diamètre de l'ordre de 1 m pour un télescope de classe 8 m (voir figure 3).



**FIGURE 3.** Dessin (gauche) et photographie en cours d'intégration (droite) du secondaire adaptatif du LBT. Crédits : Microgate et ADS.

C'est le miroir lui-même, à déformer, à l'arrière duquel sont collés les aimants constituant les premières parties des actionneurs électromagnétiques. Les secondes parties sont les bobines fix es elles sur un support épais de référence, elles créent la force électromagnétique nécessaire à la mise en mouvement des aimants et donc à la déformation de la coque mince. Les intensités des courants mis en jeu sont  lev es pour pouvoir créer une force suffisante et provoquent une dissipation thermique importante au niveau de chaque actionneur qui doit être  vacu e hors du télescope par la circulation d'un fluide caloporteur. De plus, à ces actionneurs sont associés des capteurs capacitifs permettant une mesure précise et temps réel de la position du miroir vis-à-vis du support de référence afin d'assurer un asservissement local de la déformation du miroir. Le pas interactionneur est large, de l'ordre de 30 mm, mais sur un miroir de 1 m de diamètre cela conduit à disposer de l'ordre de 1 000 actionneurs. On voit donc qu'un secondaire adaptatif est un système très complexe et donc très cher à développer, quatre très grands télescopes en sont actuellement équipés : le Multi-Mirror Telescope (MMT) [17], le LBT [10], le Magellan Telescope [18] et le VLT [19].

#### 2.4. Analyseurs de surface d'onde

L'analyseur de surface d'onde (ou de front d'onde) est le dispositif en charge de la mesure de la perturbation de la surface d'onde par rapport à une surface de référence correspondant à un instrument fonctionnant à la limite de la diffraction. Il s'agit en fait de mesurer la phase du champ électromagnétique. Or aux longueurs d'onde optiques, il n'existe pas de détecteur répondant à des fréquences temporelles de l'ordre de plusieurs centaines de térahertz afin de donner accès à

la phase de l'onde. Les détecteurs disponibles sont des détecteurs de l'intensité lumineuse, c'est-à-dire l'amplitude au carré du champ. Il est donc nécessaire d'utiliser des techniques indirectes qui vont coder l'information de phase  $\varphi$  en variation d'intensité détectable. Pour approfondir le sujet sur les différents types d'analyseur, le lecteur est invité à consulter par exemple [14]. Nous ne présentons ici qu'une synthèse.

- En premier lieu, former une FEP sur une matrice bidimensionnelle de détecteurs, c'est déjà coder l'information de phase en intensité, de manière non linéaire comme exprimé par l'équation (3). Il est ainsi possible de développer des méthodes d'inversion de cette équation pour la mesure de surface d'onde à partir d'images, malgré l'ambiguïté sur l'argument de la  $TF$  de par le module carré. Par exemple, la *diversité de phase* utilise deux images dont une est d focalis e par rapport à l'autre d'une quantité connue; elle peut même fonctionner sur des images prises sur un objet étendu. Mais ces méthodes sont encore difficilement transposables au fonctionnement en temps réel de l'OA.
- La technique la plus connue pour accéder à la surface d'onde est l'interférométrie où les franges d'interférence obtenues dans la superposition du faisceau à analyser avec un faisceau de référence codent la phase recherch e. Cette technique est largement utilis e en laboratoire pour le contrôle de la qualité des surfaces optiques. Cependant pour les observations astronomiques, un faisceau de référence de laboratoire n'est pas utilisable du fait de l'incohérence avec la lumière stellaire. Il faut donc faire interf rerer le faisceau à analyser avec une réplique de lui-même. Par exemple, une réplique peut être obtenue à partir d'une séparation en amplitude et être ensuite superpos e avec un faible décalage latéral au faisceau à analyser dans un plan conjugué de la pupille. Les franges rendent compte du déphasage existant entre deux points du faisceau séparés du décalage. C'est l'*interféromètre à décalage latéral*, utilisé lors des premières démonstrations de l'optique adaptative, constitué de deux voies parallèles : l'une pour un décalage selon  $x$  et l'autre selon  $y$ . Ils mesurent ainsi le gradient spatial de la phase recherch e dans la pupille. D'autres schémas optent pour un filtrage spatial de la réplique afin de créer une onde quasi plane et d'accéder à la phase plutôt que le gradient comme par exemple pour l'*interféromètre de Smartt*.
- Les analyseurs actuellement les plus répandus reposent sur des principes issus de l'optique géométrique. La propriété exploit e est la perpendicularité des rayons lumineux à la surface d'onde. Ainsi mesurer la déviation par rapport à un axe optique des rayons lumineux dans un faisceau, c'est avoir accès à la pente (ou à la courbure) locale de la surface d'onde. Nous nous intéressons ici à l'analyseur de Shack–Hartmann (SH), le plus répandus à ce jour dans les OA opérationnelles, et à l'analyseur à Pyramide qui connaît actuellement un très fort intérêt.

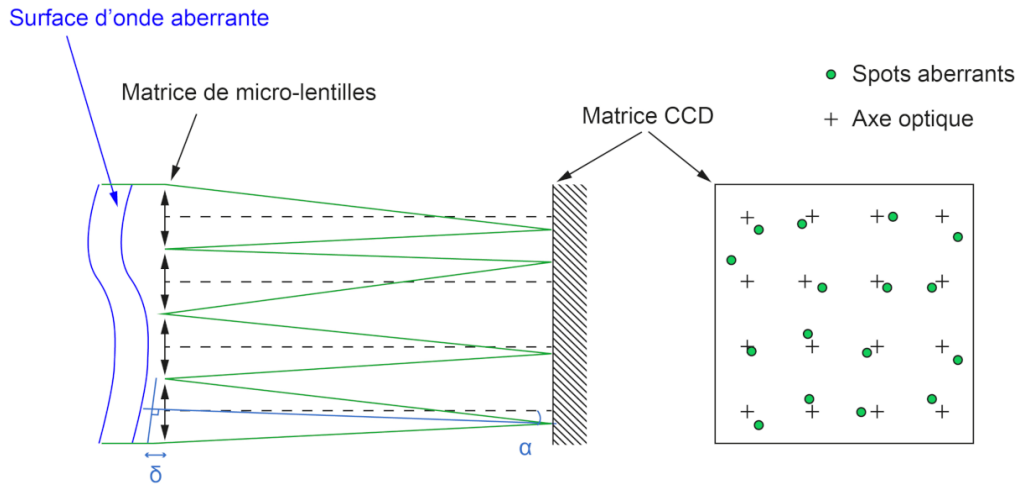
Le dimensionnement de ces analyseurs est déterminé par le besoin d'échantillonner et de mesurer les hautes fréquences spatiales de la phase turbulente pour obtenir une haute qualité de correction. Généralement, on est amené à choisir un nombre de points de mesure sur l'analyseur qui est très proche du nombre d'actionneurs du MD, c'est en fait le nombre de degrés de liberté du système qui peut être de l'ordre de  $(D/r_o)^2$ . On cherche donc une bonne correspondance entre les deux composants en évitant le plus souvent de surcharger le calculateur temps réel avec des mesures surnuméraires.

Le choix du détecteur à utiliser dans l'analyseur est aussi crucial : il doit offrir suffisamment de pixels (entre  $50^2$  et  $800^2$ ) et une fréquence de lecture  lev e ( $\sim 1$  kHz ou plus) pour assurer une mesure précise et avoir un rendement quantique élevé sur une large bande spectrale ( $\geq 50\%$ ) et un très faible bruit électronique par pixel et par trame ( $<$  quelques électrons) pour maximiser le rapport signal sur bruit. Aujourd'hui on peut trouver dans le visible des matrices CCD (Charge

Coupled Device) et CMOS (Complementary Metal Oxyde Semiconductor) et dans le proche infrarouge des matrices de photodiodes à avalanche qui répondent à ces exigences.

Enfin, notons que la source lumineuse dans le ciel à utiliser pour analyser la surface d'onde est appel e de manière générique * toile guide*. Elle peut être naturelle comme une étoile ou un cœur de galaxie, on utilise alors l'acronyme *NGS* pour Natural Guide Star en anglais. Nous verrons aussi que l'étoile guide peut être cr e e par laser (voir section 4.2).

#### 2.4.1. Analyseur de Shack–Hartmann



**FIGURE 4.** Principe de l'ASO de SH.   gauche, un réseau de microlentilles, conjugué de la pupille, la découpe en sous-pupilles créant des sous faisceaux symbolisant les rayons lumineux et forme un réseau de spots images sur une matrice CCD dans le plan focal.   droite, le réseau des spots images : le décalage de chaque spot (vert) par rapport à l'axe optique de la microlentille (croix) donne l'angle d'incidence local  $\alpha$  et donc l'écart aberrant  $\delta$  entre les rayons en bord de sous-pupille.

Le principe de l'ASO de SH est issu du test optique utilisé par Hartmann dans les années 1900 pour le contrôle des grands miroirs de télescope. L'écran opaque percé de trous, pour définir des rayons lumineux dont on mesure la déviation, a été ici remplacé par Shack [20] par une matrice compacte de microlentilles permettant d'exploiter au mieux tous les photons incidents. Le principe est présenté sur la figure 4. Le SH mesure les pentes locales  $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y)$  de la surface d'onde sur un réseau de sous pupilles par l'intermédiaire d'une matrice de microlentilles conjugu es de la pupille formant un réseau de spot images sur une matrice CCD. Ici, les points de mesure de l'analyseur sont les sous-pupilles définies par les microlentilles. Le décalage de chaque spot donne l'information sur la pente qui se traduit en un écart aberrant  $\delta$  connaissant le diamètre de la microlentille. Le SH donne donc accès à la mesure du gradient spatial de la surface d'onde : l'écart aberrant local par sous-pupille. Par ailleurs, la position de chaque spot image sur le CCD ne dépend pas de la longueur d'onde. Ainsi le SH est parfaitement achromatique sur les perturbations de surface d'onde dues à la turbulence et peut donc fonctionner en large bande spectrale pour maximiser le nombre de photons détectés dans la mesure.   noter que les axes optiques donnés par les foyers des microlentilles sont  talonnables à partir d'une onde plane issue d'une source artificielle de laboratoire sur axe, indépendamment des astres à observer.

Pour chaque sous-pupille, la mesure de la pente locale  $(\alpha_x, \alpha_y)$  peut être obtenue à partir d'un calcul de la position du centre de gravité du spot image :

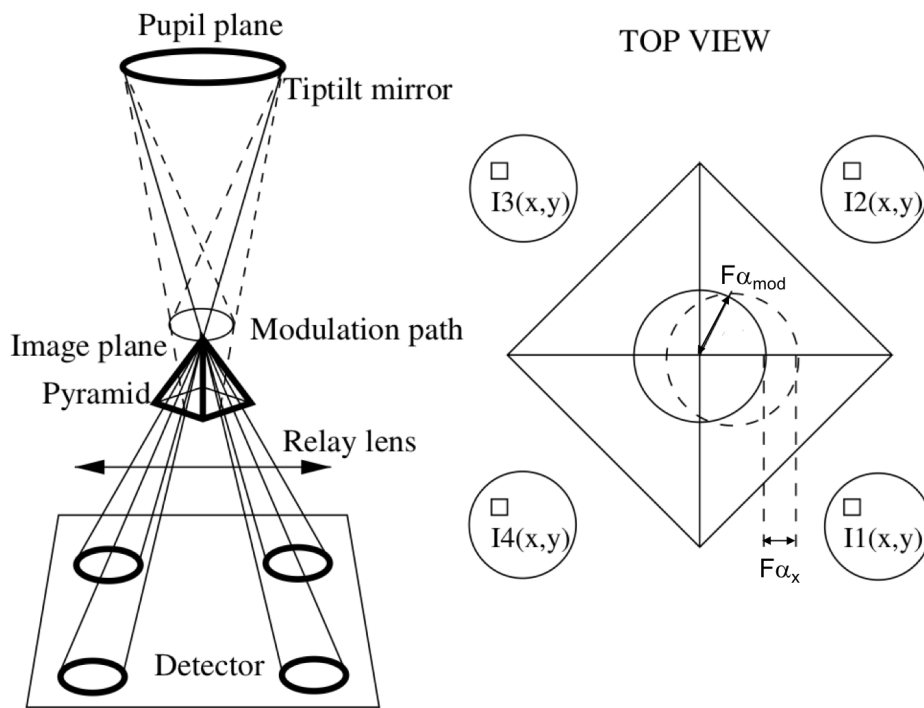
$$\alpha_x f_{\mu l} = \frac{\sum_{i,j} x_{i,j} I_{i,j}}{\sum_{i,j} I_{i,j}} \quad (8)$$

dans l'hypothèse des petits angles où  $f_{\mu l}$  est la distance focale des microlentilles,  $I_{i,j}$  l'intensité du spot image sur le pixel du CCD d'indice  $(i, j)$  et de coordonnées  $(x_{i,j}, y_{i,j})$  dont l'origine est donn e par le foyer de la microlentille. La même équation peut être écrite pour la coordonn e en  $y$  du centre de gravité. Notons que la distance focale  $f_{\mu l}$  est la grandeur permettant de régler le « gain » (la sensibilité) de l'analyseur : plus elle sera grande et plus l'analyseur sera sensible à de faibles pentes locales  $(\alpha_x, \alpha_y)$ . L'angle d'arriv e dans la pupille d'entrée du télescope  $(\alpha_{px}, \alpha_{py})$  est ensuite donné par :

$$\alpha_{px} = \alpha_x \frac{d_{\mu l}}{d_{sp}} = \frac{\lambda}{2\pi S_{sp}} \int_{ss-pup} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy \quad (9)$$

où  $d_{\mu l}$  est le diamètre d'une microlentille,  $d_{sp}$  le diamètre de la sous-pupille correspondante dans la pupille d'entrée,  $S_{sp}$  la surface de cette même sous-pupille sur laquelle est moyenn e la dérivée partielle de la phase  $\varphi$ . D'après l'équation (9) (et celle selon l'axe  $y$ ), l'analyseur de SH mesure donc le gradient de la phase dans la pupille, moyenné par sous-pupille. Enfin, remarquons que  $\delta = (\alpha_x d_{\mu l}, \alpha_y d_{\mu l})$  est l'écart aberrant en bord de sous-pupille mesur e par l'analyseur ; il se conserve quel que soit le plan pupille considéré dans l'instrument.   noter que la variance de l'angle d'arriv e dans la pupille d'entrée est connue pour la statistique de la turbulence atmosphérique, voir [1].

L'ASO de SH peut être très compact en réalisant une matrice de microlentilles de taille égale à la taille de la matrice de détecteurs et en l'installant directement devant le CCD, comme représenté sur la figure 4. En amont, il s'agit de réaliser un système optique conjuguant la pupille et le plan focal du télescope respectivement sur la matrice de microlentilles et sur son plan focal. Le nombre de pixels à prévoir pour l'enregistrement de l'image form e par une microlentille est à optimiser en fonction des conditions expérimentales. On peut être amené à choisir de ne mettre que 2x2 pixels (un quatre quadrants) pour de faibles écarts aberrants locaux à mesurer en minimisant la contribution du bruit électronique au prix d'une mesure peu linéaire avec une saturation possible sur des occurrences de grandes perturbations. On peut chercher à augmenter le nombre de pixels en échantillonnant correctement l'image (2 pixels dans  $\lambda f_{\mu l} / d_{\mu l}$ ) afin d'avoir une mesure plus linéaire. Ceci s'obtient par le choix approprié de la distance focale  $f_{\mu l}$ . Pour des sources étendues comme par exemple les étoiles guides laser (voir section 4.2), ce nombre de pixels peut être encore plus important pour couvrir l'image form e sans aucune troncature ou pour éviter le recouvrement avec la microlentille voisine. Le champ alloué pour la mesure de l'angle d'arriv e locale est ainsi à optimiser pour permettre d'imager la source observ e tout en limitant la contribution du fond de ciel : sur le capteur CCD chaque microlentille image le fond de ciel, toutes ces images se superposent induisant un bruit de fond. Un diaphragme de champ est donc installé dans le plan focal en amont de l'analyseur et sa taille est choisie pour correspondre à la zone du CCD allou e à une microlentille pour l'enregistrement de l'image et la mesure de l'angle d'arriv e.   noter que sur la granulation solaire, ce diaphragme est essentiel. Sur NGS, la taille angulaire sur le ciel de ce diaphragme peut être typiquement de quelques  $\lambda / d_{sp}$ .   titre d'exemple pour un champ choisi de  $3\lambda / d_{sp}$  et un échantillonnage correct de l'image de l'étoile, on a alors 6x6 pixels par microlentille. Pour une matrice de 40x40 microlentilles, le détecteur de l'analyseur doit alors avoir 240x240 pixels.



**FIGURE 5.** Principe de l'ASO   pyramide.   gauche, vue de côté : le faisceau est focalisé au sommet de la pyramide, la lentille relais r -image sur une matrice CCD la pupille pour les 4 sous-faisceaux issus de la pyramide.   droite, vue de dessus de la pyramide et des 4 images de pupille; un trajet circulaire de modulation sans perturbation en train plein et un trajet de modulation pour une déviation  $\alpha_x$  du rayon en trait pointillé. Crédit : C. V rinaud [21].

#### 2.4.2. Analyseur à pyramide

L'ASO   pyramide a été proposé par Ragazzoni en 1996 [22] afin de pouvoir disposer d'une souplesse dans le réglage du gain et de l'échantillonnage de la pupille, contrairement au SH où ces paramètres sont fixés par le choix du réseau de microlentilles. C'est un analyseur inspiré de la méthode des couteaux de Foucault pour la mesure d'aberrations. Comme pour le SH, on cherche à mesurer la déviation des rayons lumineux mais ici on va le faire en codant la coordonn e du point de passage dans le plan focal du rayon issu de chaque sous-pupille définie dans le plan pupille. Le principe est présenté sur la figure 5. L'image de la source est focalis e au sommet d'un prisme en forme de pyramide à 4 faces (voir figure de droite), se comportant comme deux couteaux de Foucault croisés. Les 4 sous faisceaux découpés par les 4 faces sont repris par une lentille de relais pour former 4 images de la pupille sur le CCD. L'angle de la pyramide est choisi de sorte que les 4 images soient bien s par es mais tiennent sur une seule matrice de détecteurs. La pyramide se comporte en fait comme un détecteur à 4 quadrants. Si l'on considère un unique rayon lumineux constitué du faisceau lui-même, un angle d'arriv e sur la pupille se traduit par un décalage de l'image de la source sur une seule face de la pyramide et donc l'image de la pupille correspondante sera illumin e indiquant la face où « le rayon est passé ». Cependant du fait de la diffraction, les 3 autres images de la pupille recevront aussi un peu de lumière en lien avec l'amplitude du décalage de l'image. En fait on peut tenir ce raisonnement pour n'importe quel rayon, cette fois issu d'une sous pupille quelconque de coordonn e  $(x, y)$  dans la pupille. Ici

l'illumination à considérer est celle des 4 pixels conjugués de la sous pupille :  $I_1(x, y)$ ,  $I_2(x, y)$ ,  $I_3(x, y)$  et  $I_4(x, y)$  (voir figure 5 droite). La mesure  $S_x$  selon l'axe  $x$  est donc calcul e à partir de :

$$S_x(x, y) = \left[ (I_1(x, y) + I_2(x, y)) - (I_3(x, y) + I_4(x, y)) \right] / I_o \quad (10)$$

où  $I_o$  est l'intensité moyenne dans la pupille. On a une relation similaire pour la mesure  $S_y$  selon l'axe  $y$ . Cependant si l'amplitude de la déviation du rayon est trop importante, quasiment qu'un seul quadrant est illuminé : la mesure devient non linéaire et peut même atteindre une saturation. Pour s'en affranchir, une modulation, généralement circulaire, est appliqu e à l'image par l'intermédiaire d'un miroir de basculement (tip - tilt en anglais) placé dans le plan pupille en amont du plan focal de l'analyseur (cf figure 5). Le rayon du cercle décrit par l'image est  $F\alpha_{mod}$  où  $F$  est la focale et  $\alpha_{mod}$  l'amplitude de l'angle de modulation appliqué au miroir de basculement. Ici tous les angles sont exprimés proportionnellement à l'angle de diffraction (rapport de la longueur d'onde par la taille de la pupille). Sans déviation, un rayon décrit un cercle centré sur le sommet de la pyramide et les 4 pixels détectent la même intensité puisque le temps de travers e de chaque face est le même : la mesure est nulle. Mais pour un rayon dévié de  $\alpha_x$  (voir figure 5 droite), le cercle est décalé de  $F\alpha_x$  par rapport au sommet et les temps sur chaque face ne sont plus égaux d'où des intensités d tect es différentes sur les 4 pixels et une mesure  $(S_x, S_y)$  non nulle et plus linéaire. En choisissant  $\alpha_{mod}$  suffisamment grand par rapport aux déviations  $(\alpha_x, \alpha_y)$  subies par les rayons, on rend l'analyseur pyramide complètement linéaire. On peut alors écrire la relation suivante dans le régime des faibles perturbations (voir [22]) :

$$S_x(x, y) \approx \frac{\lambda}{\pi^2 \alpha_{mod}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \quad (11)$$

Dans ce régime, l'ASO pyramide mesure le gradient de la phase dans la pupille comme le SH. On note que la sensibilité de l'analyseur (son gain) peut être r gl e par le choix de l'angle de modulation  $\alpha_{mod}$  : en le réduisant la sensibilité augmente. Ce réglage est simplement obtenu par modification de la commande électrique envoy e au miroir de basculement et non pas par une modification instrumentale en changeant la matrice de microlentilles comme pour le SH. Ragazzoni et Farinato [23] ont même montré qu'une fois la boucle ferm e, on pouvait réduire significativement l'angle de modulation à une valeur de quelques  $\lambda/D$  et gagner sur la brillance requise de la NGS (voir section 2.4.3). Dans ce cas, l'analyseur rentre dans un régime de fonctionnement non linéaire. La mesure n'est plus le gradient de la phase que pour les plus basses fréquences spatiales de la surface d'onde alors qu'à hautes fréquences spatiales, elle s'apparente à une mesure directe de la phase [21]. Récemment [24], la mesure de l'analyseur pyramide a été r interpr t e dans une approche fond e sur le filtrage de Fourier, la pyramide étant un filtre en phase placé dans le plan de Fourier de la pupille qui est le plan focal. Ceci permet l'établissement d'un modèle convolutif entre mesure et phase, sans faire de trop fortes approximations.

L'implantation de l'ASO pyramide conduit à un appareil beaucoup plus encombrant que le SH. En effet, on est amené à choisir une ouverture très faible pour le faisceau focalisé incident sur la pyramide afin de former une FEP large permettant de réduire l'impact sur les mesures des défauts de fabrication au niveau du sommet et des arêtes de la pyramide : une ouverture géométrique de l'ordre ou inférieure à  $F/50$  est typiquement choisie. De plus, un miroir tip-tilt de modulation doit être implanté dans la pupille en amont. Ce composant est essentiel pour adapter la sensibilité de l'analyseur en fonction des besoins. Par ailleurs, la pyramide, elle-même, est un composant optique critique de par la qualité requise. De plus, elle doit être achromatis e. Pour ce qui concerne l'échantillonnage de la pupille, c'est-à-dire la taille des sous-pupilles de mesure, ce sont directement les pixels de la matrice CCD qui le définissent : un pixel par sous-pupille peut suffire. Il n'y a donc pas de contrainte forte sur le nombre total de pixels disponibles sur le détecteur : par exemple pour un système d'OA à  $40 \times 40$  sous-pupilles, un détecteur de  $80 \times 80$  pixels pourrait suffire! Au contraire, on peut même prévoir un suréchantillonnage de la pupille

et suivant les besoins, réaliser ensuite un binning (regroupement) des pixels lors de la lecture de la matrice pour adapter le nombre de mesures en fonction des conditions d'observation : par exemple réduire le nombre de sous-pupilles, donc augmenter leur surface, pour des sources faibles. C'est la souplesse de l'analyseur pyramide en échantillonnage pupillaire propos e par Ragazzoni. Comme pour le SH, un diaphragme de champ peut être installé en plan focal pour limiter la contribution du fond de ciel.

#### 2.4.3. Bruit de mesure des analyseurs

L'erreur de mesure est due au bruit de photon du fait de la fluctuation intrinsèque du nombre de photons détectés par pixel et au bruit électronique du détecteur qui s'additionne au signal lu de chaque pixel. Rappelons que la mesure est déduite de la somme (ou différence) des intensités pixels comme donné par les équations (8) et (10). Pour le calcul de l'erreur, on néglige en première approximation la contribution du dénominateur et on exploite la décorrélation des bruits entre les pixels. On exprime généralement la mesure (d'après les équations (9) et (11)) comme un écart de phase  $\Delta\varphi$  mesuré sur une sous pupille de taille  $d_{sp}$  suivant l'expression aux différences finies du gradient de la phase :  $\frac{\partial\varphi}{\partial x} \approx \frac{\Delta\varphi}{d_{sp}}$ . Pour les analyseurs utilisés en OA, on peut alors montrer que la variance de  $\Delta\varphi$  peut généralement s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 \propto \frac{1}{RSB^2} \left( \frac{\alpha_{im}}{\lambda/d_{sp}} \right)^2 \quad rad^2 \quad (12)$$

où  $RSB$  est le rapport signal sur bruit pour une sous pupille, c'est-à-dire le rapport du nombre moyen de photons détectés dans la sous pupille provenant de l'étoile guide et d'un écart quadratique moyen des fluctuations du signal issu de tous les pixels de la sous-pupille.  $\alpha_{im}$  est une largeur angulaire d'image (sur le ciel) caractéristique pour l'analyseur compte tenu des conditions d'observation. Cette largeur vaut pour l'ASO SH, la largeur de l'image form e par une sous-pupille; pour la pyramide, c'est l'angle de modulation. Dans l'équation (12), on compare donc cette largeur à celle de la diffraction d'une sous-pupille  $\lambda/d_{sp}$ . Ainsi plus le  $RSB$  sera grand et plus la largeur  $\alpha_{im}$  sera petite, plus précise sera la mesure.   noter que l'équation (12) est écrite pour  $\Delta\varphi$  calculé à la longueur d'onde de l'analyseur  $\lambda_{ASO}$ . Pour convertir la variance à la longueur d'onde d'imagerie  $\lambda_{IM}$ , il faudra multiplier par le facteur  $(\lambda_{ASO}/\lambda_{IM})^2$ .

Pour l'ASO de SH et le bruit de photon, l'expression de la variance de l'erreur peut se mettre sous la forme :

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = \frac{\pi^2}{2\ln 2} \frac{1}{n_{ph}} \left( \frac{N_T}{N_D} \right)^2 \quad (13)$$

où  $n_{ph}$  est le nombre moyen total de photons détectés dans la sous-pupille par pose provenant de l'étoile guide,  $N_T$  la largeur à mi-hauteur de l'image form e par une microlentille exprim e ici en nombre de pixels et  $N_D$  la largeur à mi-hauteur de la diffraction d'une sous-pupille exprim e en nombre de pixels. Soulignons que l'équation (13) peut prendre différentes formes en fonction du profil de l'image enregistr e au foyer des microlentilles et des algorithmes de calcul de la pente locale à partir des intensités pixels [25]. Du fait de la loi de Poisson, le  $RSB^2$  est ici simplement donné par  $n_{ph}$ . La meilleure performance est obtenue quand l'image est limit e par la diffraction alors  $N_T = N_D$ . On peut ainsi atteindre une précision en phase de  $\pi/10$  (soit en écart aberrant  $\lambda/20$ ) pour seulement  $n_{ph} = 70$  photons détectés par sous-pupille, ce qui est très peu de photons et montre l'efficacité de la mesure. Pour le bruit lié au fond de ciel, particulièrement important pour un ASO dans le domaine de l'infrarouge, la variance de l'erreur s'écrit :

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = \frac{\pi^2}{3} \frac{n_{bg}}{n_{ph}^2} \left( \frac{N_S}{N_D} \right)^2 \quad (14)$$

où  $n_{bg}$  est le nombre moyen total de photons détectés dans la sous-pupille par pose provenant du fond et  $N_S^2$  le nombre total de pixels dans le champ de vue d'une microlentille alloué pour

le calcul du centre de gravité. On note ici que la réduction du champ de vue de l'analyseur par un diaphragme de champ, réduisant  $n_{bg}$  et possiblement  $N_S^2$ , est cruciale pour diminuer la contribution du bruit lié au fond de ciel. Enfin pour le bruit électronique propre au détecteur, la variance de l'erreur s'écrit :

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = \frac{\pi^2}{3} \frac{\sigma_e^2 N_S^2}{n_{ph}^2} \left( \frac{N_S}{N_D} \right)^2 \quad (15)$$

où  $\sigma_e$  est l'écart quadratique moyen du bruit électronique en électrons par pixel et par lecture. Là aussi, la réduction du nombre de pixels  $N_S^2$  est cruciale, tout comme l'utilisation de détecteurs CCD ou CMOS très performants avec  $\sigma_e \leq 1$  électron par pixel. Finalement, l'erreur totale due au bruit à considérer est la somme des trois contributeurs présentés ci-dessus.

Pour l'ASO pyramide, nous pouvons réécrire facilement ces formules en utilisant les équations (10) et (11), dans la limite de validité de l'équation (11). Pour le bruit de photons, nous obtenons :

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = \pi^4 \frac{1}{n_{ph}} \left( \frac{\alpha_{mod}}{\lambda/d_{sp}} \right)^2 \quad (16)$$

où  $n_{ph}$  est le nombre moyen total de photons détectés pour les 4 pixels d'une sous-pupille. Ici  $\alpha_{mod}$  joue le rôle d'une largeur d'image. Contrairement au SH,  $\alpha_{mod}$  peut être choisi pour être bien inférieur à la taille angulaire de la diffraction d'une sous-pupille  $\lambda/d_{sp}$  et peut donc permettre une réduction significative de l'erreur due au bruit. Pour le bruit lié au fond de ciel, nous avons

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = \pi^4 \frac{n_{bg}}{n_{ph}^2} \left( \frac{\alpha_{mod}}{\lambda/d_{sp}} \right)^2 \quad (17)$$

où  $n_{bg}$  est toujours le nombre total de photons du fond de ciel, pour les 4 pixels d'une sous-pupille. Ici encore la réduction du champ de vue de l'analyseur par un diaphragme de champ, permet de réduire  $n_{bg}$  et donc la contribution de ce bruit. Pour le bruit électronique avec seulement 4 pixels pour le calcul de la mesure, nous avons de même :

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = \pi^4 \frac{4\sigma_e^2}{n_{ph}^2} \left( \frac{\alpha_{mod}}{\lambda/d_{sp}} \right)^2 \quad (18)$$

On note que pour les trois contributions au bruit de mesure, la diminution de l'angle de modulation  $\alpha_{mod}$  est un atout important de l'analyseur pyramide pour la réduction de la variance  $\sigma_{\Delta\varphi}^2$ . Enfin soulignons que ces formules sont très utiles pour comprendre les limites en performance des OA en fonction de la brillance de l'étoile guide (voir section 2.6).

## 2.5. Commande en optique adaptative

Le principe de la commande en OA consiste à partir des mesures de l'ASO à commander le MD pour obtenir la correction souhait e des défauts de surface d'onde. Cette commande présente deux aspects : une reconstruction spatiale de la surface d'onde et le contrôle dynamique du système d'OA prenant en compte l'évolution temporelle des perturbations (voir [14]).

### 2.5.1. Matrice de commande

La mesure de l'ASO est le plus souvent reli e à la dérivée première spatiale de la surface d'onde comme pour le SH et l'on fait généralement l'hypothèse de la linéarité des composants du système d'OA. Ceci conduit à pouvoir écrire un vecteur de mesure quelconque  $\mathbf{m}$  comme :

$$\mathbf{m} = \mathbf{D}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{b} \quad (19)$$

où  $\mathbf{D}$  est la matrice dite d'interaction,  $\boldsymbol{\phi}$  le vecteur représentant la surface d'onde inconnue dans la pupille et  $\mathbf{b}$  le bruit de mesure lié au bruit de photons et au bruit électronique du détecteur.  $\boldsymbol{\phi}$  peut prendre plusieurs formes :



- dans une approche zonale,  $\boldsymbol{\phi} = \{\phi_{i,j}\}$  est le vecteur des valeurs discrètes de la phase  $\phi_{i,j}$  sur un maillage donné dans la pupille; cela peut donc être directement les valeurs des tensions à appliquer aux actionneurs du MD;
- dans une approche modale,  $\boldsymbol{\phi} = \{\phi_i\}$  est le vecteur des coefficients  $\phi_i$  de la décomposition modale de la surface d'onde, il s'agit ici de définir une base orthonorm e de modes sur l'espace vectoriel des surfaces d'onde dans la pupille. Ces modes peuvent être à titre d'exemple : les polynômes de Zernike, bien connus des opticiens pour décrire les aberrations [26], ou des modes choisis par l'expérimentateur, combinaison linéaire des surfaces d form es élémentaires produites par les actionneurs définissant le sous-espace contrôlé par le MD. On a alors :

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_i \phi_i Z_i(\mathbf{r}) \quad (20)$$

où les  $Z_i$  sont les modes orthonormés définis sur la pupille.

Reconstruire la surface d'onde pour calculer une estimation de  $\boldsymbol{\phi}$ , not e  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ , consiste à "inverser" l'équation (19) et écrire :

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{R} \mathbf{m} \quad (21)$$

où  $\mathbf{R}$  est la matrice de reconstruction de la surface d'onde ou de commande du MD. Cette matrice peut être calcul e suivant différentes approches.

Tout d'abord, la connaissance de la matrice d'interaction  $\mathbf{D}$  est cruciale pour obtenir une reconstruction de qualité. Elle caractérise complètement la relation optique existant entre l'analyseur et le MD : c'est-à-dire comment l'analyseur voit les d form es produites par le MD. Cette matrice est le plus souvent  talonn e ou identifi e sur le système d'OA lui-même, afin de tenir compte de toutes les caractéristiques du système et de tous les défauts d'alignement pouvant exister dans la réalité. Pour l'étalonnage, cela consiste à pousser et tirer sur chaque actionneur par une tension de commande unitaire et à enregistrer le vecteur de mesure correspondant tout en veillant à avoir un bon rapport signal sur bruit dans la mesure. Chacun de ces vecteurs de mesure est en fait une colonne de la matrice  $\mathbf{D}$  : en passant en revue tous les actionneurs, on bâtit ainsi la matrice. Ensuite n'importe quelle mesure  $\mathbf{m}$  d'un vecteur quelconque de commande  $\boldsymbol{\phi}$  est simplement donn e par l'équation (19). Pour l'identification, cela consiste à considérer une matrice d'interaction synthétique calcul e à partir d'un modèle du système qui dépend d'un certain nombre de paramètres permettant de définir la géométrie relative entre l'analyseur et le MD (d form es des actionneurs, orientation des maillages, grandissement, etc.). On vient alors sur un jeu de commandes bien choisies identifier ces paramètres directement dans les mesures effectu es par l'analyseur afin ensuite de pouvoir mettre à jour la matrice synthétique avec ce nouveau jeu de paramètres. Ces phases d'étalonnage et/ou d'identification sont donc très importantes dans la mise en œuvre d'une OA pour assurer une bonne qualité de la correction.

Reconstruire la surface d'onde consiste en fait à faire une intégration spatiale des mesures puisqu'elles représentent souvent le gradient de la surface. Cependant, la matrice d'interaction  $\mathbf{D}$  n'est pas inversible directement car il s'agit d'une matrice rectangulaire : on a plus de mesures (d riv es en  $x$  et en  $y$  dans chaque sous-pupille) que d'actionneurs. L'approche la plus classique pour calculer la matrice de commande  $\mathbf{R}$  est alors d'appliquer la méthode des moindres carrés. Elle consiste à estimer  $\boldsymbol{\phi}$  en minimisant la distance quadratique  $\epsilon_m$  entre les mesures et le modèle des mesures donné par l'équation (19) :

$$\epsilon_m = \|\mathbf{m} - \mathbf{D}\boldsymbol{\phi}\|^2 \quad (22)$$

où  $\|\cdot\|^2$  est la norme d'un vecteur. La minimisation de  $\epsilon_m$  conduit à la solution suivante :

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = (\mathbf{D}^t \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^t \mathbf{m} \quad (23)$$

où la matrice de commande  $\mathbf{R} = (\mathbf{D}^t \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^t$  est dite l'inverse g n ralis e de la matrice d'interaction  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{D}^t$  la matrice transpos e de  $\mathbf{D}$ . Ceci n'est vrai que si la matrice carr e  $\mathbf{D}^t \mathbf{D}$  est inversible. C'est le cas pour les approches modales. Mais généralement en approche zonale, cette dernière matrice n'est pas inversible puisque par exemple les analyseurs ne sont pas sensibles à la valeur constante de la phase sur la pupille, dit mode piston; il faut donc dans le « processus d'intégration » fixer cette constante. La méthode à suivre décompose en valeurs propres et vecteurs propres la matrice symétrique  $\mathbf{D}^t \mathbf{D} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^t$  où  $\mathbf{\Lambda}$  est la matrice diagonale des valeurs propres et  $\mathbf{U}$  la matrice des vecteurs propres, afin d'identifier les valeurs propres nulles correspondantes au mode piston et éventuellement à d'autres modes non vus par l'analyseur.   noter qu'une variante équivalente à cette méthode est la décomposition en valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{D}$  (méthode SVD pour *Singular Value Decomposition* en anglais). L'inversion consiste donc à se placer dans le sous-espace orthogonal à celui des vecteurs propres à valeurs propres nulles. On a ainsi :

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{-1*} \mathbf{U}^t \mathbf{D}^t \quad (24)$$

où  $\mathbf{\Lambda}^{-1*}$  est la matrice diagonale des inverses des valeurs propres, sauf pour celles qui sont nulles où leur inverse est remplacé par zéro. En fait, cette méthode peut être étendue à la gestion des modes auxquels l'analyseur est peu sensible. En effet, ce sont eux qui vont propager une partie du bruit de mesure par un coefficient donné par l'inverse de la valeur propre : plus la valeur propre est faible plus le bruit se propage sur ce mode. D'ailleurs, la dispersion des valeurs propres donne le conditionnement de la matrice à inverser. Une façon de gérer ce conditionnement consiste donc à filtrer les modes à valeurs propres trop faibles dans le calcul de  $\mathbf{\Lambda}^{-1*}$ . Les approches modales peuvent assez souvent s'affranchir de cette décomposition car la base de modes peut être définie directement dans l'espace orthogonal aux modes mal vus de l'analyseur.

Par ailleurs, le choix de la base de modes à utiliser pour le calcul de la commande est d'importance. Soulignons que la base des polynômes de Karhunen–Loève, c'est-à-dire les modes dont la matrice de covariance est diagonale sur la statistique de la turbulence, est celle qui assure la plus grande efficacité de correction pour un nombre de degrés de liberté donné [27]. Elle peut être obtenue par diagonalisation de la matrice de covariance des polynômes de Zernike par exemple. On peut être aussi amené à définir ces modes sur l'espace vectoriel restreint des surfaces contrôlables par les actionneurs du MD.

L'approche de base des moindres carrés peut être raffin e en considérant la statistique du bruit de mesure à travers une méthode de maximum de vraisemblance pour estimer  $\phi$  et même pouss e encore plus loin en suivant une méthode de maximum *a posteriori* permettant en plus d'intégrer les connaissances statistiques sur les surfaces d'onde recherch es issues du spectre de Kolmogorov. Enfin, la méthode de reconstruction la plus optimale est *a priori* celle qui conduit à minimiser la variance de l'erreur de phase résiduelle dans la pupille, correspondant à l'objectif d'obtenir la plus haute qualité d'image possible (voir section 2.6). On cherche alors le reconstruteur  $\mathbf{r}$  assurant cette minimisation quelles que soient les occurrences de surface d'onde et de mesure, prenant ainsi en compte la statistique de la turbulence et du bruit de mesure. En considérant une base de modes orthonormés sur le sous-espace contrôlable par le MD, nous avons la variance de l'erreur résiduelle donn e par :

$$\epsilon_\phi = \left\langle \|\phi - \mathbf{R} \mathbf{m}\|^2 \right\rangle \quad (25)$$

ce qui conduit à une matrice de reconstruction d termin e par :

$$\mathbf{R} = \langle \phi \mathbf{m}^t \rangle \langle \mathbf{m} \mathbf{m}^t \rangle^{-1} = \mathbf{C}_\phi \mathbf{D}^t (\mathbf{D} \mathbf{C}_\phi \mathbf{D}^t + \mathbf{C}_b)^{-1} \quad (26)$$

où  $\langle \phi \mathbf{m}^t \rangle = \mathbf{C}_\phi \mathbf{D}^t$  est la matrice de covariance entre phase et mesure,  $\langle \mathbf{m} \mathbf{m}^t \rangle = \mathbf{D} \mathbf{C}_\phi \mathbf{D}^t + \mathbf{C}_b$  la matrice de covariance propre à la mesure.  $\mathbf{C}_\phi$  est la matrice de covariance de  $\phi$  donné par  $\langle \phi \phi^t \rangle$  et  $\mathbf{C}_b$  la matrice de covariance du bruit  $\langle \mathbf{b} \mathbf{b}^t \rangle$ . Rappelons que l'estimation du vecteur  $\phi$  est

toujours donn e par l'équation (21) in fine.   noter que l'ensemble de ces matrices de covariance doivent pouvoir être calcul es à partir des propriétés théoriques des grandeurs utilis es ou/et identifi es en tout ou partie expérimentalement.

### 2.5.2. Contrôleur temporel

Nous venons de voir la partie spatiale de la commande, il faut maintenant aborder la partie temporelle. Un système d'OA est un système asservi en boucle ferm e comme montré sur la figure 1. Le séquencement temporel est donné par la fréquence de lecture de la caméra de l'analyseur de surface d'onde.   chaque nouvelle trame lue, une nouvelle mesure peut être déduite. Placé après le MD sur le trajet optique, l'analyseur mesure l'erreur résiduelle sur la surface d'onde, correspondant à chaque instant (chaque trame)   la différence entre la surface d'onde incidente et la nouvelle commande appliqu e au MD. Cette mesure doit donc permettre de mettre à jour la commande du MD. Le contrôleur le plus communément utilisé est ainsi l'intégrateur qui peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\phi}_{n+1} = \boldsymbol{\phi}_n + g\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\phi}_n = \boldsymbol{\phi}_n + g\mathbf{R}\mathbf{m}_n \quad (27)$$

où  $\boldsymbol{\phi}_n$  est la commande appliqu e à la trame  $n$ ,  $g$  le gain scalaire de l'intégrateur,  $\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\phi}_n$  l'incrément de commande calculé par l'équation (21)   partir des mesures  $\mathbf{m}_n$  faites à la trame  $n$ . L'intégrateur permet une très forte atténuation des basses fréquences temporelles bien adaptée au spectre temporel de la turbulence qui se déduit du spectre de Kolmogorov. Le plus souvent, le gain  $g$  ne peut pas être pris égal à 1. En effet, la boucle d'OA est caract ris e principalement par des retards importants pouvant atteindre au total plus de 2 trames. Ces retards sont pour l'essentiel donnés par : le temps de pose sur la caméra de l'ASO, son temps de lecture, le temps de calcul du calculateur temps réel et enfin le blocage de la commande du MD durant une trame. Pour des questions de stabilité de la boucle,  $g$  ne peut généralement pas dépasser la valeur de 0,5. Avec 2 trames de retard et un gain de 0,5, la bande passante de la fonction transfert de réjection est alors typiquement de 70 Hz pour une fréquence trame  $f_{tr} = 1$  kHz; c'est-à-dire les fréquences temporelles de la turbulence corrig es sont inférieures à 70 Hz.

  noter que le gain  $g$  peut être vectoriel dans le cas où l'on considère comme vecteur  $\boldsymbol{\phi}_n$  les coefficients d'une décomposition modale de la surface d'onde. Cela revient à considérer en parallèle autant de boucles qu'il y a de modes dans le système. Un gain diff rent peut être optimisé en fonction du rapport signal à bruit propre à chaque mode [28] : on parle d'intégrateur à gain modal optimisé.

Pour améliorer les performances de l'OA, des contrôleurs plus sophistiqués que l'intégrateur sont utilisables. On peut s'intéresser à la prédiction pour compenser l'important retard présent dans la boucle tout en gardant une approche modale [29]. Mais l'approche la plus optimale consiste à développer le contrôleur minimisant la variance de l'erreur résiduelle de la phase dans la pupille tout en intégrant des capacités de prédiction en plus de l'estimation : c'est la commande Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG)   filtre de Kalman [30].

Pour exécuter en temps réel les algorithmes de traitement des signaux de l'ASO (section 2.4) et de calcul de la commande de l'OA, il est nécessaire le plus souvent de mettre en œuvre des architectures spécifiques pour le calculateur temps réel (RTC pour Real Time Computer en anglais) en exploitant au maximum les avanc es dans le domaine de l'informatique. Il faut en effet disposer d'une importante puissance de calcul du fait du nombre de degrés de liberté du système d'OA de plus en plus grand et de la fréquence de la boucle de plus en plus haute, ceci combin e simultanément à des liens très efficaces de transfert temps réel d'un important volume de données en partant de la caméra de l'ASO et en allant jusqu'à la sortie du vecteur de commande appliqué au MD. Les architectures parallèles sont particulièrement recherch es dans ce contexte (voir par exemple [31]).

## 2.6. Evaluation des performances

Les performances d'une OA sont à définir en terme de qualité d'image : c'est-à-dire la qualité de la FEP puisque l'image est donn e par le produit de convolution de la distribution angulaire d'intensité  mise par l'objet observ e par la FEP de l'instrument. La meilleure performance est obtenue quand la FEP est la plus proche possible de la limite théorique de la diffraction, c'est-à-dire quand la surface d'onde est quasiment sans aberration : la phase  $\varphi$  proche de 0 (voir équation (3)). La largeur à mi-hauteur de la FEP vaut alors  $\lambda/D$ . Le paramètre le plus utilis e pour définir cette qualité est le rapport de Strehl  $Sr$  caractérisant le piqué de la FEP. Il est calcul e par le rapport du maximum d'intensité de la FEP (généralement en  $\alpha = 0$ ) par celui de la FEP limit e par la diffraction  $FEP_{diff}$  pour une même énergie totale :

$$Sr = \frac{FEP(0)}{FEP_{diff}(0)} \quad (28)$$

Ainsi,  $Sr$  est compris entre 0 dans le cas de très fortes aberrations et 1 à la limite de diffraction.

Pour un système d'OA,  $Sr$  peut être estim e à partir de la connaissance de la phase résiduelle  $\varphi_{res}$  dans la pupille.  $\varphi_{res} = \varphi - \varphi_{MD}$  est à chaque instant la différence entre la phase  $\varphi$  de la surface d'onde turbulente pour la direction d'intérêt et la phase  $\varphi_{MD}$  appliqu e sur le MD (reconstruite à partir de la mesure de l'analyseur par l'équation (27) par exemple). Pour de faibles amplitudes de phase résiduelle, on utilise la formule approch e suivante :

$$Sr \approx \exp\left(-\sigma_{\varphi_{res}}^2\right) \quad (29)$$

où  $\sigma_{\varphi_{res}}^2$  est la variance de la phase résiduelle donn e par (cf.  quation (6)) :

$$\sigma_{\varphi_{res}}^2 = \left\langle \frac{1}{S_{pup}} \int_{pupille} (\varphi_{res}(\mathbf{r}) - \bar{\varphi}_{res})^2 d\mathbf{r} \right\rangle rad^2 \quad (30)$$

  titre d'exemple, citons le critère de Maréchal qui définit un système optique délivrant une bonne qualité d'image pour un écart quadratique moyen des aberrations  $\leq \lambda/14$ , c'est-à-dire une variance de phase  $\leq 0,2 rad^2$  correspondant à  $Sr \geq 80\%$ . Il nous faut maintenant identifier et chiffrer les contributeurs à la phase résiduelle (voir [32–34]). En dehors du contexte des simulations numériques bout en bout de systèmes d'OA, on est amen e à faire l'hypothèse de l'indépendance des différents contributeurs. Ainsi la variance  $\sigma_{\varphi_{res}}^2$  est simplement calcul e analytiquement comme la somme des variances de chaque contributeur :

$$\sigma_{\varphi_{res}}^2 = \sigma_{fitting}^2 + \sigma_{aliasing}^2 + \sigma_{temp}^2 + \sigma_{noise}^2 + \sigma_{aniso}^2 + \sigma_{NCPA}^2 \quad (31)$$

où les différentes variances sont définies ci-dessous.

- $\sigma_{fitting}^2$  : la variance du terme d'erreur spatiale li e à la représentation (ou l'ajustement, *fitting* en anglais) limit e aux basses fréquences spatiales de la phase turbulente (décrite par le spectre de Kolmogorov, équation (7)), du fait du nombre fini : soit d'actionneurs sur le MD, soit de modes de la base consid r e. Dans le cas d'une décomposition de la phase sur les polynômes de Zernike et en considérant une correction faite sur les  $N$  premiers polynômes, cette variance peut être estim e par [35] :

$$\sigma_{fitting}^2 = 0,257N^{-\frac{5}{6}} \left(\frac{D}{r_o}\right)^{\frac{5}{3}} \quad (32)$$

La forme de cette expression est très générale avec une dépendance en  $N$ , le nombre total de degrés de liberté corrigés par le MD, selon une loi de puissance en  $-5/6$ . Le coefficient numérique est généralement compris entre 0,15 et 0,35 suivant les caractéristiques spatiales de la d form e de la surface produite par chaque actionneur du MD [36].

- $\sigma_{aliasing}^2$  : l'erreur spatiale de repliement (*aliasing* en anglais) des hautes fréquences spatiales du spectre de la phase turbulente sur les basses fréquences corrig es par le MD, du fait de l'échantillonnage de la surface d'onde par les sous-pupilles de l'analyseur. La fréquence d'échantillonnage est donn e par l'inverse de la taille d'une sous-pupille  $d_{sp}$  et donc le repliement appar it pour toutes les fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist  $k_c = 1/2d_{sp}$ . L'amplitude de cette erreur dépend du modèle de mesure de l'analyseur. Pour le Shack–Hartmann, sa variance représente un tiers de la contribution de l'erreur de fitting [32]. Pour la pyramide, elle est nettement plus faible pour de petites amplitudes de modulation [21]. Par ailleurs, cette erreur peut être réduite par différents moyens : en sur chantillonnant la mesure ou/et en mettant en place un filtre optique anti-aliasing [33], comme par exemple un diaphragme de champ de taille  $\lambda/d_{sp}$  devant un Shack–Hartmann [37].
- $\sigma_{temp}^2$  : l'erreur temporelle du fait de la bande passante finie de la boucle d'asservissement du système d'OA. La phase turbulente est filtr e temporellement par la fonction de transfert de réjection de la boucle : les basses fréquences temporelles sont att nu es alors que les hautes non. En notant  $f_{bp}$  la bande passante à  $-3\text{db}$  de la fonction de transfert en boucle ferm e du système, la variance de cette erreur s'écrit d'après Greenwood [38] :

$$\sigma_{temp}^2 = 0,243 f_{bp}^{-\frac{5}{3}} \left( \frac{\bar{v}}{r_o} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (33)$$

où  $\bar{v}$  est une vitesse transverse moyenne du vent dans l'atmosphère donn e par :

$$\bar{v} = \left[ \int_0^{+\infty} C_n^2(h) v^{\frac{5}{3}}(h) dh / \int_0^{+\infty} C_n^2(h) dh \right]^{\frac{3}{5}} \quad (34)$$

où  $v(h)$  est le profil de la vitesse du vent dans l'atmosphère. Plus la bande passante sera importante plus faible sera cette erreur.   noter que l'expression donn e de  $\sigma_{temp}^2$  a été établie pour un intégrateur comme contrôleur temporel de la boucle d'OA.

- $\sigma_{noise}^2$  : l'erreur due au bruit (*noise* en anglais) de mesure de l'ASO propagé sur la phase résiduelle. Le bruit est propagé sur la commande du MD à travers la matrice de commande (ou de reconstruction)  $\mathbf{R}$ . En considérant le bruit non corrélé sur toutes les sous-pupilles et sa variance  $\sigma_{\Delta\varphi}^2$  uniforme, le coefficient de propagation est simplement donné par  $trace(\mathbf{R}\mathbf{R}^t)$  en modal et  $trace(\mathbf{R}\mathbf{R}^t)/N$  en zonal ( $N$  nombre d'actionneurs dans la pupille) [39]. De plus, le bruit est en partie filtré par la boucle d'asservissement. Le filtrage est déterminé par une fonction de transfert très proche de la fonction de transfert en boucle ferm e. Plus  $f_{bp}$  est grande, moins le bruit est filtré. Le coefficient de réduction de la variance du bruit  $\sigma_{noise}^2$  est directement dépendant du rapport  $f_{tr}/f_{bp}$ . Pour un intégrateur et deux trames de retard, on a  $f_{tr}/f_{bp} \simeq 5,6$  et un coefficient de réduction de 0,44. Finalement, on peut écrire l'équation suivante en modal, en prenant en compte en plus les longueurs d'onde différentes pour l'ASO et la voie imagerie :

$$\sigma_{noise}^2 = 0,44 trace(\mathbf{R}\mathbf{R}^t) \sigma_{\Delta\varphi}^2 (\lambda_{ASO}/\lambda_{IM})^2 \quad (35)$$

- $\sigma_{aniso}^2$  : l'erreur d'anisoplanétisme li e à la décorrélation angulaire des surfaces d'onde quand la NGS n'est pas l'objet d'intérêt observé. En effet pour deux étoiles s par es angulairement, leurs surfaces d'onde capt es par le télescope ont enregistré des perturbations différentes puisqu'elles ne traversent pas tout à fait la même zone de l'atmosphère à haute altitude (voir figure 6), d'où la possible décorrélation. Par exemple pour une séparation angulaire de  $20''$ , les deux faisceaux sont séparés de 1 m dans une couche situ e à 10 km d'altitude. Ainsi, Fried [40] a défini le domaine d'isoplanétisme  $\theta_o$  d'une OA,

comme le champ sur lequel la décorrélation des surfaces d'onde n'induit pas une erreur supérieure à 1  $rad^2$  :

$$\sigma_{aniso}^2 = \left( \frac{\theta}{\theta_o} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (36)$$

où  $\theta$  est la séparation angulaire entre la source d'analyse et l'objet d'intérêt. Le domaine isoplan etique est donn e par :

$$\theta_o = 0,314r_o/\bar{h} \quad (37)$$

avec  $\bar{h}$  une moyenne pondérée des altitudes des couches turbulentes définie par :

$$\bar{h} = \left[ (\cos\gamma)^{-\frac{5}{3}} \int_0^{+\infty} C_n^2(h) h^{\frac{5}{3}} dh / \int_0^{+\infty} C_n^2(h) dh \right]^{\frac{3}{5}} \quad (38)$$

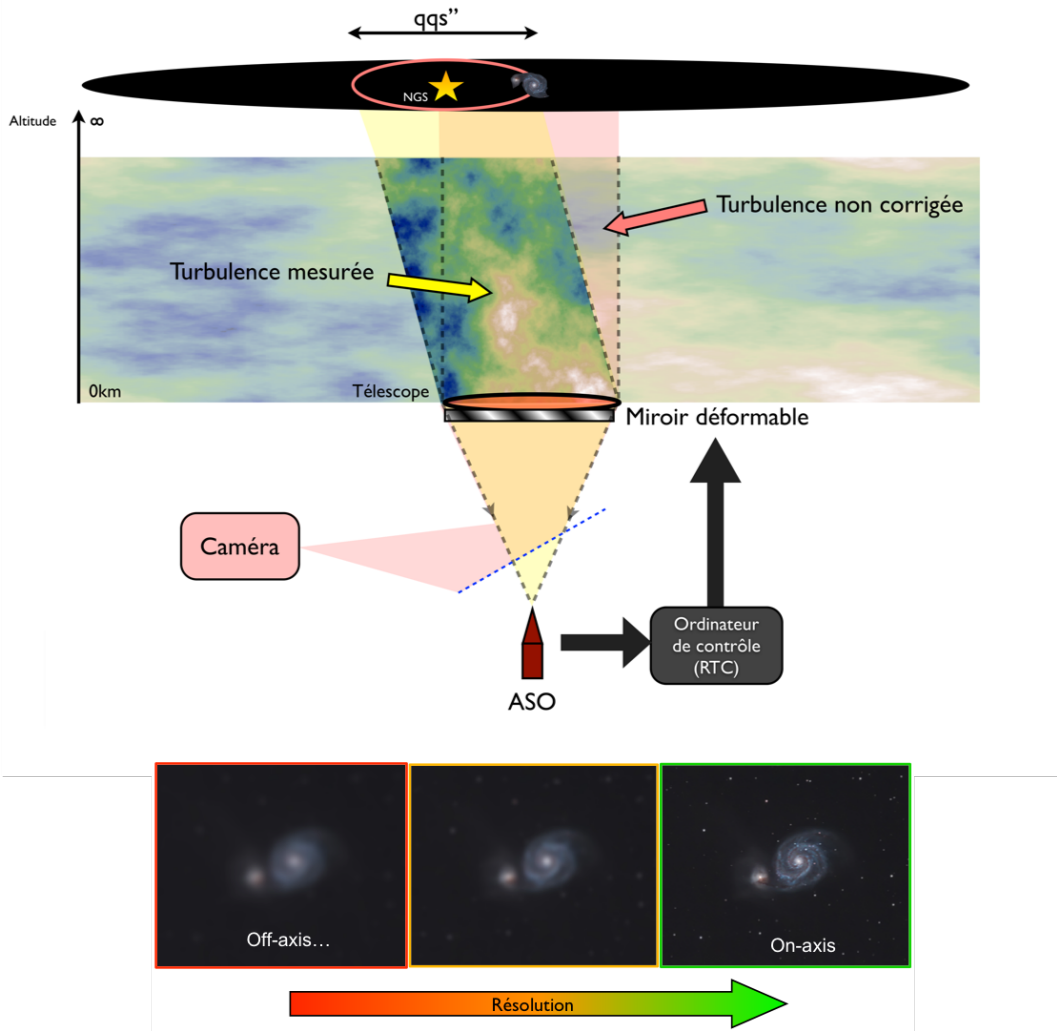
Le domaine isoplan etique dépend donc du profil de  $C_n^2(h)$  caractérisant la distribution de la turbulence dans l'atmosphère. Il sera d'autant plus petit que la turbulence est forte en altitude. Pour l'imagerie dans le proche infrarouge, il peut atteindre typiquement quelques dizaines de secondes d'arc alors que pour l'imagerie dans le visible, il n'est plus que de quelques secondes d'arc du fait de la dépendance de la phase avec la longueur d'onde.

- $\sigma_{NCPA}^2$  : l'erreur liée aux aberrations non communes entre voie analyse et voie imagerie dans le trajet optique de l'instrument (Non Common Path Aberrations (NCPA) en anglais). Ainsi, une aberration après la séparatrice dans le système optique, soit ne peut pas être mesurée par l'ASO si elle est présente dans la voie imagerie, soit peut être mesurée à tort si elle est présente dans la voie analyse. Pour minimiser cette erreur, ces aberrations doivent être de faible amplitude, en particulier dans le cas de l'utilisation d'un ASO pyramide, étalonnées avec soin pendant la phase de mise au point de l'instrument et prises en compte pour modifier la commande du MD en conséquence [41]. Généralement, les aberrations de la voie ASO sont étalonnées sur une source artificielle de l'instrument placée à l'entrée de cette voie et délivrant une onde plane. Le vecteur de mesure correspondant est appel e *pent es de référence* et définit le zéro de l'analyseur. Il est donc soustrait à chaque mesure courante de l'analyseur avant de calculer la commande. Pour les aberrations de la voie imagerie, là encore l'étalonnage est fait en utilisant une autre source artificielle placée à l'entrée de l'instrument et délivrant une onde plane. On cherche alors à maximiser la qualité de la FEP produite en boucle fermée sur la caméra d'imagerie en mesurant les aberrations sur cette voie par diversité de phase et en appliquant leur correction directement par modification des pent es de référence [42] : la boucle converge ainsi vers un zéro qui n'est plus celui de l'ASO mais celui qui maximise la qualité de la FEP.

Le budget d'erreur donn e par l'équation (31) pourrait être compl et e par quelques contributeurs supplémentaires, mais généralement faibles, comme ceux liés à la scintillation, à la dépendance de l'indice de l'air en longueur d'onde et à l'étalonnage imparfait de la matrice d'interaction, par exemple.   noter aussi, qu'il existe une possible corrélation entre les erreurs temporelle et d'anisoplan etisme, et dans une moindre mesure avec les erreurs de fitting et d'aliasing, tous ces termes étant issus de la perturbation turbulente.

### 3. OA extrêmes pour l'imagerie directe de planètes extrasolaires

La détection et l'étude des planètes extrasolaires est devenue en un peu plus de vingt-cinq ans un domaine majeur de recherche de l'astrophysique contemporaine. Ainsi plusieurs milliers d'exoplanètes ont été détectées révolutionnant nos connaissances sur les systèmes planétaires, loin de l'exemple du système solaire. La très grande majorité l'a été par des méthodes d'observation



**FIGURE 6.** Haut : schéma de principe d'une OA utilisant sur l'ASO une NGS hors axe de séparation angulaire  $\theta$  (quelques secondes d'arc) par rapport à la galaxie observ e sur la caméra. Bas : dégradation de la qualité de correction de l'image par l'OA pour trois séparations angulaires entre la galaxie et la NGS. Crédit F. Vidal (thèse de doctorat).

dites indirectes (vitesses radiales et transits) : c'est-à-dire par l'observation d'une modification du signal, nous arrivant de l'étoile h te, induite par une exoplanète proche. Mais pour une caractérisation plus complète du système planétaire, l'imagerie directe est la méthode la plus adaptée permettant la détection des photons issus des objets le constituant : planètes et disques circumstellaires. Par exemple, elle permet potentiellement d'accéder à des informations sur la structure et la formation des systèmes par imagerie et de caractériser les constituants chimiques et la température des atmosphères et surfaces planétaires par spectroscopie. Cependant, cette méthode est difficile à mettre en œuvre et n'a conduit à ce jour qu'à quelques dizaines de détections de planètes jeunes et  loign es de leur étoile. Le défi de l'imagerie directe se résume à détecter des objets dont le contraste en flux avec leur étoile hôte peut varier typiquement entre  $10^{-5}$  pour

des planètes géantes jeunes dans le proche infrarouge et  $10^{-10}$  pour des planètes telluriques et dont la séparation de l'étoile est très faible, pouvant être de quelques  $\lambda/D$  et le plus souvent inférieure à la seconde d'arc. Pour de tels contrastes et séparations, il faut mettre en œuvre un coronographe associé à une OA. En effet, l'image form e au foyer du télescope (voir [11]) est la somme de l'image de l'étoile et de celle de la planète (lumiere incohérente) et s'écrit comme le produit de convolution suivant (noté \*):

$$I(\boldsymbol{\alpha}) = [\delta(\boldsymbol{\alpha}) + \epsilon_p \delta(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_p)] * FEP(\boldsymbol{\alpha}) = FEP(\boldsymbol{\alpha}) + \epsilon_p FEP(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_p) \quad (39)$$

où l'étoile et la planète ne sont pas résolues angulairement par le télescope et sont donc repr esent es par la fonction de Dirac  $\delta(\boldsymbol{\alpha})$ . L'étoile est sur l'axe en  $\boldsymbol{\alpha} = 0$ .  $\epsilon_p$  est le contraste, typiquement inférieur ou égal à  $10^{-5}$ , entre planète et étoile et  $\boldsymbol{\alpha}_p$  la position dans le champ de la planète par rapport à l'étoile, donc la séparation. Pour les séparations  $\boldsymbol{\alpha}_p$  inférieures à la seconde d'arc, les photons stellaires dominent largement l'image du fait de la décroissance lente des ailes de la FEP, comme par exemple pour les anneaux d'Airy dans le cas sans aberration. La fluctuation du nombre de ces photons stellaires introduit ainsi un bruit rédhibitoire pour la détection des photons provenant de la planète. Le coronographe a pour objectif de rejeter les photons stellaires en masquant l'étoile et en annulant les effets diffractifs (voir [43]). Cependant son efficacité sera fortement limit e par les aberrations d'où la nécessité de mettre en œuvre une optique adaptative dite extrême, par le nombre de degrés de correction, par exemple supérieur au millier sur un télescope de 8 m, pour s'approcher au plus près de la limite de diffraction. Des rapports de Strehl supérieurs à 90 % sont visés. Cependant, les images à haut contraste ainsi produites doivent quand même être trait es post facto par des méthodes d'imagerie différentielle (voir [44] et [45]) pour s'affranchir des dernières limitations dues aux aberrations résiduelles et atteindre la détectivité requise.

Pour comprendre les exigences demand es aux OA extrêmes, il faut analyser la structure de la FEP, donc l'image de l'étoile, produite par l'instrument [33]. En faisant l'hypothèse des faibles aberrations ( $\varphi < 1$  rad), le champ dans la pupille peut s'écrire suivant un développement limité [46]. D'après les équations (2) et (3) en omettant d'écrire la variable  $\frac{r}{\lambda}$  (la coordonn e dans le plan pupille), on a :

$$\Psi P = A_0 \left( 1 + i\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2 + \dots \right) P \quad (40)$$

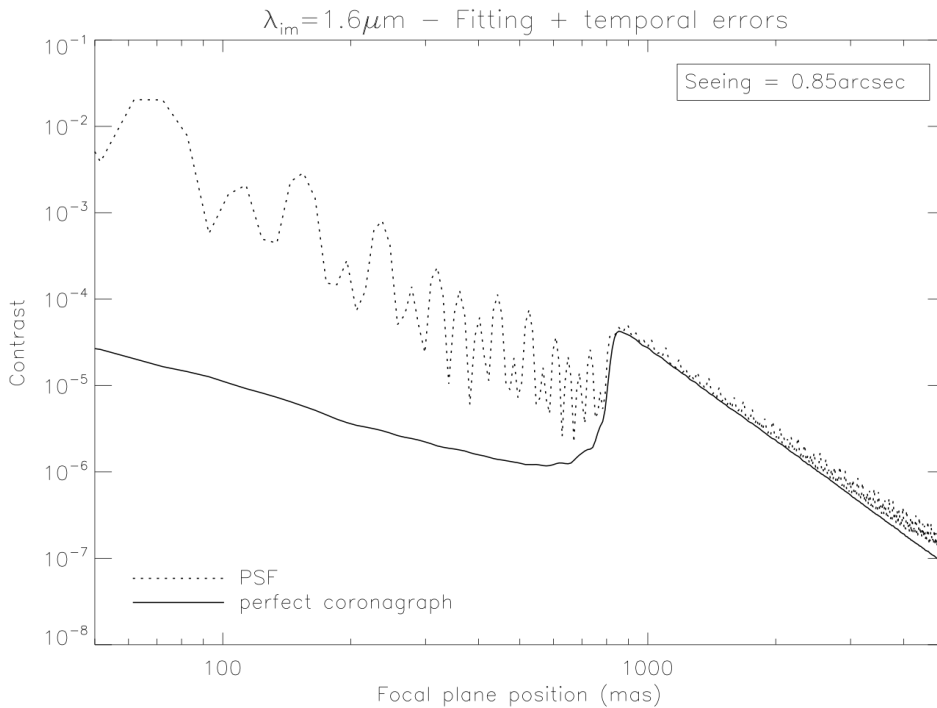
Donc la FEP peut s'exprimer sous la forme suivante, en utilisant les propriétés de la TF :

$$FEP(\boldsymbol{\alpha}) = \left| A_0 \left[ \delta(\boldsymbol{\alpha}) + i\phi(\boldsymbol{\alpha}) - \frac{1}{2}\phi(\boldsymbol{\alpha}) * \phi(\boldsymbol{\alpha}) + \dots \right] * p(\boldsymbol{\alpha}) \right|^2 \quad (41)$$

où  $\phi(\boldsymbol{\alpha})$  est la TF de  $\varphi(\frac{r}{\lambda})$  et  $p(\boldsymbol{\alpha})$  la TF de  $P(\frac{r}{\lambda})$ . Si on développe le module carré dans l'expression de la FEP, on trouve un premier terme dominant  $A_0 |p(\boldsymbol{\alpha})|^2$  qui n'est autre que la tache d'Airy, c'est-à-dire la FEP sans aucune aberration ( $\varphi = 0$  donc  $\phi = 0$ ). Ainsi la FEP observ e est principalement form e de la tache d'Airy. C'est sur ce terme que le coronographe est optimisé pour tenter de l'annuler au maximum. Puis viennent ensuite par ordre d'importance des termes du premier ordre et du second ordre en  $\phi$  : ce sont les dégradations principales de la FEP qui l'éloignent de la diffraction. Elles correspondent à des tavelures (*speckles* en anglais), chacune de taille  $\lambda/D$  du fait de la convolution de  $\phi$  par  $p$  dans l'équation (41). Ces tavelures se moyennent plus ou moins en fonction de la durée de la pose pour la prise d'image. Remarquons que  $\phi$  n'est autre que le spectre spatial de  $\varphi$ , le plan focal étant le plan de Fourier de la pupille. Les basses fréquences spatiales de  $\varphi$  vont donc perturber la FEP proche de l'axe ( $\boldsymbol{\alpha} = 0$ ) et limiter la détection de planètes à faible séparation.  $\phi$  présente une fréquence de coupure qui est la fréquence de Nyquist du système d'OA (voir section 2.6) li e au pas interactionneur du MD  $d_{ac}$  dans la pupille d'entrée. Cette fréquence  $1/2d_{ac}$  se trouve à la séparation  $\lambda/2d_{ac}$  dans le plan focal. Au-delà, donc pour les hautes fréquences spatiales, le système ne corrige plus la turbulence et  $\phi$  suit alors le



spectre de Kolmogorov donn e par l'équation (7), ceci forme un large halo à grande séparation angulaire. Le comportement de  $\phi$  en fr equance est donc inscrit dans la FEP et détermine le profil du contraste limite pour détecter une planète (voir la figure 7 ci-dessous). Notons que le système d'OA ne pourra améliorer le contraste, c'est-à-dire abaisser le niveau des ailes de la FEP, que dans son domaine de correction pour les séparations inférieures à  $\lambda/2d_{ac}$ . Dans le budget d'erreur établi en section 2.6, il s'agit donc de réduire au maximum les termes d'erreur sur ces basses fréquences qui sont li es au repliement, à l'erreur temporelle, au bruit et aux NCPA. L'anisoplan etisme est négligeable ici; cependant les erreurs dues à la scintillation et aux effets chromatiques de l'indice de l'air sont à prendre en compte [33].



**FIGURE 7.** Profils simul es (en échelle logarithmique) d'une FEP corrigée par OA en trait pointill e et de l'image coronagraphique correspondante en trait plein, à  $\lambda_{IM} = 1,6 \mu m$  et longue pose, normalis es par l'intensité en  $\alpha = 0$  donnant ainsi le contraste, en fonction de la séparation variant de 50 à 1 500 mas ( chelle logarithmique) [34]. Conditions de simulation : seeing 0,85", vent moyen 12,5 m/s, étoile très brillante (erreur due au bruit négligeable), pupille du VLT ( $D = 8$  m) avec obstruction centrale, réseau de 41x41 actionneurs ( $d_{ac} = 20$  cm), ASO SH de 40x40 sous-pupilles, fr equance trame de 1,5 kHz, commande intégrateur avec 2 trames de retard. Ici le résidu  $\phi$  de l'OA n'inclut que les erreurs de fitting, de repliement et l'erreur temporelle.

La figure 7 donne un exemple de profil simul e longue pose de l'intensité stellaire dans le plan focal avec correction par OA, normalisée par l'intensité sur l'axe pour avoir le contraste, pour les deux cas : sans et avec un coronagraph parfait [34]. Soulignons que le c oeur de la FEP autour de  $\alpha = 0$  de largeur à mi-hauteur  $\lambda/D = 41$  mas n'est pas trac e ici. La courbe en pointillée représente la FEP corrigée par OA sans coronagraph qui est dominée par la figure de diffraction pour les

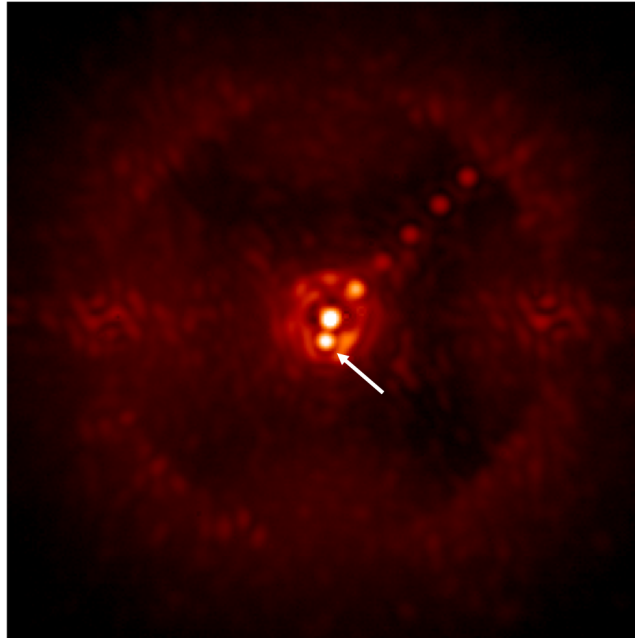
séparations  $< 825$  mas : voir les oscillations correspondant à l'alternance des valeurs plus ou moins hautes du maximum des anneaux de diffraction du fait de la pupille ayant une obstruction centrale. La séparation de 825 mas est donn e par  $\lambda/2d_{ac}$  correspondant à la fréquence de Nyquist du système d'OA considéré. Au-delà de cette séparation, c'est le halo, crée par les hautes fréquences non corrig es de  $\varphi$ , qui domine. Le profil avec coronographe permet de mettre en évidence la suppression de la FEP de la diffraction pour ne laisser voir que l'impact du spectre  $\phi$  des r siduals de  $\varphi$  sur le contraste (en trait plein). On note que pour les séparations comprises entre 50 et 800 mas dans le domaine de correction de l'OA, la limite de contraste impos e par le profil avec coronographe varie entre quelques  $10^{-5}$  et  $10^{-6}$ , donc proche du contraste requis pour la détection de planètes géantes jeunes.

Actuellement, un instrument coronographique équipé d'une OA extrême est en opération au VLT pour imager des systèmes planétaires extrasolaires, il s'agit de SPHERE [47] et [34]. Il est constitué de plusieurs instruments permettant de faire des images dans le visible (  partir de 0,6  $\mu\text{m}$ ) et le proche infrarouge (jusqu'à 2,3  $\mu\text{m}$ ) ainsi que de la spectroscopie et de la polarimétrie. Il est équipé d'un MD à 1370 actionneurs de pas interactionneur  $d_{ac} = 20$  cm et d'un miroir deux axes très rapide et précis pour la correction des basculements (tip-tilt). L'ASO est un analyseur de SH de 40x40 sous-pupilles dans le domaine des longueurs d'onde du visible, fonctionnant avec un filtrage spatial en entrée pour limiter l'erreur de repliement. Le détecteur de l'ASO est un EMCCD (Electron Multiplied CCD) de 240x240 pixels à lecture très rapide, fréquence trame de 1,2 kHz, et très faible bruit électronique  $< 0,5$  électron par pixel et par lecture. La commande à gain modal optimisé est utilis e et un filtre de Kalman est implanté pour les deux modes de tip et tilt. En plus, un miroir et un analyseur infrarouge de tip-tilt permettent d'assurer un centrage ultra précis (de l'ordre de 0,5 mas) sur le coronographe en plan focal. Un système de mesure et de correction des mouvements de l'image de la pupille dans l'instrument est aussi implanté. Enfin, les procédures d'étalonnage et de correction des NCPA ont été particulièrement soign es.

Un exemple d'image coronographique du système binaire  $\alpha$  Hyi dont le compagnon est très proche (  91 mas), est présenté sur la figure 8. Sur cette image, on voit le résidu stellaire non soustrait par le coronographe du fait des défauts r siduals de phase laissés par l'OA. Au centre de l'image, on observe la tache la plus lumineuse (de contraste  $3,6 \cdot 10^{-3}$ ) et autour des tavelures dont l'intensité décroît avec l'accroissement de la séparation. Plus loin, l'intensité croît pour passer par un maximum à la fréquence de Nyquist du système d'OA (  1134 mas), et au-delà décroît de nouveau, suivant ainsi le comportement du spectre de  $\varphi$  comme montré sur la figure 7.   noter que ces tavelures ont bien une taille à mi-hauteur de l'ordre de  $\lambda/D$ . Le compagnon pointé par la flèche est ici facilement détectable même en étant très proche de l'étoile centrale. Enfin l'ajout de fausses planètes d'intensité variant de  $10^{-3}$  à  $2 \cdot 10^{-4}$  permet de visualiser le contraste atteint par l'instrument dans le domaine de correction de l'OA, pour les séparations inférieures à celle de la fréquence de Nyquist.

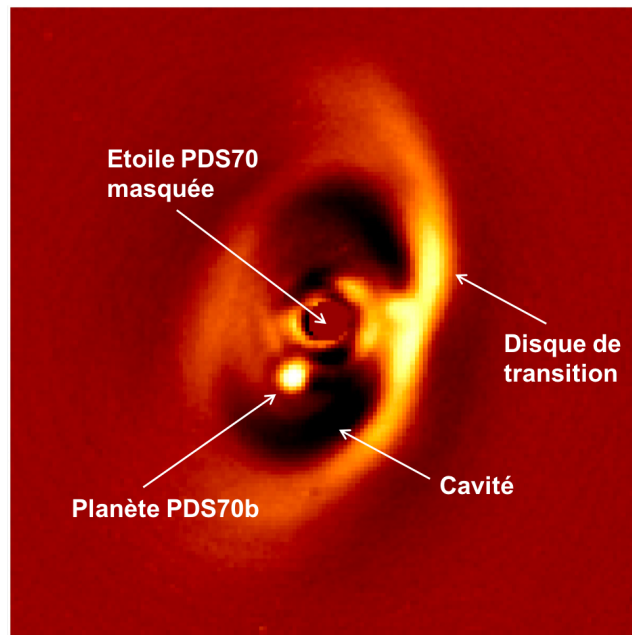
Un exemple d'observation de système planétaire par l'instrument SPHERE est donné sur la figure 9 [48]. Il s'agit de l'observation de l'étoile jeune PDS 70 ( $5,4 \cdot 10^6$  années), situ e à une distance de 370 années-lumières du Soleil, entour e par un disque de transition dans la cavité duquel l'exoplanète PDS 70 b a été découverte. Le disque est incliné par rapport à la ligne de vis e. Le compagnon orbite à 22 au (1 au = distance Terre-Soleil) de son étoile h te (séparation angulaire de 195 mas) et a une masse de l'ordre de 10 fois la masse de Jupiter et une température comprise entre 1 000 et 1 600 K. Depuis ces observations, une deuxième planète PDS 70 c a été d tect e et confirm e dans ce système.

Un autre instrument (GPI) dédié à l'imagerie directe d'exoplanètes dans le proche infrarouge est installé au télescope GEMINI Sud (8 m de diamètre) [49]. Il est équipé d'un coronographe, d'une OA extrême et de capacités en spectroscopie. La correction de la surface d'onde est ici ef-



**FIGURE 8.** Image coronagraphique (en échelle logarithmique)    $\lambda_{IM} = 2,2 \mu\text{m}$  de champ de vue de  $3,2''$  de côté obtenue par l'instrument SPHERE au VLT sur la binaire  $\alpha$  Hyi dont le compagnon de séparation 91 mas est signalé par une flèche; extrait de [47]. De plus, 5 fausses planètes ont été rajout es dans l'image, elles sont sur une diagonale, de séparation variant de  $0,2''$     $1''$  et de valeur du contraste variant de  $10^{-3}$  à  $2 \times 10^{-4}$  en partant du centre par pas de  $2 \times 10^{-4}$ .

fectu e sur deux étages. Un premier étage bas ordres est équipé d'un MD à actionneurs piézoélectriques, il assure la correction des grandes amplitudes des d form es requises pour les basses fréquences spatiales de la turbulence. Un deuxième étage hauts ordres est équipé d'un MD de type MEMS à haute densité d'actionneurs ( $64 \times 64$ ) corrigeant les hautes fréquences de plus faibles amplitudes. L'image de la pupille étant plus petite que la surface active du miroir, uniquement 1493 actionneurs sont utilisés sur ce MD. L'analyseur est un SH filtré de  $43 \times 43$  sous-pupilles, équipé d'un détecteur CCD  $160 \times 160$  pixels à lecture rapide à  $1,2 \text{ kHz}$  et de 5 électrons de bruit par pixel. Les performances de GPI sont assez similaires à celles de SPHERE avec cependant une magnitude limite plus basse du fait du bruit plus élevé sur le détecteur de l'ASO [49]. Notons aussi la plateforme modulaire de développement et de recherche d di e à l'imagerie directe d'exoplanètes sur le télescope SUBARU, appel e SCExAO [50]. Cette plateforme, en perpétuelle évolution, est  quip e d'un coronographe et d'une OA extrême, elle accueille plusieurs instruments travaillant soit dans le visible soit dans le proche infrarouge. Elle est plac e après le système d'OA du télescope SUBARU équipé d'un miroir bimorphe à 188 actionneurs permettant la correction des bas ordres de la turbulence. La correction des hauts ordres est assur e par un MD de type MEMS à 2000 actionneurs. L'ASO est un analyseur pyramide dans le visible équipé d'un détecteur bas bruit EMCCD travaillant jusqu'à une fréquence de  $3,5 \text{ kHz}$ . La plateforme intègre aussi un capteur dédié à la mesure fine des tip-tilt et focus au niveau même du masque coronagraphique pour obtenir un bon contraste aux très faibles séparations  $\sim 1\lambda/D$ . Enfin soulignons ici le projet SPHERE+ [51] qui vise à une mise à niveau de SPHERE, en intégrant un deuxième étage de correction fonctionnant à haute fréquence temporelle (quelques kHz) avec un analyseur py-

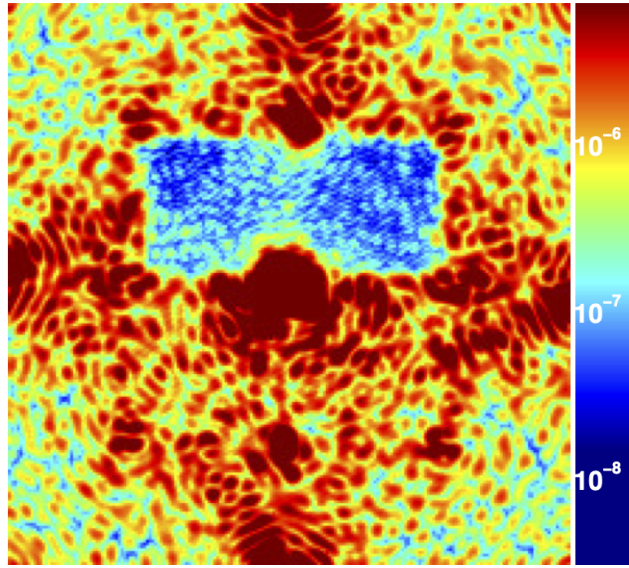


**FIGURE 9.** Image coronagraphique trait e par méthode différentielle angulaire du système planétaire autour de l'étoile PDS 70, à  $\lambda_{IM} = 2,2 \mu\text{m}$  sur un champ de vue de  $3,8''$  de côté, obtenue par l'instrument SPHERE au VLT [48]. La planète PDS 70 b est observ e dans la cavité du disque de transition incliné par rapport à la ligne de vis e.

ramide dans le proche infrarouge pour significativement améliorer le contraste au plus proche de l'axe.

Il est aussi possible d'envisager l'exploitation directe de l'image scientifique pour y améliorer encore le contraste pendant l'observation afin de pouvoir détecter des planètes plus matures ou de plus faible masse. Ceci se fait par des techniques dites de dark hole [52], en créant localement une zone sombre à très haut contraste proche de l'axe dans l'image de l'étoile. Ces techniques ont été initialement d velopp es en préparation de futurs instruments coronagraphiques spatiaux. L'image scientifique est ici le signal d'entrée pour une analyse de surface d'onde en plan focal en exploitant l'équation (41) et les propriétés du coronographe. Pour linéariser le problème, des méthodes de modulation des tavelures sont mises en œuvre : soit spatiale par des franges d'interférence pour la technique de Self Coherent Camera (SCC) [53], soit temporelle en activant successivement certains modes du MD comme sondes (voir par exemple : [52] et [54]).   partir des images produites, un algorithme calcule alors la d form e optimale du MD à appliquer pour créer dans le domaine de correction du MD une zone sombre dans l'image où l'intensité lumineuse sera minimis e.   noter que pour atteindre un très haut contraste, la seule correction des aberrations de phase n'est pas suffisante, il est aussi nécessaire de prendre en considération les défauts d'amplitude du champ dans la pupille, même s'ils sont faibles, et de les corriger. En effet, ces *aberrations d'amplitude* créent aussi des tavelures dans l'image en plan focal limitant ainsi la détectabilité des compagnons très faibles après correction des aberrations de phase.

La figure 10 présente un exemple de dark hole obtenu en laboratoire sur un banc équipé d'un MD MEMS à maillage carré avec  $27 \times 27$  actionneurs utiles, d'un coronographe et d'une analyse plan focal fond e sur la SCC [53]. Le dark hole, en lumière quasi monochromatique à 637 nm,



**FIGURE 10.** Image en fausse couleur en plan focal d'un point source en lumière quasi monochromatique (  637 nm) présentant un dark hole obtenu sur la moitié du domaine de correction du MD par correction de phase et d'amplitude, sur un banc coronographique de laboratoire [53]. L'axe optique est au centre de l'image.  chelle logarithmique du contraste allant du bleu  $5 \times 10^{-9}$  au rouge  $3 \times 10^{-6}$ .

est crée uniquement sur la moitié du domaine de correction du MD  $([-13, 13] \times [0, 13])$  en unité de  $\lambda/D$  du fait ici de la correction simultan e des aberrations de phase et d'amplitude; pour couvrir l'ensemble du domaine de correction, un deuxième MD serait nécessaire sur le banc (voir justification dans [52]). Le contraste obtenu au fond du dark hole est impressionnant, il varie entre quelques  $10^{-7}$  et  $10^{-8}$ . Au-delà des futurs instruments spatiaux, ces techniques sont à l'étude pour application à des instruments au sol comme SPHERE et pour préparer les futurs instruments des Extremely Large Telescopes comme le Planetary Camera and Spectrograph (PCS) en Europe (voir section 5).

#### 4. Optiques Adaptatives Tomographiques et étoiles lasers

Comme nous l'avons vu en section 2.4.3, l'erreur sur la phase induite par le bruit de mesure est d'autant plus faible que le nombre de photons détectés est grand (voir équation (13)). Pour une OA corrigeant les images dans le proche infrarouge et utilisant un analyseur travaillant sur une NGS dans le visible avec un détecteur de haute performance, il faut détecter typiquement 20 photons par sous pupille et par trame pour obtenir une correction satisfaisante avec une contribution de l'erreur due au bruit de l'ordre de  $\lambda_{IM}/10$ . Un tel nombre de photons correspond à un objet de magnitude visible de l'ordre de 10. Bien sûr dans le cas du choix d'une correction de moindre qualité, cette magnitude pourrait être plus  lev e, néanmoins la majeure partie des cibles d'intérêt astrophysique ne rentre pas dans ce schéma d'observation. Pour donner un exemple, dans le cas d'observation de galaxies lointaines, la faible brillance de surface de ces objets rend nécessaire l'utilisation d'une autre référence. Du fait de la décorrélation angulaire de la turbulence et de l'erreur d'anisoplanétisme qui en découle, l'étoile guide doit se situer dans un rayon relativement proche de l'objet d'intérêt, appelé domaine isoplanétique défini par  $\theta_0$

(voir équation (37)). Au-delà, la décorrélation angulaire de la surface d'onde introduira une perte sensible de performance [55] et donc de résolution angulaire (voir figure 6). Cette contrainte limite énormément le nombre d'objets pour lesquels une bonne correction de la turbulence est réalisable. On parle alors de couverture du ciel, c'est-à-dire de zones de ciel où l'on peut espérer une correction meilleure qu'un certain seuil (seuil à fixer en fonction du programme scientifique).

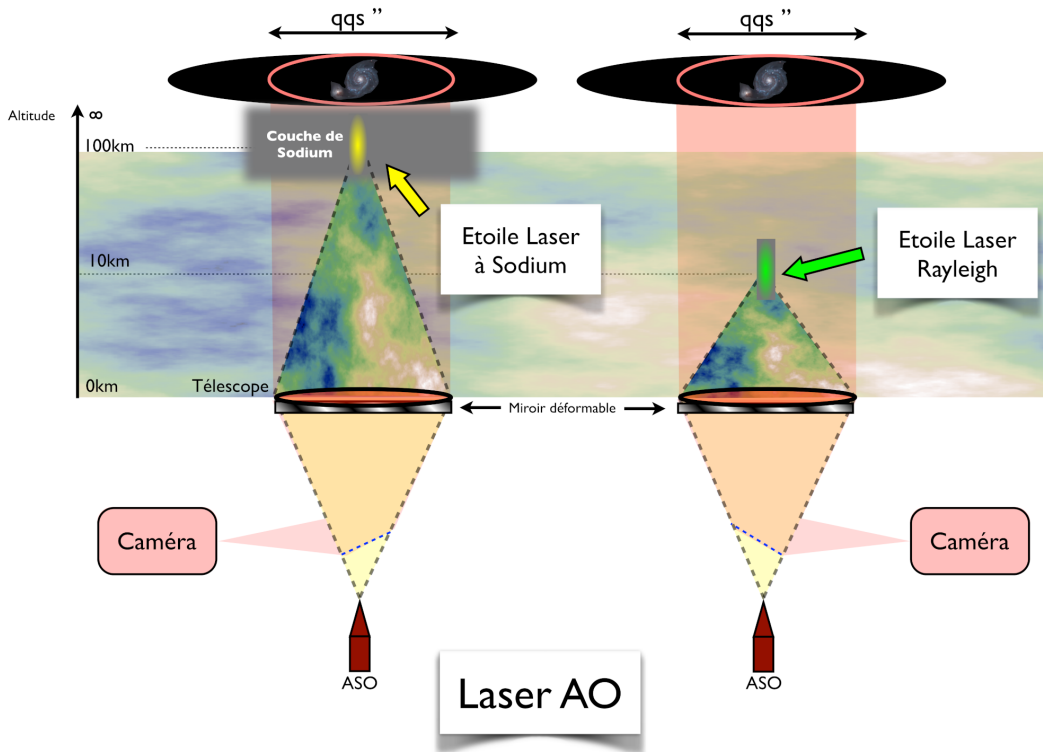
#### 4.1. *La couverture de ciel*

L'anisoplanétisme limite très fortement la correction dès que l'étoile guide se situe loin de la direction de correction. La première question à se poser est alors de savoir s'il y a, statistiquement parlant, suffisamment d'étoiles brillantes dans le ciel pour asservir le système d'optique adaptative et ainsi garantir une couverture du ciel (*i.e.* une capacité à observer n'importe quelle zone du ciel) de 100%. En considérant l'ensemble de la demi-sphère céleste, la surface totale du ciel observable est de  $2\pi r^2 = 2\pi(360/2\pi)^2 = 20637$  degrés carrés soit  $2.67 \cdot 10^{11}$  secondes d'arc carr es. Dans l'infrarouge, le domaine isoplanétique est de l'ordre de quelques dizaines de secondes d'arc. On peut donc estimer qu'il y a quelques centaines de millions de domaines isoplan tiques sur l'ensemble du ciel. Or, le nombre d'étoiles suffisamment brillantes pour permettre une bonne mesure, et donc une bonne correction, en OA est lui de l'ordre ou inférieur au million. On a donc accès avec l'OA à moins d'un pourcent du ciel observable. Ce calcul simpliste, qui ne tient pas compte de l'inhomogénéité de distribution des étoiles dans le ciel, donne néanmoins un ordre d'idée assez proche de la réalité. Les étoiles étant plus nombreuses dans le plan galactique qu'aux pôles, la couverture du ciel déduite de ce calcul est ainsi sous-estim e au plan galactique et sur-estim e aux pôles galactiques. Notons qu'il dépend aussi du type de système d'OA considéré et de la longueur d'onde d'imagerie [56]. La couverture de ciel augmente aux grandes longueurs d'onde et devient quasi nulle dès que l'on s'intéresse à l'optique adaptative dans le visible.

#### 4.2. * toile guide laser*

Comme nous l'avons vu précédemment, une des limitations fondamentales de l'optique adaptative appliqu e à l'astronomie est li e à la combinaison du faible nombre de NGS suffisamment brillantes pour obtenir un flux suffisant pour mesurer la surface d'onde (la magnitude limite des systèmes d'OA est de l'ordre de 10 à 15 selon les types instruments et d'applications considérés) et de la répartition volumique de la turbulence atmosphérique qui induit une décorrélation de la perturbation en fonction de la séparation et donc un domaine d'efficacité de la correction réduit (de quelques secondes d'arc à quelques dizaines selon les conditions et la longueur d'onde d'imagerie). Ainsi seul un très faible pourcentage de la voûte céleste est accessible aux systèmes classiques. Ceci a pendant de longues années cantonné l'OA à un rôle marginal en astronomie du point de vue des applications et des cas scientifiques d'intérêt. Pour accroître la couverture de ciel et donc donner à l'OA un accès à l'ensemble du ciel, R. Foy et A. Labeyrie ont proposé le concept d'étoile guide laser, Laser Guide Star en anglais (LGS) [57]. Le principe est de créer dans l'atmosphère une source artificielle par laser dans la direction de l'objet observé en utilisant la rétrodiffusion des photons laser par les différents constituants de l'atmosphère (par diffusion Rayleigh ou résonante), voir figure 11. Pour les systèmes aujourd'hui opérationnels dans les grands observatoires [58] [59], cette source artificielle de photons est obtenue en émettant un laser accordé sur la raie D2 du Sodium à 589 nm et focalisé dans la mésosphère à une altitude de l'ordre de 90 km où se trouve une densité significative d'atomes de Sodium qui vont partiellement diffuser la lumière laser. La diffusion est ici résonante : un photon laser est absorbé par l'atome de Sodium et celui-ci se désexcite très rapidement par émission spontan e d'un photon à 589 nm,

selon les propriétés de la transition atomique concern e. Avec un laser d'au moins 10 W, on peut attendre en retour de l'ordre de 200 photoélectrons ou plus (suivant les caractéristiques technologiques du laser) par sous-pupille (50 cm de diamètre) et par trame (1 kHz). Une telle LGS (voir figure 12 pour un exemple d'implantation sur le VLT) peut donc tout à fait répondre au besoin de l'analyse de surface d'onde. Le laser est propagé dans l'atmosphère à partir d'un petit télescope d'une taille de quelques dizaines de centimètres, monté directement sur le télescope principal : soit derrière le support du miroir secondaire, soit sur le côté de la monture du miroir primaire. La propagation du laser se traduit par une lumière parasite importante provenant de la diffusion Rayleigh (et Mie) dans les basses couches de l'atmosphère (voir figure 12), mais dont l'intensité diminue avec l'altitude du fait de la diminution de la densité des constituants pour devenir négligeable au-delà de 30 km d'altitude. Un diaphragme de champ est donc nécessaire à l'entrée de l'analyseur pour filtrer ces photons rétrodiffusés par la basse atmosphère et complètement défocalisés, pour ne garder que le spot Sodium d'intérêt à 90 km d'altitude.



**FIGURE 11.** Schéma représentatif d'une OA fonctionnant avec une étoile laser Sodium et une étoile laser Rayleigh. Crédit F. Vidal (Thèse de Doctorat).

#### 4.3. Les limitations de l'étoile laser

En créant une source brillante n'importe où dans le ciel, l'étoile laser pourrait donc être la solution aux problèmes de couverture de ciel. Malheureusement, l'étoile laser souffre de plusieurs





**FIGURE 12.** Implantation pratique d'une étoile laser : le cas du VLT ( toile sodium). Crédit : ESO.

limitations intrinsèques qui rendent nécessaire l'utilisation d'une NGS auxiliaire pour un fonctionnement optimal. La couverture de ciel apport e par les étoiles lasers n'est donc pas nécessairement de 100 %, mais elle reste quand même très supérieure au cas de l'OA fonctionnant uniquement sur NGS.

#### 4.3.1. Indétermination du tilt-tilt

La première de ces limitations est l'impossibilité de mesurer le basculement de l'onde (aussi appelé mode tip-tilt). En effet, le spot laser formé dans la couche de Sodium est animé d'un mouvement aléatoire inconnu dû au basculement subi par le faisceau sur le trajet aller et donc l'analyseur ne peut pas le séparer du basculement subi sur le trajet retour corrélé à celui recherché sur l'objet à corriger. Or le basculement est le terme dominant de la perturbation turbulente. Pour surmonter cette sévère limitation, il faut revenir à l'utilisation d'une NGS, mais là uniquement pour mesurer le basculement avec tous les photons collectés par la pupille du télescope. On peut aussi profiter d'une correction par OA avec LGS pour améliorer cette mesure [60]. La magnitude requise peut être alors beaucoup plus  lev e que pour la mesure complète de tous les modes d'un MD. On passe typiquement d'une magnitude limite de l'ordre de 10 pour un système d'OA classique basé sur une NGS pour mesurer l'ensemble des perturbations à une magnitude limite de l'ordre de 18 pour une mesure combin e de basculement avec NGS et des autres perturbations avec LGS. De plus un système combiné va profiter de la plus large corrélation angulaire du mode de basculement. La couverture du ciel s'en trouve finalement nettement am lior e [60] en passant de quelques à quelques dizaines de pourcents.

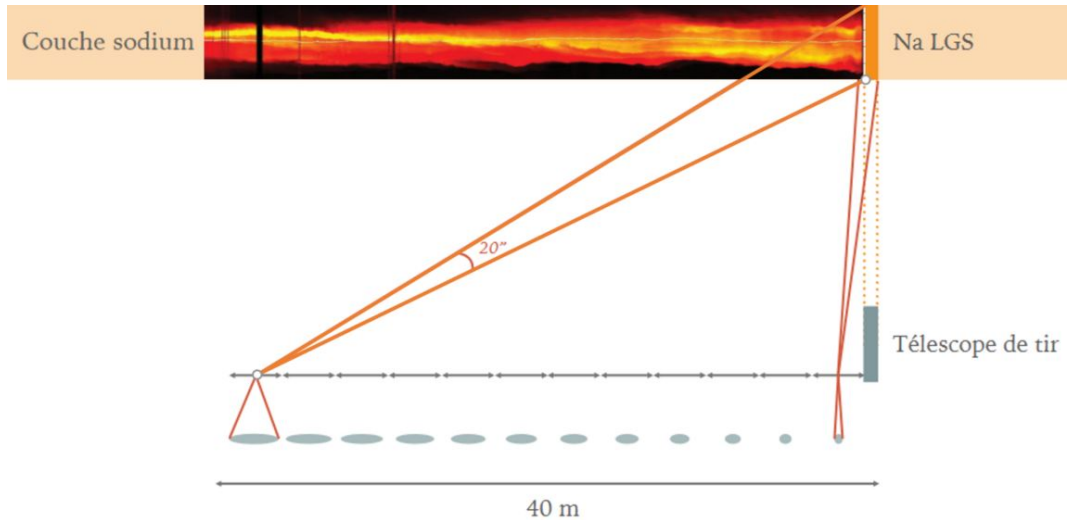
Notons qu'une autre approche a été propos e pour s'affranchir complètement des étoiles naturelles (et de leurs limitations). Il s'agit de mesurer directement les modes de basculement sur le signal Laser lui-même en créant une étoile Laser polychromatique dans la couche de sodium [61]. Le basculement différentiel entre plusieurs longueurs d'onde d'analyse permet de lever l'indétermination du tip-tilt. Toutefois, la faisabilité de la technique n'est à l'heure actuelle pas encore complètement d montr e.



#### 4.3.2. Estimation de focus et élongation du spot au foyer des sous-pupilles

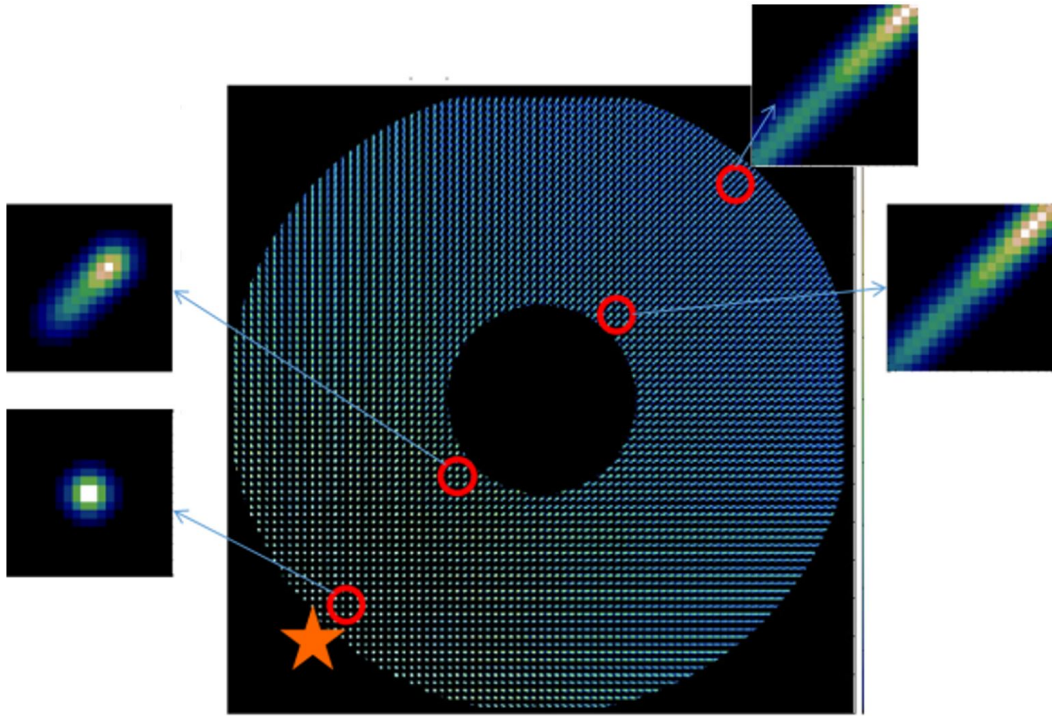
Une deuxième limitation vient de la grande variabilité spatiale et temporelle de la densité des atomes, qui impacte la structure et l'altitude moyenne de la couche m sosph rique de Sodium [62]. Celle-ci est en fait soumise aux aléas de la dégradation des m t orides dans l'atmosphère. Cette limitation se traduit d'abord par une erreur de focus (li e à l'évolution de la position moyenne de la couche de Sodium et donc de l'altitude moyenne de la LGS g n r e par le laser).

En plus d'une altitude moyenne variable, l'épaisseur de la couche de Sodium peut atteindre plusieurs kilomètres (jusqu'à une vingtaine dans certains cas) avec une densité d'atome variable. Lors de l'illumination par le laser et de la désexcitation des atomes de Sodium, cette répartition volumique des atomes va créer une LGS en 3 dimensions avec une structure complexe et variable (spatialement et temporellement). Lorsque cette LGS va être utilis e par l'ASO pour effectuer la mesure de la turbulence, l'effet de parallaxe va créer un allongement variable de l'image de la LGS au foyer des sous pupilles en fonction de leur position par rapport à la position de la LGS (c'est-à-dire, rapporté au sol, par rapport à la distance entre la sous-pupille et la position du télescope d'émission du laser). Cet effet est illustré sur la figure 13.



**FIGURE 13.** Représentation schématique de l'élongation des spots au foyer des microlentilles d'un ASO de SH en fonction de leur position le long d'un diamètre du télescope d'observation par rapport au télescope de tir du laser. L'exemple de l'Extremely Large Telescope européen a été considéré ici (voir section 5) : un télescope de 40 m, un télescope de tir du laser situé en bord de pupille. Une épaisseur de 20 km pour la couche de Sodium a été choisie donnant une élongation maximale de 20". En haut, la représentation montre aussi l'inhomogénéité de la densité de Sodium dans la couche (en fausse couleur du rouge au jaune) telle que mesur e par Pfrommer [62]). Les angles ont été exagérés et les distances modifi es pour mettre en évidence le phénomène.

Cette structure allong e, combin e aux contraintes de dimensionnement de l'analyseur peut induire des biais de mesure [63] : effet de troncature lorsque la taille du spot devient plus grande que la taille du champ de l'analyseur (voir figure 14). Ces biais vont se propager sur la phase estim e et produire des aberrations au niveau de la phase de correction dégradant ainsi les performances finales de l'OA.



**FIGURE 14.** Exemple de répartition d'intensités au foyer d'un ASO de SH due à la structure 3D de la LGS. La position du télescope d'émission du Laser est matérialisée par l'étoile orange. Le zoom est mis sur quelques sous-pupilles pour illustrer la différence de structure des spots en fonction de la position de la sous pupille par rapport à la position du télescope d'émission et sur les effets de troncature quand l'élongation du spot devient plus grande que la taille du champ des sous-pupilles.

Notons enfin que l'élongation ( $\beta_{LGS}$ ) va dépendre de 4 paramètres, l'angle zénithal de l'observation ( $\gamma$ ), l'épaisseur de la couche de Sodium  $\Delta H$ , l'altitude moyenne de cette couche  $H_{LGS}$  (altitude à laquelle sera focalisée le Laser) et la distance entre la position du télescope d'émission et la position de la sous-pupille dans la pupille du télescope ( $L$ ) selon l'expression suivante :

$$\beta_{LGS} = \frac{\cos(\gamma)L\Delta H}{H_{LGS}^2} \quad (42)$$

Ces erreurs restent faibles pour un télescope de classe 8 m dans l'infrarouge, quelques dizaines de nm, mais deviennent problématiques pour les longueurs d'onde plus courtes et les t elesopes géants [63]. Dans ce dernier cas une NGS sera encore utile pour mesurer au-delà du basculement, les quelques bas ordres affect es par ces erreurs. L'évolution de la structure de la couche de sodium étant plus lente que celle de la turbulence, la fr equance de correction nécessaire sera beaucoup plus faible (typiquement entre 100 et 1000 fois) et le senseur travaillant sur NGS nécessaire pour corriger de ces effets pourra donc fonctionner avec des temps d'intégration beaucoup plus longs que ceux permettant de corriger la turbulence. La correction des erreurs liées aux fluctuations de la densité de Sodium va donc conduire à une complexification du système d'OA mais ne représentera pas une limitation fondamentale du point de vue des performances.

#### 4.3.3. L'effet de cône

La troisième limitation, plus fondamentale que les deux précédentes, est appel e ‘‘effet de cône’’ [57] [64]. La création de la LGS se fait à une distance finie, les ondes émises par la LGS et capt es par le télescope sont sphériques et le volume découpé par le faisceau optique dans l'atmosphère est de forme conique ayant pour sommet la LGS. Or pour une NGS qui peut être consid r e comme étant à l'infini, les ondes sont planes et le volume du faisceau est cylindrique (voir figure 11). Il existe donc une différence entre les deux surfaces d'onde incidentes puisque le volume des perturbations rencontr es est diff rent : il s'agit d'une forme d'anisoplanétisme, appelé anisoplanétisme focal ou effet de cône. L'erreur de mesure li e à cet effet s'exprime de la façon suivante :

$$\sigma_{cone}^2 = \left( \frac{D}{d_0} \right)^{5/3} \quad (43)$$

avec

$$d_0 \approx 2.91\theta_0 H_{LGS}$$

On voit immédiatement que l'erreur li e à l'effet de cône dépend du rapport  $(D/H_{LGS})^{5/3}$ . Ainsi, l'effet sera d'autant plus important que le diamètre du télescope sera grand et que l'étoile laser sera focalis e près du sol. Cela milite pour utiliser des étoiles Sodium (la couche se trouvant typiquement 90 km d'altitude). Même dans ce cas, si l'erreur reste gérable pour des télescopes de classe 8 m (la perte de performance est de l'ordre de quelques pourcents en  $Sr$  à quelques dizaines de pourcents en fonction des conditions atmosphériques et de la longueur d'onde d'imagerie), elle devient absolument rédhibitoire pour les futurs télescopes géants.

#### 4.4. Estimation volumique de la turbulence : La tomographie optique

Pour limiter l'impact de l'effet de cône sur les performances des systèmes d'OA assistés par laser, il est nécessaire de pouvoir sonder l'ensemble du volume turbulent affectant le signal venant d'un objet astrophysique d'intérêt. Pour cela, l'idée est d'utiliser plusieurs LGS afin de synthétiser le cylindre d'une étoile naturelle avec plusieurs faisceaux coniques [65] [66] [59] comme illustré en figure 15.

Chaque ASO associé à une LGS va alors mesurer l'intégrale de la perturbation atmosphérique dans chaque direction d'analyse hors de l'axe de correction. La diversité angulaire des mesures permet ensuite de reconstruire le volume (3D) de turbulence à partir des mesures de surface d'onde (2D) int gr es dans chaque direction. On parle alors d'OA tomographique. On peut, de manière très générale, décomposer le problème en deux parties [66, 67] :

- Mesurer l'état de la turbulence dans le volume atmosphérique délimité par le champ de mesure (champ englobant les étoiles laser et naturelles utilis es pour l'analyse de surface d'onde).
- Appliquer la correction adéquate pour les directions d'intérêt. Cette étape inclut les aspects reconstruction et les aspects commande de miroir(s).

Ainsi la problématique globale peut se résumer en une équation :

$$\phi_{corr} = \mathbf{P}_{concept}^{FoV_{Corr}} \mathbf{R}_{tomo}^{FOV_{LGS}} \mathbf{M}_{LGS} \quad (44)$$

où

- $\mathbf{P}_{concept}^{FoV_{Corr}}$  est la matrice de projection qui va venir découper le volume turbulent estimé et le projeter sur le ou les MD,

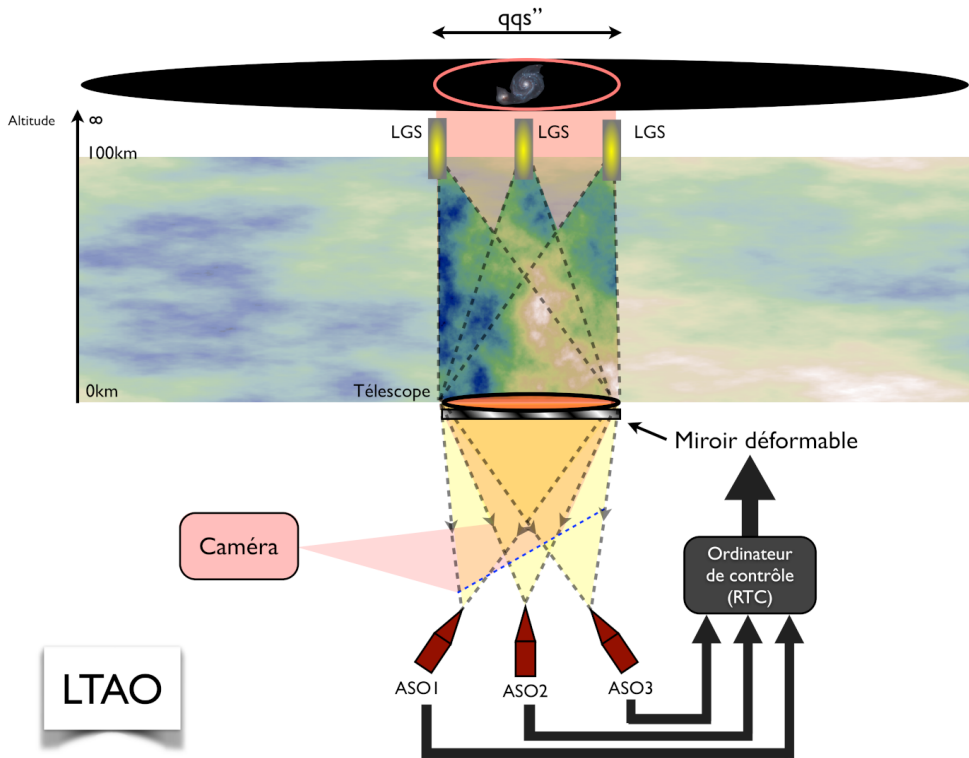


FIGURE 15. Schéma de principe de la mesure et de la reconstruction tomographique en optique adaptative avec plusieurs LGS. Crédits F. Vidal (Thèse de doctorat).

- $\mathbf{R}_{tomo}^{FOV_{LGS}}$  est la matrice de reconstruction tomographique qui va transformer les mesures à 2 dimensions en données à 3 dimensions sur le volume de turbulence<sup>1</sup>. Cette matrice de reconstruction est souvent complexe à obtenir et requiert des informations *a priori* sur la répartition statistique de la turbulence en altitude afin de contraindre et de régulariser au mieux le problème mal conditionné.
- $\mathbf{M}_{LGS}$  représente l'ensemble des mesures à 2 dimensions fournies par les ASO observant chaque étoile guide.

En fonction du nombre et de la position des étoiles laser et de la configuration des systèmes de correction, on peut avoir accès à une mesure plus ou moins précise et plus ou moins étendue du volume turbulent et en corriger des effets dans des zones du champ plus ou moins étendues. Cela a donné naissance, depuis le début des années 2000, à plusieurs systèmes d'OA tomographiques assistés par laser qui se traduisent par une complexité et des performances (en terme de qualité de correction et de champ de vue accessible) de plus en plus importantes. On peut les regrouper en trois grandes classes d taill es ci-après par ordre croissant de complexité (nombre de correcteurs) et de taille du champ de vue scientifique.

<sup>1</sup>On utilise des approches très similaires à celles utilis es en imagerie médicale tomographique.

#### 4.5. *L'optique adaptative tomographique assist e par Laser (ou LTAO)*

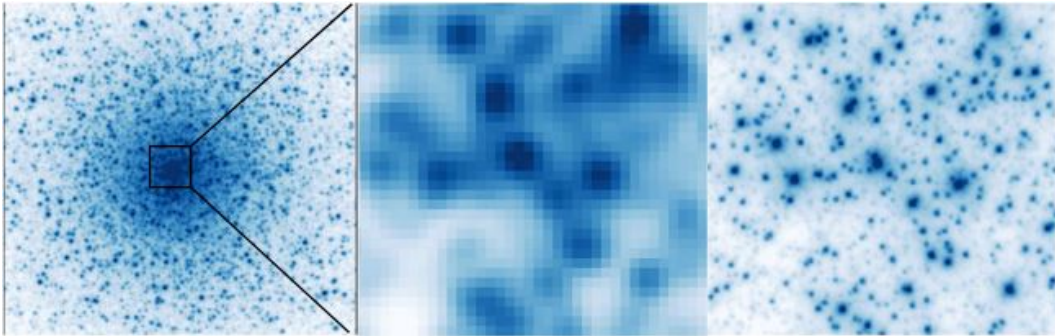
Un système d'optique adaptative tomographique assist e par Laser (ou Laser Tomographic AO [LTAO] en anglais) a pour but d'obtenir la meilleure correction possible sur axe. Les étoiles laser sont positionn es pour permettre de couvrir au mieux le cylindre de turbulence vu par l'onde électromagnétique provenant de l'objet d'intérêt et intercept e par le télescope (voir figure 15). Un système de LTAO a donc comme caractéristique principale d'avoir des LGS relativement proches de l'axe (de quelques à quelques dizaines de secondes d'arc en fonction de la taille du télescope) et un seul miroir de correction conjugué avec la pupille du télescope. La mesure est compl t e par une étoile naturelle situ e dans le domaine isoplanétique (ou l'objet observé lui-même) pour fournir l'information de Tip-tilt. Un système de LTAO apporte donc une solution au problème de la couverture de ciel en reproduisant le schéma de correction d'un système d'OA classique et en « remplaçant » la mesure de l'étoile naturelle par l'estimation tomographique multi-étoiles laser et la projection du volume turbulent estimé dans la direction d'observation. Mais l'utilisation d'un seul miroir dans la pupille ne permet qu'une correction efficace limit e au domaine isoplanétique. La taille angulaire des objets observables par un système de LTAO reste faible, typiquement de l'ordre de quelques (pour une observation aux longueurs d'onde du visible)   quelques dizaines (pour une observation aux longueurs d'onde de l'infrarouge) secondes d'arc.

Si l'on souhaite observer des objets plus étendus, une solution possible est d'introduire un compromis entre taille du champ et qualité de correction. L'idée est alors d'éloigner les LGS pour avoir accès à un volume turbulent plus important et de moyenniser ces informations pour ne garder que la partie de la phase commune à l'ensemble des directions de mesure. Cette partie commune est la turbulence situ e proche du télescope. On a ainsi un système qui ne corrige que les basses couches de la turbulence. Cette correction est évidemment moins efficace mais s'applique à l'ensemble du champ. On a donc une performance réduite mais uniforme dans un grand champ. C'est le concept de système d'OA corrigeant la couche au sol (ou "Ground Layer AO" [GLAO] en anglais). Avec un même assemblage de composants (LGS, NGS, miroir déformable dans la pupille), un même système peut aisément combiner les fonctionnalités de GLAO et LTAO en ajustant uniquement la configuration des LGS. Ainsi, en fonction des caractéristiques des objets observés, l'utilisateur (c'est-à-dire l'astronome) peut choisir le meilleur compromis en terme de niveau de correction versus taille du champ corrigé.

Ce concept « GLAO-LTAO » a été développé par l'ESO dans l'Adaptive Optics Facility (AOF) [59] qui combine :

- un secondaire adaptatif (dont le concept a été présenté au paragraphe 2.3 (voir figure 3 et [19]) pour assurer l'étape de correction,
- un système d'OA tomographique assisté par 4 lasers Sodium combinant un mode GLAO et un mode LTAO pour assurer l'étape de mesure du volume turbulent,
- une mesure sur étoile naturelle pour une magnitude limite de l'ordre de 18 dans le visible.

L'AOF, combiné à l'instrument MUSE [68], est en opération au VLT depuis 2015. Il produit des données uniques combinant haute résolution spectrale (0,23 nm de résolution) et angulaire (30 à 50 millisecondes d'arc de résolution) pour l'ensemble du spectre visible (de 465 à 930 nm). Un exemple d'images obtenues en modes GLAO et LTAO est donné sur la figure 16.   noter le gain spectaculaire en résolution apporté sur un petit champ par la LTAO par rapport à la GLAO.



**FIGURE 16.** Ces images de l'amas globulaire NGC 6388 ont été obtenues lors de la phase de test de l'AOF du VLT en mode LTAO qui équipe l'instrument MUSE. L'image de gauche a été acquise en mode GLAO. Au centre, figure un zoom sur une petite portion du champ (7,5''x7,5''). L'image de droite a été acquise par MUSE en mode LTAO sur la même petite portion de champ. (crédits : ESO/S. Kammann/LJMU)

#### 4.6. *L'optique adaptative multiconjugu e (ou MCAO)*

Si la LTAO permet de résoudre la problématique de la couverture de ciel en donnant accès à l'observation d'objets de brillance de surface très faible pour l'ensemble du ciel, la qualité de correction reste limit e à un champ de vue réduit déterminé par le domaine isoplanétique. L'observation d'objets très étendus ou l'observation simultan e de plusieurs objets dans un grand champ ne peut se faire qu'au prix d'une dégradation de la qualité de correction (avec un système dit GLAO comme présenté précédemment).

Toutefois, en supposant que nous maîtrisons parfaitement l'opération tomographique et que nous soyons donc capables de bien connaître le volume de turbulence au-dessus du télescope, il est alors possible de corriger ce volume turbulent en conjuguant optiquement plusieurs miroirs déformables à plusieurs altitudes : c'est le concept d'optique adaptative multiconjugu e (ou Multiconjugate Adaptive Optics [MCAO] en anglais) [69]. Un tel système (voir figure 17) utilise typiquement 2 à 3 miroirs déformables : 1 conjugué optiquement à la couche au sol (0 m) et 2 autres conjugués à des altitudes correspondant aux 2 couches statistiquement les plus turbulentes de l'atmosphère sur le site d'observation (par exemple : 2000 m et 10000 m). L'objectif de ce type de système est d'obtenir une correction uniforme proche de la limite de diffraction pour des champs de l'ordre d'une à quatre minutes d'arc carr es (soit typiquement 5 à 20 fois plus grands qu'en LTAO). Le niveau de performance se situera entre la correction optimale sur axe fournie par la LTAO et la correction d grad e dans un grand champ fournie par la GLAO.

Une toute première démonstration du concept de MCAO a été propos e sur le VLT grâce au démonstrateur MAD (Multiconjugate AO Demonstrator) de l'ESO [70]. La figure 18 présente un exemple d'observation d'un objet très étendu (ici Jupiter et ses 40 secondes d'arc de diamètre apparent) par MAD.

Au-delà de la démonstration de concept apport e par MAD, le premier système opérationnel de MCAO, appelé GeMS, a vu le jour au télescope Gemini-sud en 2012 [71]. Il est composé de :

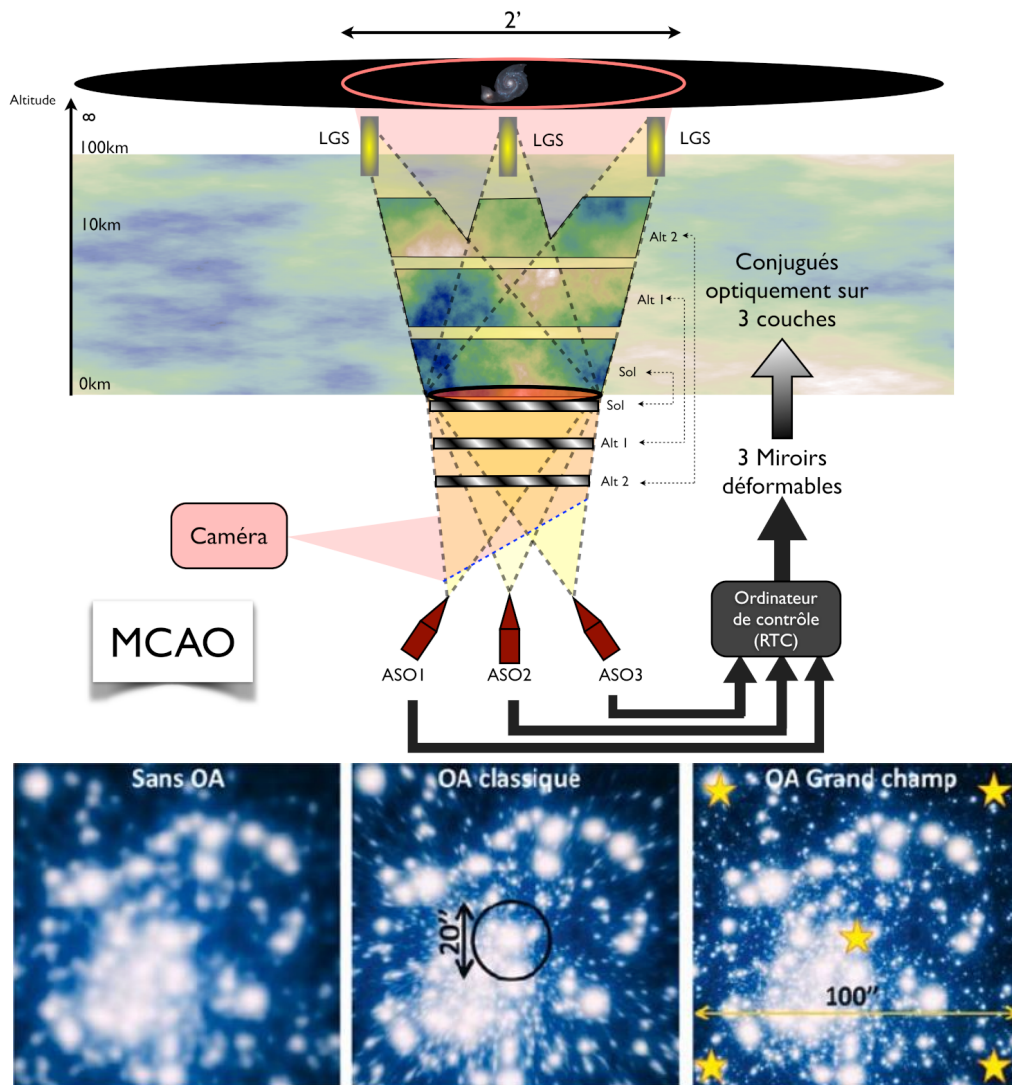
- 5 LGS, situ es aux coins et au centre d'un carré de 1 minute d'arc de côté centré sur l'axe;
- 3 NGS, à sélectionner dans un champ de 2 minutes d'arc de diamètre centré sur l'axe, pour gérer les problématiques de basculement et d'aberrations différentielles dans le champ induites par la structure 3D des étoiles artificielles g n r es par les lasers. La magnitude limite pour ces NGS est de l'ordre de 17,5.



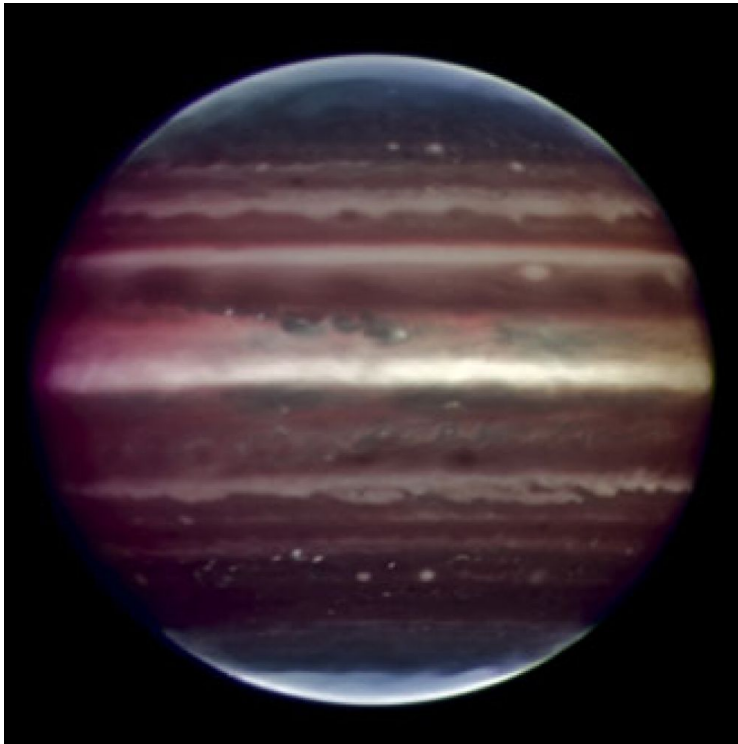
- 3 miroirs déformables (dont 2 conjugués en altitude à respectivement 4,5 et 9 km)

et permet d'atteindre la limite de diffraction dans l'infrarouge (bande K) pour un champ d'une minute d'arc carr e. Un exemple d'observation « grand champ » avec cet instrument est illustré sur la figure 19.

La prochaine génération de systèmes de MCAO est en cours de développement pour le VLT de l'ESO au Chili. Il s'agit du projet MAVIS (MCAO-Assisted Visible Imager and Spectrograph) [72] mené par une équipe australienne de l'ANU (Australian National University). Le projet intègre aussi plusieurs équipes européennes et l'ESO.



**FIGURE 17.** [En haut] Schéma de principe de la MCAO, crédit F. Vidal (Thèse de doctorat). [En bas] Comparaison d'images observ es sans OA, avec une OA classique et une OA multiconjugu e (MCAO) avec 5 LGS; crédit B. Neichel (Habilitation   Diriger les Recherches).

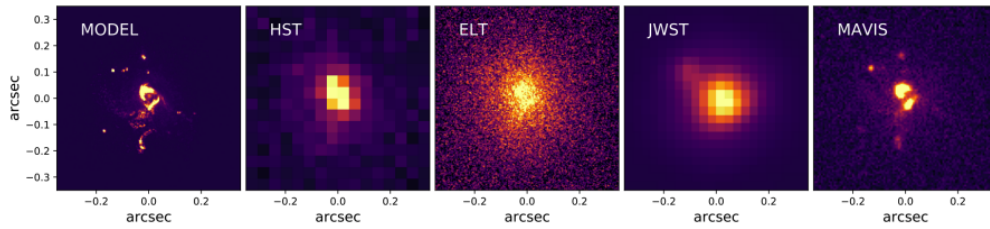


**FIGURE 18.** Jupiter observé par MAD dans l'infrarouge (représentation en fausse couleur). L'analyse de surface d'onde est effectu e sur 3 satellites de Jupiter situés de part et d'autre de la géante gazeuse. Le champ de vue est de 1x1 minute d'arc carré. Crédit : ESO/F Marchis, M. Wong, E. Marchetti, P. Amico et S. Tordo.



**FIGURE 19.** La nébuleuse d'Orion observ e dans le proche infrarouge par les télescopes de l'observatoire Gemini (représentation en fausse couleur). [  gauche] avec le système d'OA classique (Altair). [  droite] avec le système de MCAO GeMs. La taille totale du champ est ici de 85x85 secondes d'arc carr es. Crédit : Gemini Observatory, AURA.





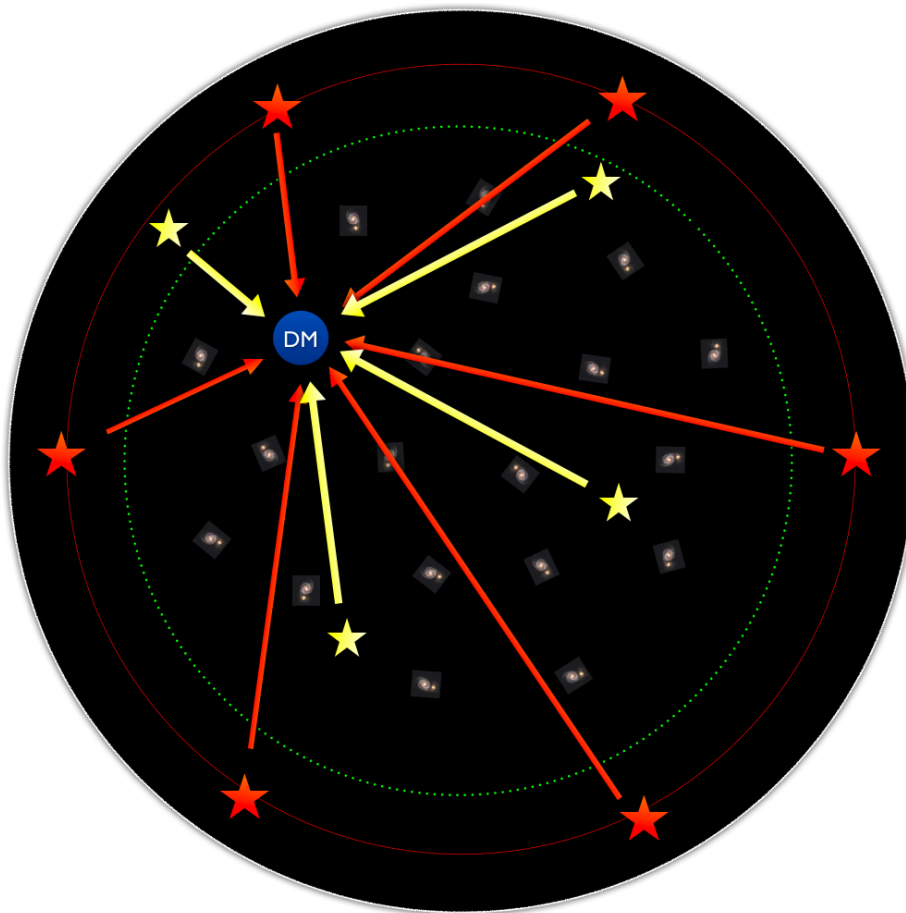
**FIGURE 20.** Exemple d'étude morphologique d'une galaxie (modèle à gauche)   haute résolution telle qu'observ e, de gauche à droite, avec le Hubble Space Telescope (HST), Extremely Large Telescope (ELT) avec MICADO (voir section 5), le JWST et sa caméra NIRCam et enfin MAVIS sur le VLT. Basé sur la galaxie « Althaea » simul e à haute résolution à  $z=5$  et pr sent e dans le premier panneau. Les autres panneaux montrent comment la même cible de magnitude 25 AB apparaîtrait dans la bande I (900 nm) si elle était observ e avec différents instruments pour un temps d'exposition fixe de 1 h. Dans l'image du VLT/MAVIS, des régions d'amas aussi faibles que 29 AB mag sont d tect es avec un rapport signal/bruit de 5. Crédit : consortium MAVIS.

MAVIS fournira des images visibles et des données de spectrographie à champ intégral avec une résolution angulaire 2 à 3 fois supérieure à celle du télescope spatial Hubble (voir figure 20), ce qui en fera un puissant complément dans les longueurs d'onde visibles pour les futures installations comme le télescope spatial James Webb et les télescopes terrestres de classe 30   40 m actuellement en construction, qui visent tous la science aux longueurs d'onde du proche infrarouge. MAVIS devrait voir ses premiers photons à l'horizon 2027.

#### 4.7. *Optique adaptative tomographique « distribu e » : MOAO*

Si l'on souhaite combiner un très grand champ (de plusieurs dizaines de minutes d'arc carr es) et bonne performance, le nombre de MD pour un système de MCAO doit augmenter significativement [73] et on aboutit à un système beaucoup trop complexe (  la fois du point de vue du concept optomécanique et du c t). Néanmoins, pour leur grande majorité, les applications astrophysiques nécessitant un très grand champ concernent l'observation simultan e d'un grand nombre d'objets compacts, comme pour l'étude statistique des galaxies distantes. La correction n'est donc nécessaire qu'en certains points (là où sont situés les objets d'intérêt) du champ total. L'OA Multi-Objet ou Multi Object Adaptive Optics (MOAO) a été imagin e pour répondre à ce besoin spécifique [74]. Le principe repose sur la segmentation du champ total en zones individuelles de correction limit es par l'angle d'isoplanétisme. L'idée sous-jacente étant d'utiliser autant de miroirs déformables qu'il y a d'objets d'intérêt à corriger dans le champ. Le principe est proposé en figure 21.

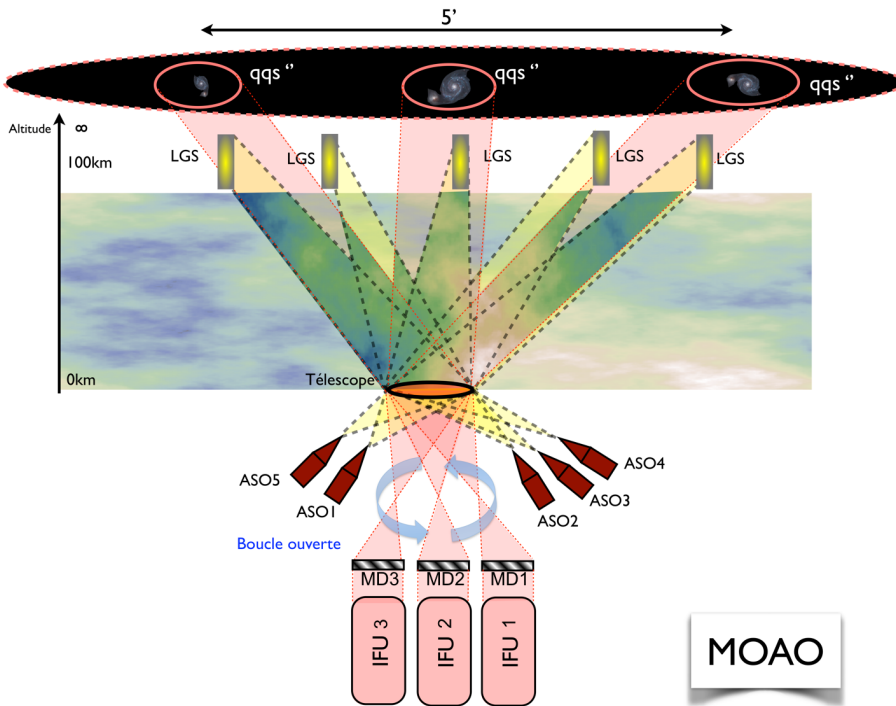
Cette « découpe » du champ implique que, contrairement aux systèmes d'OA présentés jusqu'ici, chaque élément (ASO et miroir déformable) ne verra que la petite zone du champ qui l'intéresse. En segmentant le champ de l'instrument pour chaque sous-système, il n'est alors plus nécessaire de transporter le champ entier. On prélève dans le plan focal la lumière provenant des étoiles guides pour la diriger vers les ASO. La lumière issue de chaque galaxie sera, elle, dirig e vers un miroir déformable puis vers un instrument scientifique, souvent un spectrographe (voir figure 22). La commande de ce miroir est synth tis e par tomographie à partir des mesures de tous les analyseurs et ceci en boucle ouverte puisqu'aucun des analyseurs ne voit l'effet de la correction apport e par le MD à la différence des autres systèmes d'OA.



**FIGURE 21.** Principe de la correction d'un instrument de MOAO sur un champ (en noir) de l'ordre de 7 minutes d'arc de diamètre pour l'observation simultan e de plusieurs galaxies distantes (en niveau de gris). Le principe est illustr e pour la direction d'une seule galaxie (pastille bleue). La correction est effectu e par un seul miroir déformable (not e DM) qui ne corrige que dans la direction spécifique de la galaxie. L'information sur le volume de turbulence est apport e grâce à des étoiles lasers (Rouge) ainsi que des étoiles naturelles présentes dans le champ (Jaune). La projection dans la direction de correction se fait grâce à l'opération de tomographie (flèches Rouges et Jaunes). Il en est de même pour chacune des autres galaxies d'intérêt du champ. Crédit F. Vidal (Thèse de doctorat).

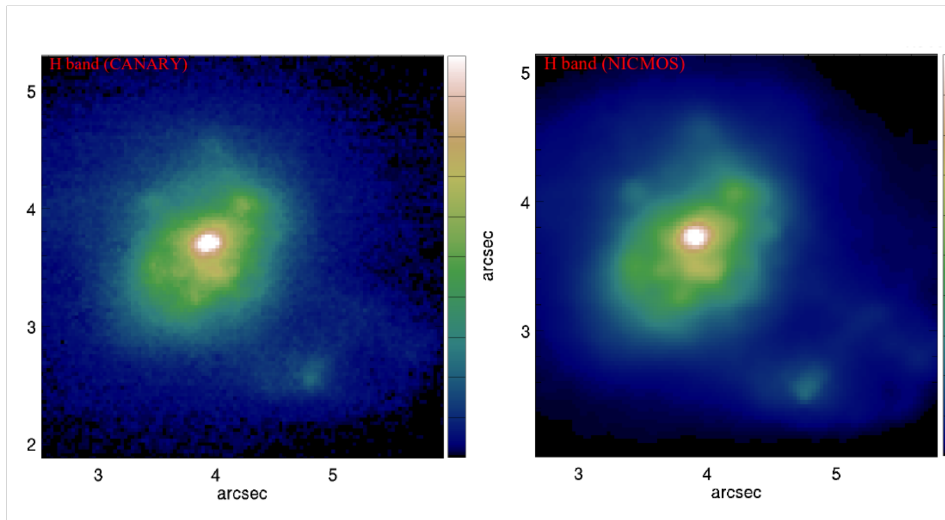
Pour valider les principes du système de MOAO et préparer l'Extremely Large Telescope (ELT) de l'ESO, une équipe franco-britannique a d velopp e en plusieurs phases successives un démonstrateur, appel e CANARY, install e au William Herchel Telescope de 4,2 m de diamètre aux  les Canaries, [74] et [75].

L'objectif est de valider la commande en boucle ouverte et la tomographie à partir de plusieurs ASO sur LGS et NGS. Une seule voie scientifique petit champ sur axe dans le proche infrarouge a été install e pour la démonstration. Elle est  quip e au final de deux MD conjugués de la pupille, selon une correction à deux étages. Elle possède aussi un ASO de diagnostic pouvant fonctionner sur l'objet observé. 4 LGS de type Rayleigh à 532 nm focalis es à une altitude de l'ordre de



**FIGURE 22.** Schéma de principe de la MOAO dans un large champ (ici 5 minutes d'arc de diamètre). On ne corrige individuellement que les zones d'intérêt scientifique sur les galaxies, de quelques secondes d'arc chacune. La correction est effectu e dans chaque direction par un miroir déformable piloté en boucle ouverte à partir des mesures des ASO. En multipliant les voies scientifiques (IFU pour Integral Field Unit en anglais : spectrographe à champ intégral), on multiplie le nombre de galaxies corrig es observables en une seule pose. Crédit F. Vidal (Thèse de doctorat).

20 km sont positionn es sur un carré, typiquement à 23 secondes d'arc de l'axe, et 3 NGS sont s lectionn es dans le champ total de 2,5 minutes d'arc de diamètre. Plusieurs types de systèmes ont été testés comme la GLAO, la LTAO et la MOAO avec une variante à deux étages de correction comme pour l'ELT, le premier étage de type GLAO corrige le champ total et le deuxième étage en boucle ouverte de type MOAO corrige le petit champ sur l'axe. Les performances obtenues en MOAO,  $S_r$  variant typiquement de 10 à 30% suivant le seeing, sont proches de celles de l'OA classique (mesure et correction boucle ferm e sur axe) variant entre 15 et 40 % dans les mêmes conditions. La figure 23 donne un exemple d'images obtenues sur le système distant IRAS 21101+5810 ( $z = 0,039$ ) de deux galaxies entrant en collision, difficilement observable à haute résolution angulaire à partir du sol [76]. L'intérêt ici est de pouvoir caractériser les superamas stellaires (Super Star Clusters, SSC en anglais) de ce système pour mieux comprendre leur rôle dans l'évolution des galaxies. La résolution angulaire atteinte avec la MOAO est ici proche de la limite de la diffraction du télescope.



**FIGURE 23.** Comparaison des images de IRAS 21101+5810 (système de deux galaxies entrant en collision) obtenues avec CANARY au W. Herschel Telescope (gauche) et avec NICMOS, issue de l'archive Hubble Space Telescope (droite), en bande H à 1600 nm, pour des temps de pose de plusieurs dizaines de minutes; extrait de [76]. La résolution obtenue avec CANARY est de l'ordre de 0,15 seconde d'arc en utilisant les 4 LGS Rayleigh et une NGS du champ à 50 secondes d'arc du centre.

## 5. Optique adaptative et ELT

Les ELT (Extremely Large Telescopes) représentent la future grande avanc e dans l'astronomie moderne. Il s'agit, à horizon 2030, de mettre en opération des télescopes géants de plusieurs dizaines de mètres (respectivement 24 [77] et 30 m [78] pour les projets américains et 39 m pour le projet européen [79]). Le défi que représentent la conception, la construction et l'opération d'un télescope de 24 à près de 40 m est considérable. L'extrapolation de solutions techniques existantes sur les télescopes de la classe des 8-10 m, permettant d'obtenir une excellente qualité d'image dans un champ de grande taille, pose de nombreux problèmes. Les défauts et la turbulence interne générés par la complexité et le gigantisme des télescopes et de leurs structures (d me de près de 80 m de haut posé sur un socle de 80 m de diamètre pour l'ELT européen (voir figure 24), c'est-à-dire un télescope ayant les dimensions d'un stade de foot) ont mis l'optique adaptative au cœur de la conception de ces futurs géants. Les télescopes eux-mêmes deviennent adaptatifs pour corriger leurs propres imperfections et fournir aux instruments scientifiques disposés à leurs différents foyers des faisceaux optiques exploitables.

L'ESO collabore avec plus de trente instituts scientifiques internationaux (dont les plus grands observatoires français, l'ONERA et le CEA) et entreprises high-tech européennes en vue d'établir les technologies de base requises pour les rendre disponibles à un prix acceptable dans les 5 à 10 ans à venir. Deux aspects très importants du développement de l'ELT sont le contrôle d'une optique de haute précision à l'échelle du télescope, ainsi que la conception des instruments qui doivent permettre aux astronomes d'atteindre les objectifs scientifiques ambitieux de l'ELT. Le miroir primaire d'un peu plus de 39 m (  lui seul l'ELT aura le même pouvoir collecteur que l'ensemble de tous les télescopes astronomiques actuellement en opération dans le monde!) sera composé de 789 segments hexagonaux de 1,41 m chacun qu'il faudra positionner les uns par rapport aux autres avec une précision de quelques nanomètres pour synthétiser un télescope



**FIGURE 24.** Le futur télescope géant européen mis à l'échelle des télescopes de 8 m du VLT et de l'arc de triomphe. Crédit ESO. La base du d me de l'ELT fera 80 m de diamètre. Il culminera à plus de 80 m de haut pour un poids total de plus de 5000 tonnes

monolithique de même diamètre. L'ELT présente la particularité de posséder un miroir adaptatif (appelé M4, car en 4<sup>e</sup> position dans le train optique) associé à un miroir de tip-tilt (le M5), pour assurer une correction efficace des aberrations turbulentes ainsi que des aberrations induites par le télescope lui-même. Le miroir M4 est un miroir adaptatif de 2,6 m de diamètre avec plus de 5000 actionneurs [80]. Le champ total du télescope est de l'ordre de plusieurs dizaines de minutes d'arc carr es. Ce télescope utilisera en outre six étoiles laser tir es à partir des bords du miroir primaire pour permettre aux systèmes d'OA tomographiques de fonctionner.

Ce projet pharaonique nécessite de pousser toujours plus loin les performances des instruments et de leurs optiques adaptatives et de proposer des solutions innovantes à de nouveaux problèmes posés par le gigantisme du télescope. Il s'agit ainsi d'inventer de nouveaux concepts permettant de tirer le meilleur parti de l'exceptionnel pouvoir de résolution angulaire (4 fois supérieur à ce qui existe actuellement) du télescope allié à sa surface collectrice in gal e (16 fois plus importante que celle des plus grands télescopes actuels). Ce faisant, il sera donné aux astronomes, à l'horizon 2030 [81] :

- d'observer des planètes telluriques orbitant autour d'autres étoiles que le soleil,
- d'étudier la formation des étoiles dans d'autres galaxies que la nôtre,
- d'observer la formation des toutes premières galaxies quelques centaines de millions d'années seulement après le Big-Bang,

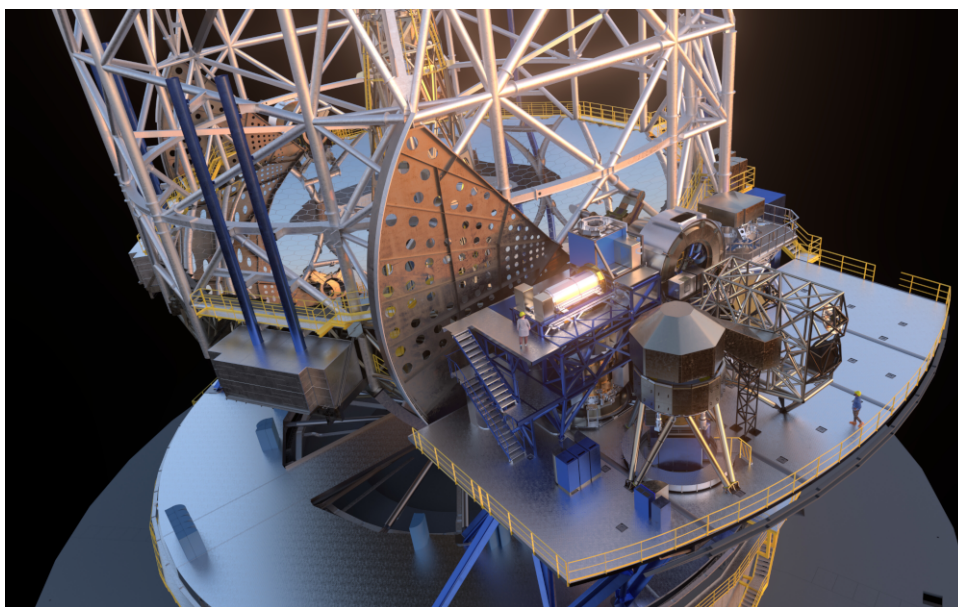
et ainsi de franchir des étapes significatives, voire décisives, dans l'étude et la compréhension de notre Univers. Pour ce faire, l'ELT européen sera équipé dès sa mise en service (d'ici la fin de la décennie) d'instruments dits de « première génération » (voir figure 25). Ces derniers sont au nombre de trois (MICADO [82], HARMONI [83] et METIS [84]) avec en plus le module d'OA multiconjugu  MAORY [85]. Ils couvrent une large partie de l'espace des paramètres observationnels à la fois en termes de longueurs d'onde (du visible à l'infrarouge lointain), de résolution spectrale (jusqu'à plus de 10 000) et de champ de vue accessible. Ils seront rejoints dès le début de la prochaine décennie par deux instruments dits de « deuxième génération » (MOSAIC et ANDES) apportant leurs compléments en termes de capacités opérationnelles (en particulier en ce qui concerne le champ accessible pour MOSAIC et la précision spectroscopique pour ANDES). L'ensemble de ces instruments seront équipés de systèmes d'OA plus ou moins complexes (allant



d'une OA classique à la MCAO en passant par la LTAO) pour bénéficier pleinement des capacités uniques de l'ELT :

- HARMONI combinera un système d'OA classique fonctionnant sur objets brillants (magnitude plus faible que 12 / 13 typiquement) et un système de LTAO [86] utilisant le miroir adaptatif de l'ELT (M4), 6 LGS ( quidistribu es sur un cercle d'un peu plus d'une minute d'arc de diamètre) et une seule NGS avec une magnitude limite de 18-19 en H pour la mesure du tilt atmosphérique et la correction des aberrations induites par les limitations de la LGS (voir section 4.3.2).
- MICADO combinera un système d'OA classique fonctionnant sur objets brillants très similaire à celui d'HARMONI (magnitude plus faible que 12 / 13 typiquement) et le système de MCAO MAORY [85] utilisant 1 MD supplémentaire conjugué optiquement à environ 12 km d'altitude en complément du miroir adaptatif de l'ELT (M4), 6 LGS ( quidistribu es sur un cercle de 1,5 minutes d'arc de diamètre) et 3 NGS avec une magnitude limite de 18 en bande H et disponibles dans un champ de vue de près de 2,7 minutes d'arc de diamètre.
- METIS lui utilisera un système d'AO classique dont la particularité sera d'utiliser les photons infrarouges (jusqu'à la bande K) pour effectuer la mesure de surface d'onde [87].

Le lecteur désireux d'en savoir plus sur l'ELT et son instrumentation est invité à lire le numéro spécial (volume 182) du journal de l'ESO « Messenger » qui résume les principales caractéristiques du télescope et de ses instruments [88].



**FIGURE 25.** Vue d'artiste des instruments de première génération sur la plateforme Nasmyth A de l'ELT. Extrait de [88], crédit : ESO.

Enfin, après quelques années d'opérations afin de bien comprendre et maîtriser la complexité du télescope et de son environnement, le dernier instrument prévu pour l'ELT sera son "Planet Finder" (PCS pour Planetary Camera and Spectrograph). Il sera installé d'ici la fin des années 2030. Cet instrument, associé à son optique adaptative extrême, sera pour l'ELT ce que SPHERE a été pour le VLT. Il permettra d'imager et de caractériser des planètes extrasolaires bien plus

proches de leur étoile et bien moins massives que son prédécesseur et de tendre ainsi vers un des graals de l'astronomie moderne : l'observation directe, la collecte et l'exploitation spectroscopique de photons provenant d'exoplanètes telluriques situ es dans la zone habitable de leur système planétaire et donc susceptibles d'abriter de la vie (voir [88, pages 38 à 43]).

## 6. Conclusion

En 30 ans, l'OA pour l'astronomie est pass e du stade de démonstrateur technologique à celui de système opérationnel mature intégré au cœur de tous les grands instruments et télescopes astronomiques mondiaux en répondant à des besoins observationnels divers, complexes et de plus en plus ambitieux. Débuté en Europe pour l'astronomie avec COME-ON, un système d'OA corrigeant à partir d'une NGS brillante quelques dizaines de modes à 100 Hz sur un télescope de 3,6 m, les derniers systèmes d'OA corrigent   présent des milliers de modes, à plus de 1500 Hz (3000 Hz sont visés pour les nouvelles générations de systèmes d'OA extrêmes), avec pour certains plusieurs LGS, sur des télescopes de 8 m et bientôt plus de 10 000 modes pour des télescopes de près de 40 m. Au-delà des améliorations technologiques (détecteurs toujours plus rapides et sensibles, miroirs déformables   très grand nombre de degrés de liberté, lasers puissants, robustes et spectralement optimisés) et conceptuelles (nouveaux types d'analyseurs de surface d'onde, lois de commande optimis es et prédictives...), c'est l'avènement des systèmes d'OA tomographiques assistés par laser qui révolutionne le domaine de l'OA pour l'astronomie depuis une dizaine d'années. L'accès possible à la quasi totalité du ciel avec ces systèmes (avec des télescopes décamétriques ainsi limités par la diffraction aux longueurs d'onde du visible et du proche infrarouge) ouvre des perspectives innombrables en termes de capacités observationnelles. Toutes ces techniques sont partie intégrante des futurs ELT dès leur conception, démontrant ainsi le caractère indispensable de la correction de la turbulence atmosphérique par OA pour permettre l'accomplissement de programmes de recherche en astrophysique toujours plus ambitieux.

Débuté dans le domaine de la défense pour les activités de mise en forme de faisceau laser à travers la turbulence, l'OA a été pendant de nombreuses années un outil précieux pour les astronomes qui en ont popularisé le concept, l'ont développé à l'extrême en cherchant des performances toujours meilleures et en orientant les développements technologiques et l'ont fait évoluer à travers l'expression de nouveaux besoins et la proposition de nouvelles idées (ASO   pyramide, OA assist e par laser, OA tomographique multiconjugu e ou multi-Objet, etc.). Le niveau de maturité atteint par l'OA lui permet aujourd'hui d'être appliqu e dans d'autres domaines (et évidemment d'être adaptée en fonction des besoins comme cela s'est fait en astronomie). On notera en particulier le développement de l'OA pour les télécommunications optiques à très haut débit en espace libre ([89, 90]), l'ophtalmologie [91] et la microscopie biomédicale [92]).

## Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

## Remerciements

Les auteurs remercient Pierre Léna pour leur avoir proposé d'écrire cet article. Ils tiennent à remercier chaleureusement l'ensemble de leurs collègues des équipes du LESIA, de l'ONERA et du LAM qui ont contribué au cours des trente dernières années à l'essor et au développement de

l'Optique Adaptative en France. L'ensemble des avanc es et des travaux mentionnés dans cet article de revue ont pu être réalisés grâce à des financements européens (FP7, H2020, ESO), nationaux (ANR, CNRS-INSU, ASHRA), locaux (Université Paris Cité, Aix Marseille Université, Régions  le de France et PACA) et internes aux laboratoires (Observatoire de Paris, ONERA et LAM en particulier). Ils ont été menés dans des cadres de thèses, de recherches amont mais aussi de projets visant au développement d'instruments opérationnels pour la communauté scientifique (NAOS, SPHERE, GRAVITY, MICADO, HARMONI). Les auteurs souhaitent aussi remercier vivement toutes les autres équipes en France et en Europe qui ont rendu ces développements possibles et qui continuent à réaliser des instruments toujours plus complexes et souvent au delà de l'état de l'art au niveau mondial.

## Références

- [1] F. Roddier, « The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy », *Progress in Optics*, vol. 19, Elsevier, 1981, p. 281-376.
- [2] H. W. Babcock, « The Possibility of Compensating Astronomical Seeing », *Publ. Astron. Soc. Pac.* **65** (1953), n  386, p. 229-236.
- [3] V. P. Linnik, « Possible development of astronomy from the instrumental viewpoint », in *Transactions of the Twelfth Astrometric Conference of the USSR (December 7-9, 1955, Pulkovo) Leningrad*, 1957, p. 179-185.
- [4] J. W. Hardy, J. E. Lefebvre, C. L. Koliopoulos, « Real-time atmospheric compensation », *J. Opt. Soc. Am.* **67** (1977), p. 360-369.
- [5] G. Rousset, J. C. Fontanella, P. Y. Kern, P. Gigan, F. J. Rigaut, P. Lena, C. Boyer, P. Jagourel, J.-P. Gaffard, F. Merkle, « First diffraction-limited astronomical images with adaptive optics », *Astron. Astrophys.* **230** (1990), n  2, p. L29-L32.
- [6] P. L. Wizinowich, D. S. Acton, C. Shelton, P. J. Stomski, J. Gathright, K. Ho, W. Lupton, K. Tsubota, O. Lai, C. E. Max, J. Brase, J. An, K. Avicola, S. Olivier, D. Gavel, B. Macintosh, A. Ghez, J. Larkin, « First Light Adaptive Optics Images from the Keck II Telescope : A New Era of High Angular Resolution Imagery », *Publ. Astron. Soc. Pac.* **112** (2000), n  769, p. 315-319.
- [7] H. Takami, N. Takato, Y. Hayano, M. Iye, Y. Kamata, Y. Minowa, T. Kanzawa, W. Gaessler, « Performance of Subaru adaptive optics system and the scientific results », in *Adaptive Optical System Technologies II* (P. L. Wizinowich, D. Bonaccini,  ds.), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, vol. 4839, SPIE, 2003, p. 21-31.
- [8] G. Rousset, F. Lacombe, P. Puget, N. N. Hubin, E. Gendron, T. Fusco, R. Arsenault, J. Charton, P. Feautrier, P. Gigan, P. Y. Kern, A.-M. Lagrange, P.-Y. Madec, D. Mouillet, D. Rabaud, P. Rabou, E. Stadler, G. Zins, « NAOS, the first AO system of the VLT : on-sky performance », in *Adaptive Optical System Technologies II* (P. L. Wizinowich, D. Bonaccini,  ds.), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, vol. 4839, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2003, p. 140-149.
- [9] J.-P. V ran, F. J. Rigaut, J. Stoesz, G. Herriot, B. L. Ellerbroek, « Preliminary Commissioning Results of Altair », in *Science with Adaptive Optics* (W. Brandner, M. E. Kasper,  ds.), ESO Astrophysics Symposia, Springer, 2005, p. 19-25.
- [10] S. Esposito, A. Riccardi, L. Fini, A. T. Puglisi, E. Pinna, M. Xompero, R. Briguglio, F. Quir s-Pacheco, P. Stefanini, J. C. Guerra, L. Busoni, A. Tozzi, F. Pieralli, G. Agapito, G. Brusa-Zappellini, R. Demers, J. Brynnel, C. Arcidiacono, P. Salinari, « First light AO (FLAO) system for LBT : final integration, acceptance test in Europe, and preliminary on-sky commissioning results », in *Adaptive Optics Systems II* (B. L. Ellerbroek, M. Hart, N. Hubin, P. L. Wizinowich,  ds.), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, vol. 7736, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2010.
- [11] D. Bonneau, « Les effets optiques de la turbulence atmosphérique dans les images en astronomie », *C. R. Phys.* **23** (2022), n  S1, p. 269-291.
- [12] D. L. Fried, « Statistics of a Geometric Representation of Wavefront Distortion », *J. Opt. Soc. Am.* **55** (1965), n  11, p. 1427-1435.
- [13] J. W. Hardy, *Adaptive Optics for Astronomical Telescopes*, Oxford series on optical sciences, vol. 16, Oxford University Press, 1998.
- [14] F. Roddier, *Adaptive optics in astronomy*, Cambridge University Press, 1999.
- [15] P.-Y. Madec, « Overview of deformable mirror technologies for adaptive optics and astronomy », in *Adaptive Optics Systems III* (B. L. Ellerbroek, E. Marchetti, J.-P. V ran,  ds.), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, vol. 8447, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2012, p. 22-39.
- [16] P. Salinari, C. Del Vecchio, V. Biliotti, « A Study of an Adaptive Secondary Mirror », in *Proceedings of the ICO-16 (International Commission for Optics) Satellite Conference on Active and adaptive optics, held August 2-5, 1993*,



- European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings, vol. 48, European Southern Observatory, 1994, p. 247-253.
- [17] G. Brusa, A. Riccardi, P. Salinari, F. P. Wildi, M. Lloyd-Hart, H. M. Martin, R. Allen, D. Fisher, D. L. Miller, R. Biasi, D. Gallieni, F. Zocchi, « MMT adaptive secondary : performance evaluation and field testing », in *Adaptive Optical System Technologies II* (P. L. Wizinowich, D. Bonaccini,  ds.), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, vol. 4839, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2003, p. 691-702.
- [18] K. M. Morzinski, L. M. Close, J. R. Males, D. Kopon, P. M. Hinz, S. Esposito, A. Riccardi, A. T. Puglisi, E. Pinna, R. Briguglio, M. Kompero, F. Quir s-Pacheco, V. Bailey, K. B. Follette, T. J. Rodigas, Y.-L. Wu, C. Arcidiacono, J. Argomedo, L. Busoni, T. Hare, A. Uomoto, A. Weinberger, « MagAO : Status and on-sky performance of the Magellan adaptive optics system », in *Adaptive Optics Systems IV* (E. Marchetti, L. M. Close, J.-P. V ran,  ds.), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, vol. 9148, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2014, p. 25-37.
- [19] R. Biasi, M. Andrighettoni, G. Angerer, C. Mair, D. Pescoller, P. Lazzarini, E. Anaclerio, M. Mantegazza, D. Gallieni, E. Vernet, R. Arsenault, P.-Y. Madec, P. Duhoux, A. Riccardi, M. Kompero, R. Briguglio, M. Manetti, M. Morandini, « VLT deformable secondary mirror : integration and electromechanical tests results », in *Adaptive Optics Systems III* (B. L. Ellerbroek, E. Marchetti, J.-P. V ran,  ds.), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, vol. 8447, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2012, p. 925-934.
- [20] R. V. Shack, B. C. Platt, « Production and use of a lenticular Hartmann screen », *J. Opt. Soc. Am.* **61** (1971), p. 656-661.
- [21] C. V rinaud, « On the nature of the measurements provided by a pyramid wave-front sensor », *Optics Communications* **233** (2004), n  1-3, p. 27-38.
- [22] R. Ragazzoni, « Pupil plane wavefront sensing with an oscillating prism », *J. Mod. Opt.* **43** (1996), n  2, p. 289-293.
- [23] R. Ragazzoni, J. Farinato, « Sensitivity of a pyramidal Wave Front sensor in closed loop Adaptive Optics », *Astron. Astrophys.* **350** (1999), p. L23-L26.
- [24] O. Fauvarque, P. Janin-Potiron, C. Correia, Y. Br l , B. Neichel, V. Chambouleyron, J.-F. Sauvage, T. Fusco, « Kernel formalism applied to Fourier-based wave-front sensing in presence of residual phases », *J. Opt. Soc. Am. A* **36** (2019), n  7, p. 1241.
- [25] S. Thomas, T. Fusco, A. Tokovinin, M. Nicolle, V. Michau, G. Rousset, « Comparison of centroid computation algorithms in a Shack-Hartmann sensor », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **371** (2006), n  1, p. 323-336.
- [26] R. J. Noll, « Zernike polynomials and atmospheric turbulence », *J. Opt. Soc. Am.* **66** (1976), n  3, p. 207-211.
- [27] J. Y. Wang, J. K. Markey, « Modal compensation of atmospheric turbulence phase distortion », *J. Opt. Soc. Am.* **68** (1978), n  1, p. 78-87.
- [28] E. Gendron, P. Léna, « Astronomical adaptive optics. I. Modal control optimization », *Astron. Astrophys.* **291** (1994), n  1, p. 337-347.
- [29] C. Dessenne, P.-Y. Madec, G. Rousset, « Optimization of a Predictive Controller for Closed-Loop Adaptive Optics », *Appl. Opt.* **37** (1998), n  21, p. 4623-4633.
- [30] C. Petit, J.-M. Conan, C. Kulcs r, H.-F. Raynaud, T. Fusco, J. Montri, D. Rabaud, « Optimal control for Multi-Conjugate Adaptive Optics », *C. R. Physique* **6** (2005), n  10, p. 1059-1069.
- [31] D. Gratadour, T. Morris, R. Biasi, H. Deneux, J. Bernard, J.-T. Buey, N. Doucet, F. Ferreira, M. Laine, D. Perret, A. Sevin, A. Basden, D. Geng, J. Osborn, L. Staykov, M. Townson, E. Younger, M. Andrighettoni, C. Patauner, D. Pescoller, J. Lemaitre, P. Palazzari, D. Pretet, C. Rouaud, « Prototyping AO RTC using emerging high performance computing technologies with the Green Flash project », in *Adaptive Optics Systems VI* (L. M. Close, L. Schreiber, D. Schmidt,  ds.), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, vol. 10703, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2018, p. 404-418.
- [32] E. J. Rigaut, J.-P. Veran, O. Lai, « Analytical model for Shack-Hartmann-based adaptive optics systems », in *Adaptive Optical System Technologies* (D. Bonaccini, R. K. Tyson,  ds.), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, vol. 3353, SPIE, 1998, p. 1038-1048.
- [33] O. Guyon, « Limits of Adaptive Optics for High-Contrast Imaging », *Astrophys. J.* **629** (2005), n  1, p. 592-614.
- [34] T. Fusco, G. Rousset, J.-F. Sauvage, C. Petit, J.-L. Beuzit, K. Dohlen, D. Mouillet, J. Charton, M. Nicolle, M. Kasper, P. Baudoz, P. Puget, « High-order adaptive optics requirements for direct detection of extrasolar planets : Application to the SPHERE instrument », *Optics Express* **14** (2006), n  17, p. 7515.
- [35] J.-M. Conan, «  tude de la correction partielle en optique adaptative », Thèse, Université Paris XI, Paris, France, 1994.
- [36] R. Hudgin, « Wave-front compensation error due to finite corrector-element size », *J. Opt. Soc. Am.* **67** (1977), p. 393-395.
- [37] L. A. Poyneer, B. Macintosh, « Spatially filtered wave-front sensor for high-order adaptive optics », *J. Opt. Soc. Am. A* **21** (2004), n  5, p. 810-819.
- [38] D. P. Greenwood, « Bandwidth specification for adaptive optics systems », *J. Opt. Soc. Am.* **67** (1977), p. 390-393.
- [39] W. H. Southwell, « Wave-front estimation from wave-front slope measurements », *J. Opt. Soc. Am.* **7** (1980), n  8, p. 998-1006.
- [40] D. L. Fried, « Anisoplanatism in adaptive optics », *J. Opt. Soc. Am.* **72** (1982), n  1, p. 52-61.

- [41] A. Blanc, T. Fusco, M. Hartung, L. M. Mugnier, G. Rousset, « Calibration of NAOS and CONICA static aberrations. Application of the phase diversity technique », *Astron. Astrophys.* **399** (2003), p. 373-383.
- [42] J.-F. Sauvage, T. Fusco, G. Rousset, C. Petit, « Calibration and precompensation of noncommon path aberrations for extreme adaptive optics », *J. Opt. Soc. Am. A* **24** (2007), n  8, p. 2334-2346.
- [43] D. Mawet, L. Pueyo, P. Lawson, L. M. Mugnier, W. Traub, A. Boccaletti, J. T. Trauger, S. Gladysz, E. Serabyn, J. Milli, R. Belikov, M. Kasper, P. Baudoz, B. Macintosh, C. Marois, B. R. Oppenheimer, H. Barrett, J.-L. Beuzit, N. Devaney, J. Girard, O. Guyon, J. Krist, B. Mennesson, D. Mouillet, N. Murakami, L. A. Poyneer, D. Savransky, C. V rinaud, J. K. Wallace, « Review of small-angle coronagraphic techniques in the wake of ground-based second-generation adaptive optics systems », in *Space Telescopes and Instrumentation 2012 : Optical, Infrared, and Millimeter Wave* (M. C. Clampin, G. G. Fazio, H. A. MacEwen, J. Oschmann, Jacobus M.,  ds.), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, vol. 8442, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2012, p. 62-82.
- [44] R. Racine, G. A. H. Walker, D. Nadeau, R. Doyon, C. Marois, « Speckle Noise and the Detection of Faint Companions », *Publ. Astron. Soc. Pac.* **111** (1999), n  759, p. 587-594.
- [45] C. Marois, D. Lafrenière, R. Doyon, B. Macintosh, D. Nadeau, « Angular Differential Imaging : A Powerful High-Contrast Imaging Technique », *Astrophys. J.* **641** (2006), n  1, p. 556-564.
- [46] M. D. Perrin, A. Sivaramakrishnan, R. B. Makidon, B. R. Oppenheimer, J. R. Graham, « The Structure of High Strehl Ratio Point-Spread Functions », *Astrophys. J.* **596** (2003), n  1, p. 702-712.
- [47] J.-L. Beuzit, A. Vigan, D. Mouillet, K. Dohlen, R. Gratton, A. Boccaletti, J.-F. Sauvage, H. M. Schmid, M. Langlois, C. Petit, A. Baruffolo, M. Feldt, J. Milli, Z. Wahhaj, L. Abe, U. Anselmi, J. Antichi, R. Barette, J. Baudrand, P. Baudoz, A. Bazzon, P. Bernardi, P. Blanchard, R. Brast, P. Bruno, T. Buey, M. Carbillat, M. Carle, E. Cascone, F. Chapron, J. Charton, G. Chauvin, R. Claudi, A. Costille, V. De Caprio, J. de Boer, A. Delboulb , S. Desidera, C. Dominik, M. Downing, O. Dupuis, C. Fabron, D. Fantinel, G. Farisato, P. Feautrier, E. Fedrigo, T. Fusco, P. Gigan, C. Ginski, J. Girard, E. Giro, D. Gisler, L. Gluck, C. Gry, T. Henning, N. N. Hubin, E. Hugot, S. Incorvaia, M. Jaquet, M. Kasper, E. Lagadec, A.-M. Lagrange, H. Le Coroller, D. Le Mignant, B. Le Ruyet, G. Lessio, J.-L. Lizon, M. Llored, L. Lundin, F. Madec, Y. Magnard, M. Marteaud, P. Martinez, D. Maurel, F. Ménard, D. Mesa, O. M ller-Nilsson, T. Moulin, C. Moutou, A. Orign , J. Parisot, A. Pavlov, D. Perret, P. Puget, P. Rabou, J. Ramos, J.-M. Reess, F. Rigal, S. Rochat, R. Roelfsema, G. Rousset, A. Roux, M. Saisse, B. Salasnich, E. Santambrogio, S. Scuderi, D. Segransan, A. Sevin, R. Siebenmorgen, C. Soenke, E. Stadler, M. Suarez, D. Tiph ne, M. Turatto, S. Udry, F. Vakili, L. B. F. M. Waters, L. Weber, F. P. Wildi, G. Zins, A. Zurlo, « SPHERE : the exoplanet imager for the Very Large Telescope », *Astron. Astrophys.* **631** (2019), article no. A155.
- [48] A. M ller, M. Keppler, T. Henning, M. Samland, G. Chauvin, H. Beust, A.-L. Maire, K. Molaverdikhani, R. van Boekel, M. Benisty, A. Boccaletti, M. Bonnefoy, F. Cantalloube, B. Charnay, J.-L. Baudino, M. Gennaro, Z. C. Long, A. Cheetham, S. Desidera, M. Feldt, T. Fusco, J. Girard, R. Gratton, J. Hagelberg, M. Janson, A.-M. Lagrange, M. Langlois, C. Lazzoni, R. Ligi, F. M nard, D. Mesa, M. Meyer, P. Molli re, C. Mordasini, T. Moulin, A. Pavlov, N. Pawellek, S. P. Quanz, J. Ramos, D. Rouan, E. Sissa, E. Stadler, A. Vigan, Z. Wahhaj, L. Weber, A. Zurlo, « Orbital and atmospheric characterization of the planet within the gap of the PDS 70 transition disk », *Astron. Astrophys.* **617** (2018), article no. L2.
- [49] B. Macintosh, J. R. Graham, P. Ingraham, Q. Konopacky, C. Marois, M. D. Perrin, L. A. Poyneer, B. Bauman, T. Barman, A. S. Burrows, A. Cardwell, J. K. Chilcote, R. J. De Rosa, D. Dillon, R. Doyon, J. Dunn, D. Erikson, M. P. Fitzgerald, D. Gavel, S. Goodsell, M. Hartung, P. Hibon, P. Kalas, J. Larkin, J. Maire, F. Marchis, M. S. Marley, J. McBride, M. Millar-Blanchaer, K. M. Morzinski, A. Norton, B. R. Oppenheimer, D. Palmer, J. Patience, L. Pueyo, F. Rantakyro, N. Sadakuni, L. Saddlemyer, D. Savransky, A. Serio, R. Soummer, A. Sivaramakrishnan, I. Song, S. Thomas, J. K. Wallace, S. Wiktorowicz, S. Wolff, « First light of the Gemini Planet Imager », *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **111** (2014), n  35, p. 12661-12666.
- [50] J. Lozi, O. Guyon, N. Jovanovic, S. Goebel, P. Pathak, N. Skaf, A. Sahoo, B. Norris, F. Martinache, M. N'Diaye, B. Mazin, A. B. Walter, P. Tuthill, T. Kudo, H. Kawahara, T. Kotani, M. Ireland, N. Cvetojevic, E. Huby, S. Lacour, S. Vievard, T. D. Groff, J. K. Chilcote, J. Kasdin, J. Knight, F. Snik, D. Doelman, Y. Minowa, C. Clergeon, N. Takato, M. Tamura, T. Currie, H. Takami, M. Hayashi, « SCExAO, an instrument with a dual purpose : perform cutting-edge science and develop new technologies », in *Adaptive Optics Systems VI* (L. M. Close, L. Schreiber, D. Schmidt,  ds.), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, vol. 10703, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2018, p. 1266-1277.
- [51] A. Boccaletti, G. Chauvin, D. Mouillet, O. Absil, F. Allard, S. Antonucci, J.-C. Augereau, P. Barge, A. Baruffolo, J.-L. Baudino, P. Baudoz, M. Beaulieu, M. Benisty, J.-L. Beuzit, A. Bianco, B. Biller, B. Bonavita, M. Bonnefoy, S. Bos, J.-C. Bouret, W. Brandner, N. Buchschache, B. Carry, F. Cantalloube, E. Cascone, A. Carlotti, B. Charnay, A. Chiavassa, E. Choquet, Y. Clenet, A. Crida, J. De Boer, V. De Caprio, S. Desidera, J.-M. Desert, J.-B. Delisle, P. Delorme, K. Dohlen, D. Doelman, C. Dominik, V. D. Orazi, C. Dougados, S. Doute, D. Fedele, M. Feldt, F. Ferreira, C. Fontanive, T. Fusco, R. Galicher, A. Garufi, E. Gendron, A. Ghedina, C. Ginski, J.-F. Gonzalez, D. Gratadour, R. Gratton, T. Guillot, S. Haffert, J. Hagelberg, T. Henning, E. Huby, M. Janson, I. Kamp, C. Keller, M. A. Kenworthy, P. Kervella, Q. Kral, J. Kuhn, E. Lagadec, G. Laibe, M. Langlois, A.-M. Lagrange, R. Launhardt, L. Lebouilleux, H. Le Coroller, G. Li Causi, M. Loupias,

- A. L. Maire, G. Marleau, F. Martinache, P. Martinez, D. Mary, M. Mattioli, J. Mazoyer, H. Meheut, F. Menard, D. Mesa, N. Meunier, Y. Miguel, J. Milli, M. Min, P. Molliere, C. Mordasini, G. Moretto, L. M. Mugnier, G. Muro Arena, N. Nardetto, M. N. Diaye, N. Nesvadba, F. Pedichini, P. Pinilla, E. Por, A. Potier, S. P. Quanz, J. Rameau, R. Roelfsema, D. Rouan, E. Rigliaco, B. Salasnich, M. Samland, J.-F. Sauvage, H. M. Schmid, D. Segransan, I. Snellen, F. Snik, F. Soulez, E. Stadler, D. Stam, M. Tallon, P. Thebault, E. Thiebaut, C. Tschudi, S. Udry, R. van Holstein, P. Vernazza, F. Vidal, A. Vigan, R. Waters, F. P. Wildi, M. Willson, A. Zanutta, A. Zavagno, A. Zurlo, « SPHERE+ : Imaging young Jupiters down to the snowline », <https://arxiv.org/abs/2003.05714>, 2020.
- [52] P. J. Bordé, W. A. Traub, « High-Contrast Imaging from Space : Speckle Nulling in a Low-Aberration Regime », *Astrophys. J.* **638** (2006), n  1, p. 488-498.
- [53] J. Mazoyer, P. Baudoz, R. Galicher, G. Rousset, « High-contrast imaging in polychromatic light with the self-coherent camera », *Astron. Astrophys.* **564** (2014), article no. L1.
- [54] O. Herscovici-Schiller, L. M. Mugnier, P. Baudoz, R. Galicher, J.-F. Sauvage, B. Paul, « Experimental validation of joint phase and amplitude wave-front sensing with coronagraphic phase diversity for high-contrast imaging », *Astron. Astrophys.* **614** (2018), article no. A142.
- [55] R. J. Sasiela, « Strehl ratios with various types of anisoplanatism », *J. Opt. Soc. Am.* **A9** (1992), n  8, p. 1398-1405.
- [56] T. Fusco, A. Blanc, M. Nicolle, J.-L. Beuzit, V. Michau, G. Rousset, N. N. Hubin, « Sky coverage estimation for multiconjugate adaptive optics systems : strategies and results », *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **370** (2006), n  1, p. 174-184.
- [57] R. Foy, A. Labeyrie, « Feasibility of adaptive telescope with laser probe », *Astron. Astrophys.* **152** (1985), n  2, p. L29-L31.
- [58] P. L. Wizinowich, D. Le Mignant, A. H. Bouchez, R. D. Campbell, J. C. Y. Chin, A. R. Contos, M. A. van Dam, S. K. Hartman, E. M. Johansson, R. E. Lafon, H. Lewis, P. J. Stomski, D. M. Summers, C. G. Brown, P. M. Danforth, C. E. Max, D. M. Pennington, « The W. M. Keck Observatory Laser Guide Star Adaptive Optics System : Overview », *Publ. Astron. Soc. Pac.* **118** (2006), n  840, p. 297-309.
- [59] P.-Y. Madec, R. Arsenault, H. Kuntschner, J. Kolb, J.-F. Pirard, J. Paufique, P. La Penna, W. Hackenberg, E. Vernet, M. Suárez Valles, N. N. Hubin, « Adaptive Optics Facility : from an amazing present to a brilliant future... », in *Adaptive Optics Systems VI* (L. M. Close, L. Schreiber, D. Schmidt,  ds.), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, vol. 10703, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2018, p. 1-13.
- [60] F. J. Rigaut, E. Gendron, « Laser guide star in adaptive optics : the tilt determination problem », *Astron. Astrophys.* **261** (1992), p. 677-684.
- [61] R. Foy, A. M gus, F. Biraben, G. Grynberg, P. R. McCullough, M. Tallon, « The polychromatic artificial sodium star : a new concept for correcting the atmospheric tilt », *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **111** (1995), p. 569-578.
- [62] T. Pfrommer, P. Hickson, « High resolution mesospheric sodium properties for adaptive optics applications », *Astron. Astrophys.* **565** (2014), article no. A102.
- [63] T. Fusco, B. Neichel, C. Correia, L. Blanco, A. Costille, K. Dohlen, F. J. Rigaut, E. Renaud, A. Bonnefoi, Z. Ke, K. El-Hadi, J. Paufique, S. Oberti, F. Clarke, I. Bryson, N. A. Thatte, « A story of errors and bias : The optimization of the LGS WFS for HARMONI », in *AO4ELT6*, 2019, HAL\_ID = hal-02614095, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02614095/file/DOTA20078.1589983213.pdf>.
- [64] D. L. Fried, J. F. Belsher, « Analysis of fundamental limits to artificial-guide-star adaptive-optics-system performance for astronomical imaging », *J. Opt. Soc. Am.* **A11** (1994), n  1, p. 277-287.
- [65] M. Tallon, R. Foy, « Adaptive telescope with laser probe : isoplanatism and cone effect », *Astron. Astrophys.* **235** (1990), p. 549-557.
- [66] B. L. Ellerbroek, « First-order performance evaluation of adaptive-optics systems for atmospheric-turbulence compensation in extended-field-of-view astronomical telescopes », *J. Opt. Soc. Am.* **A11** (1994), n  2, p. 783-805.
- [67] T. Fusco, J.-M. Conan, G. Rousset, L. M. Mugnier, V. Michau, « Optimal wave-front reconstruction strategies for multiconjugate adaptive optics », *J. Opt. Soc. Am.* **A18** (2001), n  10, p. 2527-2538.
- [68] R. M. Bacon, M. Accardo, L. Adjali, H. Anwand, S. Bauer, I. Biswas, J. Blaizot, D. Boudon, S. Brau-Nogue, J. Brinckmann, P. Caillier, L. Capoani, C. M. Carollo, T. Contini, P. Couderc, E. Daguis , S. Deiries, B. Delabre, S. Dreizler, J. Dubois, M. Dupieux, C. Dupuy, E. Emsellem, T. Fechner, A. Fleischmann, M. François, G. Gallou, T. Gharsa, A. Glinde-mann, D. Gojak, B. Guiderdoni, G. Hansali, T. Hahn, A. Jarno, A. Kelz, C. Koehler, J. Kosmalski, F. Laurent, M. Le Floch, S. J. Lilly, J.-L. Lizon, M. Loup as, A. Manescau, C. Monstein, H. Nicklas, J.-C. Olaya, L. Pares, L. Pasquini, A. Pécontal-Rousset, R. Pellé, C. Petit, E. Popow, R. Reiss, A. Remillieux, E. Renault, M. Roth, G. Rupprecht, D. Serre, J. Schaye, G. Soucail, M. Steinmetz, O. Streicher, R. Stuik, H. Valentin, J. Vernet, P. Weilbacher, L. Wisotzki, N. Yerle, « The MUSE second-generation VLT instrument », in *Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy III* (I. S. McLean, S. K. Ramsay, H. Takami,  ds.), vol. 7735, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2010, p. 131-139.
- [69] F. J. Rigaut, B. Neichel, « Multiconjugate Adaptive Optics for Astronomy », <https://arxiv.org/abs/2003.03097>, 2020.
- [70] E. Marchetti, R. Brast, B. Delabre, R. Donaldson, E. Fedrigo, C. Frank, N. N. Hubin, J. Kolb, M. L. Louarn, J.-L. Lizon, S. Oberti, R. Reiss, C. Soenke, S. Tordo, A. Baruffolo, P. Bagnara, A. Amorim, J. Lima, « MAD On-Sky Results in Star

- Oriented Mode», in *Adaptive Optics : Analysis and Methods/Computational Optical Sensing and Imaging/Information Photonics/Signal Recovery and Synthesis Topical Meetings on CD-ROM*, Optical Society of America, 2007.
- [71] F. J. Rigaut, B. Neichel, M. Boccas, C. d'Orgeville, G. Arriagada, V. Fesquet, S. J. Diggs, C. Marchant, G. Gausach, W. N. Rambold, J. Luhrs, S. Walker, E. R. Carrasco-Damele, M. L. Edwards, P. Pessev, R. L. Galvez, T. B. Vucina, C. Araya, A. Gutierrez, A. W. Ebberts, A. Serio, C. Moreno, C. Urrutia, R. Rogers, R. Rojas, C. Trujillo, B. Miller, D. A. Simons, A. Lopez, V. Montes, H. Diaz, F. Daruich, F. Colazo, M. Bec, G. Trancho, M. Sheehan, P. McGregor, P. J. Young, M. C. Doolan, J. v. Harmelen, B. L. Ellerbroek, D. Gratadour, A. Garcia-Rissmann, «GeMS first on-sky results», in *Adaptive Optics Systems III* (B. L. Ellerbroek, E. Marchetti, J.-P. V ran,  ds.), vol. 8447, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2012, p. 149-163.
- [72] F. J. Rigaut, R. McDermid, G. Cresci, V. Viotto, S. Ellis, D. Brodrick, G. Agapito, T. Fusco, B. Neichel, P. Hagenauer, C. Plantet, B. Salasnich, M. Aliverti, S. Antonucci, A. Balestra, A. Baruffolo, O. Beltramo-Martin, M. Bergomi, A. Blanco, M. Bonaglia, G. Bono, L. Busoni, E. Carolo, S. Chinellato, R. Content, J. Cranney, G. de Silva, S. Esposito, D. Fantinel, J. Farinato, D. Haynes, A. Horton, G. Gausach, J. Gilbert, D. Gratadour, D. Greggio, M. Gullieuszik, V. Korikakoski, D. Magrin, L. Magrini, L. Marafatto, H. McGregor, T. Mendel, S. Monty, F. Pedichini, E. Pinna, E. Portaluri, K. Radhakrishnan, R. Ragazzoni, D. Robertson, C. Schwab, S. Str bele, E. Thorn, A. Vaccarella, D. Vassallo, L. Waller, F. Zamkotsian, A. Zanutta, H. Zhang, «MAVIS conceptual design», in *Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy VIII* (C. J. Evans, J. J. Bryant, K. Motohara,  ds.), vol. 11447, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2020, p. 378-393.
- [73] F. J. Rigaut, B. L. Ellerbroek, R. Flicker, «Principles, limitations, and performance of multiconjugate adaptive optics», in *Adaptive Optical Systems Technology* (P. L. Wizinowich,  d.), vol. 4007, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2000, p. 1022-1031.
- [74] E. Gendron, F. Vidal, M. Brangier, T. Morris, Z. Hubert, A. Basden, G. Rousset, R. Myers, F. Chemla, A. Longmore, T. Butterley, N. Dipper, C. Dunlop, D. Geng, D. Gratadour, D. M. Henry, P. Laporte, N. Looker, D. Perret, A. Sevin, G. Talbot, E. Younger, «MOAO first on-sky demonstration with CANARY», *Astron. Astrophys.* **529** (2011), article no. L2.
- [75] E. Gendron, T. Morris, A. Basden, F. Vidal, D. Atkinson, U. Bitenc, T. Buey, F. Chemla, M. Cohen, C. Dickson, N. Dipper, P. Feautrier, J.-L. Gach, D. Gratadour, D. M. Henry, J.-M. Huet, C. Morel, S. Morris, R. Myers, J. Osborn, D. Perret, A. Reeves, G. Rousset, A. Sevin, E. Stadler, G. Talbot, S. Todd, E. Younger, «Final two-stage MOAO on-sky demonstration with CANARY», in *Adaptive Optics Systems V* (E. Marchetti, L. M. Close, J.-P. V ran,  ds.), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, vol. 9909, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2016, p. 126 - 142.
- [76] D. Gratadour, E. Gendron, L. Grosset, T. Morris, J. Osborn, A. Basden, O. Martin, D. Rouan, R. Myers, G. Rousset, «First demo science with MOAO : observations of distant merging galaxies with CANARY», in *Adaptive Optics Systems IV* (E. Marchetti, L. M. Close, J.-P. V ran,  ds.), Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series, vol. 9148, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2014, p. 609-616.
- [77] M. Johns, «The Giant Magellan Telescope (GMT)», in *Extremely Large Telescopes : Which Wavelengths? Retirement Symposium for Arne Ardeberg* (T. E. Andersen,  d.), vol. 6986, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2008, p. 25-36.
- [78] G. H. Sanders, «The Thirty Meter Telescope (TMT) : An International Observatory», *J. Astrophys. Astron.* **34** (2013), p. 81-86.
- [79] R. Tamai, M. Cirusuolo, J. C. González, B. Koehler, M. Tuti, «The E-ELT program status», in *Ground-based and Airborne Telescopes VI* (H. J. Hall, R. Gilmozzi, H. K. Marshall,  ds.), vol. 9906, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2016, p. 350-362.
- [80] E. Vernet, M. Cayrel, N. N. Hubin, M. Mueller, R. Biasi, D. Gallieni, M. Tintori, «Specifications and design of the E-ELT M4 adaptive unit», in *Adaptive Optics Systems III* (B. L. Ellerbroek, E. Marchetti, J.-P. V ran,  ds.), vol. 8447, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2012, p. 1991-1998.
- [81] M. Cirusuolo, S. Ramsay, P. Caillier, A. Delorme, F. Derie, J. C. G. Herrera, P. Hammersley, I. L. Gil, V. Mainieri, A. Manescau, P. Padovani, C. Peroux, O. Pfuhl, A. Russell, R. Tamai, M. Tuti, «The ESO ELT armazones instrumentation programme», in *Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy VIII* (C. J. Evans, J. J. Bryant, K. Motohara,  ds.), vol. 11447, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2020, p. 451-456.
- [82] R. Davies, J. Schubert, M. Hartl, J. Alves, Y. Cl net, F. Lang-Bardl, H. Nicklas, J.-U. Pott, R. Ragazzoni, E. Tolstoy, T. Ag cs, H. Anwand, S. Barboza, P. Baudoz, R. Bender, P. Bizenberger, A. Boccaletti, W. Boland, P. Bonifacio, F. Briegel, T. Buey, F. Chapron, M. Cohen, O. Czoske, S. Dreizler, R. Falomo, P. Feautrier, N. F. Schreiber, E. Gendron, R. Genzel, M. Gl ck, D. Gratadour, R. Greimel, F. Grupp, M. H user, M. Haug, J. Hennawi, H. J. Hess, V. H rmann, R. Hofferbert, U. Hopp, Z. Hubert, D. J. Ives, W. Kausch, F. Kerber, H. Kravcar, K. Kuijken, F. Lang-Bardl, M. Leitzinger, K. Leschinski, D. Massari, S. Mei, F. Merlin, L. Mohr, A. Monna, F. M ller, R. Navarro, M. Plattner, N. Przybilla, R. Ramlau, S. Ramsay, T. Ratzka, P. Rhode, J. Richter, H.-W. Rix, G. Rodeghiero, R.-R. Rohloff, G. Rousset, R. Ruddenklau, V. Schaffenroth, J. Schlichter, A. Sevin, R. Stuik, E. Sturm, J. Thomas, N. Tromp, M. Turatto, G. Verdoes-Kleijn, F. Vidal, R. Wagner, M. Wegner, W. Zeilinger, B. Ziegler, G. Zins, «MICADO : first light imager for the E-ELT», in *Ground-based and*

- Airborne Instrumentation for Astronomy VI* (C. J. Evans, L. Simard, H. Takami,  ds.), vol. 9908, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2016, p. 621-632.
- [83] N. A. Thatte, F. Clarke, I. Bryson, H. Shnetler, M. Tecza, T. Fusco, R. M. Bacon, J. Richard, E. Mediavilla, B. Neichel, S. Arribas, B. Garcia-Lorenzo, C. J. Evans, A. Remillieux, K. E. Madi, J. M. Herreros, D. Melotte, K. O'Brien, I. A. Tosh, J. Vernet, P. Hammersley, D. J. Ives, G. Finger, R. Houghton, D. Rigopoulou, J. D. Lynn, J. R. Allen, S. D. Zielienewski, S. Kendrew, V. Ferraro-Wood, A. P contal-Rousset, J. Kosmalski, F. Laurent, M. Loupias, L. Piqueras, E. Renault, J. Blaizot, E. Dagu s , J.-E. Migniau, A. Jarno, A. Born, A. M. Gallie, D. M. Montgomery, D. M. Henry, N. Schwartz, W. Taylor, G. Zins, L. F. Rodríguez-Ramos, M. Cagigas, G. Battaglia, R. R. López, E. H. Suárez, J. V. Gigante-Ripoll, J. P. López, M. V. Martin, C. Correia, S. Pascal, L. Blanco, P. Vola, B. Epinat, C. Peroux, A. Vigan, K. Dohlen, J.-F. Sauvage, M. Lee, A. Carlotti, C. Verinaud, T. Morris, R. Myers, A. Reeves, M. Swinbank, A. Calcines, M. Larrieu, «The E-ELT first light spectrograph HARMONI : capabilities and modes », in *Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy VI* (C. J. Evans, L. Simard, H. Takami,  ds.), vol. 9908, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2016, p. 595-605.
- [84] B. R. Brandl, T. Ag cs, G. Aitink-Kroes, T. Bertram, F. Bettonvil, R. v. Boekel, O. Boulade, M. Feldt, A. Glasse, A. M. Glauser, M. Gödel, N. Hurtado, R. Jager, M. A. Kenworthy, M. Mach, J. Meisner, M. Meyer, E. Pantin, S. P. Quanz, H. M. Schmid, R. Stuik, A. Venninga, C. Waelkens, «Status of the mid-infrared E-ELT imager and spectrograph METIS », in *Ground-based and Airborne Instrumentation for Astronomy VI* (C. J. Evans, L. Simard, H. Takami,  ds.), vol. 9908, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2016, p. 633-647.
- [85] E. Diolaiti, P. Cilieg , R. Abicca, G. Agapito, C. Arcidiacono, A. Baruffolo, M. Bellazzini, V. Biliotti, M. Bonaglia, G. Bregoli, R. Briguglio, O. Brissaud, L. Busoni, L. Carbonaro, A. Carlotti, E. Cascone, J.-J. Correia, F. Cortecchia, G. Cosentino, V. De Caprio, M. de Pascale, A. De Rosa, C. D. Vecchio, A. Delboulb , G. Di Rico, S. Esposito, D. Fantinel, P. Feautrier, C. Felini, D. Ferruzzi, L. Fini, G. Fiorentino, I. Foppiani, M. Ghigo, C. Giordano, E. Giro, L. Gluck, F. Hénault, L. Jocou, F. Kerber, P. La Penna, S. Lafrasse, M. Lauria, E. I. Coarer, M. L. Louarn, M. Lombini, Y. Magnard, E. Maiorano, F. Mannucci, M. Mapelli, E. Marchetti, D. Maurel, L. Michaud, G. Morgante, T. Moulin, S. Oberti, G. Pareschi, M. Patti, A. T. Puglisi, P. Rabou, R. Ragazzoni, S. Ramsay, A. Riccardi, S. Ricciardi, M. Riva, S. Rochat, F. Roussel, A. Roux, B. Salasnich, P. Saracco, L. Schreiber, M. Spavone, E. Stadler, M.-H. Sztefek, N. Ventura, C. V rinaud, M. Xompero, A. Fontana, F. M. Zerbi, « MAORY : adaptive optics module for the E-ELT », in *Adaptive Optics Systems V* (E. Marchetti, L. M. Close, J.-P. V ran,  ds.), vol. 9909, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2016, p. 768-774.
- [86] B. Neichel, T. Fusco, J.-F. Sauvage, C. Correia, K. Dohlen, K. El-Hadi, L. Blanco, N. Schwartz, F. Clarke, N. A. Thatte, M. Tecza, J. Paufigue, J. Vernet, M. L. Louarn, P. Hammersley, J.-L. Gach, S. Pascal, P. Vola, C. Petit, J.-M. Conan, A. Carlotti, C. V rinaud, H. Shnetler, I. Bryson, T. Morris, R. Myers, E. Hugot, A. M. Gallie, D. M. Henry, «The adaptive optics modes for HARMONI : from Classical to Laser Assisted Tomographic AO », in *Adaptive Optics Systems V* (E. Marchetti, L. M. Close, J.-P. V ran,  ds.), vol. 9909, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2016, p. 92-106.
- [87] T. Bertram, O. Absil, P. Bizenberger, W. Brandner, F. Briegel, F. Cantalloube, B. Carlomagno, M. C. C. Vázquez, M. Feldt, A. M. Glauser, T. Henning, S. Hippler, A. Huber, N. Hurtado, M. A. Kenworthy, M. Kulas, L. Mohr, V. Naranjo, P. Neureuther, A. Obereder, R.-R. Rohloff, S. Scheithauer, I. Shatokhina, R. Stuik, R. van Boekel, «Single conjugate adaptive optics for METIS », in *Adaptive Optics Systems VI* (L. M. Close, L. Schreiber, D. Schmidt,  ds.), vol. 10703, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2018, p. 357-367.
- [88] S. Ramsay, M. Cirasuolo, P. Amico, N. N. Bezawada, P. Caillier, F. Derie, R. Dorn, S. Egner, E. George, F. Gont , P. Hammersley, C. Haupt, D. J. Ives, G. Jakob, F. Kerber, V. Mainieri, A. Manescau, S. Oberti, C. Peroux, O. Pfuhl, U. Seemann, R. Siebenmorgen, C. Schmid, J. Vernet, The ESO ELT Programme, «Instrumentation for ESO Extremely Large Telescope », in *Messenger* (M. Lyubenova, G. A. J. Hussain,  ds.), vol. 182, European Southern Observatory, 2021.
- [89] M. Vorontsov, T. Weyrauch, G. Carhart, L. Beresnev, «Adaptive Optics for Free Space Laser Communications », in *Lasers, Sources and Related Photonic Devices*, OSA, Optica Publishing Group, 2010.
- [90] N. V drenne, A. Montmerle-Bonnefois, C. B. Lim, C. Petit, J.-F. Sauvage, S. Meimon, P. Perrault, F. Mendez, B. Fleury, J. Montri, J.-M. Conan, V. Michau, Z. Sodnik, C. Voland, «First Experimental Demonstration of Adaptive Optics Pre-Compensation for GEO Feeder Links in a Relevant Environment », in *2019 IEEE International Conference on Space Optical Systems and Applications (ICSOS)*, 2019, p. 1-5.
- [91] A. Roorda, J. L. Duncan, «Adaptive Optics Ophthalmoscopy », *Annu. Rev. Vis. Sci.* **Nov** (2015), né 1, p. 19-50, PMID : 26973867.
- [92] M. J. Booth, «Adaptive optical microscopy : the ongoing quest for a perfect image », *Light : Science & Applications* **3** (2014), né 4, p. e165.



---

Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

# Correction de la dispersion atmosphérique dans l'imagerie par les grands télescopes et les interféromètres astronomiques

*Correction of atmospheric dispersion in imaging by large telescopes and stellar interferometers*

Laurent Koechlin<sup>a</sup> et Luc Dettwiller<sup>\*,b</sup>

<sup>a</sup> Astronome émérite, Institut de recherches en astrophysique et planétologie, Université de Toulouse, CNRS, France

<sup>b</sup> Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School, Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France

Courriels: [prenom.nom@irap.omp.eu](mailto:prenom.nom@irap.omp.eu) (L. Koechlin), [dettwiller.luc@gmail.com](mailto:dettwiller.luc@gmail.com) (L. Dettwiller)

**Résumé.** Les très grands télescopes et les divers interféromètres optiques permettent d'accéder à des résolutions angulaires inégalées et fournissent des données scientifiques de première importance, mais au prix de contraintes instrumentales qui demandent des équipements complexes. La correction de la dispersion atmosphérique (i.e. de la variation d'indice de l'air avec la longueur d'onde) est l'une d'elles. Cette dispersion se présente sous trois formes : la dispersion angulaire (l'image d'une étoile est étalée en un petit spectre) ; la dispersion longitudinale (i.e. en différence de marche entre voies d'un interféromètre, pour la correction de laquelle nous proposons une technique nouvelle à notre connaissance) ; enfin la dispersion latérale, liée à la coloration de la scintillation. On évoque aussi la question de la stabilisation de la différence de marche dans les interféromètres optiques.

**Abstract.** The very large telescopes and the various optical interferometers provide access to unparalleled angular resolutions and provide scientific data of primary importance, but at the price of instrumental constraints that require complex equipment. The correction of the atmospheric dispersion (i.e. of the variation of the air refractive index versus the wavelength) is one of these constraints. This dispersion comes in three forms: the angular dispersion (the image of a star is spread out into a small spectrum); the dispersion in optical path difference in an interferometer (for the correction of which we propose a new technique to our knowledge); and the lateral dispersion that is related to the apparition of colours in the scintillation. The question of stabilizing the optical path difference in optical interferometers is also raised.

**Mots-clés.** Haute résolution angulaire, Interféromètres astronomiques, Interférométrie des tavelures, Dispersion, Prismes de Risley, Interféromètre achromatique de Sinton.

**Keywords.** High angular resolution, Stellar interferometers, Speckle interferometry, Dispersion, Risley prisms, Sinton's achromatic interferometer.

---

\* Auteur correspondant.

Published online: 11 April 2023, Issue date: 11 August 2023

## 1. Introduction

« L'air est la plus mauvaise partie de l'instrument », comme l'écrivait l'astronome André Danjon (1890–1967) cité par l'opticien Jean Texereau (1919–2014), qui ajoutait : « Que nous le voulions ou non, l'air atmosphérique et tous ses défauts font partie de l'instrument » [1, chap. XV]. L'agitation atmosphérique (ou turbulence) induit un temps de corrélation  $\tau_c$  (ou temps de cohérence atmosphérique) et un rayon de cohérence  $r_0$  (ou paramètre de Fried) variable avec la longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide [2, p. 68–76 et 239–246] — ou encore avec le nombre d'onde  $\sigma = 1/\lambda_0$ . Ce sont des facteurs déterminants pour la magnitude limite observable et la précision des mesures : la turbulence atmosphérique froisse et incline aléatoirement les fronts d'onde arrivant sur l'observateur  $S$ , car l'indice de réfraction  $n$  de l'air dépend de sa température absolue  $T$  et sa pression  $p$  (voir le sous-paragraphe 6.1 de notre « panorama historique [...] » [3] dans ce numéro spécial, et le document [4] qui lui est lié, pour des indications précises sur ces variations ainsi que sur l'influence de l'humidité, du taux de  $\text{CO}_2$ , et de l'ionisation);  $T$  et  $p$  varient à des fréquences de l'ordre de  $1/\tau_c$ , soit jusqu'à quelques centaines de hertz.

De plus,  $n$  dépend de  $\lambda_0$  — selon des relations dites « de dispersion » et qui sont rappelées dans le sous-paragraphe 6.2 de [3]. Le « chromatisme » (*alias*, les « effets dispersifs » qui en résultent), perturbe les observations de trois façons différentes, donc selon diverses modalités :

- la dispersion angulaire, faisant que pour un point  $A$  d'un astre de distance zénithale  $Z$  donnée, sa distance zénithale apparente est  $Z' = Z - \chi_S$ , où  $\chi_S$  désigne la valeur angulaire de la réfraction astronomique en  $S$  et dépend de  $\lambda_0$  ;
- la dispersion dite longitudinale [5], i.e. celle en différence de marche  $\delta_{AP}$  (entre deux voies d'un interféromètre astronomique) du point  $A$  au point  $P$  sur le récepteur, car les trajets des rayons dans l'air n'ont pas la même longueur pour chacune des voies, donc la différence des chemins optiques correspondants dépend aussi de  $\lambda_0$ . Quand on observe en bande spectrale large, on rencontre donc toutes les difficultés classiques liées aux interféromètres dispersifs, notamment une dégradation du signal de visibilité — quelle que soit la technique de recombinaison des faisceaux lumineux utilisée à la sortie de l'ensemble des voies ou des télescopes, qu'elle produise des franges ou une teinte plate. Cette dégradation affecte aussi la mesure du signal par modulation du chemin optique avec ou sans utilisation de fibres optiques ;
- la dispersion latérale de faisceaux arrivant depuis  $A$  sur l'instrument, car selon leur longueur d'onde ceux-ci sont passés en des endroits différents de l'atmosphère — effet (iii) de [6], parfois appelé *chromatic shear* [7]. Ce phénomène a déjà été étudié dès 1893 par Rayleigh [8], dans un modèle de Terre plate et d'atmosphère stratifiée (le principe de son calcul est présenté en Annexe). Il est responsable d'un *chromatic anisoplanatism* [9, 10], et il fait l'objet d'une discussion numérique récente aux sous-paragraphe 2.7 et 3.4 de [11], dans un modèle d'atmosphère à symétrie sphérique pour la première fois.

Ces trois effets dispersifs dus à un air inhomogène n'ont rien à voir avec la dispersion *intrinsèque* due à la diffraction (les dimensions d'une figure de diffraction dépendent de  $\lambda_0$ ) ou aux interférences (dans un interféromètre dépourvu de matériau dispersif, l'emplacement des franges dépend déjà de  $\lambda_0$ ). C'est à cause de cette dispersion que William M. Sinton (1925–2004) a conçu, pour étudier les étoiles doubles serrées, un interféromètre astronomique achromatique [12–14] — i.e. ne donnant idéalement, en lumière blanche, que des franges blanches. Sauf au paragraphe A.3 de l'annexe, nous ne considérons pas ces effets propres à la diffraction, mais seulement ceux dus au milieu matériel dans lequel se propage la lumière.

Pour obtenir le signal interférométrique donné par le réseau de télescopes formant un interféromètre astronomique, il peut être plus avantageux de mesurer le flux dans des plans pupille

(i.e. conjugués du plan du diaphragme d'ouverture) — Danjon avait déjà proposé en 1955 d'observer dans un plan pupille plutôt que dans un plan image [15]. L'avantage est notable lorsque le bruit de mesure n'est pas le bruit de photons du signal. Dans ce cas, on recombine les faisceaux émergents collimatés en les superposant, grâce à des lames séparatrices, de façon qu'ils soient parallèles entre eux; cela produit des teintes plates dans chacun des canaux issus de la lame séparatrice. Alors on module temporellement  $\delta_{AP}$  avec une amplitude de  $\lambda_0/4$ , à une fréquence de quelques dizaines à quelques centaines de hertz — toujours supérieure à  $1/\tau_c$ , afin d'utiliser la technique de détection synchrone qui permet d'extraire le signal interférométrique en réduisant l'effet du bruit ambiant.

La mesure sera d'autant plus précise que les fronts d'onde issus des télescopes individuels du réseau seront bien corrigés des aberrations. L'optique adaptative (voir [16] dans ce numéro spécial) permet d'aplanir et limiter les déformations des fronts d'onde causées par la turbulence, sans toutefois corriger le chromatisme.

Ensuite, d'une part la correction de dispersion angulaire, dans chaque faisceau issu d'un télescope avant recombinaison, rend parallèles entre eux les fronts d'onde aux différentes longueurs d'onde de la bande passante utilisée, d'autre part la correction de dispersion longitudinale égalise l'écart entre les fronts d'onde émergents parallèles issus d'un même front d'onde incident, quelle que soit la longueur d'onde.

Enfin, il faut optimiser la fréquence de modulation (assimilable à l'inverse d'un temps de pose, qui détermine le bruit de photons) en tenant compte des fluctuations de l'écart entre fronts d'onde, mentionné ci-dessus (variation en piston), pendant la durée d'une période de la modulation servant à la détection synchrone — car ces fluctuations affectent aussi le bruit de mesure. Elles sont plus faibles dans le domaine infrarouge que dans le visible (ainsi que la dispersion).

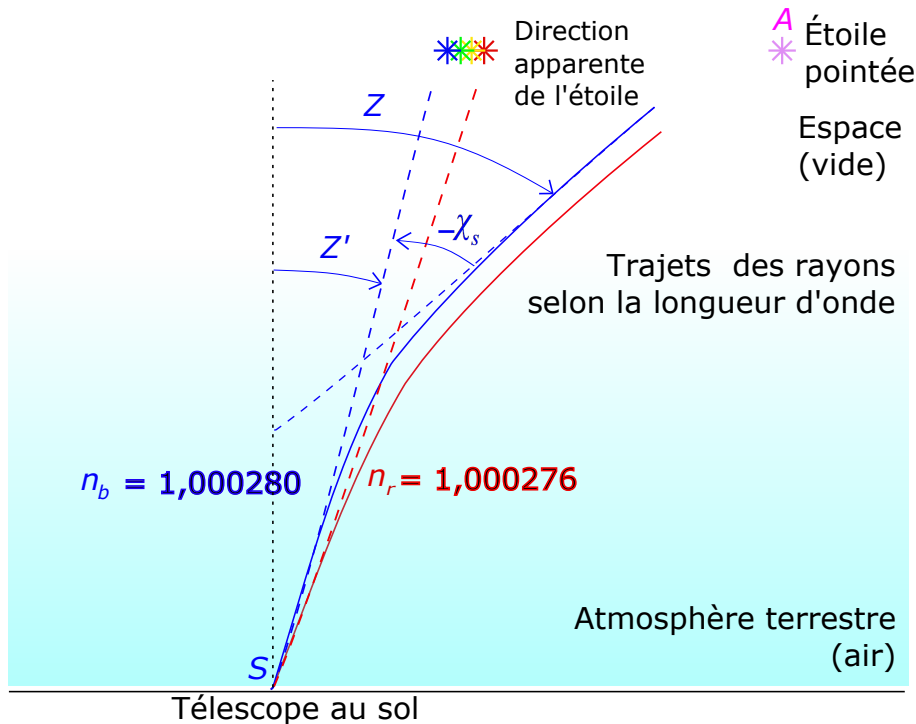
Nous allons maintenant détailler, dans l'ordre, les trois effets de la dispersion de l'indice  $n$ . Le premier, affectant la position angulaire de l'image de  $A$ , impacte toutes les observations astronomiques à haute résolution effectuées depuis le sol; les corrections développées pour certaines peuvent aussi s'avérer utiles pour toutes. Le deuxième effet concerne la dispersion longitudinale dans les interféromètres astronomiques; il fausse la mesure du degré de cohérence — ou « visibilité complexe » — de la lumière issue de l'astre observé. Quant au troisième effet, il donne une première explication de la scintillation colorée de l'image des étoiles dans le cadre de l'optique géométrique, très incomplète toutefois car des effets diffractifs peuvent parfois jouer un grand rôle dans ce phénomène qui est une source majeure de bruit pour les mesures astronomiques [17]; ce troisième effet n'est pas corrigeable dans les instruments au sol, et on le considère majoritairement comme faisant partie des erreurs résiduelles [18].

Enfin, nous rappellerons brièvement un progrès récent (2004) permettant d'augmenter le temps de pose dans les interféromètres astronomiques, et donc leur magnitude limite observable: il s'agit de l'observation d'interférences en mode à référencement de phase, autorisant des mesures relatives de position à une précision angulaire de  $10^{-5}$  seconde d'arc [19], voire mieux [20].

## 2. Dispersion angulaire

La découverte de la dispersion angulaire due à l'atmosphère revient à Pierre Bouguer (1698–1758) qui, venant d'inventer son héliomètre en 1748 [21] pour tenter de détecter l'aplatissement solaire (voir le paragraphe 1 de [22] dans ce numéro spécial), constata que les images solaires sont irisées de bleu et de rouge sur les parties supérieure et inférieure du limbe; Bouguer interpréta correctement ces irisations, en termes de variation spectrale de réfraction astronomique [23]. On peut observer facilement à l'œil ces irisations avec des instruments d'amateur visant des astres



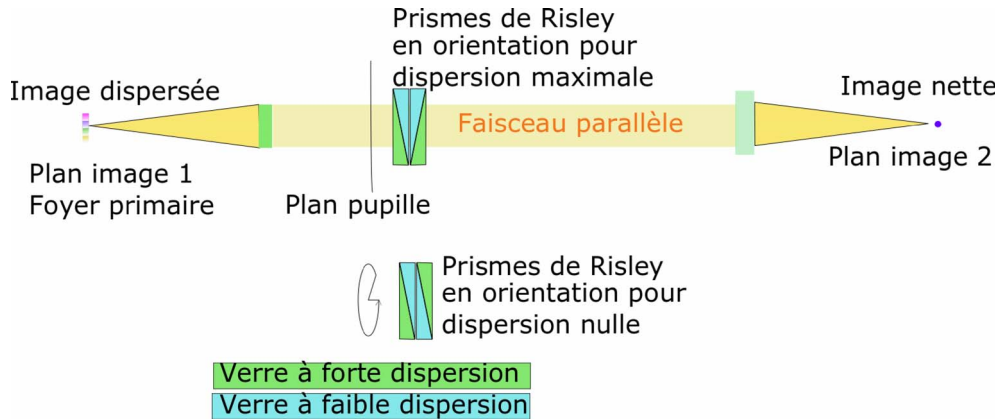


**FIGURE 1.** Dispersion angulaire due à l'atmosphère : la direction apparente de l'étoile pointée varie à cause de la variation de l'indice de réfraction de l'air en fonction de la longueur d'onde  $\lambda_0$ . En traits pleins, trajet des rayons lumineux pour deux longueurs d'onde : 460 nm (bleu) et 650 nm (rouge), avec les indices de réfraction  $n_b$  et  $n_r$  de l'air à 15 °C et 1 atm indiqués pour ces deux longueurs d'onde. Les angles  $Z'$  et  $-\chi_s$  dépendent de  $\lambda_0$  mais ne sont notés ici que pour la raie à 460 nm; les valeurs de  $-\chi_s$  pour 460 nm et 650 nm, ainsi que leur différence, sont très exagérées sur ce schéma.

proches de l'horizon (voir la Fig. 6 de notre exposé des « propriétés remarquables de la réfraction astronomique [...] » [24] dans ce numéro spécial, et la Figure 1 ci-dessus). François Arago (1786–1853) fut le premier à mesurer, dès 1812, la dispersion de l'indice de l'air (ainsi que d'autres gaz, en 1815); pour cela, il utilisait justement l'effet angulaire, de deux façons différentes entre 1812 et 1815 [25, p. 738–741] — voir le sous-paragraphe 6.2 de [3] pour plus de détails historiques.

Cette dispersion angulaire perturbe toutes les observations astronomiques faites depuis le sol, dès que l'on cherche des résolutions meilleures que la seconde d'arc dans l'imagerie en « lumière blanche » (i.e. ayant une large bande spectrale); il en est de même si l'on veut une haute résolution spectrale dans l'observation spectroscopique des astres.

George B. Airy (1801–1892) semble être le premier à vouloir corriger la dispersion angulaire due à l'atmosphère dans les observations visuelles, grâce à un oculaire correcteur [26]. En ce qui concerne les « interféromètres oculaires » dédiés à l'étude des étoiles doubles serrées [27, p. 49–97], il est suivi par John A. Anderson (1876–1959) qui veut compenser de même cet effet dispersif [28]; puis viennent Albert Brown et Harold Hoxie en 1928 [29], William S. Finsen (1905–1979) [30–32] et Sinton [12, 13] à partir de 1951. Il est apparu, dès 1941, que, sans cette correction, les mesures d'étoiles binaires par interférométrie ne sont pas dignes de confiance pour  $Z' > 45^\circ$  selon Raymond H. Wilson Jr. (1911–1989) [33], et même déjà pour  $Z' > 30^\circ$  selon Hamilton M. Jeffers (1893–1978) en 1947 [34].



**FIGURE 2.** Système des prismes de Risley (vu en coupe); la lumière se propage de gauche à droite.

Pour les acquisitions d'images à haute résolution angulaire (i.e. meilleure que  $0,1''$ ), on sait depuis longtemps corriger cet étalement spectral (dépendant de la distance zénithale apparente  $Z'$ ) qui dégrade les images dès que la bande passante dépasse quelques dizaines de nanomètres. La valeur de  $Z'$  à partir de laquelle cette correction devient nécessaire dépend de la bande passante utilisée et de la résolution angulaire visée; elle est souvent requise dès que  $Z' > 30^\circ$ .

Cette dispersion angulaire dépend des conditions de température et de pression sur le trajet du faisceau, entre son entrée dans l'atmosphère terrestre et le télescope. Diverses formules approchées donnant la déviation  $\chi_S$  des rayons lumineux en fonction de  $Z'$  et  $\lambda_0$  sont recensées dans [3, 24], où est rappelé également le calcul de  $\partial\chi_S/\partial\lambda_0$  à  $Z$  fixé [24, sous-paragraphe 9.1].

En interférométrie astronomique, la dispersion angulaire affecte les mesures, que la recombinaison des faisceaux se fasse dans un plan image (auquel cas on obtient de petits spectres d'orientations différentes, qui sont difficiles à superposer), ou dans un plan pupille (auquel cas on obtient des fronts d'onde d'inclinaison variable, laquelle pourra affecter l'efficacité de la modulation en phase).

Nous présentons ci-dessous trois types de correction de la dispersion angulaire.

### 2.1. Correction par prismes de Risley

Ce dispositif [35] est constitué d'un ensemble de deux paires identiques de prismes collés tête-bêche, et constitués de verres différents (Figure 2). Une paire (dite d'Amici) n'introduit aucune déviation pour la longueur d'onde moyenne  $\lambda_m$  de la bande spectrale où on observe, car l'angle de chacun de ses prismes est calculé en fonction de l'autre pour que la déviation due au premier prisme soit compensée par une déviation opposée due au second pour  $\lambda_m$ . Si en outre les verres ont le même indice pour  $\lambda_m$ , on peut prendre des prismes de même angle; alors chaque paire est équivalente à une lame à faces parallèles pour  $\lambda_m$ , mais non pour les autres longueurs d'onde car les verres sont différents. Chaque paire introduit donc une dispersion de direction orientable mais d'amplitude fixe. La rotation d'une paire par rapport à l'autre permet d'introduire une dispersion résultante ajustable en amplitude; la rotation de tout le dispositif permet de choisir la direction de dispersion due à l'ensemble. On adapte celle-ci pour qu'elle compense la dispersion introduite par l'atmosphère.

Comme l'objet céleste pointé change de hauteur et d'azimut à cause de la rotation de la Terre, le réglage des prismes de Risley doit évoluer pour compenser la dispersion atmosphérique.

Le fait que l'atmosphère et le dispositif des prismes de Risley produisent (en fonction de  $\sigma$ ) des déviations différentes au deuxième ordre en  $\sigma - \lambda_m^{-1}$  implique que la correction n'est pas parfaite, mais suffisante pour des bandes passantes de quelques dizaines de nanomètres.

Il pourrait être utile, dans le cas d'interféromètres à plusieurs télescopes, d'introduire ce dispositif dans chaque faisceau individuel avant de les recombinaison; mais cela se ferait au prix de contraintes supplémentaires en termes de chemins optiques — car leur égalité précise doit être respectée sur toute la bande passante, en incluant les systèmes de correction de dispersion angulaire. Dans le cas d'interféromètres à un seul télescope, de tels dispositifs peuvent notamment être utilisés en interférométrie des tavelures (*speckle interferometry*). L'usage en optique de ce nom commun est dû au physicien Émile Verdet dans les années 1860, puis à l'astrophysicien Pierre Léna vers 1977. Dans tous les cas, pour que la formation d'image par ce dispositif soit rigoureusement stigmatique, il est bon que la partie de l'instrument qui le précède soit afocale, de façon à ce que la lumière incidente sur lui en provenance de  $A$  forme un faisceau parallèle; on réalise cela dans les interféromètres astronomiques ainsi que dans les instruments destinés à l'analyse des tavelures.

De plus, avec un grossissement intrinsèque important pour cette partie afocale, son grandissement est très inférieur à 1 en valeur absolue, et cela permet de faire passer le faisceau lumineux utile au travers de prismes de petite dimension. Pour minimiser le risque de vignettage par ce dispositif, on le place au voisinage d'un plan pupille.

## 2.2. Correction par réseau déplaçable

Entre 1971 et 1976, Antoine Labeyrie et ses collaborateurs ont effectué plusieurs missions d'acquisition de données stellaires par analyse de la figure de *speckle* au télescope Hale (de 5 m) du mont Palomar. Leurs dispositifs d'observation, qui ne diffèrent entre eux que par quelques variantes, sont progressivement décrits dans les articles subséquents [36, 37], mais leurs prémices se trouvaient déjà dans leurs premières publications (dont [38]) sur l'exploitation de la figure de *speckle*. Par contre les méthodes de traitement optique puis numérique des images brutes acquises ont beaucoup évolué au cours de cette période.

Dans cette technique d'observation, la dispersion angulaire doit être impérativement combattue. Cela se fait en deux temps : d'abord, par un monochromateur volontairement grossier, en utilisant un réseau (placé très près du plan focal (IF) primaire ou Cassegrain du télescope, qui agit donc essentiellement sur l'imagerie pupillaire), on limite à 25 nm la largeur spectrale de la bande transmise par le système (ce qui est avantageux aussi au sens de l'analyse spectrale de l'objet étudié); ensuite, en jouant sur le petit écart volontaire entre (IF) et le réseau, on profite du petit effet de celui-ci sur l'image de l'astre pour qu'il compense quasiment le petit effet de dispersion angulaire due à l'atmosphère sur une bande de largeur sélectionnable manuellement en cours d'observation (10, 20 ou 40 nm).

## 2.3. Correction en faisceau non parallèle

Lorsqu'avec un télescope unique les observations à haute résolution angulaire, permises par l'optique adaptative, sont effectuées en bande étroite, la dispersion angulaire due à l'atmosphère peut être tolérée. Ce n'est plus le cas pour des observations à bande large. Au sous-paragraphe 2.1 nous avons déjà signalé que la correction par des prismes (ceux de Risley par exemple) préserve le stigmatisme rigoureux si la lumière incidente sur eux en provenance de  $A$  forme un faisceau parallèle; mais usuellement il n'y a pas un tel faisceau dans un télescope, où les ouvertures relatives des faisceaux en un foyer Cassegrain vont typiquement de 1/25 à 1/8, ou bien même jusqu'à 1/2,5 en un foyer primaire.

Le système optique comprenant le télescope unique mentionné ci-dessus est rendu non invariant par rotation quand on lui adjoint des prismes, même de petit angle; et dans des faisceaux convergents comme ceux mentionnés ci-dessus, ils introduisent en plus des aberrations diverses. Certaines d'entre elles, négligeables au foyer Cassegrain, prédominent au foyer primaire où l'ouverture relative est plus grande. Alors, dans le cas d'un système utilisant un prisme seul, elles sont intolérables et nécessitent un traitement spécifique, qui a été mené par Wynne & Worswick [39]; leur réduction est facilitée si l'on utilise des paires de prismes collés équivalentes à des lames à faces parallèles pour la longueur d'onde moyenne (voir le sous-paragraphe 2.1), et les aberrations à d'autres longueurs d'onde peuvent être diminuées si l'interface entre les prismes collés est courbe. D'autres dispositifs utilisent aussi des dioptries courbes, et le réglage de la correction de dispersion atmosphérique s'effectue en les inclinant [40, 41].

Pour s'adapter aux contraintes de certains instruments (initialement des spectrographes), Avila *et al.* ont inventé un type de correcteur de dispersion, où l'amplitude de la correction ne se règle pas en tournant un composant par rapport à un autre, mais simplement en le translatant dans la direction de l'axe optique du télescope [42] — ce qui évite des rotations d'axes optiques. Goncharov *et al.* ont repris ce principe pour l'appliquer aux télescopes extrêmement grands (*ELT*) du futur [6].

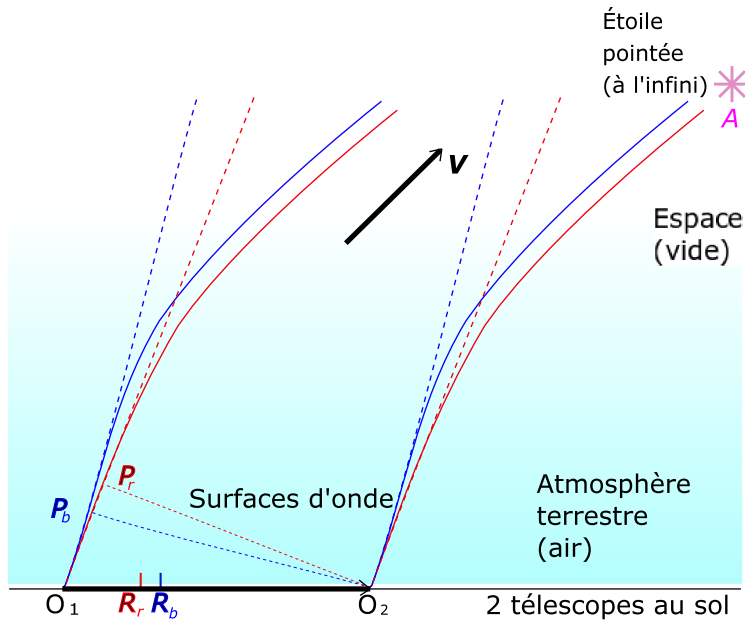
### 3. Dispersion longitudinale

Cette dispersion est différente de la précédente : c'est maintenant la variation de  $\delta_{AP}$ , toujours en fonction de  $\lambda_0$ ; au sens des modifications de fronts d'onde, décrites en termes de polynômes de Zernike, c'est un *piston* — alors que la variation exposée dans le paragraphe précédent était un *tilt*. La première mise en évidence expérimentale de  $d\delta_{AP}/d\lambda_0$  dû à l'air remonte à Ketteler en 1865 : il en a tiré une mesure interférentielle de la dispersion de  $n$  en utilisant des miroirs de Jamin [43].

Dans les interféromètres oculaires, la dispersion de  $\delta_{AP}$  est assez petite pour ne pas altérer significativement la visibilité des franges, et ceci était encore à peu près vrai avec les interféromètres de type périscopique [27, p. 30–42] de Michelson et Pease, dont la poutre (de 20 pieds pour l'instrument fabriqué en 1920 [44], 50 pieds pour celui achevé en 1929) portant les deux périscopes était montée sur un télescope unique. Mais dès les débuts, en 1974, de l'interférométrie astronomique à plusieurs télescopes, laquelle a permis une forte augmentation de longueur de la ligne de base, il était clair que la dispersion de  $\delta_{AP}$  due à l'air devait dorénavant être corrigée [45].

#### 3.1. Quasi-achromatisme de la différence de marche avant les télescopes ( $T_1$ ) et ( $T_2$ ) situés à la même altitude

Afin de simplifier l'exposé, nous ne considérons pour l'instant qu'un interféromètre astronomique à deux voies (1) et (2), chacune passant par un seul télescope — ( $T_1$ ) ou ( $T_2$ ). Soit  $O_1$  (resp.  $O_2$ ) le centre de la pupille d'entrée de ( $T_1$ ) — resp. ( $T_2$ ); considérons le chemin optique ( $AO_1$ ) sur le rayon lumineux de  $A$  à  $O_1$  — même principe pour ( $AO_2$ ) — et leur différence  $\Delta_A := (AO_2) - (AO_1)$  (le symbole  $:=$  indiquant une définition ou bien une notation). Pour un modèle de Terre plate et d'atmosphère stratifiée (qui est satisfaisant seulement si  $\|\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2\|$  est très petit devant le rayon terrestre et  $Z$  pas trop proche de  $90^\circ$ ), en supposant aussi l'égalité des altitudes de  $O_1$  et  $O_2$ , la partie courbe (à cause de la réfraction astronomique due à l'inhomogénéité de l'atmosphère) du rayon lumineux allant de  $A$  à  $O_2$  se déduit, par translation (de vecteur  $\mathbf{B} := \mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2$ ), de celle du rayon lumineux allant de  $A$  à  $O_1$  (voir la Figure 3); alors les chemins optiques de ces



**FIGURE 3.** Dispersion longitudinale : son principe reprend celui de la Figure 1 mais avec deux télescopes au lieu d'un. Les pupilles d'entrée des télescopes ( $T_1$ ) et ( $T_2$ ) sont centrées en  $O_1$  et  $O_2$  sur une base horizontale au sol caractérisée par le vecteur  $\mathbf{B} := \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$ . Les segments  $O_2P_b$  et  $O_2P_r$  sont des coupes, par le plan de la figure, de surfaces d'onde en provenance du point  $A$  de l'étoile pour des longueurs d'onde dans le bleu et dans le rouge ; ces surfaces d'onde sont différentes à cause de la variation de l'indice de réfraction de l'air en fonction de la longueur d'onde. Les points  $R_r$  et  $R_b$  sont les positions du recombineur optique permettant d'obtenir une différence de marche nulle respectivement pour le rouge et pour le bleu. Si l'on veut que  $R_r$  et  $R_b$  soient au même endroit, il faut ajouter dans le montage une correction de dispersion tenant compte de plusieurs effets (voir texte).

parties courbes sont égaux et s'éliminent dans  $\Delta_A$ , qui ne fait plus intervenir  $n$  — donc ne dépend plus de  $\lambda_0$  — et s'écrit

$$\Delta_A = -\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 \cdot \mathbf{V} = -\|\mathbf{B}\|(\cos \alpha)(\sin Z) \quad (1)$$

où  $\mathbf{V}$  désigne le vecteur unitaire dans la direction de  $A$  (voir la Figure 3), et  $\alpha$  son azimut par rapport à  $\mathbf{B}$  (appelé aussi « base » de l'interféromètre). La base était orientée Nord-Sud dans le cas du prototype d'interféromètre à deux télescopes (I2T) en 1974 à Nice [45].

Pour  $Z$  voisin de  $90^\circ$  le modèle de Terre plate ne convient plus, et le caractère dispersif de  $\Delta_A$  réapparaît légèrement lorsqu'en outre  $\alpha \neq \pm 90^\circ$  ; mais dans la pratique le problème correspondant ne se pose pas, car les observations avec les interféromètres astronomiques évitent une valeur de  $Z$  voisine de  $90^\circ$ , à cause de problèmes liés à la réfraction astronomique entre autres.

Le modèle d'atmosphère stratifiée ne convient pas non plus si on veut tenir compte de la turbulence, et dans ce cas le caractère dispersif de  $\Delta_A$  apparaît encore. En effet, la turbulence atmosphérique au-dessus des télescopes introduit des variations aléatoires (piston) de  $(AO_1)$  et  $(AO_2)$ , mais celles-ci ne dépasseront pas quelques dixièmes de millimètres, même pour les très grandes valeurs de  $\|\mathbf{B}\|$ . La fluctuation  $\Delta L_{12}$  de  $\Delta_A$  due à la turbulence ne dépassera pas non plus quelques centaines de micromètres. Bien que la fluctuation de déphasage correspondant à  $\Delta L_{12}$

soit importante, sa variation avec la longueur d'onde reste de l'ordre de  $2\pi$ , ce qui est compatible avec l'observation des interférences moyennant un prisme à vision directe, comme le faisait déjà Michelson en 1920 — voir le sous-paragraphe 3.5.

### 3.2. Compensation de $\Delta_A$ par une ligne à retard dans le vide

Afin de satisfaire la condition de cohérence temporelle nécessaire pour observer des interférences en lumière blanche, on veut que  $|\delta_{AP}|$  ne dépasse pas quelques micromètres. Or les points d'observation  $P$  sur le récepteur sont choisis tels que  $\delta_{AP}$  soit quasiment égal (à quelques micromètres près aussi) à la différence de marche  $\delta_{AA'}$ , entre les deux voies, de  $A$  jusqu'à (pour chaque longueur d'onde) son image paraxiale  $A'$  — celle-ci étant la même par construction pour les voies (1) et (2) de tout réseau de télescopes à synthèse d'ouverture. De plus, le stigmatisme approché fait que la valeur de  $\delta_{AA'}$  est indépendante du choix des deux rayons lumineux allant, par les voies (1) et (2) respectivement, de  $A$  à  $A'$  dans le cadre de l'optique de Gauss; sans perte de généralité, on peut alors considérer ceux qui passent par  $O_1$  et  $O_2$  respectivement, et écrire

$$\delta_{AA'} = \Delta_A + (O_2A') - (O_1A') := \Delta_A + \Delta'_A. \quad (2)$$

Donc la cohérence temporelle requise ci-dessus sera bien réalisée en  $P$ , et parfaitement en  $A'$ , si  $\Delta'_A = -\Delta_A$ ; pour réaliser cela, de manière ajustable au cours du temps puisque  $\Delta_A$  varie temporellement (ainsi que  $Z$  et  $\alpha$ ) à cause de la rotation de la Terre, on dispose sur l'une des voies — disons sur (2) conventionnellement — une ligne à retard, où passe la lumière qui émerge de ( $T_2$ ) avant d'arriver au recombineur de faisceaux, afin d'ajuster au cours du temps (mais sans altérer la coïncidence des images de  $A$  fournies par les deux voies) le chemin optique ( $O_2A'$ ) du rayon allant de  $O_2$  à  $A'$ . Tandis que la ligne à retard évolue au cours du temps, on veut qu'elle assure à toute date  $\Delta'_A = -\Delta_A$  aussi pour toutes les longueurs d'onde  $\lambda_0$  du spectre utilisé (aux effets de turbulence près, qui s'avèrent négligeables de ce point de vue, comme on l'a montré au sous-paragraphe 3.1); le plus simple conceptuellement est donc de placer cette ligne dans un tube à vide, afin que la *variation temporelle* de ( $O_2A'$ ) soit indépendante de  $\lambda_0$ . Cette option technologique était celle de l'interféromètre Mark III au Mont Wilson (Californie) [46], COAST près de Cambridge (Angleterre) [47], NPOI près de Flagstaff (Arizona) [48]. Des tubes à vide sont utilisés aussi dans le réseau CHARA au Mont Wilson (où ils ne couvrent pas l'intégralité du trajet optique jusqu'au recombineur de faisceau); en outre les télescopes ne sont pas à la même altitude, si bien qu'une correction de dispersion longitudinale demeure nécessaire [49]. Au sous-paragraphe 3.4, des interféromètres qui se passent de ces onéreux tubes à vide sont mentionnés, et une idée d'amélioration est proposée.

### 3.3. Turbulence atmosphérique et dispersion

Les déformations rapides du front d'onde, causées par la turbulence atmosphérique, créent un effet de piston qui perturbe l'égalité des chemins optiques au point de recombinaison dans un interféromètre à plusieurs télescopes. Nous ne l'abordons ici que brièvement car son étude ne relève pas de la dispersion, quoiqu'elle lui soit historiquement reliée. Le principe de l'observation d'un astre par un interféromètre étant d'analyser la variation de cohérence spatiale de la lumière reçue, sans être gêné par la variation de cohérence temporelle, les différences de marche doivent rester petites devant la longueur de cohérence  $\lambda^2/\Delta\lambda_0$  (où  $\Delta\lambda_0$  est la largeur de la bande passante utilisée).

Les prototypes d'interféromètres des années 1980 disposaient d'un asservissement qui maintenait, en valeur absolue, la différence de marche  $\delta_{AA'}$  petite devant la longueur de cohérence.

C'est le « cohérençage », qui permet de mesurer le module du degré de cohérence spatiale de la lumière reçue en provenance de l'astre observé, alors que son argument reste inconnu à cause des fluctuations de  $\delta_{AA'}$  dues à la turbulence. La technique de cohérençage considère  $\varphi := 2\pi\delta_{AA'}/\lambda_0$  et peut utiliser notamment un prisme ou un réseau pour accéder à un signal d'erreur :  $d\varphi/d\lambda_0$ , qui s'annule pour  $\delta_{AA'} = 0$  car  $\delta_{AA'}$  a préalablement été rendu indépendant de  $\lambda_0$  grâce aux corrections de dispersion. La mesure de  $d\varphi/d\lambda_0$  permet de contrôler  $|\delta_{AA'}|$  pour qu'il reste petit devant  $\lambda^2/\Delta\lambda_0$ .

Une autre méthode existe, plus précise que le cohérençage, mais plus difficile à mettre en œuvre : il s'agit du « cophasage », où l'on asservit  $|\delta_{AA'}|$  de façon qu'il reste petit devant  $\lambda$ . Le cophasage permet d'obtenir simultanément le module et l'argument (i.e. la phase) du degré de cohérence, afin de reconstruire des images d'objets étendus. Nous ne nous étendrons pas ici sur les diverses méthodes utilisées — par exemple, celle utilisant la clôture pour retrouver la phase [50].

Pour atteindre  $|\delta_{AA'}| \ll \lambda$  il faut mesurer  $\delta_{AA'}$  en quelques millisecondes [2], selon les conditions météorologiques, dans le visible. Cela dégrade la magnitude limite, à moins d'utiliser une étoile guide dans le champ d'isoplanétisme de l'objet observé — quelques secondes d'arc au mieux. C'est faisable dans des cas particuliers, par exemple pour étudier des systèmes d'étoiles multiples où l'on se sert de la composante brillante pour mesurer  $\delta_{AA'}$ , puis on referme une boucle d'asservissement à l'aide d'une petite ligne à retard rapide — c'est le mode d'observation dit à référencement de phase. Celui-ci a été mis en œuvre dans l'infrarouge (l'effet de la turbulence et la dispersion y étant moins intenses que dans le visible) au *Palomar Testbed Interferometer* (à trois télescopes) et a donné des mesures sur plusieurs étoiles [19]. Il fonctionnait dans le visible avec l'interféromètre SUSI auprès de Narrabri (Australie) [51]. Il est couramment opérationnel dans l'infrarouge proche sur l'instrument GRAVITY au VLTI (mont Paranal, Chili), dont les caractéristiques instrumentales sont données dans l'article de Gillessen *et al.* [52]; et des résultats d'observations récentes sont donnés dans les articles d'Abuter *et al.* [53], Nowak *et al.* [54].

### 3.4. Compensation de $\Delta_A$ par une ligne à retard dans l'air

Si, comme dans bien d'autres interféromètres (ISI [55], SUSI [51], le VLTI [56] et le LBTI [57]) on préfère laisser la ligne à retard dans l'air ambiant, donc au voisinage du sol, il faut calculer non seulement les déplacements qui vont égaliser entre eux  $\Delta'_A$  et  $-\Delta_A$  pour une longueur d'onde donnée de la bande spectrale utilisée, mais encore la dispersion causée sur ces grandeurs par l'air dans les trajets au sol, que l'on suppose à température et pression constante — car, même s'ils ne sont pas sous vide, ils sont au moins protégés grâce à un ensemble de passages aménagés (appelé « le métro » au VLTI [58, p. 191–192]). Avec une ligne à retard ordinaire sur la voie (2) le chromatisme de  $\Delta'_A$  est beaucoup plus grand que celui de  $-\Delta_A$ , donc il faudra compenser cet excès de chromatisme par des dispersions équivalentes avec une lame à faces parallèles compensatrice (habituellement en verre) d'épaisseur  $e$  ajustable, mise sur (1) entre  $A'$  et la sortie de ( $T_1$ ).

Pour fixer les idées, considérons que quand  $\alpha$  vaut  $\pm 90^\circ$  (ce qui donne  $\Delta_A$  nul), l'interféromètre est symétrique par rapport au plan médiateur de  $O_1O_2$ , donc  $\Delta'_A$  et  $\delta_{AA'}$  sont nuls aussi, pour tout  $\lambda_0$ . Ensuite, quand  $\alpha \neq \pm 90^\circ$ , alors  $\Delta_A$  est non nul et indépendant de  $\lambda_0$  (en négligeant la turbulence); pour le compenser on agit sur la ligne à retard de façon que sur (2) elle fasse varier de  $l$  la longueur parcourue dans l'air par les rayons issus de ( $T_2$ ), et on place après ( $T_1$ ) la lame compensatrice normalement aux rayons.

Prenons l'exemple d'un interféromètre opérant aux longueurs d'onde du visible, et décrivons partiellement l'effet de la dispersion de l'air à l'aide de son pouvoir dispersif, défini par  $(n_F - n_C)/(n_d - 1)$ , où  $n_F$  et  $n_C$  désignent ses indices respectifs pour les raies F bleue

(à  $\lambda_0 \cong 486$  nm) et C rouge (à 656 nm) de l'hydrogène, et  $n_d$  celui pour la raie d (de l'hélium, à 588 nm), tous les trois pour le même couple  $(T, p)$ ; sa constringence  $\nu$  (ou « nombre d'Abbe ») est son inverse, quasi indépendant de  $(T, p)$ , valant 89,4 pour l'air — pour des valeurs concernant d'autres gaz, voir le paragraphe 9 de [24]. En outre, on utilisera la dispersion secondaire de l'air,  $q := (n_F - n_d)/(n_F - n_C) \cong 0,703$ . En remplaçant les lettres minuscules par des majuscules, on définit les paramètres correspondants pour le verre utilisé comme compensateur de dispersion : son pouvoir dispersif  $1/V := (N_F - N_C)/(N_d - 1)$  et sa dispersion secondaire  $Q := (N_F - N_d)/(N_F - N_C)$ .

On profite des deux degrés de liberté  $l$  et  $e$  pour imposer que la compensation se produise avec la raie C, i.e. que

$$n_C l - (N_C - n_C)e = -\Delta_A, \quad (3)$$

et de même avec la raie F. Cela donne un système de deux équations à deux inconnues, dont on tire déjà [59, p. 961]

$$l = -(N_F - n_F - N_C + n_C)\Delta_A / (N_F n_C - N_C n_F) \neq -\Delta_A. \quad (4)$$

Grâce à ces deux degrés de liberté on peut ainsi obtenir  $\delta_{AA'}$  nul pour les raies C et F comme souhaité; mais au lieu de l'avoir nul aussi pour la raie d on obtient comme expressions de sa valeur, considérée comme un défaut non nul dans ce cas,

$$\delta_{AA'} = n_d l - (N_d - n_d)e + \Delta_A = \left[ 1 - \frac{(N_F - N_C)n_d - (n_F - n_C)N_d}{N_F n_C - N_C n_F} \right] \Delta_A \quad (5)$$

que l'on sait exprimer aussi à l'aide des paramètres  $N_d$ ,  $V$  et  $Q$  du verre donnés par les constructeurs.

On connaît depuis 1988 [59, p. 970] une douzaine de verres qui donnent une compensation à  $0,3 \lambda_0$  près sur le domaine [450 nm, 700 nm] pour  $|\Delta_A| \cong 30$  m; et dans ce cas  $e \sim 1$  cm avec eux. Le réglage fin de  $e$  peut être réalisé à l'aide d'un compensateur d'Arago — i.e. deux prismes identiques de petit angle, mis en contact tête-bêche, pour reconstituer une lame à faces parallèles d'épaisseur continûment variable par glissement d'un des prismes sur l'autre.

La compensation peut être encore meilleure avec deux lames de verres différents, en se donnant un critère plus général que l'annulation de  $\delta_{AA'}$  : celle de la variation chromatique de  $\delta_{AA'}/\lambda_0$  jusqu'au troisième ordre en  $\sigma - \lambda_m^{-1}$  inclus [60]. Si l'on veut aussi que la compensation soit correcte sur plusieurs bandes spectrales simultanément, donc avec plusieurs valeurs de  $\lambda_m$  à la fois, on adopte plutôt un critère du type moindres carrés avec des pondérations différentes sur les diverses bandes [61].

Pour un réseau à  $N$  télescopes de même altitude, on doit mettre en place un dispositif compensateur de chemin optique pour au moins  $N - 1$  faisceaux, tel une ligne à retard, afin de compenser, pour le faisceau passant par le télescope  $(T_i)$ , la portion de différence de marche  $-\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{V}$  correspondant à des trajets au-dessus de l'atmosphère — le vecteur horizontal  $\mathbf{B}_i$  reliant un point  $O$  de référence, dans la zone de recombinaison des faisceaux, au centre  $O_i$  de la pupille d'entrée de  $(T_i)$ . Le vecteur  $\mathbf{V}$  est évidemment le même pour tous les télescopes du réseau, il dépend de l'angle horaire et de la déclinaison de l'objet pointé. Selon la direction de pointage, les valeurs de  $|\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{V}|$  peuvent aller de 0 m à une fraction importante de la dimension du réseau interférométrique (plus d'une centaine de mètres). La dispersion à corriger dépend uniquement de  $\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{V}$  et, ici encore, des caractéristiques physiques de l'air supposé homogène dans les trajets au sol.

Quand  $\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{V}$  est négatif, on peut essayer de compenser la différence de marche et de corriger son chromatisme de la façon suivante : d'une part, en agissant sur la ligne à retard située entre  $O$  et la sortie de  $(T_i)$  de façon qu'elle *retranche* au trajet lumineux dans l'air au sol — de relation de dispersion  $n_S(\lambda_0)$  — la longueur donnée positive  $-\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{V}$ , ce qui utilise un des deux degrés de



liberté évoqués précédemment (celui correspondant à  $l$ ) ; d'autre part, en mettant sous incidence normale sur ce trajet une lame de verre d'épaisseur  $e_i$ , de relation de dispersion  $N(\lambda_0)$ . Il est alors tentant, sur le plan formel, d'exploiter le second degré de liberté (celui correspondant à  $e_i$ ) pour réaliser à la longueur d'onde  $\lambda_m$  la compensation traduite, pour tout  $i$ , par

$$n_S(\lambda_m)\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{V} + [N(\lambda_m) - n_S(\lambda_m)]e_i = \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{V}, \quad (6)$$

ce qui revient à

$$e_i = -[n_S(\lambda_m) - 1]\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{V} / [N(\lambda_m) - n_S(\lambda_m)] \quad (7)$$

qui est positif pour  $\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{V} < 0$ . Comme les épaisseurs réelles de verre doivent être toujours positives, on introduit dans le faisceau émergent du télescope ( $T_i$ ) une épaisseur de verre  $e'_i$  telle que

$$e'_i = e_{max} + e_i \quad (8)$$

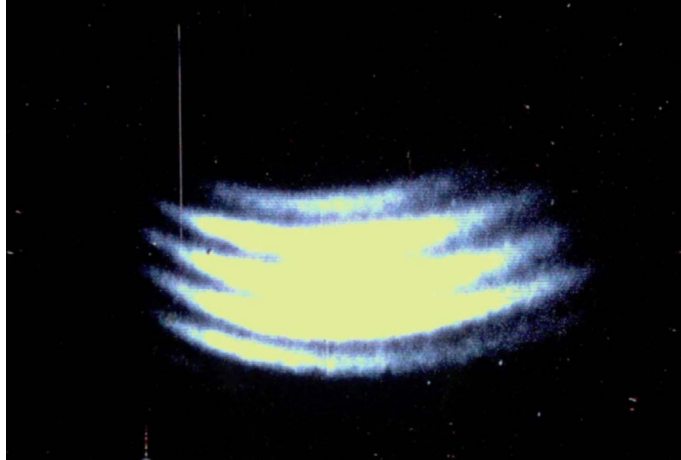
où  $e_i < 0$  pour  $\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{V} > 0$ , et  $e_{max}$  est une valeur positive — un majorant de l'ensemble des  $(-e_i)$  que l'on prévoit pour les divers faisceaux. Mais  $n_S(\lambda_0) - 1$  et  $N(\lambda_0) - n_S(\lambda_0)$  ne sont pas ajustés pour être quasi proportionnels (on a déjà utilisé tous les degrés de libertés), et dans le cas d'une large bande passante la correction de chromatisme basée sur l'équation (7) et l'utilisation d'une lame compensatrice du même verre sur chaque voie ne sera pas suffisante [59, p. 960–961].

Nous proposons alors de remplacer ces lames compensatrices en verre par des tubes de même longueur et de même température, que nous appelons « tubes à pression », fermés par des paires identiques de fenêtres sur chaque voie (donc leur caractère dispersif s'élimine dans les *différences* de marche), et à l'intérieur desquels on mettrait de l'air à une haute pression réglable ; dans l'hypothèse (voir le sous-paragraphe 6.1 de [3] dans ce numéro spécial) où la réfractivité  $\eta$  de l'air est, à température donnée, proportionnelle à sa pression jusqu'à des valeurs de l'ordre de 50 atm, la correction produite par une *variation* de pression judicieusement proportionnelle à  $-\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{V}$  serait parfaite. Un problème posé par les fenêtres serait lié aux réflexions parasites qu'elles provoquent, ainsi qu'aux pertes (comme pour les lignes à retard sous vide) ; il faudrait au moins les munir de bons traitements antireflet.

Comme la Terre tourne, pour un objet céleste donné les  $\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{V}$  changent au cours du temps ; donc les interféromètres au sol doivent compenser les différences de marche de manière dynamique, et ajuster les différentes corrections chromatiques au cours du temps — ce qui est possible pour des lames de verre avec des compensateurs d'Arago par exemple, ou bien pour des tubes à pression, en ajustant leurs pressions.

### 3.5. Utilisation d'un disperseur

Déjà en 1920 Michelson utilisait un disperseur (par ex., un prisme à vision directe) pour faciliter l'observation des interférences en lumière blanche [44] : une ligne verticale dans l'image donnée par ce disperseur (dont la direction de dispersion est traditionnellement horizontale) correspond à une longueur d'onde donnée, mais à  $\Delta\lambda$  près (à cause, par exemple, de la diffraction due aux bords de celui-ci, et de la largeur la fente d'entrée qui le précède, etc.) ; or  $\Delta\lambda$  est beaucoup plus petit que  $(760 - 380) \text{ nm} = 380 \text{ nm}$ , donc avec disperseur il sera beaucoup plus facile d'avoir une variation chromatique de l'ordre d'interférences petite devant 1 (i.e. de satisfaire la condition usuelle de cohérence temporelle pour les interférences) dans cet intervalle spectral  $\Delta\lambda$  restreint — plutôt que dans tout le visible. Quand  $\Delta\lambda$  est négligeable, et que la différence de marche  $\delta$  affectant la lumière entrant dans le disperseur ne dépend pas de la position des points d'entrée, alors on observe le spectre cannelé correspondant à  $\delta$ , avec des cannelures verticales sombres ou claires correspondant à un ensemble discret de longueurs d'onde.



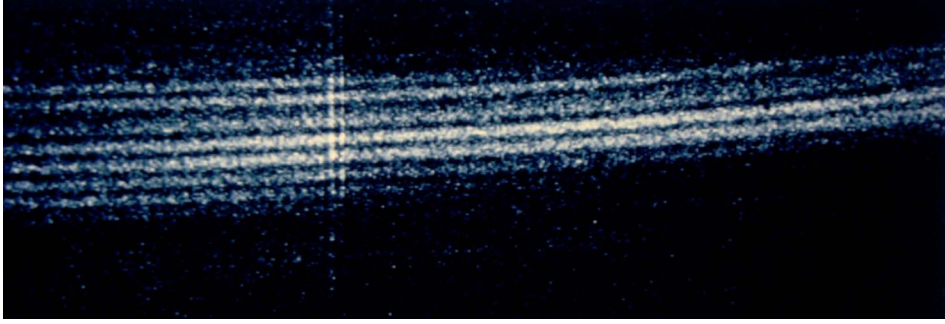
**FIGURE 4.** Cannelures fortement non monotones, données par le prototype d'interféromètre à deux télescopes (I2T) et vues au travers d'un prisme à vision directe, sans correction de dispersion longitudinale © Photo : I2T, Observatoire de la Côte d'Azur (OCA).

Mais quand on observe au travers d'un prisme à vision directe (dispersant horizontalement) l'image censée être celle de la tache d'Airy où  $\delta$  varie avec la position verticale grâce à un interféromètre à deux voies, et si l'étalement de l'image produit par la dispersion est beaucoup plus grand que le diamètre de cette tache d'Airy, alors on se trouve dans la situation précédente où  $\Delta\lambda$  est négligeable; cependant les cannelures obtenues ne sont plus verticales, à cause de la variation de  $\delta$  avec la position sur la tache d'Airy. Si les cannelures sont fortement non monotones (comme sur la Figure 4), cela témoigne d'un net chromatisme de  $\delta$ , qui empêche l'existence d'interférences en amont du disperser — d'où, par opposition, le fait que les cannelures sont aussi appelées « franges dispersées ». Ce dispositif ne vise pas à corriger la dispersion atmosphérique : il ne fait que séparer les différents éléments spectraux de manière à les traiter séparément dans des « canaux spectraux » différents; dans chaque canal individuel la finesse spectrale est bien meilleure que dans l'image brute, la longueur de cohérence est accrue d'autant, ainsi que la tolérance sur  $d\varphi/d\lambda_0$  (ce qui correspond dans la pratique à une tolérance sur le contrôle des chemins optiques). La juxtaposition de l'image des franges, alors bien visibles dans les canaux spectraux juxtaposés compte tenu de leur finesse, forme des cannelures. Notons que la différence de marche de  $A$  à  $P$ , en tant que fonction de  $P$  et  $\lambda_0$ , n'est pas *a priori* à variables séparables.

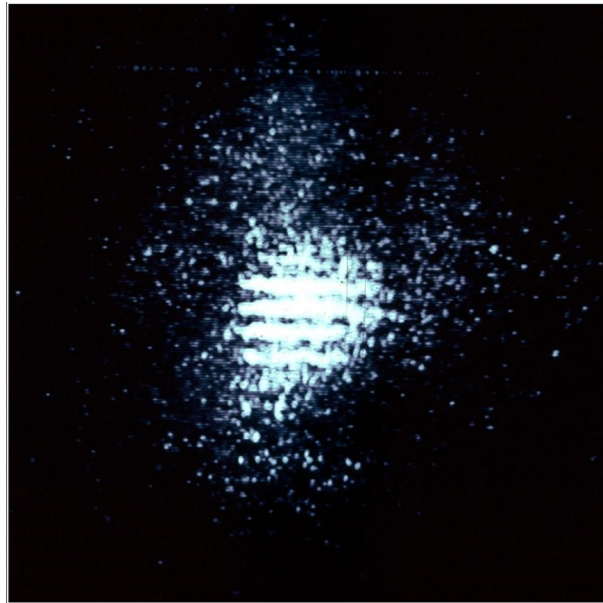
Mais si une cannelure est faiblement non monotone et présente un point stationnaire dont la position horizontale correspond à peu près au milieu du spectre utilisé (ainsi qu'au maximum de sensibilité du système), alors la position verticale de ce point stationnaire correspond à celle d'une frange achromatique peu avant le disperser; la Figure 5 présente un cas similaire.

Cela peut se rencontrer en interférométrie astronomique, si le caractère dispersif de l'air ne joue quasiment plus, donc s'il a été éliminé — soit par une mise sous vide de toute ligne à retard, soit par l'installation d'un dispositif correcteur. Dans ce cas, les interférences existent à l'entrée du disperser — voir la Figure 6.

Signalons enfin que si les corrections de dispersion ont rendu les cannelures équidistantes en nombre d'onde  $\sigma$ , le disperser à prisme ou à réseau ne les met pas équidistantes sur le récepteur, car sur lui l'échelle en  $\sigma$  n'est pas linéaire [62]. Ce fait était gênant pour un traitement numérique du signal, mais on savait le corriger en utilisant judicieusement le dispositif optique qui traite le chromatisme de  $\delta_{AA'}$  [62]; on pouvait le corriger aussi par un prétraitement numérique qui compensait en même temps la distorsion due à la caméra [63].



**FIGURE 5.** Cannelures faiblement non monotones (d'environ  $0,5 \mu\text{m}$  à  $0,6 \mu\text{m}$  de gauche à droite), obtenues en dispersant l'image d'une étoile (corrigée du deuxième effet de la dispersion atmosphérique) qui est observée, au travers d'un réseau blazé, par une caméra à comptage de photons connectée à un ordinateur © Photo : Grand Interféromètre à 2 Télescopes (GI2T), OCA.



**FIGURE 6.** Franges d'interférences obtenues dans la tache d'Airy, avec I2T visant Véga (à une dizaine de degrés du zénith) depuis l'observatoire de Nice en 1974; vu la faible distance zénithale, et la bande passante [ $0,5 \mu\text{m}$ ,  $0,65 \mu\text{m}$ ], aucune correction de dispersion n'était nécessaire. © Photo : A. Labeyrie.

#### 4. Conclusion

La correction de dispersion atmosphérique, de même que la correction de front d'onde [64] (i.e. l'optique adaptative), sont les prérequis de l'obtention d'une haute résolution angulaire depuis le sol sur de grands télescopes ou des interféromètres optiques. La première correction est relativement plus simple à mettre en œuvre car il s'agit de corriger un effet dont les fluctuations rapides restent négligeables même à très haute résolution angulaire; on peut donc se contenter de corriger son évolution lente, liée à la rotation de la Terre.

À l'avenir, la dispersion atmosphérique ne sera plus, peut-on espérer, une difficulté à surmonter, mais paradoxalement un atout pour permettre à l'optique adaptative, à l'aide d'étoiles artificielles, formées par laser et réémettant à plusieurs longueurs d'onde, de corriger le *tilt* (*alias* l'agitation de l'image) dans l'observation d'objets faibles — voir le sous-paragraphe 4.3.1 de [16] dans ce numéro spécial.

L'utilisation d'étoiles artificielles de référence fonctionne d'ores et déjà pour corriger l'étalement de l'image d'un objet peu lumineux, mais celle-là ne permet pas encore de neutraliser son agitation, car la position apparente de l'étoile laser dans la couche de sodium atmosphérique est insensible à l'agitation due à la turbulence de l'air : le faisceau traverse l'atmosphère dans un sens puis dans l'autre et, pour une longueur d'onde donnée, les deux effets sont opposés donc se compensent. Mais — et c'est là que la dispersion atmosphérique revient en scène — si l'étoile laser était observée à plusieurs longueurs d'onde suffisamment séparées, on aurait (outre la longueur d'onde initiale) une ou plusieurs nouvelles longueurs d'onde au retour ; et l'on pourrait alors tirer parti des fluctuations de la différence de position apparente de l'étoile guide pour deux longueurs d'onde (ou plus), due à la dispersion angulaire atmosphérique, afin de déterminer le *tilt* et corriger ainsi l'agitation de l'image de l'objet astronomique observé [65]. Par contre la mise en œuvre de cette idée semble encore inexistante : il est difficile de disposer d'un laser assez puissant pour qu'un effet d'optique non linéaire dans la stratosphère fournisse une étoile laser, qui renvoie vers le télescope une lumière de longueur d'onde nettement différente de celle du faisceau laser et de puissance suffisante.

### Conflit d'intérêt

Les auteurs n'ont aucun conflit d'intérêt à déclarer.

### Remerciement

Les auteurs tiennent à remercier Pierre Léna pour sa relecture et ses conseils avisés.

## Annexe A. Dispersion latérale

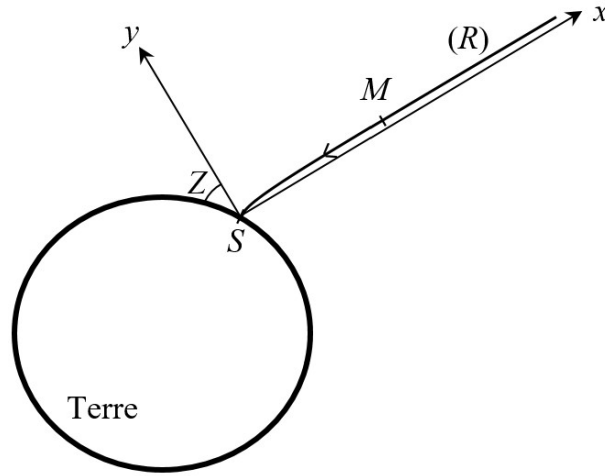
Pour une longueur d'onde donnée, on considère un rayon lumineux (R) venant d'une étoile à l'infini et arrivant sur l'observateur S ; il est quasiment confondu avec l'axe  $Sx$  (d'origine prise en S) parallèle à son asymptote. En supposant l'atmosphère à symétrie sphérique par rapport au centre de la Terre, le rayon est dans le plan  $xSy$  qui contient la verticale de S — voir la Figure A1 et ses notations utilisées pour le calcul de Lord Rayleigh [8].

### A.1. Estimation du déplacement latéral

À l'échelle du rayon terrestre, la faible épaisseur de l'atmosphère supposée à symétrie sphérique permet (sauf pour  $Z$  trop proche de  $90^\circ$ ) une approximation intéressante, en utilisant l'expression  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} \ln n$  de la courbure du rayon lumineux (R), où  $\mathbf{n}$  est le  $2^e$  vecteur de la base de Frenet, donc unitaire normal à (R) ([66, p. 169], [67, p. 124]) : la courbure étant quasiment  $d^2y/dx^2$  — car (R) est dans  $xSy$  et quasi confondu avec  $Sx$  — et  $n$  étant voisin de 1, il vient

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cong \mathbf{grad} n \cdot \mathbf{u}_y \cong \frac{dn}{dx} \tan Z \quad (\text{A1})$$

où  $n(x)$  désigne l'indice de l'air sur (R) au point d'abscisse  $x$ . On intègre une première fois en tenant compte de  $\eta(\infty) = 0$  (réfractivité du vide) ainsi que de  $(dy/dx)(\infty) = 0$  par définition de



**FIGURE A1.** Repère orthonormé  $Sxy$  (d'origine prise en  $S$ ) définissant les coordonnées des points courants  $M|_y^x$  du rayon lumineux  $(R)$  considéré dans le calcul de Lord Rayleigh; l'axe  $Sy$  des ordonnées est dirigé par le vecteur unitaire  $u_y$ .

l'axe  $Sx$ , puis une seconde fois en se rappelant que  $y(0) = 0$  car  $(R)$  arrive à l'origine; alors on obtient

$$y(x) \cong (\tan Z) \int_0^x \eta(x') dx'. \quad (\text{A2})$$

Compte tenu de la loi empirique de Gladstone–Dale

$$\eta \cong C \mu \quad (\text{A3})$$

appliquée à l'air (de masse volumique  $\mu$ ) — voir le sous-paragraphe 6.1 de [3] dans ce numéro spécial pour plus d'informations sur la validité de cette loi empirique —, et en négligeant la variation de composition de l'air avec l'altitude (ce qui fait que  $C$  ne varie qu'avec  $\lambda_0$ ), et en supposant que l'atmosphère est en équilibre hydrostatique mais pas forcément à température  $T$  uniforme, on a

$$y(x) \cong (\tan Z) C \int_0^x \mu(x') dx' \quad \text{et} \quad \frac{1}{\cos Z} \frac{dp}{dx} \cong -\mu g \quad (\text{A4})$$

où  $p$  désigne la pression et  $g$  la norme du champ de pesanteur.

Une bonne approximation de  $y(x)$  s'en déduit facilement, si on considère que  $g$  est uniforme sur la portion de  $(R)$  située dans l'atmosphère dans un premier temps, et si on assimile l'air à un gaz parfait dans un second temps :

$$y(x) \cong \frac{C \tan Z}{g \cos Z} [p(0) - p(x)] \cong \frac{RC \tan Z}{M_a g \cos Z} [T(0)\mu(0) - T(x)\mu(x)] \quad (\text{A5})$$

(où  $R$  est la constante des gaz parfaits et  $M_a$  la masse molaire de l'air). On voit apparaître, pour la température  $T(x)$ , l'échelle de hauteur de l'atmosphère :

$$H(x) := \frac{RT(x)}{M_a g}. \quad (\text{A6})$$

D'où le résultat simple :

$$y(x) \cong \frac{\sin Z}{\cos^2 Z} [H(0)\eta(0) - H(x)\eta(x)]. \quad (\text{A7})$$

Considérons maintenant deux rayons de deux longueurs d'ondes différentes (celles des raies C et F définies au sous-paragraphe 3.4) venant de la même étoile à l'infini et arrivant en S ; pour F par rapport à C, la valeur de  $C$  est augmentée de  $\Delta C = C/\nu$  (où  $\nu \cong 89,4$  est la constringence de l'air) et donc sur le rayon pour F l'ordonnée en  $x$  est accrue, par rapport au rayon pour la raie C, de

$$\Delta y(x) \cong \frac{\sin Z}{\cos^2 Z} \frac{H(0)\eta(0) - H(x)\eta(x)}{\nu} = \frac{\sin Z}{\cos^2 Z} \frac{H(0)\eta(0)}{\nu} \left[ 1 - \frac{p(x)}{p(0)} \right]. \quad (\text{A8})$$

Avec  $H(0) \sim 8$  km (qui est aussi la hauteur réduite de l'atmosphère — voir le paragraphe 4.1 de [24] de ce numéro spécial) et  $\eta(0) \cong 2,9 \times 10^{-4}$  on trouve  $\Delta y(\infty) \sim (\sin Z / \cos^2 Z) \times 2,6 \text{ cm} \cong 85 \text{ cm}$  pour  $Z \cong 80^\circ$  ; au niveau de la tropopause  $p(x)/p(0) \sim 10^{-1}$ .

## A.2. Conséquences sur la coloration de la scintillation

La scintillation lors de l'observation d'un astre est surtout causée par des couches turbulentes (plus hautes que celles responsables de l'agitation et de l'étalement de l'image dans un instrument en plaine, qui sont presque toujours décorrélés de la scintillation) entre 5 et 11 km d'altitude, où siègent des fluctuations de température de 0,1–1 K typiquement.

L'échelle interne de longueur des fluctuations de température dans l'air turbulent est de l'ordre de quelques centimètres. Donc les faisceaux reçus par une pupille d'entrée de 10 cm de diamètre ou moins, en provenance d'une étoile située assez bas sur l'horizon, pour les raies C (rouge) et F (bleue), peuvent avoir traversé des cellules différentes d'air dans une des couches turbulentes de l'atmosphère; il est alors possible que pour les rayons rouges par exemple, la cellule traversée forme une caustique (de quelques centimètres de largeur) sur la pupille, mais pas celle traversée par les rayons bleus, donc que le flux de la composante rouge du spectre reçu par l'instrument soit très renforcé. Bien sûr, ceci fluctue au gré des mouvements apparents des cellules et de l'étoile par rapport à l'instrument. La coloration de la scintillation n'est pas tant due à l'aberration chromatique des couches turbulentes qu'à la dispersion par l'air situé entre elles et l'observateur. S'il n'y a qu'une couche turbulente, les caustiques des différentes longueurs d'onde sont simplement décalées, d'où l'intercorrélacion des flux spectraux pour différentes longueurs d'onde.

Cette explication de la scintillation colorée est bien corroborée par l'observation du spectre de la pseudo-image de l'étoile bas sur l'horizon, dans des conditions atmosphériques ordinaires : si l'étoile est à l'ouest, les fluctuations de luminosité du spectre se propagent du rouge au bleu, et en sens contraire si elle trouve à l'est. Car en provenance de l'étoile, les rayons bleus reçus par l'observateur ont leurs trajets au-dessus de ceux des rayons rouges arrivant sur le même observateur; donc quand elle est à l'ouest elle se couche, et quand l'air est assez calme ce sont les rouges qui passent dans une cellule d'air donnée avant les bleus, ainsi la fluctuation de luminosité due à cette cellule apparaît-elle dans le rouge avant de se manifester dans le bleu.

Lorsque  $Z$  diminue,  $\Delta y(\infty)$  diminue fortement aussi, et l'angle d'incidence des rayons sur la couche turbulente décroît; tout ceci conduit à ce que les rayons rouge et bleu évoqués ci-dessus ne peuvent plus traverser des cellules d'air bien différentes, et des colorations dans l'image de l'étoile subsistent mais sont plus difficilement détectables. Toutes les étoiles proches de l'horizon scintillent; si on ne voit pas les couleurs, c'est que l'étoile n'est pas assez lumineuse (vision scotopique). D'ailleurs en plaine la scintillation elle-même croît avec  $Z$  (ce qu'Arago fit mesurer en 1851 avec son scintillomètre par Mathieu et Goujon, car auparavant les connaissances sur ce point étaient contradictoires); mais la scintillation sature vers  $Z \cong 60^\circ$  ou  $70^\circ$  (en fonction de l'ouverture de l'instrument, du site et de l'état de l'atmosphère), voire décroît ensuite.

### A.3. Intervention de la dispersion intrinsèque à la diffraction

Dans le cas où dominent les effets ondulatoires, la scintillation décroît en fonction de  $\lambda_0$  (et son temps de corrélation en est une fonction croissante — comme les dimensions caractéristiques des figures de diffraction de Fresnel dues aux turbulences atmosphériques); ces effets avaient déjà été entrevus par Arago en 1814 — le premier à donner une explication sérieuse de la scintillation. Mais pour les temps caractéristiques des scintillations sensibles à l'œil, les effets géométriques l'emportent — d'où l'intérêt de la discussion présentée ci-dessus.

L'inhomogénéité de l'air n'est pas la seule cause de courbure des rayons lumineux; la diffraction par une couche turbulente en est une autre, et il se peut que celle-ci l'emporte sur celle-là. En effet, à une distance  $z$  d'un obstacle, la diffraction de Fresnel en éclairage collimaté (de longueur d'onde centrale  $\lambda$  dans le milieu où il se propage) fait apparaître une longueur caractéristique  $d = \sqrt{\lambda z}$ , et donc une déviation d'angle caractéristique  $d/z = \sqrt{\lambda/z}$ ; alors  $z$  est la longueur de Rayleigh associée à  $d$ . Dans une figure de diffraction de Fresnel à la distance  $z$ , les longueurs caractéristiques des variations de l'intensité ne peuvent pas être nettement plus petites que  $d$ . Avec  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$  et  $z = 10 \text{ km}$  on trouve  $d \cong 7 \text{ cm}$ , qui est petit devant l'échelle externe de longueur des cellules atmosphériques dont le défilement (selon l'hypothèse de Taylor ou de la « turbulence gelée ») à une dizaine de mètres par seconde [2, p. 75] provoque un temps de scintillation assez long pour être perçu par l'œil; dans ce cas, la scintillation peut être étudiée par l'optique géométrique. Mais il se produit un effet coopératif entre les fluctuations d'intensité dues à la diffraction et celles dues aux déviations fluctuantes prédites par l'optique géométrique lors de la traversée d'un milieu turbulent : quand celles-ci sont de l'ordre de  $\sqrt{\lambda/z}$ , ou avec les cellules atmosphériques de dimension voisine de  $d$  (l'intervention de  $\lambda$  dans  $\sqrt{\lambda/z}$  comme dans  $d$  venant de la dispersion intrinsèque à la diffraction), la scintillation est bien plus forte, et l'étude géométrique de la scintillation s'avère insuffisante [17].

## Références

- [1] J. Texereau, *La construction du télescope d'amateur*, 2<sup>e</sup> éd., Société Astronomique de France, Paris, 1961.
- [2] P. Léna, D. Rouan, F. Lebrun, F. Mignard, D. Pelat, *L'observation en astrophysique*, 3<sup>e</sup> éd., EDP Sciences, Les Ulis, 2008.
- [3] L. Dettwiller, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 13-62.
- [4] L. Dettwiller, « Short review on the refractive index of air as a function of temperature, pressure, humidity and ionization », 2022, *preprint*, <https://arxiv.org/abs/2204.02603>.
- [5] T. A. ten Brummelaar, « Differential path considerations in optical stellar interferometry », *Appl. Opt.* **34** (1994), p. 2214-2219.
- [6] A. V. Goncharov, N. Devaney, C. Dainty, « Atmospheric dispersion compensation for extremely large telescopes », *Opt. Express* **15** (2007), p. 1534-1542.
- [7] T. Nakajima, « Zenith-distance dependence of chromatic shear effect: a limiting factor for an extreme adaptive optics system », *Astrophys. J.* **652** (2006), p. 1782-1786.
- [8] Lord Rayleigh, « On the theory of stellar scintillation », *Phil. Mag.* **36** (1893), p. 129-142.
- [9] N. Devaney, A. V. Goncharov, C. J. Dainty, « Chromatic effects of the atmosphere on astronomical adaptive optics », *Appl. Opt.* **47** (2008), p. 1072-1081.
- [10] R. J. Sasiela, « Strehl ratios with various types of anisoplanatism », *J. Opt. Soc. Am.* **A 9** (1992), p. 1398-1406.
- [11] H. Labrijj, O. Herscovici-Schiller, F. Cassaing, « Computation of the lateral shift due to atmospheric refraction », *Astron. Astrophys.* **662** (2022), article n° A61, (15 p.).
- [12] W. M. Sinton, « On an achromatic stellar interferometer », *Astron. J.* **56** (1951), p. 140-141.
- [13] W. M. Sinton, « An achromatic stellar interferometer », *Astron. J.* **59** (1954), p. 369-375.
- [14] W. S. Finsen, « A critical evaluation of Sinton's achromatic interferometer », *J. Observateurs* **38** (1955), p. 217-220.
- [15] A. Danjon, « On the interferometric measurement of small angular distances », *Vist. Astron.* **1** (1955), p. 377-385.
- [16] G. Rousset, T. Fusco, « Optique adaptative : correction des effets de la turbulence atmosphérique sur les images astronomiques », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 293-344.
- [17] A. T. Young, « Saturation of scintillation », *J. Opt. Soc. Am.* **60** (1970), p. 1495-1500.

- [18] J. A. van den Born, W. Jellema, « Quantification of the expected residual dispersion of the MICADO Near-IR imaging instrument », *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **496** (2020), p. 4266-4275.
- [19] M. M. Colavita, J. K. Wallace, B. E. Hines, Y. Gursel, F. Malbet, D. L. Palmer, X. P. Pan, M. Shao, J. W. Yu, A. F. Boden, P. J. Dumont, J. Gubler, C. D. Koresko, S. R. Kulkarni, B. F. Lane, D. W. Mobley, G. T. van Belle, « The Palomar testbed interferometer », *Astrophys. J.* **510** (1999), p. 505-521.
- [20] Gravity Collaboration, R. Abuter *et al.*, « First light for GRAVITY: Phase referencing optical interferometry for the Very Large Telescope Interferometer », *Astron. Astrophys.* **602** (2017), article n° A94, (23 p.).
- [21] « Sur la mesure du diamètre des plus grandes planètes », *Hist. Acad. R. Sci. année 1748* (1752), p. 87-94.
- [22] L. Dettwiller, « L'invariant de Bouguer et ses conséquences : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 415-452.
- [23] P. Bouguer, « De la mesure du diamètre des plus grandes planètes : Description d'un nouvel Instrument qu'on peut nommer Héliomètre, propre à les déterminer; & Observations sur le Soleil », *Mém. Acad. R. Sci. année 1748* (1752), p. 11-34.
- [24] L. Dettwiller, « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 63-102.
- [25] F. Arago, « Sur les pouvoirs dispersifs », in *Œuvres complètes*, t. 11 (J.-A. Barral, éd.), vol. 2, Gide, Paris, 1859, p. 733-748.
- [26] G. B. Airy, « On the Eye-piece for correction of atmospheric dispersion », *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **30** (1870), p. 57-59.
- [27] D. Bonneau, *Mieux voir les étoiles – 1<sup>er</sup> siècle de l'interférométrie optique*, EDP Sciences, Les Ulis, 2019.
- [28] J. A. Anderson, « Applications of Michelson's interferometer method to the measurement of close double stars », *Astrophys. J.* **51** (1920), p. 263-275.
- [29] A. F. Brown, H. J. Hoxie, « Double stars measured by interference method », *Popular Astron.* **36** (1928), p. 385-387.
- [30] W. S. Finsen, « Compensation for atmospheric dispersion in double star interferometry », *Mon. Notes Astron. Soc. S. Afr.* **10** (1951), p. 7-8.
- [31] W. S. Finsen, « The significance of atmospheric dispersion in astronomical interferometry », *Circ. Union Observ. Johannesburg* **112** (1951), p. 82-86.
- [32] W. S. Finsen, « The Airy-Simms eyepiece for neutralizing atmospheric dispersion », *Observatory* **87** (1967), p. 41-42.
- [33] R. H. Wilson, « Construction and use of an interferometer for measurement of close double stars with the eighteen-inch refractor. Continuation of the use of the interferometer for close double star measurements at Flower Observatory », in *Publications of the University of Pennsylvania*, Astronomical Series, vol. 6, University of Pennsylvania Press, Philadelphie, 1941, part IV, p. 1-32.
- [34] H. M. Jeffers, « Measures of double stars », *Lick Obs. Bull.* **19** (1947), p. 175-181.
- [35] C. G. Wynne, « Correction of atmospheric dispersion in the infrared », *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **282** (1996), p. 863-867.
- [36] D. Y. Gezari, A. Labeyrie, R. V. Stachnik, « Speckle interferometry: diffraction-limited measurements of nine stars with the 200-inch telescope », *Astrophys. J.* **173** (1972), p. L1-L5.
- [37] D. Bonneau, A. Labeyrie, « Speckle interferometry: color-dependent limb darkening evidenced on alpha Orionis and omicron Ceti », *Astrophys. J.* **181** (1973), p. L1-L4.
- [38] A. Labeyrie, « Attainment of diffraction limited resolution in large telescopes by Fourier analysing speckle patterns in star images », *Astron. Astrophys.* **6** (1970), p. 85-87.
- [39] C. G. Wynne, S. P. Worswick, « Atmospheric dispersion correctors at the Cassegrain focus », *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **220** (1986), p. 657-670.
- [40] C. G. Wynne, « A new form of atmospheric dispersion corrector », *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **262** (1993), p. 741-748.
- [41] C. G. Wynne, « Atmospheric dispersion in very large telescopes with adaptive optics », *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **285** (1997), p. 130-134.
- [42] G. Avila, G. Rupprecht, J. M. Beckers, « Atmospheric dispersion correction for the FORS focal reducers at ESO VLT », *Proc. SPIE* **2871** (1996), p. 1135-1143.
- [43] E. Ketteler, « Ueber die Dispersion des Lichts in den Gasen », *Ann. Phys. (Leipzig)* **200** (1865), p. 390-406.
- [44] A. A. Michelson, « Some recent application of interference methods », *Proc. Phys. Soc. Lond.* **33** (1920), p. 275-285.
- [45] A. Labeyrie, « Interference fringes obtained on Vega with two optical telescopes », *Astrophys. J.* **196** (1975), p. L71-L75.
- [46] C. A. Hummel, J. T. Armstrong, A. Quirrenbach, D. F. Buscher, D. Morkuzevich, N. M. Elias II, « Very high precision orbit of Capella by long baseline interferometry », *Astron. J.* **107** (1994), p. 1859-1867.
- [47] J. E. Baldwin, M. G. Beckett, R. C. Boyesen, D. Burns, D. F. Buscher, G. C. Cox, C. A. Haniff, C. D. Mackay, N. S. Nightingale, J. Rogers, P. A. G. Scheuer, T. R. Scott, P. G. Tuthill, P. J. Warner, D. M. A. Wilson, R. W. Wilson, « The first images from an optical aperture synthesis array: mapping of Capella at two epochs », *Astron. Astrophys.* **306** (1996), p. L1-L16.
- [48] J. T. Armstrong, D. Mozurkewich, L. J. Rickard, D. J. Hutter, J. A. Benson, P. F. Bowers, N. M. Elias II, C. A. Hummel, K. J. Johnston, D. F. Buscher, J. H. Clark III, L. Ha, L.-C. Ling, N. M. White, R. S. Simon, « The navy prototype optical interferometer », *Astrophys. J.* **496** (1998), p. 550-571.
- [49] T. A. ten Brummelaar, H. A. McAllister, S. T. Ridgway, W. G. Bagnuolo Jr., N. H. Turner, L. Sturmann, J. Sturmann, D. H.



- Berger, C. E. Ogden, R. Cadman, W. I. Hartkopf, C. H. Hopper, M. A. Shure, « First results from the CHARA array. II. A description of the instrument », *Astrophys. J.* **628** (2005), p. 453-465.
- [50] F. Roddier, « Triple correlation as a phase closure technique », *Opt. Commun.* **60** (1986), p. 145-148.
- [51] Y. Kok, M. J. Ireland, P. G. Tuthill, J. G. Robertson, B. A. Warrington, A. C. Rizzuto, W. J. Tango, « Phase-referenced interferometry and narrow-angle astrometry with SUSI », *J. Astron. Instrum.* **2** (2013), p. 1340011-1-1340011-32.
- [52] S. Gillessen, G. Perrin, W. Brandner, C. Straubmeier, F. Eisenhauer, S. Rabien, A. Eckart, P. Lena, R. Genzel, T. Paumard, S. Hippler, « GRAVITY: the adaptive-optics-assisted two-object beam combiner for the VLTI », *Proc. SPIE* **6268** (2006), p. 626811-1-626811-9.
- [53] Gravity Collaboration, R. Abuter *et al.*, « Detection of orbital motions near the last stable circular orbit of the massive black hole SgrA\* », *Astron. Astrophys.* **618** (2018), article n° L10, (15 p.).
- [54] Gravity Collaboration, M. Nowak *et al.*, « Direct confirmation of the radial velocity planet  $\beta$  Pictoris c », *Astron. Astrophys.* **642** (2020), article n° L2, (8 p.).
- [55] D. D. S. Hale, M. Bester, W. C. Danchi, W. Fitelson, S. Hoss, E. A. Lipman, J. D. Monnier, P. G. Tuthill, C. H. Townes, « The Berkeley infrared spatial interferometer: a heterodyne stellar interferometer for the mid-infrared », *Astrophys. J.* **537** (2000), p. 998-1012.
- [56] A. Glindemann, J. Argomedo, R. Amestica, P. Ballester, B. Bauvir *et al.*, « The VLTI – A status report », *Proc. SPIE* **4838** (2003), p. 89-100.
- [57] J. M. Hill, R. F. Green, J. H. Slagle, « The Large Binocular Telescope », *Proc. SPIE* **6267** (2006), p. 1-15.
- [58] P. Léna, *Une histoire de flou – Miroirs, trous noirs et autres mondes*, Le Pommier, Paris, 2019.
- [59] M. G. Lacasse, W. A. Traub, « Glass compensation for an air filled delay line », in *High-Resolution Imaging by Interferometry* (F. Merkle, éd.), European Southern Observatory, Garching bei München (RFA), 1988, p. 959-970.
- [60] W. J. Tango, « Dispersion in stellar interferometry », *Appl. Opt.* **29** (1990), p. 516-521.
- [61] C. Pannetier, D. Mourard, F. Cassaing, S. Lagarde, J.-B. Le Bouquin, J. Monnier, J. Sturmman, T. ten Brummelaar, « Compensation of differential dispersion: application to multiband stellar interferometry », *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **507** (2021), p. 1369-1380.
- [62] P. R. Lawson, J. Davis, « Dispersion compensation in stellar interferometry », *Appl. Opt.* **35** (1996), p. 612-620.
- [63] L. Koechlin, P. R. Lawson, D. Mourard, A. Blazit, D. Bonneau, F. Morand, P. Stee, I. Tallon-Bosc, F. Vakili, « Dispersed fringe tracking with the multi- $r_0$  apertures of the Grand Interféromètre à 2 Télescopes », *Appl. Opt.* **35** (1996), p. 3002-3009.
- [64] E. P. Wallner, « Minimizing atmospheric dispersion effects in compensated imaging », *J. Opt. Soc. Am.* **67** (1977), p. 407-409.
- [65] R. Foy, A. Migus, F. Biraben, G. Grynberg, P. R. McCullough, M. Tallon, « The polychromatic artificial sodium star: a new concept for correcting the atmospheric tilt », *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **111** (1995), p. 569-578.
- [66] J.-P. Pérez, *Optique géométrique et ondulatoire*, 4<sup>e</sup> éd., Masson, Paris, 1994.
- [67] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics – Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, 6<sup>e</sup> éd., Pergamon Press, Oxford, 1980.



---

Astronomie, atmosphères et réfraction / *Astronomy, Atmospheres and Refraction*

# Novaya Zemlya effect and Fata Morgana. Raytracing in a spherically non-symmetric atmosphere

*L'effet Nouvelle-Zemble et les Fata Morgana. Tracé de  
rayons dans une atmosphère sans symétrie sphérique*

Siebre van der Werf<sup>a</sup>

<sup>a</sup> University of Groningen (Retired), Groningen, Netherlands  
E-mails: [svvanderwerf@kpnmail.nl](mailto:svvanderwerf@kpnmail.nl), [s.y.van.der.werf@rug.nl](mailto:s.y.van.der.werf@rug.nl)

**Abstract.** Raytracing in a non-symmetric atmosphere is discussed and illustrated by new simulations of both historical and mythical observations, such as the Novaya Zemlya phenomenon seen by the Dutch in 1597 and Nansen's sighting of it in 1894. An alternative interpretation is given of the mythical hafstramb monster in the Greenland Sea. Recent photographic material that shows mirages of the water surface is analyzed and a simulation presented. Raytracing techniques are reviewed and it is shown that numerical integration by distance is much preferred over other choices of the integration parameter.

**Résumé.** Le tracé de rayons dans une atmosphère non-symétrique est discuté et illustré par de nouvelles simulations numériques d'observations, historiques et mythiques, tel le phénomène de la Nouvelle-Zemble observé par le Hollandais en 1597 et rapporté par Nansen en 1894. Une interprétation nouvelle est donnée du monstre mythique *halfstramb* dans la mer du Groenland. Des documents photographiques récents, montrant des mirages de la surface de l'eau, sont analysés et leur simulation présentée. Les techniques de tracé de rayons sont revues et il est montré qu'une intégration numérique sur la distance est bien préférable à d'autres choix du paramètre d'intégration.

*Published online: 6 January 2023, Issue date: 11 August 2023*

## 1. Introduction

The Novaya Zemlya effect and Fata Morgana are understood as phenomena where light rays are trapped in a temperature inversion that is strong enough to duct them. This may occur when at some height above ground or sea the temperature gradient becomes such that a locally horizontal ray has the same curvature as the surface of the earth. This critical gradient is about 0.1 °C/m for otherwise normal conditions of pressure and humidity. If, moreover, rays are curved downward stronger above this height and less below it, they may travel on oscillating trajectories and follow the duct for as far as it stretches.

The condition for the Novaya Zemlya effect to occur, is that the light of the sun is captured below an inversion and is then ducted toward the observer. Or, as we like to think of it in our simulations wherein rays are traced backward from the observer: the rays will follow the duct for as long as it is strong enough to hold them. Away from the observer, beyond the point where the inversion has weakened enough, rays will either escape or hit the surface. Those that escape may produce the Novaya Zemlya effect if the sun happens to be just in the right spot.

Within the duct there may be obstacles for the light rays such as islands, ships, icebergs and many more things. These will then be seen by the observer and appear to him as mirages or Fata Morganas, their images often distorted beyond recognition.

I will first discuss the basic ingredients of ray tracing such as are required for calculating refractions in an atmosphere of spherical symmetry. Extension to non-symmetric atmospheres is necessary when a ducting inversion is introduced, which must naturally be of finite length. There are more refinements, that are suggested by available examples. These extensions will be made by discussing the best known historical observations and by making simulations of them. The examples I choose are in the first place the observation by the Dutch on Novaya Zemlya in 1597, the event from which the phenomenon takes its name [1]. I have made a simulation of it before, but I will present a new one here. Later in that same year the Dutch also report seeing mirages or Fata Morganas of the distant coast across the Kara Sea and I give a simulation of it.

The first illustration of the Novaya Zemlya effect is due to Fridtjof Nansen [2]. On 16 February 1894 he witnessed it as an image consisting of several horizontal stripes. To my knowledge a simulation of it has not been attempted before.

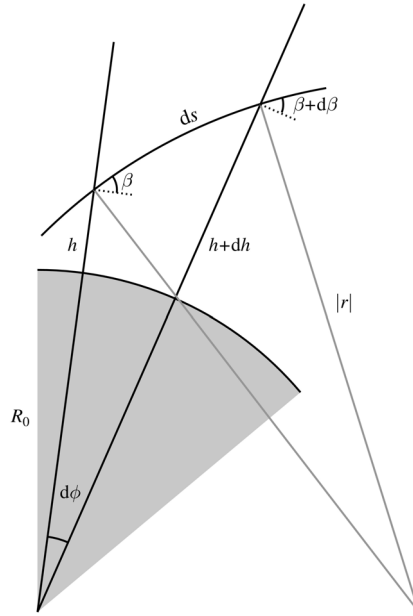
A mythical appearance in old Norse literature is the *hafstramb* or *merman* [3–6]. It may show itself as a humanlike figure on the horizon. In this case a simulation has been made earlier. Waldemar Lehn has proposed that it might be a mirage of an orca, sticking its snout above the water [7]. I will present an alternative simulation. These historical documents are great literature and their stories have played a role in our understanding of the phenomena that they describe. Making simulations of them turns out to be challenging. Besides that, I include translations of the original narratives.

More recent, of course, is photographic material of mirages, also from outside the Arctic. A special case is the “wall of water” at the horizon. It is found that not just one, but different types of mirage may produce this illusion. There exists a widespread misunderstanding about the word illusion. A Fata Morgana that you see is real. But what you think to recognize in it becomes an illusion if in reality it is not what you imagine to see. Examples in this article are: the Fata Morgana that shows you a distorted image of an iceberg is real enough and can be photographed. But when you think it to be a monster, then that is an illusion. Similarly for the Fata Brumosa and hafgerdingar that are Fata Morganas of the water surface in a distance. The effect is real. The illusion occurs only when you imagine to see a wall of water rising up vertically at the horizon.

## 2. Elements of raytracing

Before extending to spherically non-symmetric atmospheres, I will shortly review the methods that lend themselves to this purpose. Some of the following material has been borrowed from earlier publications on refraction [8–15], and is reused or adapted here with the kind permission of the publishers.

Figure 1 illustrates the (increments of) variables of the light ray:  $\phi$  = polar angle measured from the Earth’s center;  $x = R_0\phi$  is the distance along the Earth’s surface;  $\beta$  = tilt angle or slope, measured from the local horizontal. Its complement is the local zenith angle:  $z = 90^\circ - \beta$ ;  $ds$  = length of the trajectory element. These describe the geometry of the path. The aim of ray tracing is usually to determine path integrals, such as the refraction integral  $\xi = \int (d\beta - d\phi)$



**Figure 1.** Ray segment and explanation of parameters.

(actually, when counted as positive, refraction =  $-\xi$ ) and the air mass integral  $M = \int \rho ds$ , where  $\rho$  is the density of any constituent of the atmosphere that we might be interested to know, dry air, water vapor, CO<sub>2</sub> etc...

For any path the following differential equations govern its geometry:

$$dh = (\sin \beta) ds \tag{1a}$$

$$d\beta = \left( \frac{\cos \beta}{R_0 + h} + \frac{1}{r} \right) ds \tag{1b}$$

$$d\phi = \frac{\cos \beta}{R_0 + h} ds. \tag{1c}$$

To these, the expressions for refraction and air mass may be added.

$$d\xi = d\beta - d\phi = \frac{1}{r} ds \tag{1d}$$

$$dM = \rho ds. \tag{1e}$$

I have chosen path length,  $s$ , as the integration variable in the above equations, in part because this choice provides the most concise forms. In particular, refraction and air mass are just path integrals. Other choices are possible and I will discuss their relative merits later-on.

The most widely used method for solving a set of coupled differential equations such as the above, is Runge–Kutta integration, a family of procedures that dates back to 1895 [16] and to which numerous refinements have since been amended, that are to be found in text books on numerical methods. In these equations,  $1/r$  is the local curvature of the ray, and it is here that the physics enters. For a spherically symmetric atmosphere the refractive index,  $n$ , does not depend on  $\phi$ . Then, the quantity

$$(R_0 + h) n \cos \beta = Cst \text{ along the ray.} \tag{2a}$$

This is usually called Bouguer’s law.

**Table 1.** Raytracing integration schemes

Int. variable = $h$	Int. variable = $\beta$	Int. variable = $\phi$	Int. variable = $s$
$d\beta = \frac{\left[1 + \frac{R_0+h}{r \cos \beta}\right]}{(R_0+h) \tan \beta} dh$	$dh = \frac{(R_0+h) \tan \beta}{\left[1 + \frac{R_0+h}{r \cos \beta}\right]} d\beta$	$dh = (R_0+h) (\tan \beta) d\phi$	$dh = (\sin \beta) ds$
$d\phi = \frac{1}{(R_0+h) \tan \beta} dh$	$d\phi = \frac{1}{\left[1 + \frac{R_0+h}{r \cos \beta}\right]} d\beta$	$d\beta = \left[1 + \frac{R_0+h}{r \cos \beta}\right] d\phi$	$d\beta = \left[\frac{\cos \beta}{R_0+h} + \frac{1}{r}\right] ds$
$ds = \frac{1}{\sin \beta} dh$	$ds = \frac{\frac{R_0+h}{\cos \beta}}{\left[1 + \frac{R_0+h}{r \cos \beta}\right]} d\beta$	$ds = \frac{R_0+h}{\cos \beta} d\phi$	$d\phi = \frac{\cos \beta}{R_0+h} ds$
$d\xi = \frac{1}{r \sin \beta} dh$	$d\xi = \frac{\frac{R_0+h}{r \cos \beta}}{\left[1 + \frac{R_0+h}{r \cos \beta}\right]} d\beta$	$d\xi = \frac{R_0+h}{r \cos \beta} d\phi$	$d\xi = d\beta - d\phi = \frac{1}{r} ds$
$dM = \frac{\rho}{\sin \beta} dh$	$dM = \frac{\rho \frac{R_0+h}{\cos \beta}}{\left[1 + \frac{R_0+h}{r \cos \beta}\right]} d\beta$	$dM = \rho \frac{R_0+h}{\cos \beta} d\phi$	$dM = \rho ds$

By taking its differential form, dividing out  $n(R_0+h)dh$  and using (1a), one finds

$$\frac{d\beta}{ds} = \left( \frac{1}{R_0+h} + \frac{1}{n} \frac{dn}{dh} \right) \cos \beta. \quad (2b)$$

Comparison with (1b) identifies the curvature as

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dh} \cos \beta. \quad (2c)$$

In each step, even in each sub-step of the integration, this expression for the curvature is taken along. It ensures that the Bouguer invariant is conserved as long as the atmosphere is spherically symmetric and that for a non-spherical atmosphere the curvature is adjusted to its local value.

It must be noted here that (2c) is often found with an additional minus sign. The philosophy behind it is that we are used to omit the sign when speaking about refraction. In this and previous works, I respect the formal mathematical definition of the curvature, wherein its sign is that of the second derivative of the path. Hence, the radius of curvature,  $r$ , of a downward bent path is taken as negative, as in Figure 1, where the radius of the local circle segment is given as its absolute value.

Evaluating the index of refraction requires knowing temperature, pressure and humidity for each height. This may be done by working with a polytropic atmosphere, with piece-wise constant lapse rates. It has the advantage that it allows for an analytic evaluation of the refractive index, such as proposed by Auer and Standish [17] and later in Sinclair and Hohenkerk's implementation of the method, which has become known as the RGO (Royal Greenwich Observatory) method [18,19]. In essence the method was described a century and a half earlier by Jean-Baptiste Biot [20]. This development is discussed by Dettwiler in the articles [21,22] of this special issue.

At the same time, this restriction to a polytropic atmosphere has become a disadvantage. For the understanding of out-of-the-ordinary sunsets and mirages, we want to consider more flexible and realistic temperature profiles. Nowadays, computing memory and speed are largely sufficient for numerically calculating the refractive index and its derivative in any atmosphere.

### 2.1. Choice of the integration parameter

Above, the integration scheme is given for path length,  $s$ , as the integration parameter. By (1a)–(1c), one may make a transformation and instead choose integration by height,  $h$ , by tilt angle,  $\beta$ , or by distance along the Earth's surface,  $dx = R_0 d\phi$ . The different schemes are given in Table 1. And since they are connected by simple transformations, of course all methods give identical results, when applied to a spherically symmetric atmosphere and they preserve Bouguer's invariant with the same accuracy, which depends on the (double) precision of your computer program.

There are also limitations, and these are different for the four options. Integrating by height introduces singularities at the horizon, because in all differentials the denominator contains either  $\sin(\beta)$  or  $\tan(\beta)$ , as shown in the first column of Table 1. Even with this problem cured, rays leaving the observer's eye at a negative angle pose another one. Their trajectories must be split into two contributions, one from the observer to the lowest point of the ray and then from the lowest point upward again. For raytracing purposes, integration by height is not to be recommended.

Integration by  $\beta$ , the slope of the ray, is regular for horizontal rays as long as their second derivative is positive. Inferior mirages and even the mock mirage, where rays take a dip into an inversion layer below the observer and escape again from it, are examples of monotonously increasing slope and their raytracing poses no problems. For rays of oscillating trajectories, the method becomes cumbersome and calculations will have to be split into parts of monotonically increasing or decreasing slope, making the extension to non-symmetrical atmospheres prohibitively difficult. For rays that go through a local maximum and are bent back toward the Earth, the method becomes numerically unstable. The denominators of the terms in column 2, Table 1, vanish. Also  $d\beta$  vanishes, see columns 3 where the same term is now the nominator. But when choosing  $\beta$  as the integration parameter, one needs a non-zero step size, however small, which will make the terms in column 2 explode.

Path length,  $s$ , seems the most problem-free choice. The equations that govern it, Table 1, column 4, are the simplest in form and neither for horizontal rays or even for vertical ones does the method show discontinuities. Also integration by horizontal distance,  $x = R_0\phi$ , is suited for all trajectories, with the only exception of a strictly vertical ray.

### 2.2. Parametrizing inversion layers

In describing superior mirages, ideally a measured temperature profile will be available. In the absence of it, a parametrized form may be used for an inversion that in general will reach from ground or sea level up to some height and that higher up will join smoothly onto a standard atmosphere. Two functional forms I find particularly useful. The first is:

$$\text{WS}(h; h_0, a) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{h-h_0}{a}\right)}. \quad (3)$$

It is borrowed from nuclear physics, where it is known as the Woods–Saxon function, a common two-parameter parametrization of the radial density of nuclear matter inside an atomic nucleus or of its charge distribution. The function makes a jump from 0 to 1 across  $h = h_0$  and the width of the transition region is determined by the parameter  $a$ , the *diffuseness*. The function will have to be scaled by multiplying it with  $\Delta T$ , the adopted temperature jump across the inversion. I have used this function in Refs [11, 12] for simulations of the Novaya Zemlya effect and other sunsets.

Another suitable choice is the hyperbolic three-parameter function

$$\text{FH3}(h; h_1, h_2, a) = \frac{1}{2} + \frac{a}{2(h_2 - h_1)} \ln \left[ \frac{\cosh((h - h_1)/a)}{\cosh((h - h_2)/a)} \right], \quad (4a)$$

wherein the second term is just the integral of the hyperbolic tangent from  $(h-h_2)/a$  to  $(h-h_1)/a$ . Normalized as it stands, Equation (4a) represents a unit jump from 0 to 1 between  $h = h_1$  and  $h = h_2$ . In between, the function is linear. The corners are rounded. Just like for the WS function the diffuseness determines the width of the region over which the jump takes place, the parameter  $a$  in (4a) determines the “rounding width” of the corners at  $h_1$  and  $h_2$ . The smaller  $a$ , the sharper the corners. With a slight modification of nomenclature, we will denote it as the *diffusiveness*.

By exponentiating FH3 with some power  $p$ , the region between  $h_1$  and  $h_2$  is made to follow a power law:

$$\text{FH4}(h; h_1, h_2, a, p) \equiv [\text{FH3}(h; h_1, h_2, a)]^p. \quad (4b)$$

This FH4 function still represents a jump from 0 to 1 and multiplied with  $\Delta T$  it is a suitable and flexible way to parametrize an inversion. I have used this hyperbolic form in Ref. [15], which deals with the hafgerdingar mirage. In this reference, the inverse of the diffusiveness was introduced as the *steepness*.

I have named these functions FH3 and FH4 (fonctions hyperboliques) simply by the number of their parameters.

### 2.3. Ducts and extension to non-spherical atmospheres

Inversions come and go and their characteristics may change from hour to hour or even from minute to minute. They also do not extend indefinitely. If they would, the light rays from the sun could not enter below the inversion and, as in a light guide, be ducted from there toward the observer. The Novaya Zemlya effect would not exist and for a Fata Morgana its background would be entirely due to light scattered into the duct from above.

A convenient way to parametrize the required weakening of the inversion with distance is to introduce an attenuation factor that multiplies the temperature jump,  $\Delta T$ .

$$A(x) = 1 \quad (x \leq x_0) \quad (5a)$$

$$A(x) = 1/[1 + (x - x_0)^2/r^2] \quad (x > x_0). \quad (5b)$$

The strength of the inversion is kept constant from the observer at  $x = 0$  till a distance  $x_0$  away from him and beyond it decreases as a semi-lorenzian function with an *attenuation length*,  $r$ , such that it is reduced to half its strength at  $x = x_0 + r$ . This introduction of a dependence on distance breaks the spherical symmetry of the atmosphere. The index of refraction no longer depends solely on height above ground, but also on the distance along it. Replacing (2c), the ray curvature is now:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{n} \left[ \frac{\partial n}{\partial h} \cos \beta - \frac{\sin \beta}{R_0 + h} \frac{\partial n}{\partial \phi} \right]. \quad (6)$$

There are several other ways in which the atmosphere may vary from place to place. For instance, the terrain may not be perfectly flat. If it is yet smooth enough, it may be a shield of constant temperature and an inversion layer superimposed on it may still guide the light rays. Another interesting way in which spherical symmetry may be broken arises from the fact that in many ways an inversion behaves as a system of two liquids: cold air below and warmer above with little mixing. The separating surface between them is able to support long running waves. In Ref. [15] this was used to bring in the dynamics by which the hafgerdingar mirage might look like three giant waves rolling in, as it is told in the Old Norse myth [3–5].

Yet another mechanism that may bring about changes in an inversion, even local changes, is wind. Especially the advection of warmer air from a direction transverse to the line of sight, may induce an additional layer. A parametrization in terms of several stacked WS- or FH4 functions

might then be attempted. I will use this option further on in the simulation of Fridtjof Nansen's observation on 16 February 1894 [2] and for my simulation of the hafstramb.

All deviations from spherical symmetry that are mentioned above are parametrized in terms of distance. I find it therefore most convenient to incorporate them in a raytracing procedure that itself uses distance as the integration parameter.

### 3. The observations of the Dutch on Novaya Zemlya

The Novaya Zemlya phenomenon takes its name from the island where in 1597 it was observed by the crew of William Barents. Three voyages had been undertaken by the Dutch to find a trade route “north of Norway, Moscovia and Tartaria to the kingdoms of Cathay and China” as it was stated in their mission orders. The third attempt ended with the famous wintering on Novaya Zemlya. We owe the account of these voyages to Gerrit de Veer, a young man who survived the wintering episode and the return voyage in two open boats. His journal [1] was published in Dutch, Latin and German, all in 1598. A year later also in French and in Italian. An English translation appeared in 1609.

The remarkable observation on 24 January 1597 of the two weeks early sunrise became an issue of world-wide debate. As early as 1604 Johannes Kepler proposed that the Novaya Zemlya phenomenon must have been a reflection [23–26]. He was ahead of his time by almost four centuries.

There is more: the same day, in the night of 24–25 of January they witnessed a conjunction between the moon and Jupiter. Not only did it confirm their day counting, it also gave them their longitude. . . about twenty degrees more to the east than it had been in reality. On 27 January they saw the sun again.

Two French astronomers have written about this conjunction and Barents' longitude estimate, Pierre Charles Le Monnier [27] in 1779 and Joseph Jean Bailly [28] in 1875. At the time of the conjunction also Jupiter was well below the horizon. The same extraordinary refraction by which they had seen the sun just half a day before, must have also made Jupiter visible. Bailly addresses yet another observation. On 9 March De Veer's journal suggests that they might have seen a mirage of the Yamal peninsula of the Russian mainland, a distance of 170 nautical miles<sup>1</sup> from Ice Harbour, their wintering place on Novaya Zemlya.

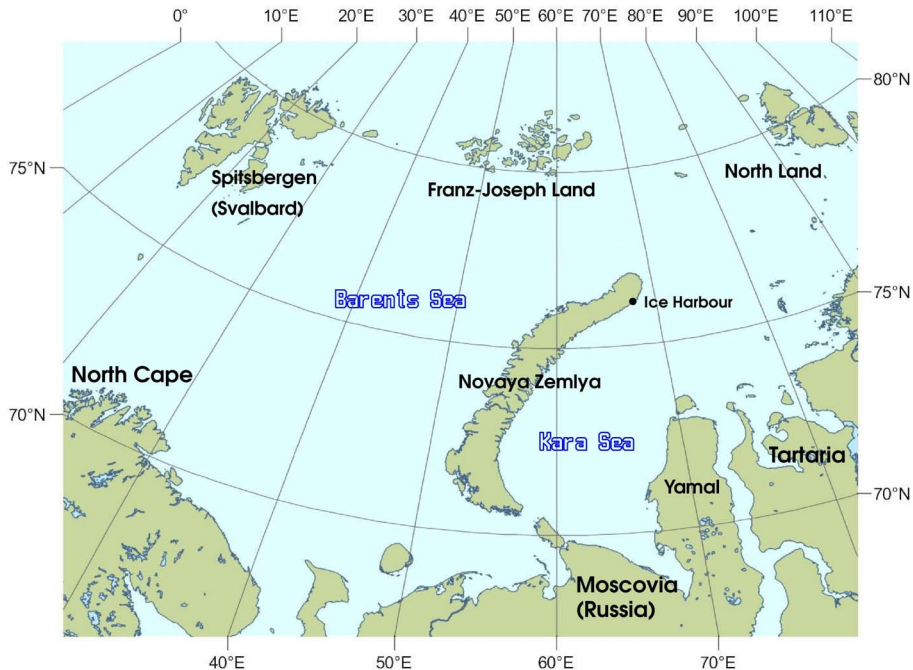
I will attempt simulations for all observations. But first we give the floor to De Veer himself. The way he expresses himself may seem odd at times, but closer reading reveals details that have escaped attention for four centuries. Rather than reproducing below the existing English translation of 1609, I give my own, in which I will attempt to follow the original text as faithfully as possible.

#### 3.1. *Waiting for the sun*

Till a week after the turn of the year 1596–1597 the weather had been boisterous and cold. Foul weather, as De Veer writes, with lots of snow. From the second week in January on, it calms down. The light of the day increases. The weather is fair and clear and at night the heavens are star-lit. They use the opportunity to determine once more their latitude by taking the height of Aldebaran. On the sixteenth, they already see “some redness in the sky”. From then on, their minds are on the sun, which can return any day now, as it seems. The wish is the father of the thought and Barents tries to tone down their too high-strung expectations. More than two weeks they will have to wait.

<sup>1</sup>For seafaring people the nautical mile (1.852 km) is the common unit of distance. Its length corresponds to 1 arcminute as measured along a meridian. In this article I will use both miles and kilometres as convenience dictates.





**Figure 2.** Map of the arctic region. Adapted from Ref. [8] with permission of the Historische Uitgeverij.

But on 24 January happens what was not to be expected. In the margin of his journal, Gerrit de Veer notes: *How the sun which they had lost the 4 of November appeared to them again on the 24 January, which is a great miracle, and which will give all learned men enough to argue about.*

And he writes: *The 24 of January it was fair clear weather, with a west wind. Then I and Jacob Heemskerck,<sup>2</sup> and another man with us, went to the sea-side on the south side of Nova Zembla, where, against our expectation, I as the first saw the upper rim of the sun; whereupon we rushed home again, to tell William Barents and the rest of our mates that joyful news. But William Barents, being a good and well experienced pilot, would not believe it and reckoned that it was still about fourteen days before the time that the sun would reappear there at our latitude. There against we firmly opposed, that we had seen the sun, and many wagers were laid about this.*

*On the 25 and 26 of January it was misty and hazy weather, so that we had no sight. Then those who had laid wagers to the contrary, thought that they had won, but on the 27 it was clear and bright weather; then all of us saw the sun in her full roundness above the horizon, which made it clear enough that we had indeed seen her on the 24.*

Further-on De Veer describes the days 25–27 January in more detail. Here he summarizes the most important events: they saw the sun again on the 27th and could convince their mates that they would have seen it also on the 24th.

The following text must have been added after their return to Holland. It appears to have been written in answer to Robbert Robbertsz, their former instructor on navigation, with whom De Veer and Heemskerck met in November 1597. De Veer's book was published only half a year later, in April 1598. The interval gave him the opportunity to include a defense against Robbertsz' opinion that their calendar keeping could not have been correct:

<sup>2</sup>On this third voyage Jacob van Heemskerck was the skipper. William Barents was the navigator.

*And as a different opinion has been brought forward about this event, that it is against the understanding of all old and new writers, indeed in contradiction with the course of Nature and the roundness of the Earth and the Heavens, and about which some say that, since there had been no daylight for a long time, we had probably overslept, about which we know better: but concerning the matter in itself, since God is wonderful in his works, we want to ascribe it to his almighty power, and leave it to others to dispute of. But that no one should think that we were in any doubt ourselves, should we pass this matter over in silence, therefore we wish to give account thereof, how we made sure of our measurement and reckoning.*

*You must understand then, that when we first saw the sun, it was in the 5th degree and 25 min of Aquarius and it should have been, according to our first guess, in the 16th degree and 27 min of Aquarius, by the time it should have reappeared to us, at that latitude of 76°.*

Barents had brought with him a book by Josephus (Giuseppe) Scala [29], an Italian physician, philosopher, mathematician and astronomer.<sup>3</sup> Scala's book is a compilation of pre-calculated positions of the sun, the moon and the planets for the period 1589–1600. Completely in line with Scala's terminology, De Veer writes that they would have expected to see the sun again when it would be at 16° 27' in Aquarius: an ecliptic longitude of 316° 27'. The corresponding date is 5 February.

*And he continues: About these conflicting things we could not wonder enough and said to each other, could we not be mistaken in the time, which, however, we thought impossible since, without missing a day, we had made notes of our daily happenings, and we had always used our clock and, when that was frozen, the 12-hour sand glass.*

*We discussed amongst each other how we could discern and make sure of the proper time. And having considered all that had to be considered, we thought it a good idea to look into the Ephemerides of Josephus Scala, printed in Venice for the years 1589 till 1600, and we found therein that on the 24th day of January (on which the sun first appeared to us), at the time it would be one o'clock in the night in Venice, the Moon and Jupiter were conjunct.*

*Thereupon we carefully estimated when the same conjunction should occur for us at the place of our house.*

*And having looked out sharply we found that this 24 of January was the same day on which the aforesaid conjunction happened in Venice, at one o'clock in the night, and for us in the morning when the sun was in the east: for we constantly watched the two planets as they gradually approached each other until the moon and Jupiter stood just one above the other, both in the sign of Taurus, and this at six o'clock in the morning. At that time Jupiter and the moon were conjunct, north by east<sup>4</sup> on the compass at our house and the south of our compass was SSW, there was the true south,<sup>5</sup> the moon being eight days old.*

*From all this it was clear that the Moon and the Sun were eight points apart.<sup>6</sup> This was around six o'clock in the morning and it differs from Venice by five hours in longitude, from which one may find how much we were more easterly than Venice, namely five hours, each hour being 15°, which amounts to 75° that we were East of Venice.*

*By all which it is manifestly to be seen that we had not failed in our counting, and that also we had found our right longitude by the two planets aforesaid; for the city of Venice lies at 37° and*

<sup>3</sup>Josephus (Giuseppe) Scala and Josephus (also Giuseppe) Moleti were the two astronomers who served on the committee that shaped the Gregorian Calendar. Scala died, 29 years young, still before the publication of his magnum opus. His new-calendar style ephemerides were published under supervision and with an introduction by Moleti.

<sup>4</sup>North by East: 1 point east from north, or a compass bearing of 11° 15'.

<sup>5</sup>On the compass, the true South read as SSW, meaning that the variation of the earth-magnetic field was two points west.

<sup>6</sup>The moon loses to the sun just over one point each day. They stood eight points apart and the moon's phase was just past half.

25 min<sup>7</sup> in longitude, and her latitude is 46 degrees and 5 minutes; whereby it follows that our place on Nova Zembla lies at 112 degrees and 25 minutes in longitude, and the high of the Pole 76 degrees. There now you have your proper longitude and latitude.

And a bit further on he concludes: *Concerning how one can understand what has been told above, that we lost the sun at 76 degrees on the 4 of November and saw her again on the 24 of January, we will leave that to be disputed by those who have made their profession thereof. To us, it is enough that we have proven that we have not been mistaken in the time.*

The date agrees with their calendar keeping. What is more, they know now not only the latitude, 76°, of their location, they also have found its longitude as 75° east from the meridian of Venice.

It is the 25th now. During day-time the skies are overcast. The sun does not show itself. On the next day, the 26th, visibility is good again, but over the horizon is a “bank or dark cloud, so that the sun could not be seen”. Jokes are made about the sun that nobody has seen, except then for the three men.

On the evening of that day, one of the mates dies. He had been ill for a long time. The next morning, the 27th, they dig a grave for him, taking turns in a bitter cold. Back inside the House, spirits are low. Some get visions of a doom-scenario: what if this cold stays on and they get snowed under again? Again it is Heemskerck, who pulls his men through. If everything else fails they can always escape through the chimney. And he will show them right-away how! One of the mates goes outside. He does not want to miss the spectacle of his skipper climbing out over the roof. There, an even bigger surprise awaits him: the sun. De Veer writes: *we hastily came out all together and all at the same time saw the sun in its full roundness, a little above the horizon.*

### 3.2. Raytracing for the sun, 24–27 January 1597

By their own account the House at Novaya Zemlya was at 76° north, “rather more than less”. Its remnants were discovered in 1871 by the Norwegian seal hunter Elling Carlsen. The precise location is 76° 15′.4 N, 68° 18′.6 E.

Earlier we have presented a raytracing analysis [12, 13] based on a Woods–Saxon type inversion of (3). Here, I give an analysis, using the hyperbolic form FH4 of (4b).

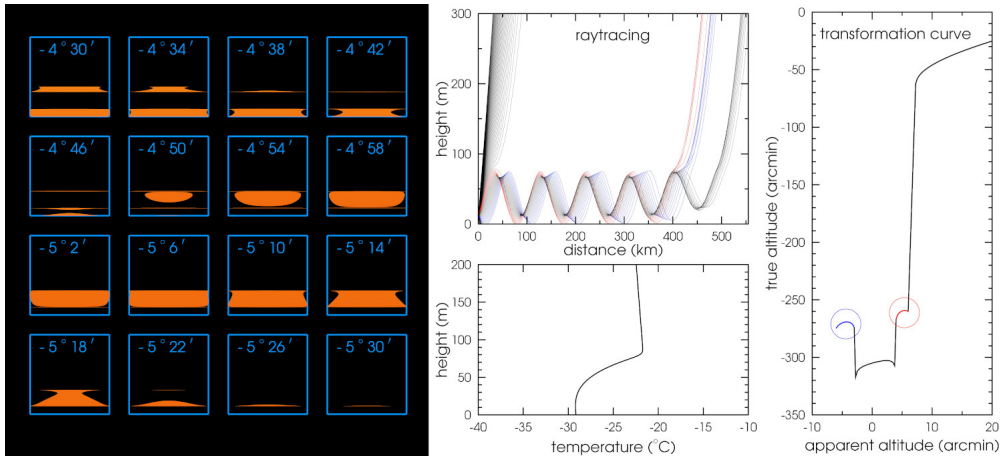
The parameters are: eye height = 14 m, ground temperature = −30 °C, ground pressure = 1040 hPa. For the inversion:  $\Delta T = 8$  °C, heights  $h_1 = 0$  m and  $h_2 = 80$  m, diffusiveness  $a = 4$  m, power  $p = 3$ . For the inversion length and attenuation (see (5)):  $x_0 = 300$  km,  $r = 200$  km. The calculation has been made for dry air.

It should be noted here that the choice of the power  $p$  is not arbitrary. For  $p \leq 1$ , in combination with  $h_1 = 0$  m, there can be no duct. The present choice for  $p = 3$ , ensures that the level where the radius of a downward curved ray becomes equal to that of the Earth's surface,  $1/r = -1/R_0$  in my convention, is well overhead of the observer. This is a necessary condition for a duct to exist.

On 24 January the sun was below the horizon by 5° 26′ at noon and the sun could just have been visible. At noon 27 January the sun's altitude was still −4° 42′. Within a span of an hour around mid-day, the images of the second row of Figure 3 could have been seen. They are indeed roundish, just as De Veer mentions.

On the day before, the 26th, the skies had been clear, but over the horizon there had been “a bank or dark cloud, so that the sun could not be seen”. This bank or cloud was the inversion. The sun becomes visible in it when its rays are caught in the duct and manage to travel though it toward the observer, as in a light guide. When there is a mismatch, the observer will not see the sun, but the inversion will still appear to him as a dark band.

<sup>7</sup>As reckoned from the adopted standard meridian of Tenerife.



**Figure 3.** Raytracing of the observations of the sun on 24–27 January 1597. On the left panel, the blue boxes are  $32' \times 32'$ , the dimension of the sun, when not deformed. Solar altitudes are indicated in each box. The middle panels show the temperature profile (lower panel) and the ray trajectories (upper panel). Right panel: the transformation curve that gives the relation between the true angle and apparent angle as seen by the observer. The lower part features the duct, wherein rays that escape farthest out, after 5 oscillations, give the lowest apparent altitudes: the region  $-3'$  to  $+3.75'$ , nearly symmetric around the astronomical horizon. Lower rays that escape after 4 oscillation, are shown in blue. Likewise, the rays of positive apparent altitude that also escape after 4 oscillations, are shown in red. In the transformation curve these rays produce the “wings” on both sides of the duct, which correspondingly are marked in blue and red. Rays for apparent altitudes higher than  $+6'$  break through the top of the inversion right away and make no oscillation.

Compare this with the text of Sir Ernest Shackleton in his book *South* [30]. Almost a week before the sun was expected back, they witnessed the Novaya Zemlya effect from the ice of the Weddell Sea. On 26 July 1915 he writes:

*Just before noon to-day (July 26) the top of the sun appeared by refraction for one minute, seventy-nine days after our last sunset. A few minutes earlier a small patch of the sun had been thrown up on one of the black streaks above the horizon.*

### 3.3. The Moon-Jupiter conjunction of 25 January 1597

Figure 4 shows the page of Scala’s ephemerides tables from which Barents learned that a conjunction of the Moon with Jupiter was predicted for 24 January at 13 h after mid-day or, in civil time: on the 25th at one hour past midnight. The time is rounded to the full hour. Yet, today we find from planetarium programs that the prediction came close within minutes. It is a conjunction in ecliptic longitude and the best criterion to recognize it would be to wait till you see Jupiter in line with the shadow edge over the moon.

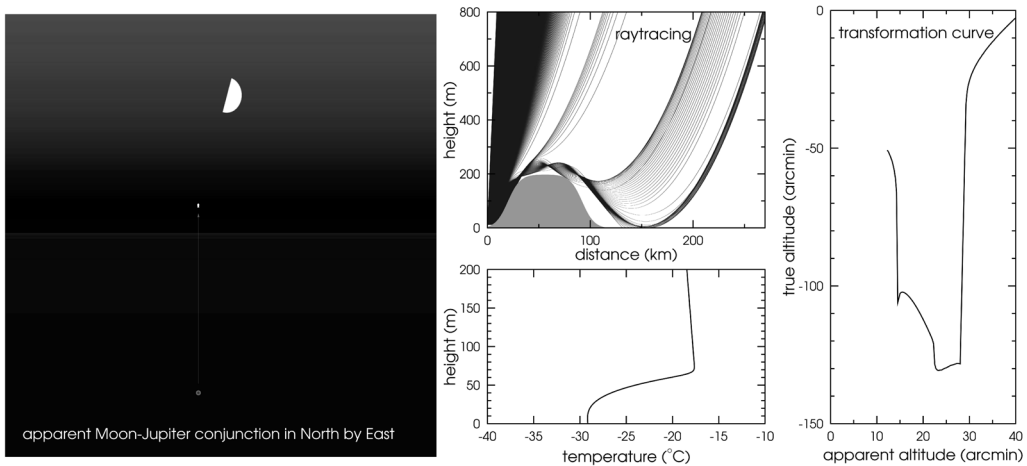
Gerrit de Veer writes that they observed the conjunction in the direction north by east, one point east from north. In reality, the conjunction took place in the direction *north by west*. At the time Jupiter was below the horizon by  $2^\circ 10'$  and moreover there was the mountain ridge in the line of sight. In earlier analyses [12, 13] we have shown that an inversion overlying these hills, may

Januarius.		1597					223
☾ Aspectus ☉ ad ☿ ♀ Planetas. ☽							
Dies	☉		Orient.	Occid.	Orient.	Orient.	Orient.
	H	M	♂	♃	♂	♀	♀
			H	H	H	H	H
1			☐ 8		♂ 4		♂ 2
2				* 2			♂ ♂ ♀ 21
3	♂	3 53	* 21				☐ ♃ ♀ 10
4	Afc.	6 00	☐ 15		Δ 13		☐ ♃ ♂ 8
5							
6					Δ 11		Δ 15
7				Δ 1		☐ 4	
8	Δ	10	♂ 16		☐ 22		
9						* 16	☐ 4 ☉ ☽ 4
10	☐	18 39					Δ ♃ ♀ 20
11	Afc.	5 30	♂ 12	* 3		* 13	Δ ☉ ♃ 15
12			* 20				
13							
14			☐ 22		♂ 4		☉ Perig.
15				Δ 14	♂ 21		
16						♂ 3	
17	♂	9 32	Δ 0	☐ 16			Δ ♃ ♂ 10
18	Afc.	24 00				* 16	
19				* 20	* 23		
20							
21			♂ 0			☐ 2	* 0 ☐ ☉ ♃ 10 ☉ ♃ 20
22			* 4		☐ 9		
23						Δ 16	☐ 17 Δ ♃ ♀ 12 ☐ ♃ ♀ 14
24	☐	18 42		♂ 13	Δ 22		
25	Afc.	21 30					
26			Δ 2				Δ 13
27			Δ 11				
28			☐ 14				☉ Apog.
29				* 13		♂ 3	☐ ♃ ♀ 3
30					♂ 5		
31			* 1				

Figure 4. The page from the *Ephemerides Josephi Scalae*, showing the aspects of the moon to the sun and the planets for the month of January 1597.

still duct the light. Jupiter might have been visible, but lifted up by almost three degrees, not in line with the horns of the moon, but trailing behind.

It is only about two hours later, when Jupiter has gained sufficiently on the Moon, that the looked-for line-up would be seen. That would have been at around 2 h 45 m Venetian time and the direction would indeed have been north by east. In that line of sight the mountain ridge is still some 200 m in height. These times agree well with predictions from modern ephemerides programs like the one of Jet Propulsion Laboratory [31] and planetarium programs, such as SkyMap [32], Cybersky [33], StarCalc [34], that all use the same software. They give for Jupiter a true altitude of  $-2^{\circ} 26' 39''$  at transit through North. Three quarters of an hour later its azimuthal direction would have been  $11^{\circ}$  East and its true altitude  $-2^{\circ} 11' 30''$ . Over the next fifteen minutes it would rise to  $-2^{\circ} 0' 0''$  in  $14^{\circ}$  East. These directions would have been judged as North by East on a



**Figure 5.** Simulation of the Moon-Jupiter conjunction as it was recognized by the Dutch on Novaya Zemlya in the early morning of 25 January 1597.

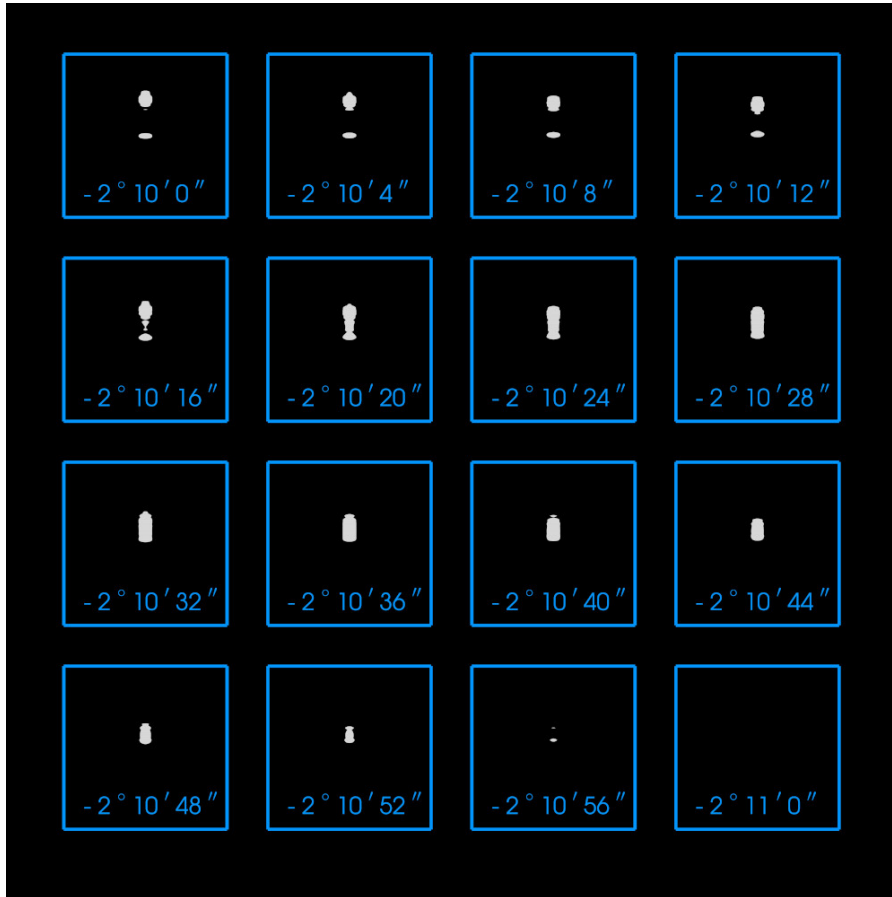
correctly aligned compass. De Veer mentions in a rather cryptic way that they had two compasses. Their magnetic ship's compass, taken ashore, had a misreading of two points West. The other, described as “the compass at our house”, was a slab of lead with a compass rose engraved on it, mounted on a block of wood outside the house and “adjusted to the proper meridian” [8, 12, 13]. It is only on 8 February, when they see the sun rise in SSE and set in SSW, that De Veer gives these details. The leaden compass was found in the remains of the house in 1979. In the older literature about this conjunction, it appears that only Le Monnier [27] did realize the existence of this second and aligned compass.

Figure 5 gives the full analysis, not with the WS-type inversion as in [12, 13], but with the FH4 form that I used before to simulate the images of the sun. The inversion lifts Jupiter up from  $2^{\circ} 10'$  below the horizon to  $24'$  above it. The moon's true altitude is  $1^{\circ} 26'$  and refraction lifts it to  $1^{\circ} 52'$ . The nearly straight shadow edge is tilted by  $18^{\circ}$ . Jupiter's true altitude falls right on the bottom of the transformation curve, in the right hand panel. Since this bottom is rather flat, the observer sees Jupiter as a much elongated image.

Although raytracing shows that Jupiter could have been visible, yet the question remains if it was bright enough to distinguish it. The airmass,  $X$ , along its path is  $690.000 \text{ kg/m}^2$ . For the US standard atmosphere the airmass of a perfectly vertical ray is  $X_{\text{unit}} = 10.350 \text{ kg/m}^2$ , and relative airmass is counted in these units. Adopting an extinction coefficient of  $k = 0.1$ , appropriate for very clean air, the apparent magnitude of Jupiter would have been raised by  $kX/X_{\text{unit}} = 6.7$  from  $m_0 = -2.4$  to an apparent magnitude  $m = 4.3$ .

Figure 6 shows how Jupiter would have been seen, rising in true altitude from  $-2^{\circ} 31'$  to  $-2^{\circ} 30'$ . When higher up in the sky, Jupiter's apparent diameter is 40 arcseconds. Here, in our raytracing, Jupiter's images are up to 2.5 times vertically stretched. This magnification increases Jupiter's brightness correspondingly and reduces its magnitude from 4.3, found above, to 3.3. Against the darkness of the duct, darker yet than the sky above it, Jupiter could therefore have been visible with the brightness of a magnitude 3 star, comparable with the nearby Pleiades.

The apparent conjunction was recognized only about 1:45 h after it really took place. This translates into an error in longitude of  $26^{\circ}$ . Barents' estimate that they would find themselves at  $75^{\circ}$  east of Venice is thus reduced to about  $49^{\circ}$ , which comes much closer to its real difference of  $56^{\circ}$ .



**Figure 6.** Images of Jupiter as they would have appeared in North by East to Barents and his crew. The blue boxes are  $8 \times 8$  arcminutes and Jupiter's true altitude is indicated in each of the boxes.

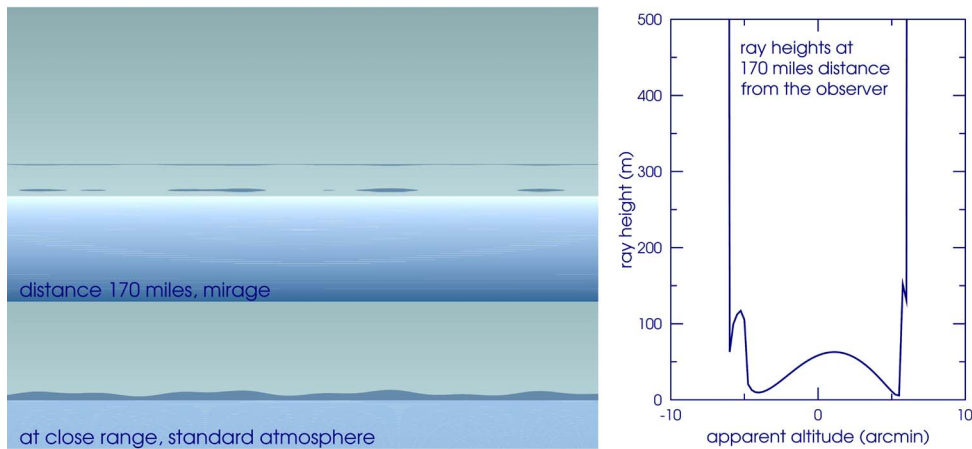
### 3.4. Seeing land across the Kara Sea

In 1875, the French astronomer Joseph Jean Baills [28], presented a contribution to the Académie des Sciences wherein he discussed the conjunction that Barents and his men would have witnessed. The longitude was known, because the remnants of the House of Safety had recently been found. The remaining puzzle was the extreme refraction that would have lifted Jupiter from well below the horizon to above it. It prompted Baills to present a model wherein rays could suffer internal reflection against a higher region of warmer air. He does not specify the height of this boundary. Since he assumes a single reflection only, this must have been about two miles, the same as postulated earlier by Johannes Kepler when he proposed, in 1604, that the Novaya Zemlya phenomenon would have been caused by internal reflection against the boundary between the air that surrounds us and the ether above it.

Baills makes yet another suggestion: land might have been seen across the Kara Sea by the same mechanism. He refers to the diary of Gerrit de Veer, who writes:

*The 9 of March the weather was foul, but not as foul as it had been the two days before and with less snow, so that we could see much farther out that the water was open in the north-east, but not from us toward Tartaria, for there we could still see ice in the Tartarian Sea, otherwise called the Ice*





**Figure 7.** Simulation of the mirage by which the Dutch would have seen land across the frozen Kara Sea, as we read it in De Veer’s diary on 9 March 1597. Right: the heights at which rays, traced backward from the observer, pass through a vertical plane at a distance of 170 miles (315 km) away.

*Sea. We suspected that it might not be very wide in that direction, for often when the weather was clear, we had imagined to see the land, and showed it to one another, south and south-south-east from our house, like a hilly land, as land commonly looms up when it just becomes visible.*

The distance to the Yamal peninsula is some 200 miles. A bit shorter is the distance to the island Ostrov Belyy to its north: about 170 miles. See the map of the arctic region in Figure 2. I attempt a simulation, this time with a WS-type inversion. Parameters are: height of the central isotherm  $h_0 = 80$  m, diffuseness  $a = 2$  m, temperature jump  $\Delta T = 8$  °C. Choosing the way in which the inversion weakens is rather critical and this explains that the mirage of distant land would have been visible only occasionally. Keeping the inversion constant over a distance  $x_0 = 250$  km with an attenuation length of 150 km works well, even though Ostrov Belyy is nowhere much higher than 10 m above sea level.

The situation differs from the early sighting of the sun in January. The sun is up now and it is broad daylight. In addition to transporting light from beyond the horizon, the duct now also carries scattered light that has entered from above. It does no longer show up as a dark band.

In the simulation the land is seen by the observer at apparent angles for which the rays are lowest at the target distance of 170 miles. From the graph in the right-hand panel of Figure 7 we read off that this occurs for rays around  $-4'$  apparent angle, while a thin mirror image is seen floating around  $+5'$ .

#### 4. Fridtjof Nansen’s observation of the Novaya Zemlya phenomenon

*Friday, 16 February 1894.*

*Today a pretty remarkable thing happened: around noon we saw the sun, or, to be more correct, an image of the sun, for it was only a mirage. Seeing that glowing fire light up just above the edge of the ice, made a strange impression. According to the exalted description that so many Arctic travelers give of the first return of this God of Life after the winter night, this should have been reason for stormy jubilation. But on me it did not have that effect. We had expected not to see the sun yet until several days later, so that I felt rather a tinge of disappointment: it meant that we had drifted more to the south than we knew.*





**Figure 8.** The page of Nansen's logbook on which he describes the appearance of the sun. The text below the sketch is: "Den første luftspeiling af solen, 16 Februar 94": The first mirage of the sun. Copy from: Nansen, Fridtjof: Diaries of the *Fram* expedition, manuscript nr. 8° 2201:2, Provided by the National Library of Norway. Reused from Ref. [8], with permission of the Historische Uitgeverij.

*It was with great pleasure I soon discovered that it could not be the sun itself. At first the mirage looked like a flattened red-glowing streak on the horizon. Later, two fire streaks grew out of it, one above the other with a dark space in between. By climbing up to the main-top, I got to see four or even five of such horizontal lines, one above the other and all equally long; it was as one could imagine a dull-red and square sun, with dark streaks across.*

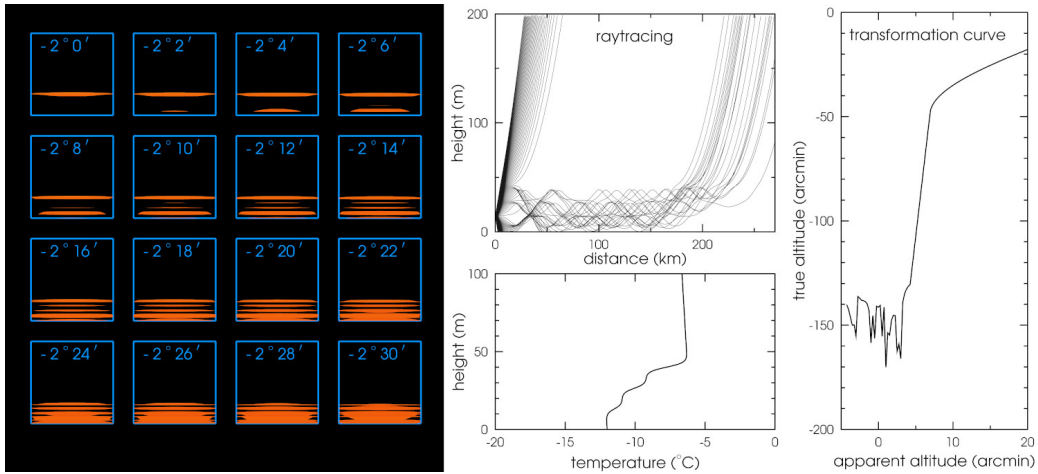
*Taking the height of a star in the afternoon showed us that at mid-day, the sun must have been below the horizon by  $2^{\circ} 22'$  in reality. In any case, we cannot expect to see the sun's disc itself above the ice before Tuesday; this depends on refraction which is very strong in this cold air. All the same, we celebrated the sun's mirage in the evening with a tiny wee sun-feast with figs, bananas, raisins, almonds and honey cake.*

These are Fridtjof Nansen's words. The Norwegian polar expedition of 1893–1896 had for purpose to study the drift of the ice in the Arctic Sea. By the end of 1893 he let his ship *Fram* get icebound above the New-Siberian Islands. The *Fram* was no ordinary vessel: her designer, Colin Archer, had drafted her shape such that the ice would not crush her, but lift her up. As Nansen had foreseen, they slowly drifted westward. In the summer of 1896 they came free again, north of Spitsbergen. The expedition is described in Nansen's book *Fram over polhavet*, in its English edition under the title *Farthest North* [2].

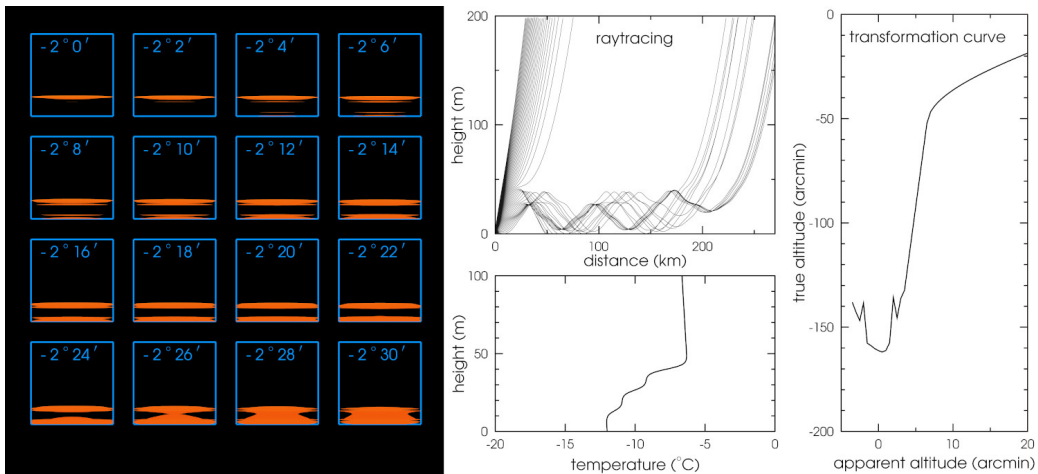
On 16 February 1894 the Novaya Zemlya phenomenon was seen, at a latitude of  $80^{\circ} 01' N$  and a longitude of about  $135^{\circ} E$ . It is the first well-documented description since Gerrit de Veer. The earliest editions of Nansen's book have a drawing made by himself of the scenery that he saw from the top of the main mast. We have reproduced it in earlier publications [9, 10]. Older yet, and almost certainly the first picture of the Novaya Zemlya phenomenon, is the sketch that he made in his logbook on the day itself.

Making a simulation of the observation that Nansen describes is not trivial. The pattern of individual stripes with dark spaces in between is best reproduced, when I assume that the inversion is not a single layer such as the WS- or FH4 form, but is instead multi-layered. As argued above, the advection of warmer air from a direction transverse to the line of sight may cause this effect. I simulate it here by stacking three WS-type inversions.

The parameters of the simulation are: ground temperature =  $-10^{\circ} C$ ; ground pressure 1013.25 hPa; eye height = 15 m; diffuseness  $a = 1.5$  m; and heights of the central isotherms and temperature jumps: layer 1  $h_0 = 13.3$  m,  $\Delta T = 1.2^{\circ} C$ ; layer 2  $h_0 = 26.7$  m,  $\Delta T = 1.8^{\circ} C$ ; layer 3  $h_0 = 40$  m,  $\Delta T = 3^{\circ} C$ . The length of the inversion is  $x_0 = 120$  km with an attenuation length of 80 km. The full analysis is shown in Figure 9.



**Figure 9.** Simulation of Fridtjof Nansen’s observation of the Novaya Zemlya phenomenon on 16 February 1894. The sighting was made from the top of the main mast, an assumed eye height of 15 m.



**Figure 10.** The images as they would have been seen from the deck of the *Fram*, at an assumed eye height of 5 m above the ice. *Two fire streaks grew out of it, one above the other with a dark space in between.*

It is very gratifying that this simulation reproduces the image that Nansen describes, not only in its appearance but also at the true solar altitude that he mentions:  $-2^{\circ} 22'$ . The agreement is even more complete, because also his sighting from the deck of the *Fram* is reproduced. Figure 10 shows the simulation for an eye height of 5 m.

### 5. The hafstramb, a monster in the Greenland Sea

*Konungs Skuggsjá* or *Kongs Skuggsio* is the original title of a beautiful thirteenth-century manuscript in Old Norse. The writer remains anonymous by his own choice. It has been translated into Latin as *Speculum Regale* and into Danish as *Det Kongelige Speil* by Hannes Finnson and Halfdan

Einersen [3]. This is the editio princeps. A later Danish translation is *Kongespejlet* by Finnur Jónsson [4]. The English translation by Laurence Marcellus Larson is *The King's Mirror* [5]. In dialogue form the book describes a conversation between a father and a son, who sees for himself a future as a traveling merchant. The father himself has belonged to the king's entourage in earlier days, but seems now retired. He is an erudite man who has looked far beyond the borders and knows the world. Many things are discussed that a seafaring merchant should know and be able to do. On a lighter note, the father tells about the wondrous things that his son might come across in the northern seas. Some of these wonders could possibly have been mirages. Waldemar Lehn and Irmgard Schroeder [35] have suggested this for the phenomenon of the *hafgerdingar*, sea fences in English. These have the appearance of a steep wall or a giant wave on the horizon that fences in the sea all around. In reference [15] I have given a simulation of the hafgerdingar and shown that long running surface waves on the top of the inversion layer may create the illusion that these giant waves are actually moving.

There are also monsters in the Greenland Sea. Many of them are whales, but some are more mysterious. There is the *hafstramb*, translated as merman in English, and there is the *margygr*, the mermaid, more appropriately translated as the sea troll or giantess. Lehn and Schroeder have explained them as mirages [7]. The hafstramb would be a vertically stretched image of an orca, seen through a very strong and low inversion. The margygr would be a walrus.

I will give here an alternative explanation for the hafstramb: as an image of a distant iceberg.

In the Konungs Skuggsjá the father says:

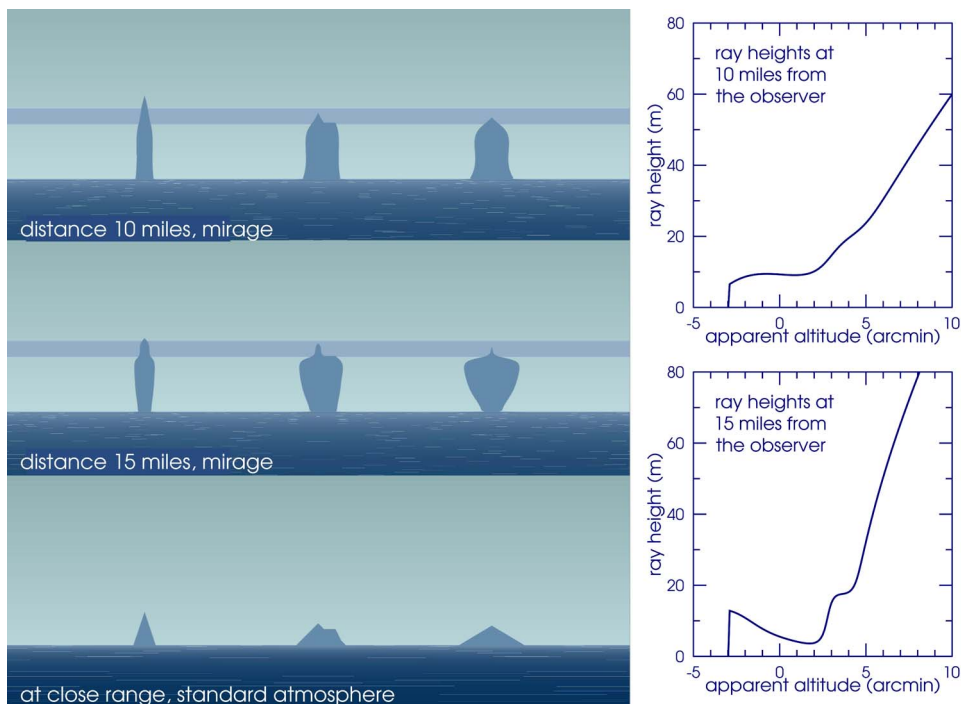
*About the Greenland Sea it is told that monsters live in it. I do not think they are seen frequently, but yet it is told that some people have seen them with their own eyes. The monster, which is called hafstramb, has been seen in the Greenland Sea, so it is said. It is tall in stature and long, and it rises straight up from the sea. Shoulders, neck, and head it seems to have as a human being, also mouth, nose and chin. But above the eyes and eyebrows, it looks like it's wearing a peaked helmet. It has shoulders like a man, but no arms. Downward the body grows narrower and narrower, as far as it is visible. But no one has ever been able to tell if it has a tail like a fish or if its body runs down into a point. The body looks a bit like an icicle in shape. No one has ever seen it close enough to tell if it has scales like a fish or a skin like a human. Whenever the monster was seen, a storm would invariably follow . . .*

The hafstramb is also mentioned in the *Historia Norwegie* [6], a document in Latin, older yet than the Konungs Skuggsjá: . . . *a huge creature, but without a tail and without a head. It looks like a tree trunk, as it moves up and down. It shows itself only to warn seafarers of danger.*

The simulation uses two stacked WS-type inversions. The parameters are: temperature and pressure at sea level:  $t_0 = 10$  °C,  $P_0 = 1013.25$  hPa; eye height = 3.5 m; diffuseness  $a = 2.25$  m; heights of the central isotherms and temperature jumps: layer 1  $h_0 = 10$  m,  $\Delta T = 2$  °C; layer 2  $h_0 = 20$  m,  $\Delta T = 2$  °C. The length of the inversion and its attenuation are important in this simulation only because they determine the background against which the icebergs are seen. I used  $x_0 = 110$  km and  $r = 10$  km.

Figure 11 shows how the icebergs look deformed by the mirage. In the middle panel to the left we see them from a distance of 15 miles. One may think to recognize huge humanlike silhouettes, without arms and growing slimmer from the waist down, just as is described in the Konungs Skuggsjá. This general feature is explained through the height versus apparent altitude graph for 15 miles distance, right-hand side bottom panel of Figure 11. Up to  $7'$  the image is inverted and rather elongated. From the dip at  $7'$  onward, the curve's rise is pretty steep and the image is compressed. Around  $9'$  the curve flattens again at a height of around 20 m, elongating the images of the iceberg tops and making them look as "peaked helmets".

The upper left-hand panel shows the icebergs as seen from 10 miles. They do not have the icicle shape anymore, but instead their widths are more or less constant from top to bottom.



**Figure 11.** Left: lower panel: three icebergs of different size and shape, seen at close range. From left to right 30, 20 and 18 m in height. Middle panel: the same icebergs, as seen in the mirage at a distance of 15 nautical miles. The darker band near the top of the silhouettes is an image of the water surface about 30 miles away, as will be explained in Figure 13. Upper panel: Idem, but seen from 10 miles distance. Adapted from Ref. [9], with permission of Querido's Uitgeverij. Right: the graphs of ray height in vertical planes at 15 miles and 10 miles away from the observer, versus apparent altitude.

Indeed, the height versus apparent altitude graph is very flat in this case, as shown in the right-hand top panel. This fact is responsible for a very elongated image. The resemblance with tree trunks, as the *Historia Norwegie* mentions, comes closer here.

Another detail that the *Historia Norwegie* gives, is that they seem to move up and down. Assuming that the observer is a Viking in his longship, he will ride the waves and his eye height will go up and down with them. This translates naturally into an apparent periodical motion of the “tree trunks” relative to what appears to the Viking as the horizon and what is seen as the top of the duct. A similar change in appearance occurs when he gets up from his rowing bench to stand upon it.

## 6. Fata Brumosa, Fata Morgana and hafgerdingar

Over the recent years a particular type of mirage has been discussed quite a bit. It goes under several names. One is hafgerdingar, a word in Old Norse meaning sea fences. Another is Fata Brumosa. They are Fata Morganas by which one sees the surface of the sea. In the distance, it looks as if the sea were turned upright, making the impression of a “wall of water”, another expression yet by which the phenomenon is known. A very nice example is a photograph by Mila Zinkova [36], shown in Figure 12.



**Figure 12.** A wall of water, photographed by Mila Zinkova on 14 November 2008, reproduced here with her permission.

This picture features on the cover of the November issue of *Weather* (2009). Earlier, Lehn and Schroeder have published similar pictures [37], one photographed from Iceland, the others over the melting ice of Lake Winnipeg.

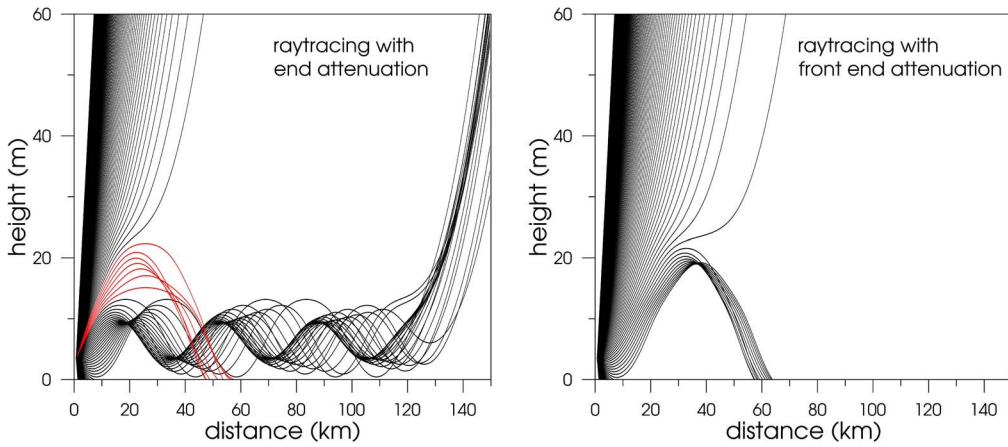
From Zinkova's article I quote: *Suddenly I saw something that was passing through the wall just as Alice passed through a mirror in Through the looking-glass. That "something" materialized as a small boat.* I present here a simulation that, I think, meets this description. It is the identical inversion that I used above to simulate the hafstramb, but now with the addition of an attenuation at the front end. The relevant parameters are:  $x_{0\text{-left}} = 15$  miles (27.8 km) and  $r_{\text{left}} = 10$  miles (18.5 km), meaning that the inversion reaches its full strength from 27.8 km away from the observer.

The resulting ray tracings are shown in Figure 13. The hafstramb simulation (left panel) uses an attenuation at the end, so as to let the backward traced rays escape. The addition of a front end attenuation (right panel) results in bending down to the sea surface those rays that otherwise would have been caught in the duct to escape from it only at the end.

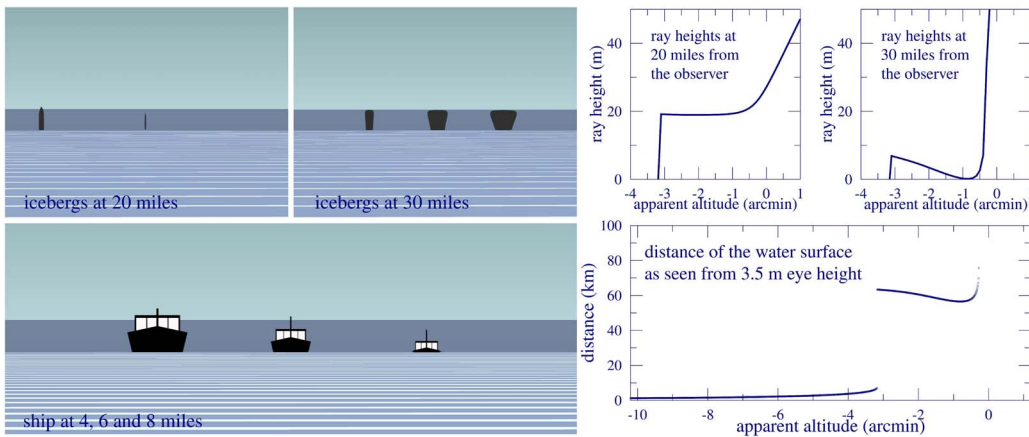
An interesting feature is that the region around 40 km is "empty", meaning that a small enough boat remains hidden for the observer as if under an invisibility cloak to use a Harry Potter phrase, until it comes close enough to reveal itself via the lowest rays.

Figure 14 illustrates this: In the lower left panel we see a small vessel. The roof of its cabin is 7 m above sea level, the short mast reaches to 10 m. We see it enter the scene at a distance of around 8 miles, just as it would appear above a horizon in a standard atmosphere. The closer it comes, the larger it gets. The horizon of the foreground is at 7 km distance, pretty much the same





**Figure 13.** Left: raytracing for the hafstramb simulation, shown in Figure 11. The rays in red connect to the water surface and at the same time they mark the top of the duct. Right: for the same parameters, with the addition of a front end attenuation as described in the text.



**Figure 14.** Left: Images from raytracing in the “hafstramb atmosphere” with additional front end attenuation, as in Figure 13. Top-left panels: the icebergs of Figure 11 at 20 miles (37 km) and at 30 miles (56 km). Lower left panel: a small boat at distances of 4, 6 and 8 miles. Right bottom: distance at which the water surface is seen versus apparent altitude. Right top panels: the height versus apparent altitude graphs for distances of 20 and 30 miles.

as it would be in a standard atmosphere from 3.5 m eye height.<sup>8</sup> The wall of water is seen as a background.

The top left panels of Figure 14 show once more the icebergs that I used in the hafstramb simulation. They are, left to right 30, 20 and 18 m in height. At 20 miles distance, the smallest one is not visible. The higher ones look very much vertically stretched and meet the description of tree trunks as they are described in the *Historia Norwegie*. At 30 miles, their

<sup>8</sup>For a standard atmosphere the distance of the horizon is  $2.11 \sqrt{h} = 3.95$  nautical miles or 7.3 km, for  $h = 3.5$  m.

images are much thicker and more compact, inverted at the bottom, upright at the top and much compressed.

The right-hand panels explain the images. For a distance of 20 miles, the height-attitude graph is almost flat for heights just below 20 m. The icebergs of 30 m and 20 m height are seen, but very much stretched. The smaller one, of 18 m, is under the invisibility cloak. At 30 miles all three icebergs are seen, their lower parts inverted and elongated. Then above  $-0'.5$  apparent altitude the graph rises steeply and the top parts of the images are upright and very much compressed.

The small boat appearing from below the wall of water, meets Zinkova's description that she "suddenly saw her as she appeared from behind the wall" [36].

Though inspired by similar photographic images, Lehn's simulation [37] is rather different. It produces a very strong looming of the horizon, which indeed gives one the impression of a wall, but it does not feature the "invisibility cloak". A boat, if it could be recognized at all at such great distance would first become visible *above* the edge of the water wall, not appear from underneath it.

Thus there are at least two different ways, in which a mirage may produce the wall-illusion. There may be more than two: in reference [15], I have given an interpretation of the hafgerdingar as due to a mirage which produces bands of rays that alternately hit the sea, or escape to the sky. Quite common is the version where a duct is seen as bounded at its top by just one band that corresponds to the sea, such as in the hafstramb simulation of Figure 11.

Young and Frappa discuss mirages seen over Lac Léman, the Lake of Geneva [38]. They also review much older sightings by Forel [39], to whom we owe the name *Fata Brumosa* for a mirage that appears as a foggy wall. Comparing with my hafgerdingar analysis, they conclude that *Forel's Fata Brumosa and the Norse Hafgerdingar are different names for exactly the same phenomenon: a Fata Morgana of the water surface.*

Are they basically the same or do differences exist? In my hafgerdingar simulation the duct is seen as symmetric around horizontal. Likewise so in my hafstramb simulation above, where the duct ranges symmetrically from  $-3'.0$  to  $+3'.0$ , just as it should for a *Fata Morgana* in an atmosphere of spherical symmetry. The fact that farther out this symmetry is broken just to let the rays escape, does not alter this. By contrast, the wall of water in Figure 14, obtained from raytracing as in Figure 13, right panel, is not symmetric. It stretches from  $-3'.17$  to  $-0'.27$ . In this example, spherical symmetry is broken right from the observer's location.

Does this latter case qualify as a *Fata Brumosa*? In Figure 14, I have given the wall a darker shade of blueish grey than the foreground. But I can well imagine that it could be lighter and foggier if the distant patch of sea that we see mirrored, would reflect the glitter of the sun.

## 7. Summary and conclusions

Many phenomena rely on the atmosphere not being symmetric. Most obviously, when dealing with a temperature inversion, it must have a beginning and an end. Without an end, the Novaya Zemlya effect would not exist. Compare a duct with a circular light guide. Light can go round and round by internal reflection, but there is no mechanism to capture it.

For the practitioner of raytracing, modelling the interface between the duct and a standard atmosphere is a necessary tool in simulating an observation. Waldemar Lehn [35] was, to my knowledge, the first to do so in his analysis of Liljequist's observation in 1951, made at Maudheim Station, Antarctica [40]. In this article I use a two-parameter modelling for this interface by specifying a distance,  $x_0$ , away from the observer beyond which the inversion begins to weaken. An attenuation length,  $r$ , is introduced as the distance over which the temperature jump of the inversion reduces to half its strength.

For parametrizing the temperature profile, two functional forms are found particularly useful and flexible, The two parameter Woods–Saxon form and a four-parameter function that is basically the integral of the hyperbolic tangent. Both of them have been used in earlier work. For implementing the changing characteristics of the atmosphere with distance, raytracing is most easily done by choosing distance itself as the parameter for numerical integration. At the same time, this is the most convenient way to handle any other spherical symmetry breaking aspect, such as unevenness of the terrain along the line of sight. Also, when simulating a Fata Morgana of a terrestrial object, its distance from the observer must be specified. Other possible choices for the integration parameter, by height or by zenith angle, are cumbersome and not suited for raytracing in a non-symmetric atmosphere.

New simulations of the historical observations are presented. In the first place the events on Novaya Zemlya, that were seen by the Dutch in 1597. The two weeks early return of the sun and the conjunction of Jupiter and the moon that confirmed their day counting and that gave them their longitude. The visibility of Jupiter, raised by refraction to above the horizon, has been a point of concern. I find that it could have been seen with the brightness of a magnitude 3 star.

The possible sighting across the Kara Sea of the Yamal peninsula on 9 March 1597, has been another subject of debate and I give a simulation.

The other classical observation is that of Fridtjof Nansen, on 16 February 1894. He reported seeing the sun in a rectangular shape as four or five stripes with dark bands in between. A simulation seems to require a layered inversion. His illustration is found in the book wherein he describes his voyage [2]. The National Library of Norway does not have this drawing in their collection, but they do have Nansen's logbooks. The sketch he made on the day itself, immediately after the observation, is almost certainly the first-ever illustration of the Novaya Zemlya effect. It was kindly provided by the Museum and it is shown here in Figure 8.

Maybe not historical, but certainly mythical are the sightings of the hafstramb, a monster in the Greenland Sea. It is described in the Old Norse text *Konungs Skuggsjá* or King's Mirror [3–5] and also in the *Historia Norwegie* [6]. Lehn and Schroeder [7] have suggested that it might have been a mirage of an orca. I present here an alternative explanation: that it could have been mirages of a distant iceberg.

Another myth from the *Konungs Skuggsjá* is the hafgerdingar, or sea fences. The discussion about the different ways in which the water surface may be miraged is very vivid these days, certainly because impressive photographic material has become available. I present an analysis of how the image that one gets to see may be influenced by a front end attenuation. That is, by looking into an inversion from a location where the atmosphere is still more or less standard. It explains some details of the “wall of water”, reported by Mila Zinkova [36]. Further observations and analyses may tell whether the phenomena, known as hafgerdingar, Fata Brumosa and Fata Morgana are in fact different words for the same kind of mirage, or whether and how they may be distinguished from one another.

## Conflicts of interest

The author has no conflict of interest to declare.

## Acknowledgements

The author thanks Luc Dettwiller, Andrew Young and Gunther Können for useful discussions and suggestions and Mila Zinkova for permitting the use of her “wall of water” photo.



## References

- [1] G. de Veer, *Waerachtighe Beschryvinghe van drie seylagiën ter werelt noyt soo vreemt ghehoort*, Cornelis Claesz, Amsterdam, 1598, Latin: *Diarium nauticum seu descriptio trium navigationum admirandarum*, Cornelis Claesz, Amsterdam, 1598. German: *Warhafftige Relation. Der dreyen neuen unerhörten, seltzamen Schiffart*, Levin Hulsius, Nuremberg, 1598. French: *Trois navigations admirables faictes par les Hollandais et Zelandois au Septentrion*, Guillaume Chaudière, Paris, 1599. Italian: *Tre navigationi fatte dagli Olandesi, e Zelanesi al settentrione*, Giovanni Battista Ciotto, Venice, 1599. English: *The true and perfect description of three voyages, so strange and woonderfull that the like hath neuer been heard of before*, translation by William Phillip, Thomas Pavier, London, 1609.
- [2] F. Nansen, *Fram over polhavet: den Norske polarfaerd 1893–1896*, additions by Otto Sverdrup, H. Aschehoug, Kristiania, 1897, Dutch: *In Nacht en Ijs. De Noorsche Poolexpeditie 1893-1896*, Sijthoff, Leyden, 1897, trans. by Maurits Snellen. English: *Farthest North*, Archibald Constable & Co., London, 1897. German: *In Nacht und Eis. Die Norwegische Polarexpedition 1893-1896*, F. A. Brockhaus, Leipzig, 1898. French: *Vers le Pôle*, Ernest Flammarion, 1897, trans. by Charles Rabot.
- [3] H. Finnson, *Kongs-skugg-sio utlögð a daunsku og latinu. Det kongelige speil med dansk og latinsk oversaettelse, samt nogle anmaerkninger, register og forberedelsen. Speculum regale cum interpretatione danica et latina, variis lectionibus, notis &c*, Jonas Lindgren, Sorö, 1768, H. Einersen, (ed.).
- [4] *Kongspeilet: Konungs Skuggsjá*, Det kongelige nordiske Oldskriftselskab, Copenhagen, 1926, trans. by F. Jónsson.
- [5] L. M. Larson, *The King's Mirror*, American–Scandinavian Foundation, New York, 1917.
- [6] I. Ekrem, L. Boje Mortensen (eds.), *Historia Norwegie*, Museum Tusulanum Press University, Copenhagen, 2006, trans. by Peter Fisher.
- [7] W. H. Lehn, I. I. Schroeder, “The hafstramb and the margygr of the King’s Mirror: an analysis”, *Polar Rec.* **40** (2004), p. 121-134.
- [8] S. Y. van der Werf, *Het Nova Zembla Verschijnsel: Geschiedenis van een luchtspiegeling*, Historische Uitgeverij, Groningen, 2011.
- [9] S. Y. van der Werf, *Drieduizend jaar navigatie op de sterren: mythevorming en geschiedenis*, Querido’s Uitgeverij, Amsterdam, 2022.
- [10] S. Y. van der Werf, “Ray tracing and refraction in the modified US1976 atmosphere”, *Appl. Opt.* **42** (2003), p. 354-366.
- [11] S. Y. van der Werf, G. P. Können, G. W. H. Lehn, “Novaya Zemlya effect and sunsets”, *Appl. Opt.* **4** (2003), no. 2, p. 367-378.
- [12] S. Y. van der Werf *et al.*, “Waerachtighe Beschryvinghe van het Nova Zembla effect”, *Ned. Tijdschr. Natuurkunde* **66** (2000), p. 120-126.
- [13] S. Y. van der Werf *et al.*, “Gerrit de Veer’s true p. and perfect description of the Novaya Zemlya effect”, *Appl. Opt.* **42** (2003), p. 379-389.
- [14] S. Y. van der Werf, “Comment on “Improved ray tracing air mass numbers model””, *Appl. Opt.* **47** (2008), p. 153-156.
- [15] S. Y. van der Werf, “Hafgerðingar and giant waves”, *Appl. Opt.* **56** (2017), p. G51-G58.
- [16] C. Runge, “Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen”, *Math. Ann.* **46** (1895), p. 167-178.
- [17] L. H. Auer, E. M. Standish, “Astronomical refraction: computational method for all zenith angles”, *Astron. J.* **119** (2000), p. 2472-2477.
- [18] C. Y. Hohenkerk, A. T. Sinclair, “The computation of angular atmospheric refraction at large zenith angles”, 1985, NAO Technical Note No. 63, HM Nautical Almanac Office.
- [19] P. K. Seidelmann (ed.), *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, University Science Books, Mill Valley, CA, 1992.
- [20] J. B. Biot, “Sur les réfractions astronomiques”, in *Additions à la Connaissance des Temps, pour l’An 1839*, 1836, p. 3-114.
- [21] L. Dettwiler, “Remarkable properties of astronomical refraction in a spherically symmetric atmosphere”, *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 63-102.
- [22] L. Dettwiler, “Biot’s theorem and Biot-Auer-Standish’s change of variable: an historical commentary”, *C. R. Phys.* **23** (2022), no. S1, p. 483-501.
- [23] J. Kepler, *Gesammelte Werke*, vol. II, C. H. Becksche Verlagsbuchhandlung, Munich, 1938 (eds. W. von Dyck and M. Caspar) [new ed. of J. Kepler, *Ad Vitellionem Paralipomena, quibus Astronomiae pars optica traditur*, Claude Marne & Heirs Johannes Auber, Frankfurt, 1604].
- [24] C. Chevalley, « *Les fondaments de l’optique moderne: Paralipomènes à Vitellion (1604)* », Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 1980.
- [25] F. Plehn, *J. Kepler’s Grundlagen der geometrischen Optik (im Anschluss an die Optik des Witelo)*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1922.
- [26] J. Kepler, *Optics, Paralipomena to Witelo & Optical Part of Astronomy*, Green Lion Press, Santa Fe, 2000, trans. by W. H. Donahue.

- [27] P. C. Le Monnier, "Mémoire sur la longitude de la Nouvelle Zemble", *Mém. Acad. Roy. Sci., année 1779* (1782), p. 381-384.
- [28] J. Baills, "Sur les phénomènes astronomiques observés en 1597 par les Hollandais à la Nouvelle Zemble", *C. R. Acad. Sci.* **LXXXI** (1875), p. 1088-1091, t. 23.
- [29] J. Moletti, *Ephemerides Josephi Scalae, ad annos duodecim, incipientes ab anno domini*, Venice, 1589.
- [30] E. Shackleton, *South—The Story of Shackleton's Last Expedition (1914–1917)*, MacMillan, New York & London, 1920.
- [31] Jet Propulsion Laboratory, <http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi#top>.
- [32] C. Marriott, "SkyMap Astronomy Software", <http://skymap.com/>.
- [33] S. M. Schimpf, "Cybersky, Astronomy Software for Windows", <http://www.cybersky.com/>.
- [34] A. Zavalishin, "Starcalc", <http://homes.relex.ru/~zalex/main.htm#about>.
- [35] W. H. Lehn, "The Novaya Zemlya effect: An arctic mirage", *J. Opt. Soc. Am.* **69** (1979), p. 776-781.
- [36] M. Zinkova, "Fata Morgana in coastal California", *Weather* **64** (2009), no. 11, p. 287, and private communication.
- [37] W. H. Lehn, I. I. Schroeder, "Hafgerdingar: a mystery from the King's Mirror explained", *Polar Rec.* **39** (2003), p. 1-7.
- [38] A. T. Young, E. Frappa, "Mirages at Lake Geneva: the Fata Morgana", *Appl. Opt.* **56** (2017), p. G59-G68.
- [39] F.-A. Forel, *Le Léman, Monographie Limnologique, Vol. 2*, F. Rouge, Lausanne, 1895.
- [40] G. H. Liljequist, *Refraction Phenomena in the Polar Atmosphere, Scientific Results, Norwegian-British-Swedish Antarctic Expedition 1949–1952*, vol. 2-2, Oslo University, Oslo, 1964.





---

Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

# Images du Soleil et de la Lune, depuis le sol ou la Station spatiale internationale

## *Imaging Sun and Moon near horizon, from ground or the International Space Station*

François Mignard<sup>\*,a</sup>

<sup>a</sup> Université Côte d'Azur, Observatoire de la Côte d'Azur, CNRS, Laboratoire Lagrange  
Bd de l'Observatoire, CS 34229, 06304 Nice Cedex 4, France  
Courriel : francois.mignard@oca.eu (F. Mignard)

**Résumé.** Étude sur deux exemples de la formation des images au voisinage de l'horizon dans le cas d'une atmosphère régulière. Cas du Soleil ou de la Lune au lever/coucher pour un observateur terrestre avec la relation quantitative entre la valeur de l'aplatissement et les conditions atmosphériques locales. Confrontation d'une observation plus complexe du coucher de la Lune à bord de la station spatiale (ISS), impliquant des déformations non symétriques. Approche analytique et numérique reproduisant les détails de cette observation et démontrant que l'échelle verticale de cette célèbre image est probablement inexacte.

**Abstract.** Study of the image formation near the optical horizon for a regular atmosphere. One investigates in detail the case of the Sun and Moon at rise and set and provides the relationship between the image flattening and the local physical conditions for a standard atmosphere. The second case deals with a more complex situation of a documented observation of the moonset observed on board of the space station (ISS) by astronauts, displaying large distortions in the image. An analytical and numerical approach allows us to account for the details of this observation. We show that the vertical scale of this famous image is likely wrong.

**Mots-clés.** réfraction, coucher de soleil, coucher de lune, ISS, tracé de rayon, optique atmosphérique.

**Keywords.** refraction, sunset, moonset, ISS, ray tracing, atmospheric optics.

*Published online: 8 March 2023, Issue date: 11 August 2023*

## 1. Introduction

Dans la vie courante on ne peut pas dire que la réfraction atmosphérique se manifeste de façon évidente dans les observations du quotidien. Elle est présente bien entendu, mais pas nécessairement visible. La raison n'est pas tant sa faiblesse, mais plutôt la faible variation de ses effets sur des étendues angulaires modérées, disons inférieures au degré. En effet ce qui est finalement perceptible à l'observateur ordinaire, ce n'est pas la grandeur de la réfraction elle-même, impossible

---

\* Auteur correspondant.

à voir si elle est constante ou très peu variable, mais l'effet des variations rapides de cette grandeur sur de faibles étendues angulaires. Cela se manifeste par des distorsions, voire des multiplications d'images : des faits qui ne manquent pas d'attirer l'attention et de questionner. Plusieurs articles ou sections de cet ouvrage montrent que les explications de ces phénomènes requièrent des développements complexes, bien éloignés d'une compréhension immédiate et dont certains sont encore discutés.

Parmi les effets que chacun a pu noter, la forme ovalisée du Soleil à son lever ou coucher, appartient au domaine des connaissances communes, même si le passage de l'explication qualitative à l'évaluation quantitative implique déjà une modélisation avancée de la propagation de la lumière dans l'atmosphère. Mais c'est globalement un phénomène simple à décrire mathématiquement car on reste dans le domaine des déformations linéaires et un seul paramètre, le facteur d'aplatissement, est suffisant pour rendre compte de l'essentiel du phénomène. C'est donc une porte d'entrée parfaite pour aborder le sujet principal de ce chapitre qui concerne la modélisation d'une déformation similaire, observable lors du coucher de la Lune par un observateur situé en dehors de l'atmosphère terrestre, et plus particulièrement à bord de la Station spatiale à 400 km au-dessus du sol. C'est fondamentalement le même phénomène que pour notre Soleil couchant vu au bord de la mer. Mais dans ces conditions très spéciales, nous sortons de l'approximation linéaire et l'explication quantitative impose de calculer finement le trajet des rayons à travers toute l'atmosphère. On verra ici également que, si la réfraction elle-même reste faible, en gros deux fois ce qu'elle est au sol à l'horizon, sa variation sur quelques minutes d'arc est considérablement plus élevée (un facteur vingt) qu'au sol et rend parfaitement compte de ces images surréalistes d'une Lune lenticulaire et dont la forme par moment est bien éloignée d'un simple aplatissement symétrique. Pour bien insister sur cette différence entre l'observation au bord de mer et depuis la Station spatiale nous avons au sol 90 % de la réfraction maximale acquise entre 75° et 90° de distance zénithale, soit sur un intervalle de 15°, alors que, dans la Station, cela se produit sur une étendue de seulement 0,75°. C'est ici que se trouve la source des différences que nous allons discuter dans les pages qui suivent.

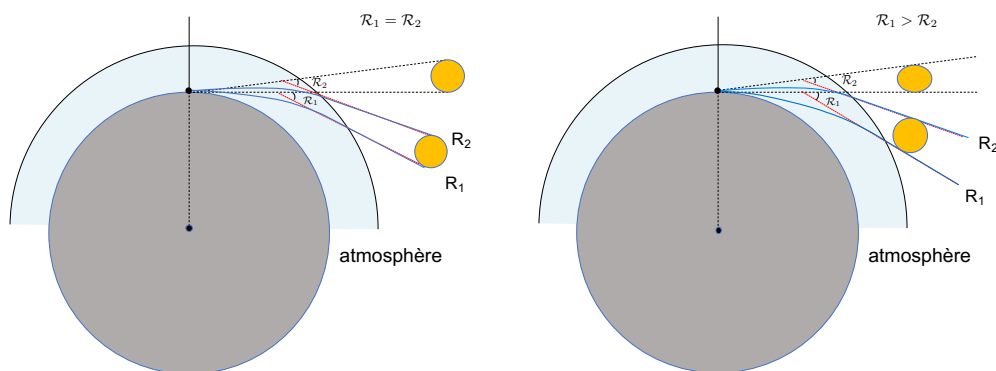
Le texte est très naturellement divisé en deux grandes sections, la section 2 couvrant le cas usuel du lever/coucher sur Terre, ensuite la section 3 abordant la vision tout à fait unique depuis la Station spatiale. Bien que le thème de la section 2 soit très classique et bien documenté, il permet d'introduire les notions utiles pour l'étude plus originale et plus complexe de la section 3.

## **2. Réfraction et lever/coucher des astres**

### *2.1. Description qualitative*

#### *2.1.1. Instants des levers/couchers*

La réfraction atmosphérique est responsable de plusieurs effets sur le lever/coucher des astres. Un est commun à l'ensemble des astres (Soleil, Lune, planètes, étoiles) et provient du relèvement du rayon lumineux qui joint l'astre à l'observateur, par comparaison à une propagation rectiligne de la lumière. La tangente au rayon lumineux au point de réception, prolongée en une droite euclidienne à travers l'espace ne passe pas par le centre de l'astre émetteur mais légèrement au-dessus, dans les conditions habituelles de la réfraction. L'effet astronomique est alors un retard du coucher ou un lever anticipé par rapport à ce que donnerait un calcul purement géométrique basé sur le mouvement des astres et sur la rotation de la Terre. L'effet angulaire est de l'ordre de 30–35' conduisant pour des latitudes moyennes à environ 3 à 4 minutes de temps sur les levers/couchers au niveau de la Mer, et une valeur plus importante en altitude en raison d'un effet encore plus grand de la réfraction auquel s'ajoute la dépression de l'horizon. Lorsque le Soleil est vu à l'horizon optique le Soleil géométrique dont le diamètre apparent ne dépasse pas



**FIGURE 1.** Réfraction des bords solaires au voisinage de l'horizon. À gauche, si la valeur de la réfraction était constante en fonction de la hauteur du Soleil, alors l'image du Soleil serait quasiment un disque, sans déformation, ni changement d'échelle. À droite, le cas habituel pour l'atmosphère terrestre, avec un accroissement de la réfraction ( $\mathcal{R}$ ) vers l'horizon. Le bord inférieur est d'avantage relevé que le bord supérieur et l'image a la forme d'un disque aplati. C'est bien la *variation* de la réfraction avec la hauteur qui est essentiellement à l'origine de la déformation et non la *valeur* de la réfraction elle-même.

32' est totalement sous l'horizon. Le facteur principal de variabilité est la température, donc pour un lieu donné cela se traduit par un effet saisonnier, bien mis en évidence expérimentalement par exemple dans [1].

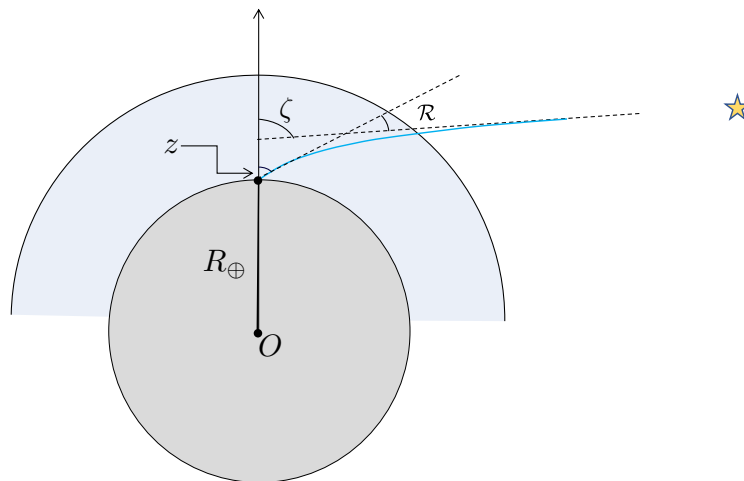
Les applications sur les tablettes ou téléphones donnant les instants du lever ou du coucher du Soleil et de la Lune prennent (en principe) cet effet en compte avec une valeur constante de la réfraction à l'horizon. Il en est de même dans les publications officielles calculées plusieurs mois à l'avance et qui ne peuvent connaître les détails météorologiques d'un lieu d'observation à une date particulière, plusieurs mois, voire plusieurs années, dans le futur. Dans le cas de conditions atmosphériques régulières jusqu'à l'horizon (comme sur la figure 1, avec une absence d'agitation sur le bord inférieur du Soleil), une connaissance de la température, de la pression et de l'humidité permet de prévoir les instants de lever/coucher avec une exactitude de quelques secondes de temps et de les confronter aux observations avec une précision comparable, comme on peut le voir dans [2, Sect. 5.4, Fig. 21]. Ce dernier point nécessite des précautions importantes, car plutôt que d'observer l'instant de la première (dernière) lumière du Soleil, il est préférable de reconstruire le déplacement du bord inférieur ou du bord supérieur lorsque le Soleil s'approche de l'horizon et d'extrapoler l'heure exacte du lever/coucher tel qu'il se produirait sans les irrégularités de la propagation dans les derniers mètres des couches les plus basses.

### 2.1.2. Forme de l'image solaire

Le second effet, celui concernant la forme apparente du Soleil ou de la Lune, est bien ce qui nous intéresse dans cet article. À l'instant du coucher du Soleil par exemple, défini par le contact du bord inférieur avec l'horizon de l'observateur, les bords supérieur et inférieur vrais sont sous l'horizon. L'image au travers de l'atmosphère calme (gradient de température régulier, presque constant sur les premières dizaines de mètres) montre un bord supérieur et un bord inférieur apparents, qui sont les images des bords vrais, c'est-à-dire les images du contour solaire relevées par la réfraction près de l'horizon. Si la valeur de la réfraction est la même aux deux

hauteurs correspondantes, alors les deux bords sont relevés d'une égale quantité et l'image du disque solaire est un disque non déformé (on néglige l'infime effet de la convergence des cercles verticaux), juste déplacé en hauteur, un fait que ne peut constater simplement l'observateur. Si, comme c'est le cas, la réfraction s'accroît lorsque l'on s'approche de l'horizon, le bord inférieur est davantage relevé que le bord supérieur, et l'axe vertical de l'image est plus petit que le diamètre solaire vrai. Le diamètre horizontal est relevé de manière uniforme et sa dimension angulaire est (pratiquement) inchangée. Ainsi l'image du disque circulaire du Soleil est une figure ovale, très voisine d'une ellipse, de grand axe horizontal égal (à très très peu près) au diamètre apparent du Soleil et de petit axe vertical compressé par rapport au disque.

Un long paragraphe pour dire bien peu de choses, mais essentiel pour montrer que la déformation visible provient de la *variation* de la réfraction entre le bord supérieur et le bord inférieur, et non de la *valeur* de cette réfraction. C'est un effet différentiel, comme les marées par exemple, et il fait intervenir la dérivée de l'effet principal. Comme pour les marées, l'intuition est souvent mise en défaut pour se représenter les conséquences visibles d'un effet différentiel. Il faut donc avancer avec précaution avant de conclure hâtivement, d'autant plus que des variations rapides de la réfraction sur une échelle comparable à la dimension du disque peuvent altérer fortement les images. Les deux cas décrits ci-dessus sont représentés de façon schématisique sur la figure 1, avec la réfraction constante à gauche et le cas de la réfraction normale (pas de mirages ou de distorsions complexes) à droite avec une réfraction croissante vers l'horizon : la déviation du rayon  $R_1$  est plus importante que celle de  $R_2$ .

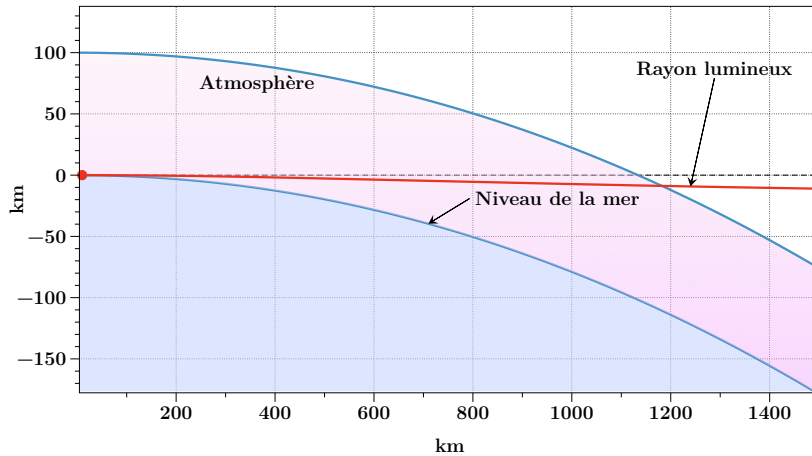


**FIGURE 2.** Notations relatives à la réfraction astronomique. La direction (angle  $z$ ) de la tangente au rayon lumineux à l'observateur est qualifiée de *direction apparente* et la direction géométrique (angle  $\zeta$ ) de *direction vraie*. L'angle  $\mathcal{R} = \zeta - z$  entre ces deux directions est la réfraction astronomique pour un astre à l'infini.

## 2.2. Modèle mathématique

### 2.2.1. Cadre géométrique et définitions

Soit un astre  $\mathcal{S}$  en dehors de l'atmosphère terrestre se trouvant pour un lieu donné à la distance zénithale vraie  $\zeta$ , ou de façon équivalente à la hauteur vraie  $\eta = \pi/2 - \zeta$ . Lors du passage au



**FIGURE 3.** Réfraction horizontale au niveau de la mer. Le rayon lumineux se distingue difficilement d'une droite et dévie très lentement de la propagation rectiligne. La réfraction vaut  $33'$ . À noter : les deux échelles sur les axes sont différentes.

travers de l'atmosphère un rayon lumineux issu de  $\mathcal{S}$  ne se propage pas en ligne droite et, pour une atmosphère normale, est courbé vers la surface terrestre. Lorsqu'il atteint l'observateur, la tangente au rayon fait avec la verticale locale l'angle  $z$  qui est la distance zénithale apparente, celle qui serait mesurée par l'observateur. Il lui correspond la hauteur apparente  $h = \pi/2 - z$ . La différence entre les deux angles  $\zeta - z = h - \eta$  est l'angle de réfraction  $\mathcal{R}$ , ou plus simplement la réfraction s'il n'y a pas d'ambiguïté<sup>1</sup>. Ces notations sont explicitées sur la figure 2. La réfraction est la somme des déviations élémentaires le long du rayon lumineux et correspond géométriquement à l'angle entre la direction asymptotique en dehors de l'atmosphère et la direction apparente.

L'usage astronomique a toujours été de considérer l'expression ou les valeurs de la réfraction  $\mathcal{R}$  comme une fonction de la direction apparente, c'est-à-dire comme  $\mathcal{R}(z)$  ou  $\mathcal{R}(h)$ , alors qu'un physicien l'envisagerait plutôt comme une diffusion et procéderait plutôt de l'extérieur vers l'intérieur, en faisant usage d'une direction d'incidence comme paramètre indépendant. D'ailleurs pour l'imagerie, l'expression en fonction de la direction vraie,  $\mathcal{R}(\zeta)$ , est souvent plus pratique comme on va le voir plus bas. La raison de ce choix est évidente pour un astronome : il observe une hauteur apparente et souhaite corriger son observation de la réfraction pour obtenir une grandeur géométrique, la seule qu'il puisse ensuite soumettre au calcul et relier à des paramètres moins dépendants de sa position, comme les coordonnées équatoriales d'une étoile. Le besoin inverse, c'est-à-dire calculer avec précision (c'est le mot important) une hauteur apparente n'existe pratiquement pas, et les estimations nécessaires pour pointer un instrument n'ont pas de grande exigence en précision. Enfin le calcul précis d'un rayon lumineux, et donc de la réfraction, s'effectue très naturellement en partant de l'observateur le long de la tangente au rayon et en appliquant les lois de l'optique atmosphérique jusqu'à l'extérieur de l'atmosphère. Donc la réfraction est mise plus naturellement sous forme de tables avec un pas régulier pour la direction apparente et non la direction vraie. Partir de l'extérieur ne permet pas d'atteindre aussi aisément une position particulière donnée à l'avance à la surface de la Terre, et donc d'avoir la distance zénithale vraie comme condition initiale du rayon lumineux. On se trouverait dans un problème à conditions aux limites plutôt qu'à conditions initiales, dont la résolution implique des itérations.

<sup>1</sup>L'ensemble des notations, leurs définitions et les unités est rassemblé dans la table 3.



### 2.2.2. Forme de l'image solaire au coucher

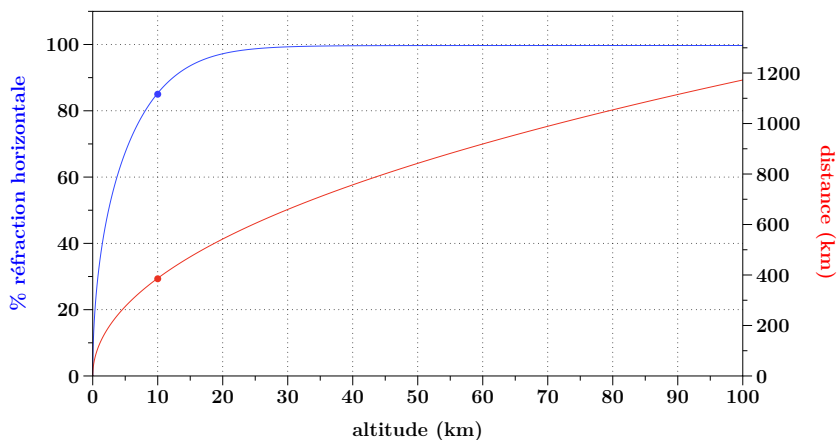
Les conditions optiques au voisinage du coucher apparaissent sur la figure 3 pour un observateur au niveau de la mer avec le rayon principal arrivant dans le plan horizontal. Le rayon lumineux tracé en rouge a été calculé exactement et, à l'échelle de la figure, sa courbure n'est pas visible. Cependant, bien que tangent à la droite horizontale à l'origine, la déviation du rayon est bien visible et est d'environ 10 km sur 1 500 km, soit une déflexion moyenne de  $23'$ , alors que la réfraction horizontale est de  $33'$ . Pour retrouver cet angle sur la figure il ne faut pas prendre la déviation pendant 1 500 km, mais à partir du point d'intersection entre l'asymptote du rayon et la ligne horizontale, donc l'écart trouvé entre les deux angles n'est pas surprenant. Le rayon rasant traverse l'atmosphère sur 1 200 km, mais la réfraction n'est sensible que dans la troposphère (85 % de la réfraction horizontale, figure 4), soit moins de 10 km en altitude et donc une longueur effective de  $\approx 400$  km. Bien qu'étant pour l'observateur un rayon *horizontal*, il s'élève rapidement dans l'atmosphère parce que le sol de la sphère terrestre fuit sous sa trace.

Étudions maintenant la forme du contour apparent du Soleil lors d'un lever ou d'un coucher, c'est-à-dire lorsque  $z \approx 90^\circ$ , pour un observateur soit au niveau de la mer, soit à une altitude modérée ( $\leq 1\,000$  m) pour que la dépression sous l'horizon reste plus petite qu'un degré. Entre la distance zénithale apparente ( $z$ ) et la distance zénithale vraie ( $\zeta$ ) d'un point du contour solaire, nous avons la relation,

$$\zeta = z + \mathcal{R}(z) \quad (1)$$

qui est une expression explicite pour avoir la distance zénithale vraie et une équation non linéaire pour calculer la distance zénithale apparente.

Soit les deux points  $M, N$  d'un diamètre vertical du Soleil vrai, tels que  $d\zeta = \zeta(M) - \zeta(N) \approx 0,53^\circ$  pour une distance moyenne du Soleil égale à l'unité astronomique (au)  $\approx 149,7 \times 10^6$  km. Ici on a pris  $M$  pour le bord inférieur et  $N$  pour le bord supérieur. Que vaut alors le diamètre vertical apparent? On pourrait résoudre les équations pour les images de  $M$  et  $N$  avec (1) mais on peut à



**FIGURE 4.** Pourcentage de la réfraction horizontale acquise en fonction de l'altitude atteinte par le rayon (bleu), et distance parcourue par le rayon en fonction de l'altitude atteinte (rouge). On a considéré un rayon émis et non arrivant de l'extérieur. La troposphère (altitude  $< \approx 10$  km) est responsable de 85 % de la réfraction horizontale et à ce moment le rayon a parcouru près de 400 km.

ce niveau d'approximation se contenter d'un développement linéaire,

$$d\zeta = dz \left( 1 + \frac{d\mathcal{R}}{dz}(z) \right) \quad (2)$$

pour exprimer le grandissement angulaire vertical local par

$$\Gamma(z) = \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{1 + \frac{d\mathcal{R}}{dz}(z)} \quad (3)$$

Il sera utile pour la suite d'introduire la dérivée du grandissement avec la hauteur, qui va caractériser les déformations asymétriques en hauteur avec,

$$\Delta = \frac{d\Gamma}{dh} = -\frac{d\Gamma}{dz} = \Gamma^2 \frac{d^2\mathcal{R}}{dz^2} \quad (4)$$

qui a la dimension de l'inverse d'un angle, et, quand bien même cette grandeur est dite sans dimension, il faut se préoccuper des unités employées dans les calculs numériques. Les signes choisis donnent  $\Delta > 0$  dans les conditions usuelles au voisinage du lever/coucher.

Comme pour l'atmosphère terrestre normale on a toujours  $d\mathcal{R}(z)/dz > 0$ , le grandissement vertical est inférieur à l'unité, et correspond à une compression de l'image par rapport à l'objet dans cette direction. Appliquée au disque solaire dans son ensemble cette compression donne un aplatissement,

$$\mathcal{F}(z) = 1 - \Gamma(z) = \frac{\frac{d\mathcal{R}}{dz}(z)}{1 + \frac{d\mathcal{R}}{dz}(z)} \quad (5)$$

Bien entendu dans toutes ces expressions, il faut utiliser les mêmes unités angulaires pour  $\mathcal{R}$  et  $z$  dans la dérivée.

Lorsque le grandissement est  $> 1$ , alors l'aplatissement  $\mathcal{F}$  est négatif et correspond à un allongement dans le sens de la hauteur. Cela ne se produit pas dans les conditions normales étudiées ici, mais indique qu'avec les deux coefficients  $\Gamma$  et  $\Delta$  on peut rendre compte de formes du Soleil au lever/coucher très riches, toutes liées à la grandeur et au signe de la dérivée de la réfraction.

Les résultats du calcul, applicables au Soleil, sont donnés dans la table 1, pour une observation au niveau de la mer ou à une altitude de 500 m. Les colonnes donnent la hauteur apparente, la réfraction astronomique et le grandissement pour cette hauteur. On voit qu'au niveau de la mer et au moment du Soleil couchant/levant, le petit axe du disque solaire vaut environ 0,83 fois le diamètre angulaire horizontal, soit  $\approx 26'$ . C'est un effet très sensible, parfaitement visible sur un cliché ordinaire. Pour une observation du haut d'un promontoire de 500 m, la dépression sous l'horizon est d'environ 2/3 de degré, et lorsque le bord inférieur du Soleil touche l'horizon, le grandissement est 0,78. La figure 5 correspondant à une vue au bord de la mer est en parfait accord avec le calcul théorique. On voit cependant que le contour n'est pas tout à fait symétrique entre les parties supérieure et inférieure, avec un aplatissement plus prononcé sur l'horizon. Ceci correspond à la variation du grandissement sur la dimension du disque solaire, que l'on voit sur la troisième colonne de la table, et on pourrait le caractériser par la dérivée seconde de la réfraction. Nous allons voir dans la section 3 une situation beaucoup plus spectaculaire de cette non-linéarité avec une observation depuis la Station Spatiale.

Le déroulement d'un lever (resp. coucher) est donné de façon très schématique sur la figure 6 pour un observateur au niveau de la mer et un autre à 500 m d'altitude. Le disque orangé circulaire montre la position du Soleil vrai à chaque instant et l'ellipse en jaune donne à peu près son image compressée verticalement pour différentes hauteurs angulaires. Au moment du lever

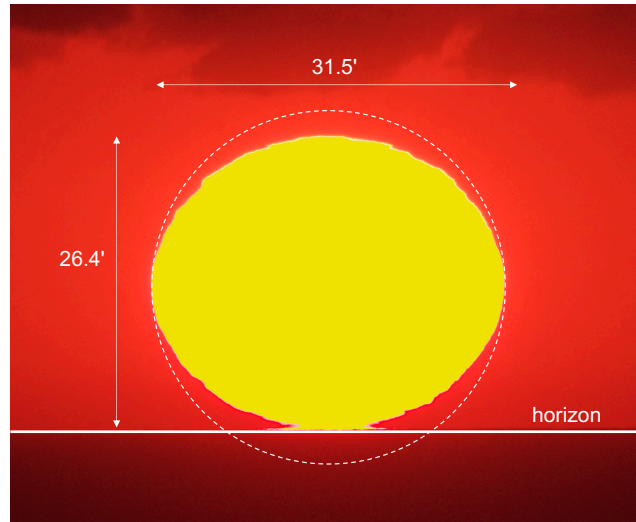
**TABLE 1.** Réfraction et aplatissement apparent d'un astre étendu au voisinage de l'horizon. Observateur placé au niveau de la mer ou à une altitude de 500 m et conditions normales de température et pression. Données : hauteur apparente (degrés), réfraction (minutes d'arc), grandissement. La hauteur de  $-39,3'$  pour  $H = 500$  m correspond à la direction de l'horizon pour cette altitude.

$H = 0$ m			$H = 500$ m		
$h$	$\mathcal{R}$	$\Gamma$	$h$	$\mathcal{R}$	$\Gamma$
arcmin	arcmin	-	arcmin	arcmin	-
240.0	11.46	0.966	200.0	12.46	0.959
230.0	11.83	0.964	190.0	12.90	0.957
220.0	12.22	0.962	180.0	13.37	0.954
210.0	12.63	0.960	170.0	13.87	0.951
200.0	13.06	0.957	160.0	14.40	0.948
190.0	13.52	0.955	150.0	14.97	0.944
180.0	14.01	0.952	140.0	15.58	0.941
170.0	14.54	0.949	130.0	16.23	0.937
160.0	15.09	0.946	120.0	16.93	0.932
150.0	15.69	0.942	110.0	17.68	0.928
140.0	16.33	0.938	100.0	18.49	0.923
130.0	17.01	0.934	90.0	19.36	0.917
120.0	17.74	0.930	80.0	20.30	0.911
110.0	18.52	0.925	70.0	21.32	0.904
100.0	19.37	0.919	60.0	22.42	0.897
90.0	20.28	0.914	50.0	23.62	0.889
80.0	21.26	0.907	40.0	24.92	0.880
70.0	22.33	0.900	30.0	26.34	0.871
60.0	23.48	0.893	20.0	27.89	0.861
50.0	24.73	0.885	10.0	29.59	0.849
40.0	26.09	0.876	0.0	31.45	0.837
30.0	27.58	0.866	-10.0	33.50	0.823
20.0	29.20	0.855	-20.0	35.76	0.808
10.0	30.97	0.843	-30.0	38.25	0.792
0.0	32.92	0.831	-39.3	40.82	0.776

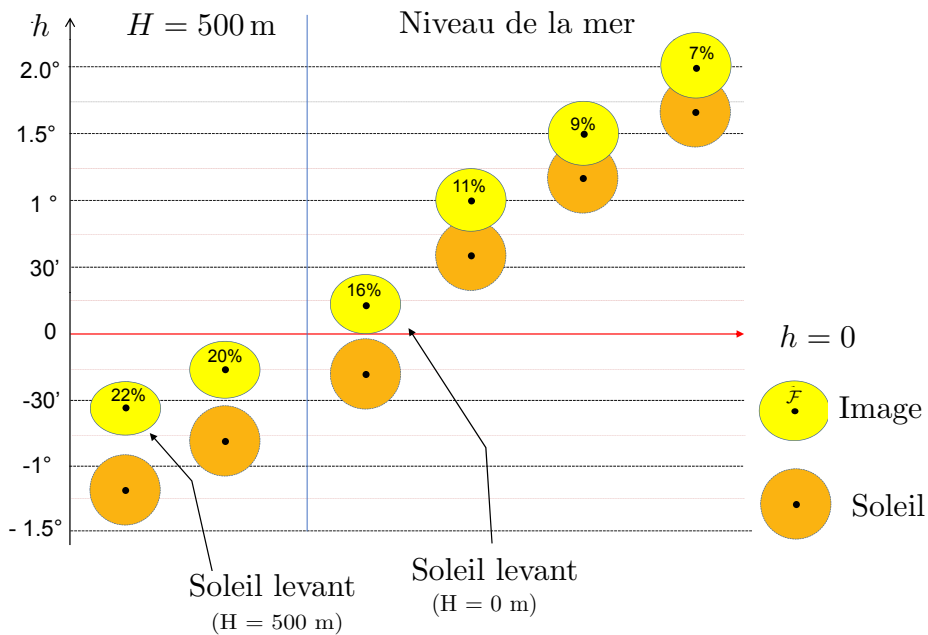
le Soleil vrai est totalement sous l'horizon, et de façon encore plus marquée pour l'observateur observant avec une dépression de l'horizon.

### 2.2.3. *Aplatissement théorique*

Le grandissement  $\Gamma$  et son équivalent l'aplatissement  $\mathcal{F}$  peuvent être exprimés en fonction de quelques paramètres physiques d'un modèle d'atmosphère simplifié. On considère tout d'abord la première approximation du rayon lumineux au-delà de la ligne droite sous la forme d'un arc de cercle de courbure  $\kappa$ , comme le faisait déjà J. H. Lambert en 1758 dans son traité sur la *Route de la lumière*.



**FIGURE 5.** Image du Soleil couchant en contact avec l’horizon optique. Un cercle de 31,5' donne la forme géométrique du Soleil (qui est plus bas sous l’horizon). Le grandissement vertical  $\Gamma = 26,4/31,5 \approx 0,83$  (soit ici une compression) est directement relié à la réfraction. (Crédit : F. Mignard)



**FIGURE 6.** Illustration schématique donnant la position et la forme du Soleil vrai et de son image au lever (ou coucher). Les positions relatives montrent bien que le Soleil vrai est totalement sous l’horizon lors du lever/coucher, puis, pour des hauteurs croissantes, le bord supérieur vrai dépasse le bord inférieur de l’image, qui dans le même temps se circularise. La valeur de  $\mathcal{F}$  est calculée au centre du Soleil et donnée en pourcentage.

L'application des principes généraux de l'optique géométrique conduit à l'équation différentielle générale des rayons lumineux [3],

$$\frac{d(n\boldsymbol{\tau})}{ds} = \nabla n(\mathbf{r})$$

où  $\boldsymbol{\tau}$  désigne le vecteur tangent unitaire le long du rayon lumineux et  $\mathbf{r}$  le vecteur position du point courant rapporté au centre de la Terre. En développant on a l'équation équivalente avec le second membre le vecteur unitaire  $\mathbf{i}$  le long de la verticale ascendante, prenant en compte la symétrie sphérique,

$$\frac{d(n)}{ds} \boldsymbol{\tau} + n \frac{\mathbf{N}}{\kappa} = \frac{dn}{dH} \mathbf{i}$$

avec  $\mathbf{N}$  pour la direction normale au rayon lumineux,  $n(H)$  pour l'indice de réfraction en fonction de l'altitude  $H$  et  $\kappa$  pour le rayon de courbure. On a noté  $\mathbf{i}$  le vecteur unitaire le long de  $\mathbf{r}$ . En projetant sur la normale  $\mathbf{N}$  et en adoptant les conventions telles que le rayon de courbure soit un scalaire positif, il reste,

$$\frac{n}{\kappa} = \left| \frac{dn}{dH} \right| \sin z$$

Pour un rayon pratiquement horizontal, et toujours dans le cas d'une atmosphère à symétrie sphérique, on a

$$\left| \frac{dn}{dH} \right| = \frac{n}{\kappa} \approx \frac{1}{\kappa} \quad (6)$$

Maintenant, pour un rayon lumineux de rayon de courbure  $\kappa$ , courbé vers le sol, on obtient par des considérations géométriques élémentaires et au premier ordre de la hauteur angulaire  $h$ ,

$$\mathcal{R}(h) = \mathcal{R}(0) - \frac{R_{\oplus}/\kappa}{1 - R_{\oplus}/\kappa} h \quad (7)$$

qui donne le taux de variation de la réfraction au voisinage de l'horizon (mais absolument pas la réfraction elle-même) en fonction du rayon de courbure du rayon lumineux et du rayon de la Terre  $R_{\oplus}$ . L'indice de réfraction  $n$  est donné par la loi empirique de Gladstone-Dale, selon laquelle la réfractivité  $(n - 1)$  est proportionnelle à la masse volumique  $\rho$  de l'air :

$$n - 1 = (n - 1)_0 \frac{\rho}{\rho_0}$$

avec  $(n - 1)_0$  et  $\rho_0$  pour les valeurs au niveau du sol. La troposphère sèche se comporte comme un gaz parfait de masse molaire  $M$  constante et on peut écrire,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T}$$

si  $P, T$  désignent la pression et la température à l'altitude  $H$  et  $P_0, T_0$  les valeurs normales à  $H = 0$ . La troposphère standard, durant les premiers dix kilomètres de l'atmosphère, se caractérise par un gradient de température constant<sup>2</sup>

$$\frac{dT}{dH} = -\gamma = -6,5 \times 10^{-3} \text{K m}^{-1} \quad (8)$$

conduisant à,

$$T = T_0 - \gamma H.$$

En introduisant l'équilibre hydrostatique dans l'atmosphère,

$$\frac{dP}{dH} = -\rho g$$

<sup>2</sup>L'usage pour l'atmosphère est de le prendre le coefficient  $\gamma$  sous la forme d'un nombre positif, bien que la température décroisse avec l'altitude.

et en combinant avec la loi des gaz parfaits, on obtient rapidement avec l'accélération de la pesanteur  $g$  invariable avec l'altitude,

$$P = P_0 \left( 1 - \frac{\gamma H}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{R\gamma}}$$

et enfin pour la masse volumique,

$$\rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{\gamma H}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{R\gamma} - 1}$$

et l'indice de réfraction en fonction de l'altitude,

$$n - 1 = (n - 1)_0 \left( 1 - \frac{\gamma H}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{R\gamma} - 1}.$$

Dans ces relations  $R$  est la constante des gaz parfaits et jamais le rayon de la Terre. On calcule maintenant le taux de variation de  $n$  en  $H = 0$ ,

$$\left( \frac{dn}{dH} \right)_{H=0} = -(n - 1)_0 \frac{Mg}{RT_0} \left( 1 - \frac{R\gamma}{Mg} \right) \quad (9)$$

Les valeurs numériques,

$$M = 0,02897 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$R = 8,3143 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$g = 9,807 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$T_0 = 288,15 \text{ K}$$

$$\gamma = 6,5 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$(n - 1)_0 = 0,00027712 \text{ (à la longueur d'onde dans le vide } \lambda = 0,590 \mu\text{m)}$$

conduisent alors à,

$$\left( \frac{dn}{dH} \right)_{H=0} \approx -2,65 \times 10^{-5} \text{ km}^{-1}$$

donnant avec (6) le rayon de courbure en rayon terrestre  $\kappa/R_\oplus = 5,896$ . En insérant dans (7), on obtient au voisinage de l'horizon,

$$\left( \frac{d\mathcal{R}}{dh} \right)_{h=0} = -\frac{R_\oplus/\kappa}{1 - R_\oplus/\kappa} \approx -0,205$$

et avec (3), cela donne finalement le grandissement théorique de l'image solaire en  $z = \pi/2$ ,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\left( 1 + \frac{d\mathcal{R}}{dz}(z) \right)} = 1 - \frac{R_\oplus}{\kappa} \approx 0,83$$

une valeur totalement en accord avec la valeur portée sur la figure 5. Il est tout à fait remarquable d'arriver à une quantité facilement mesurable impliquant une physique élémentaire de l'atmosphère sèche en équilibre hydrostatique. Ainsi l'aplatissement  $\mathcal{F}(\pi/2) = 1 - \Gamma(\pi/2)$  est très directement relié à la courbure des rayons lumineux, elle-même l'expression directe du taux de variation de l'indice de réfraction de l'atmosphère. Regardons la sensibilité de l'aplatissement au gradient du modèle de température, pour voir si c'est un paramètre essentiel ou secondaire. On a l'expression théorique avec (9),

$$\mathcal{F}(\pi/2) = \frac{R_\oplus}{\kappa} = (n - 1)_0 R_\oplus \frac{Mg}{RT} \left( 1 - \frac{R\gamma}{Mg} \right)$$

où l'on voit que le terme avec le gradient thermique intervient en correction du modèle isotherme, puisque  $R\gamma/Mg \approx 0,18$  avec les valeurs standards. Donc l'aplatissement est peu sensible à la valeur précise de ce gradient et augmente légèrement lorsque le gradient est plus faible.

En revanche, il peut se trouver des situations où sur de faibles épaisseurs d'atmosphère le gradient thermique devient très grand négatif ou positif et conduit à des déformations spectaculaires d'une partie ou de l'ensemble du Soleil au lever/coucher. On peut même approcher une quasi-disparition de l'aplatissement pour une décroissance rapide de la température au voisinage de la surface de  $34 \text{ K km}^{-1}$ , lorsque la décroissance de température compense exactement la diminution de pression avec l'altitude conduisant à une densité constante, donc à un indice de réfraction constant. (Attention à la convention de signe de  $\gamma$  adoptée ici à partir de (8)). Bien entendu ces résultats sont connus depuis bien longtemps et la relation de l'aplatissement avec le rayon de courbure est classique et on trouve une expression équivalente dans [4, Sect. 5].

Le coefficient  $\Gamma$ , apparaît dans plusieurs formules d'optique atmosphérique pour corriger des formules géométriques, équivalentes à la propagation rectiligne, et tenir compte de la courbure des rayons lumineux. Par exemple la distance de l'horizon, ou distance de visibilité, pour un observateur à l'altitude  $H$  (avec  $H/R_{\oplus} \ll 1$ ) est donnée par,

$$\mathcal{V} = \left( \frac{2R_{\oplus}H}{\Gamma} \right)^{1/2}$$

et la dépression sous l'horizon par

$$\epsilon = \left( \frac{2H\Gamma}{R_{\oplus}} \right)^{1/2}$$

donc une correction de l'ordre de  $1 - \sqrt{0,83} \approx 9 \%$  par rapport à la propagation dans le vide avec  $\Gamma = 1$ . Une manière pratique d'exprimer cela est que l'on peut rendre compte de la réfraction pour la visibilité, avec une propagation rectiligne, mais en prenant une Terre de rayon  $R_{\oplus}/\Gamma \approx 7\,700 \text{ km}$  qui est une recette pratique de la marine.

### 3. La Lune vue proche de l'horizon de l'ISS

#### 3.1. Présentation

La forme ovalisée du Soleil ou de la Lune à leur lever ou coucher, s'écarte significativement d'un cercle, mais demeure très voisine d'une ellipse avec un quasi-centre de symétrie. L'écart à la symétrie est un effet du second ordre, qui apparaît comme une correction à l'effet principal. Dans le cours de la section 2 nous avons vu que l'on pouvait rendre compte de l'effet principal par des approximations linéaires diverses et que le résultat s'accordait remarquablement bien avec les faits. Nous allons envisager maintenant un cas de *réfraction intense* dans lequel on ne peut se passer d'une intégration complète du rayon lumineux dans sa traversée de l'atmosphère. L'adjectif *intense* se rapporte non pas à la grandeur de la réfraction, qui reste modeste avec des rayons toujours faiblement courbés par comparaison à la courbure de la Terre, mais aux variations fortes de la réfraction sur de très faibles étendues angulaires. C'est la situation habituelle dans les phénomènes de mirages, mais ici il n'y a pas de *catastrophes* ou de *singularités* dans les caustiques, et l'imagerie est régulière, avec juste de fortes distorsions.

L'objet est de rendre compte au mieux de l'observation effectuée en 2003 à bord de la Station spatiale d'un coucher de Lune, c'est-à-dire de sa disparition sous l'horizon optique de l'ISS, après une vision au travers de l'atmosphère terrestre. La figure 7 est un montage photographique d'une suite de clichés de la vision de la Lune au travers de l'atmosphère le 16 avril 2003 obtenus pendant une dizaine de secondes depuis la Station spatiale. La dernière image à droite est légèrement coupée dans sa partie basse indiquant le début de la plongée sous l'horizon, et cela permet de matérialiser sa position. Les positions relatives dans le sens horizontal sont arbitraires et proviennent des contraintes du montage. Les positions verticales, qui sont bien plus importantes, ont été reconstruites au sol à partir des données de navigation de la Station et des instants des clichés. On voit immédiatement plusieurs caractéristiques frappantes dans ce montage :



**FIGURE 7.** Montage photographique du coucher de la Lune observé depuis l’ISS le 16 avril 2003. Les positions verticales ont été reconstituées au sol à partir du mouvement de la Station. (Crédit : Don Pettit, Les Cowley, ISS, NASA)

- La forme du contour de la Lune change de façon importante
- Les contours ne sont pas interprétables avec le seul aplatissement
- L’asymétrie est plus marquée au milieu de la séquence
- L’aplatissement devient considérable à l’horizon
- Les dimensions horizontales ne sont pas ou peu affectées
- Si l’on se fie aux positions verticales, tout se joue sur environ  $2\text{--}2,5^\circ$ .

Nous allons examiner ces différents points à partir d’un calcul de la traversée complète de l’atmosphère par les rayons lumineux.

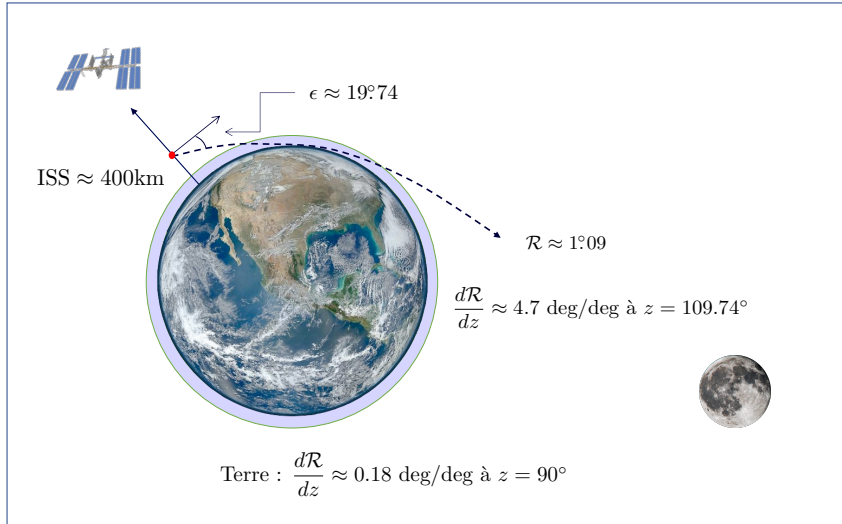
### 3.2. Modélisation physique

#### 3.2.1. Conditions d’observation

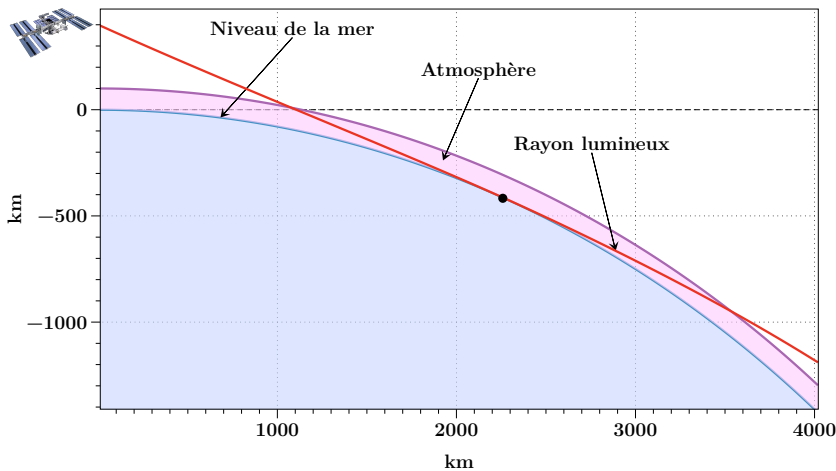
La Station spatiale tourne autour de la Terre sur une orbite quasiment circulaire à une altitude de 400 km. Cette valeur est légèrement variable ( $\pm 30$  km), car l’orbite n’est pas parfaitement circulaire, mais surtout du fait des perturbations venant de la Lune et du Soleil et du frottement atmosphérique. De plus la Station perd constamment de l’altitude et doit être remise à poste régulièrement pour ne pas rentrer dans une zone atmosphérique plus dense qui rendrait la manœuvre impossible. La période de révolution est de 93 minutes, donc les phases de lever/coucher sont 15 fois plus courtes que sur Terre, bien qu’en raison de l’inclinaison de l’orbite de  $51^\circ$  sur l’équateur, la géométrie soit plus compliquée que cette simple composition des rotations. Dans la suite toutes les applications numériques utilisent  $H = 400$  km.

Les conditions de l’observation sont schématisées sur la figure 8, avec la Station à 400 km au-dessus du sol et une observation vers l’horizon de l’astronaute. Avec de la géométrie du triangle (propagation en ligne droite), on trouve que l’horizon se trouve à 2 300 km de la Station et que la dépression angulaire est proche de  $20^\circ$ . En fait comme une grande partie de la propagation s’effectue hors de l’atmosphère dense, les calculs purement géométriques sont très proches du résultat optique. La réfraction du rayon rasant vaut  $65,5'$ , soit exactement le double de la réfraction du rayon horizontal sur Terre au niveau de la mer, puisque le rayon total est la réunion de deux arcs horizontaux partant du point de contact. On a indiqué sur la figure les taux de variation comparatifs de la réfraction pour une observation à l’horizon à bord de l’ISS et au sol : il est 25 fois plus élevé à bord de la station, tout simplement parce que pour une très faible



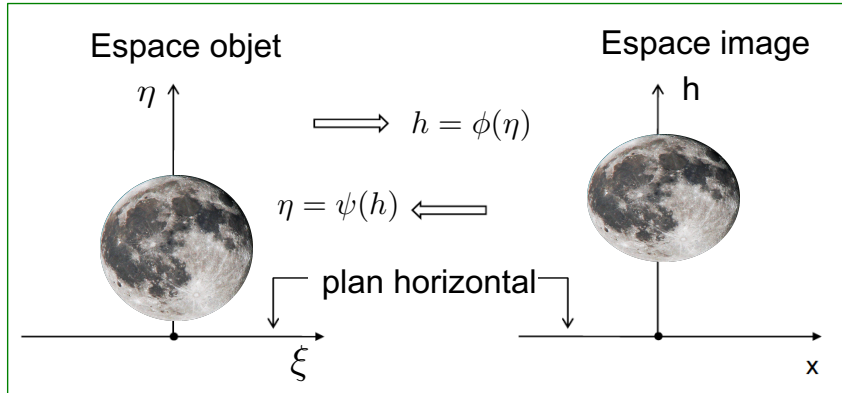


**FIGURE 8.** Conditions géométriques de l'observation du coucher de Lune à bord de l'ISS. Les échelles verticales et angulaires ne sont pas respectées dans ce schéma pour plus de clarté. La dépression de l'horizon est proche de  $20^\circ$  et la réfraction du rayon rasant la mer est de  $65'$ . L'horizon se trouve à environ  $2\,300\text{ km}$  de la station. C'est la variation rapide de la réfraction près de l'horizon comparée au cas de la Terre ( $d\mathcal{R}/dz$ ) qui est à l'origine de la déformation des images de la Lune et non la valeur, relativement modeste, de la réfraction.



**FIGURE 9.** Trajet des rayons lumineux rasants atteignant l'ISS. Le rayon lumineux dans l'atmosphère s'étend sur  $\approx 2\,500\text{ km}$  et sur la figure il ne peut se distinguer d'une droite, bien que légèrement courbe. La réfraction totale vaut  $65'$  et la distance entre l'ISS et le point de contact sur l'horizon est  $2\,300\text{ km}$ . Vue de l'ISS l'épaisseur de l'atmosphère contribuant à la réfraction est  $< 0,5^\circ$ .

variation dans l'orientation initiale du rayon ( $< 1^\circ$ ), la trajectoire évite totalement l'atmosphère et la réfraction disparaît. Les déformations des images seront donc amplifiées dans le même rapport et la zone angulaire efficace réduite en gros dans les mêmes proportions.



**FIGURE 10.** Correspondance entre l'objet et l'image dans le cas de l'optique atmosphérique avec une réfraction régulière avec les notations utilisées dans les équations.

La figure 9 donne une vue plus réaliste du trajet du rayon lumineux rasant entre l'ISS, l'horizon et un astre éloigné, hors de l'atmosphère. Comme précédemment le tracé résulte d'une intégration numérique de l'équation différentielle du rayon lumineux selon les lois de l'optique géométrique. De nouveau le rayon est courbe et impossible à distinguer d'une droite sur le schéma. On peut noter que même avec une atmosphère efficace de 50 km d'épaisseur, à 2 300 km de distance l'extension verticale du pinceau ne dépasse pas  $1,2^\circ$  et que la réalité est encore inférieure à ce nombre. Il s'ensuit que l'échelle verticale reconstruite sur le montage photographique de la figure 7 n'est pas réaliste et qu'elle doit être divisée par un facteur compris entre deux et trois. On imagine sans peine que la reconstruction *a posteriori* de la hauteur exacte de chaque image en fonction de la date des clichés n'était pas chose facile et pas très importante dans le montage. Le parcours total dans l'atmosphère s'étend sur 2 500 km, soit un arc de  $22^\circ$  en projection sur le sol, bien au-delà des approximations des petits angles utilisées pour les formules de visibilité sur Terre.

### 3.2.2. Formation de l'image de la Lune

La correspondance entre les plans objet et image est schématisée sur la figure 10, avec les notations des coordonnées dans les deux plans. On recherche l'image du contour d'un disque au travers de l'instrument optique que constitue l'atmosphère représentée par une couche sphérique de faible épaisseur au regard du rayon moyen de la couche. Les équations de la transformation ponctuelle entre les deux systèmes de coordonnées sont très simples pour une réfraction dans le plan vertical,

$$x = \xi \quad (10a)$$

$$h - \mathcal{R}(h) = \eta \quad (10b)$$

et l'équation du contour dans le plan objet est celle d'un cercle

$$(\eta - \eta_0)^2 + \xi^2 = \delta^2$$

avec  $\eta_0$  la hauteur du centre vrai et  $\delta$  le rayon angulaire. La figure correspondante dans le plan image est une certaine courbe d'équation

$$f(x, h) = 0$$

qu'il s'agit de calculer pour différentes hauteurs  $\eta_0$  dans le plan objet. Pour le tracé il est parfois plus simple de considérer la transformation,

$$\begin{aligned}x &= \xi \\h &= \eta + \overline{\mathcal{R}}(\eta)\end{aligned}$$

avec la réfraction  $\overline{\mathcal{R}}$  exprimée en fonction de la hauteur vraie (soit implicitement, soit explicitement si cela est possible) au lieu de la hauteur apparente, comme c'est l'usage.

Avec ces transformations on peut transférer les équations paramétriques du disque vrai en équations paramétriques de la forme apparente dans le plan image. C'est la solution adoptée ici pour obtenir par tracé de rayons les contours de la Lune apparente à différentes hauteurs, jusqu'à ce qu'elle touche l'horizon. Ceci a l'avantage d'une méthode numérique pour l'exactitude, mais masque les propriétés qualitatives simples de la forme de l'image. On peut en calculer une bonne approximation qui est utile pour saisir les phénomènes en jeu, même si elle est moins précise que la méthode entièrement numérique.

Soit dans le plan objet l'équation du bord de la Lune considérée comme un disque de rayon angulaire  $\delta \approx 0,25^\circ$ . L'équation paramétrique de ce cercle est donnée par,

$$\xi = \delta \cos \theta \quad (11a)$$

$$\eta - \eta_0 = \delta \sin \theta \quad (11b)$$

expressions dans lesquelles on a fait figurer la hauteur  $\eta_0$  du centre du disque lunaire pour utiliser son image comme origine des hauteurs dans le plan image. On insère maintenant (10) dans (11)

$$x = \delta \cos \theta \quad (12a)$$

$$h - h_0 - (\mathcal{R}(h) - \mathcal{R}(h_0)) = \delta \sin \theta \quad (12b)$$

avec  $h_0$  la hauteur de l'image du centre du disque lunaire. Ce point que l'on peut reconstruire à l'intersection de l'axe de symétrie vertical et de l'image du diamètre horizontal, donne une référence pratique pour interpréter les équations. En principe la résolution explicite de (12) en  $(x, h - h_0)$  en fonction de  $\theta$  donne l'équation paramétrique du contour du disque image de la Lune. C'est équivalent à inverser la formule de réfraction, et donc à l'exprimer en fonction de la hauteur vraie. Mais on peut effectuer des développements au voisinage de l'horizon qui seront suffisants pour avoir déjà une très bonne forme de cette image, pratiquement correcte jusqu'à l'horizon. On utilise le fait que la demi-extension de la Lune n'est que de  $0.25^\circ$  et que la réfraction, bien que fortement variable, doit pouvoir être approchée par un développement de Taylor au second ordre sur ce petit changement de hauteur, sans qu'il soit possible d'estimer la qualité de cette approximation, si ce n'est que les contours calculés sont assez proches du résultat numérique final.

On introduit alors,

$$\mathcal{R}(h) - \mathcal{R}(h_0) = (h - h_0) \frac{d\mathcal{R}}{dh}(h_0) + \frac{(h - h_0)^2}{2} \frac{d^2\mathcal{R}}{dh^2}(h_0)$$

et donc,

$$h - h_0 - (\mathcal{R}(h) - \mathcal{R}(h_0)) \approx \frac{h - h_0}{\Gamma_0} - \frac{\Delta_0}{2} \left( \frac{h - h_0}{\Gamma_0} \right)^2 \quad (13)$$

avec les coefficients de grandissement et d'asymétrie (3) et (4) déjà introduits pour le Soleil et pris ici au centre de la Lune. On peut résoudre l'équation (13) du second degré en  $(h - h_0)$ , ce qui donne la seconde équation paramétrique, solution approximative de (12b),

$$\frac{h - h_0}{\Gamma_0} = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\Delta_0\delta \sin \theta}}{\Delta_0} \quad (14)$$

Les différents contours de la Lune de la figure 12 ont été calculés avec cette équation et  $x = \delta \cos \theta$ .

On voit que l'expression (14) pose problème pour  $\Delta_0 \rightarrow 0$  et n'indique pas au premier coup d'oeil qu'à la limite on retrouve la figure ovale et symétrique comme pour le Soleil. En prenant  $\Delta_0 \delta \ll 1$ , c'est-à-dire une faible variation du grandissement sur l'étendue du disque lunaire, on peut développer le radical pour avoir les équations,

$$x = \delta \cos \theta \quad (15a)$$

$$h - h_0 = \Gamma_0 \delta \sin \theta \left( 1 + \frac{1}{2} \Delta_0 \delta \sin \theta \right) \quad (15b)$$

plus faciles à interpréter. La restriction au premier terme ne fait pas intervenir le coefficient d'asymétrie  $\Delta_0$  et est l'équation d'une ellipse de demi-axes  $\delta, \Gamma_0 \delta$ . C'est bien la figure compressée et symétrique trouvée à la section précédente pour le Soleil. Le terme suivant caractérise les déformations non symétriques et permet en fait de représenter un très grand nombre de formes, en particulier les formes allongées du Soleil que l'on trouve dans des conditions de réfractions anormales près de l'horizon.

À noter qu'à partir de (12) et de (13) on peut obtenir également l'équation cartésienne de la courbe image du disque au même niveau d'approximation,

$$x^2 + \left[ \frac{h - h_0}{\Gamma_0} - \frac{\Delta_0}{2} \left( \frac{h - h_0}{\Gamma_0} \right)^2 \right]^2 = \delta^2 \quad (16)$$

beaucoup moins pratique pour effectuer un tracé, mais qui permet de retrouver l'équation de l'ellipse au premier ordre et sa déformation au second ordre. Par exemple appliqué au Soleil levant/couchant, on trouve avec (16) la hauteur du bord supérieur et inférieur,

$$h_{\pm} \approx h_0 \pm \Gamma_0 \delta \left( 1 \pm \frac{\Delta_0 \delta}{2} \right) \quad (17)$$

montrant qu'au second ordre, le bord inférieur est plus relevé que le bord supérieur ou de manière équivalente que la moitié supérieure de l'ovale image est moins compressée que la moitié inférieure avec  $\Gamma_+ = \Gamma_0(1 + \Delta_0 \delta/2) > \Gamma_- = \Gamma_0(1 - \Delta_0 \delta/2)$  pour les grandissements moyens de chaque moitié d'image et  $\Delta_0 > 0$ .

Dans ces équations  $h_0$  est l'origine des hauteurs, mais sa véritable position sur le ciel ne peut être connue que par la résolution de l'équation,

$$h_0 - \mathcal{R}(h_0) = \eta_0 \quad (18)$$

avec  $\eta_0$  la hauteur géométrique du centre de la Lune ou du Soleil.

Les valeurs de la réfraction en fonction de la hauteur apparente, et ses dérivées sous la forme du grandissement et du coefficient d'asymétrie ont été calculées avec une atmosphère standard et une intégration numérique du trajet des rayons lumineux. La réfraction est alors obtenue par comparaison des directions des tangentes aux deux extrémités du rayon. Les résultats sont donnés sous forme graphique avec la figure 11 et sous forme numérique dans la figure 2. La réfraction est représentée avec une échelle logarithmique à partir de  $z = 107,5^\circ$ , mais on voit qu'elle ne devient significative que sur moins de un degré au-dessus de l'horizon. La courbe est très régulière et on peut trouver des représentations polynomiales de bonne qualité pour faciliter les calculs numériques pour  $\mathcal{R}(z)$  et  $\overline{\mathcal{R}}(\zeta)$ . Par exemple, avec la réfraction en minutes d'arc :

$$\log \mathcal{R}(z) \approx 1,809 - 1,4244s - 2,6319s^2 + 2,0238s^3 - 0,46534s^4$$

$$\log \overline{\mathcal{R}}(\zeta) \approx 1,9627 - 0,95467s + 1,1956s^2 - 0,89543s^3 + 0,14277s^4$$

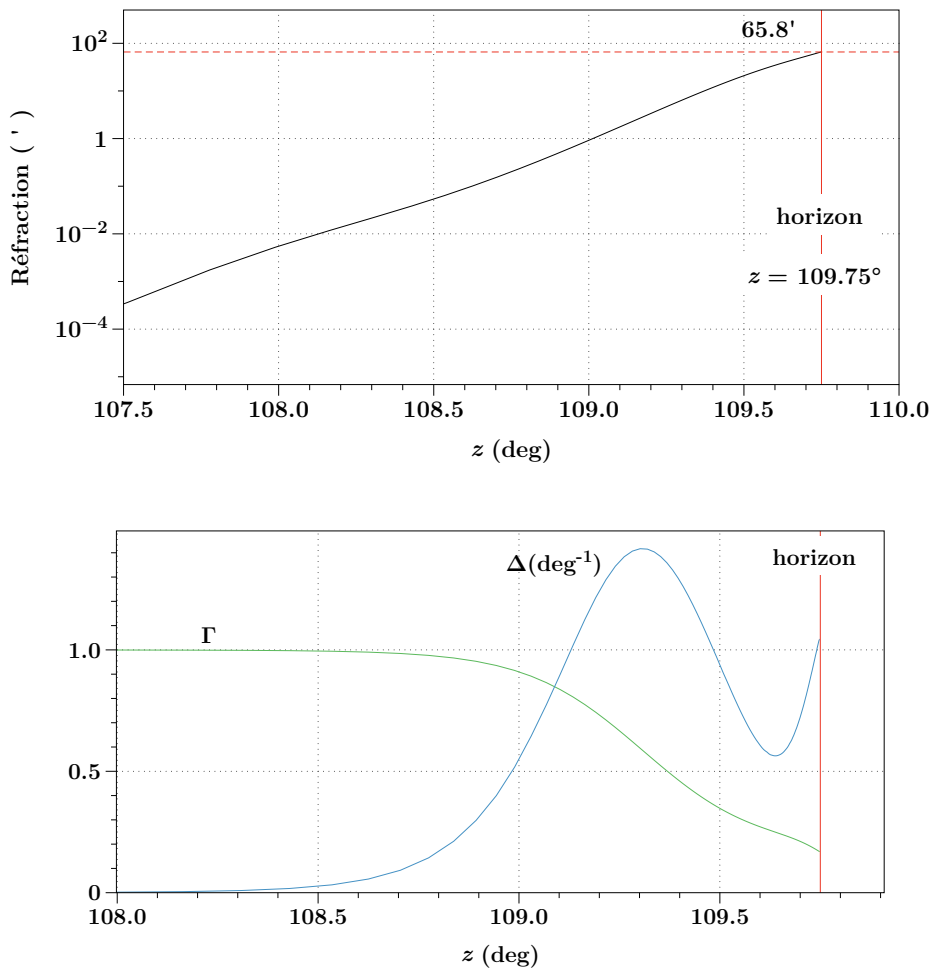
avec

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \text{ en minutes d'arc, } s \text{ en degrés} \quad & s = 109,75 - z, \quad s \in [0^\circ, 2,5^\circ] \text{ pour } \mathcal{R}(z) \\ & s = 111,00 - \zeta, \quad s \in [0^\circ, 2,5^\circ] \text{ pour } \overline{\mathcal{R}}(\zeta) \end{aligned}$$

La figure 11 donnant le grandissement et le coefficient d'asymétrie est fort intéressante. Le premier décroît régulièrement à partir de  $z \approx 108,8^\circ$  jusqu'à l'horizon, où la compression est considérable avec  $\Gamma < 0,2$  soit une dimension verticale de la lune n'atteignant pas  $0,1^\circ$ . Le coefficient d'asymétrie a une allure assez surprenante, avec un passage par un maximum et une oscillation, ce qui correspond bien à la troisième remarque faite à propos de la séquence de la figure 7.

### 3.2.3. Résultats sur les images

Les calculs du contour apparent du disque lunaire lors du coucher à bord de l'ISS ont donc été effectués soit avec le modèle analytique approché, soit par des tracés de rayons partant du disque vrai. Les résultats sont rassemblés dans deux séries de figures :



**FIGURE 11.** Réfraction dans l'atmosphère terrestre depuis la Station spatiale. Haut : valeurs de la réfraction en fonction de la distance zénithale apparente jusqu'à l'horizon optique. Axe de  $\mathcal{R}$  logarithmique. La réfraction n'est notable que sur moins de 1 degré de hauteur, juste au-dessus de l'horizon. Bas : valeurs du grandissement  $\Gamma$  et du coefficient d'asymétrie  $\Delta$  (voir le texte) en fonction de la distance zénithale apparente jusqu'à l'horizon optique.

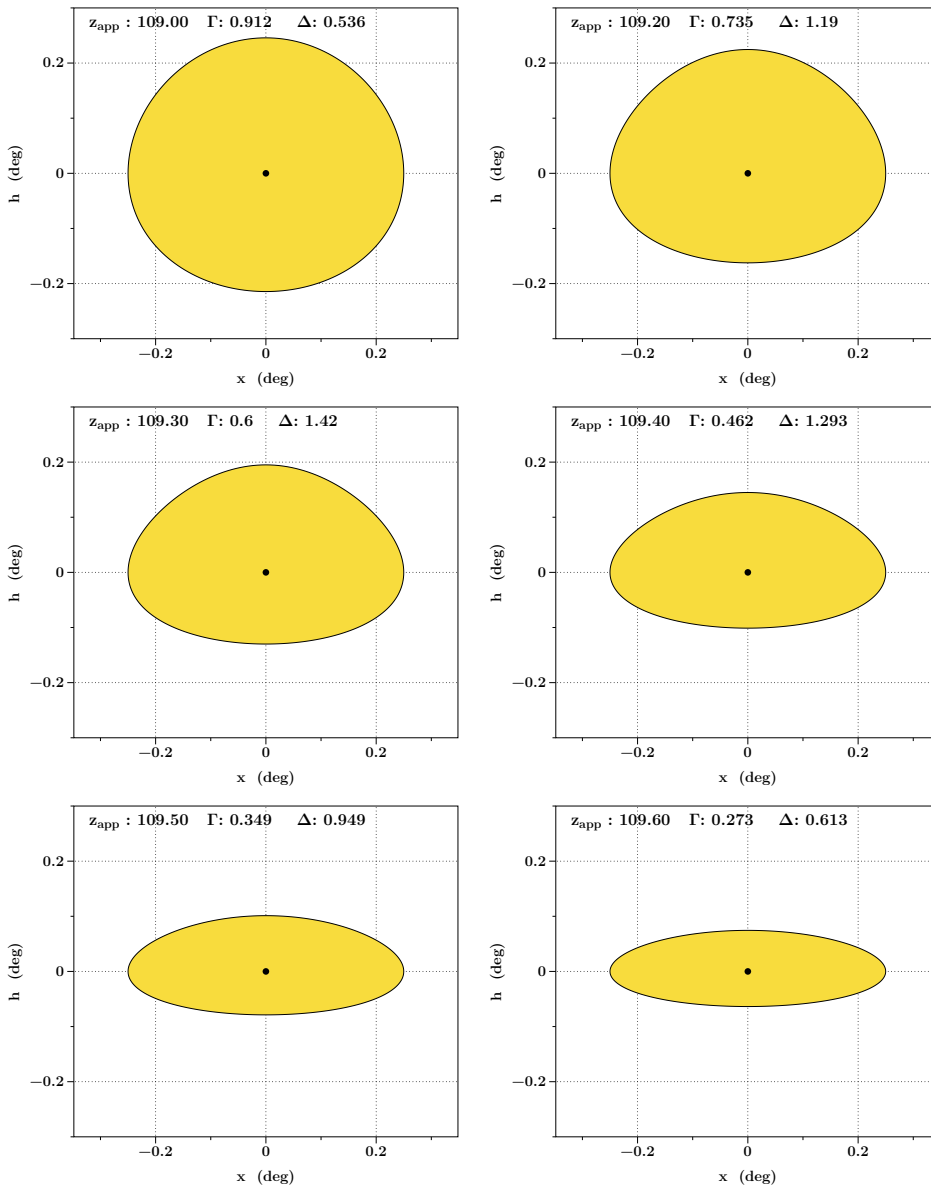
- (1) la figure 12 pour la solution approximative utilisant les valeurs de  $\Gamma_0$  et  $\Delta_0$  au centre de la Lune  
 (2) les figures 13–14 pour la solution purement numérique.

Globalement cela reproduit très correctement les clichés de la figure 7, en particulier l'alternance entre une forme symétrique et asymétrique, puis symétrique au coucher. La grandeur de l'aplatissement lors du contact du bord inférieur avec l'horizon est également retrouvée dans les deux calculs. Cependant l'approximation analytique accentue trop fortement la déformation de la Lune au milieu de la séquence, indiquant qu'il faudrait poursuivre le développement à un ordre supérieur. Mais la relative économie de moyens mis en oeuvre permet de rendre compte du phénomène mieux que qualitativement.

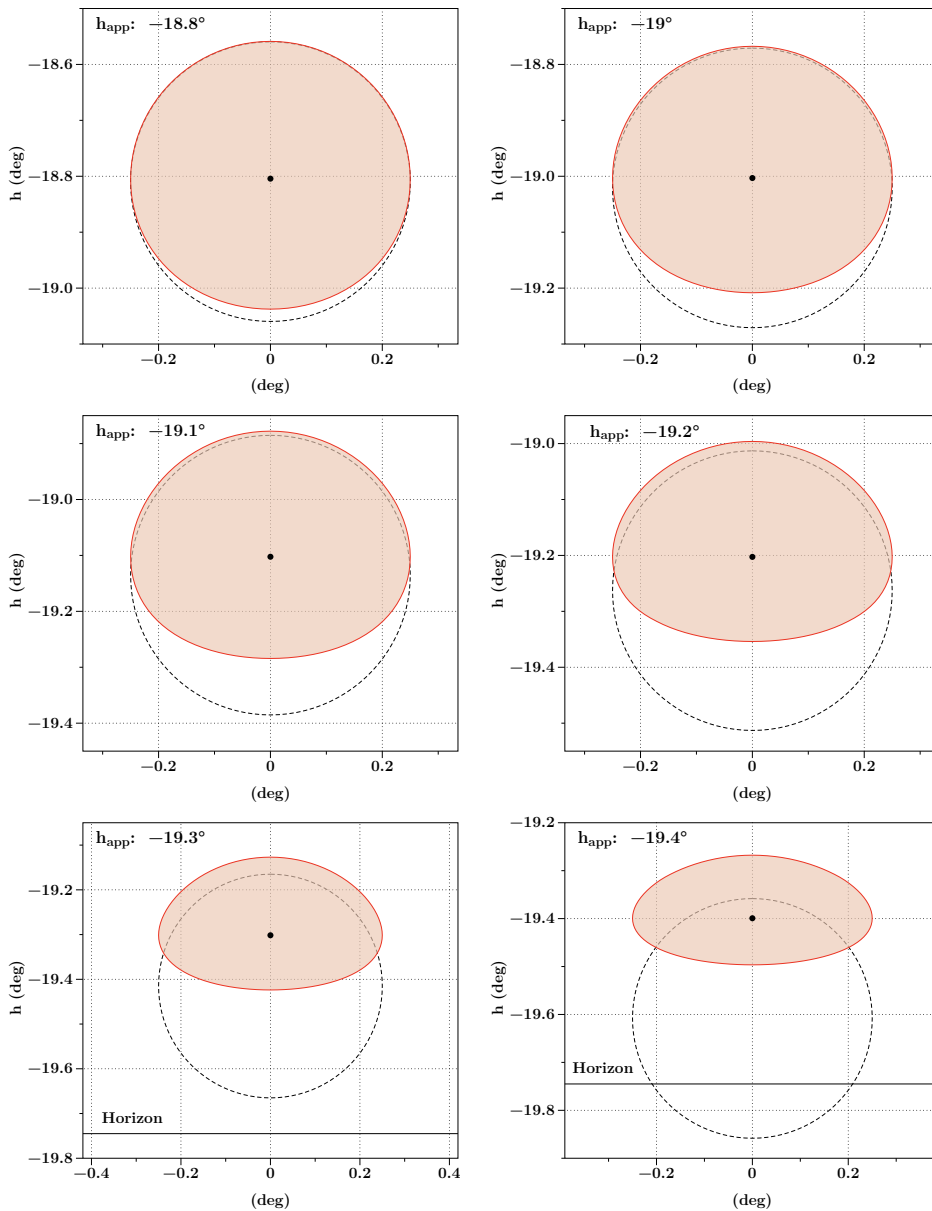
Les résultats numériques sont clairement plus proches de l'observation, bien que la déformation calculée autour de  $z = 109,2^\circ - 109,3^\circ$  semble insuffisante. On a figuré dans les premières images le contour et la position de la Lune vraie, qui montrent bien que l'aplatissement ne provient pratiquement que du relèvement du bord inférieur, ce qui est compréhensible pour un objet de  $0,5^\circ$  d'extension verticale et une zone réfractive de dimension comparable. Sur les quatre dernières images, tout près de l'horizon, la Lune est sous l'horizon et n'est pas figurée. La dernière

**TABLE 2.** Réfraction au voisinage de l'horizon de la Station spatiale. Observateur placé à 400 km d'altitude. Le grandissement  $0 < \Gamma < 1$  indique donc une compression locale des images autour d'un point de l'espace objet. Le coefficient d'asymétrie  $\Delta$  est le taux de variation du grandissement par degré de hauteur. La réfraction est concentrée dans une toute petite gamme d'angles très proches de l'horizon et son gradient est très élevé. La valeur à l'horizon est bien égale à deux fois la réfraction horizontale de la table 1 pour  $H = 0$  m.

$H = 400$ km							
$z$ deg	$\mathcal{R}$ arcmin	$\Gamma$ -	$\Delta$ deg <sup>-1</sup>	$z$ deg	$\mathcal{R}$ arcmin	$\Gamma$ -	$\Delta$ deg <sup>-1</sup>
108.00	0.01	1.000	0.002	108.90	0.49	0.952	0.302
108.05	0.01	0.999	0.002	108.95	0.67	0.934	0.409
108.10	0.01	0.999	0.003	109.00	0.92	0.911	0.519
108.15	0.01	0.999	0.003	109.05	1.27	0.879	0.701
108.20	0.01	0.999	0.004	109.10	1.76	0.840	0.886
108.25	0.02	0.999	0.006	109.15	2.43	0.791	1.073
108.30	0.02	0.998	0.007	109.20	3.37	0.732	1.243
108.35	0.03	0.998	0.010	109.25	4.65	0.667	1.365
108.40	0.03	0.997	0.013	109.30	6.40	0.597	1.417
108.45	0.04	0.997	0.017	109.35	8.74	0.527	1.389
108.50	0.05	0.996	0.024	109.40	11.84	0.459	1.285
108.55	0.07	0.994	0.032	109.45	15.85	0.399	1.126
108.60	0.09	0.992	0.044	109.50	20.91	0.347	0.938
108.65	0.12	0.990	0.061	109.55	27.14	0.305	0.752
108.70	0.15	0.986	0.084	109.60	34.58	0.271	0.608
108.75	0.20	0.981	0.117	109.65	43.27	0.242	0.571
108.80	0.27	0.974	0.161	109.70	53.46	0.211	0.727
108.85	0.36	0.965	0.221	109.75	65.80	0.169	1.043



**FIGURE 12.** Forme de la Lune vue de l'ISS calculée par la méthode approchée du développement au second ordre des déformations des équations (12),(13), (14). La valeur de  $z_{app}$  est celle de la distance zénithale apparente du rayon qui aboutit au centre du disque lunaire, figuré par le point noir à l'origine des coordonnées. Les hauteurs  $h$  des figures sont repérées par rapport à la ligne horizontale passant par ce point et dans l'entête  $\Gamma$  et  $\Delta$  sont au centre du disque lunaire avec  $\Delta$  en  $\text{deg}^{-1}$ . La dernière image (bas-droite) est très voisine du coucher.

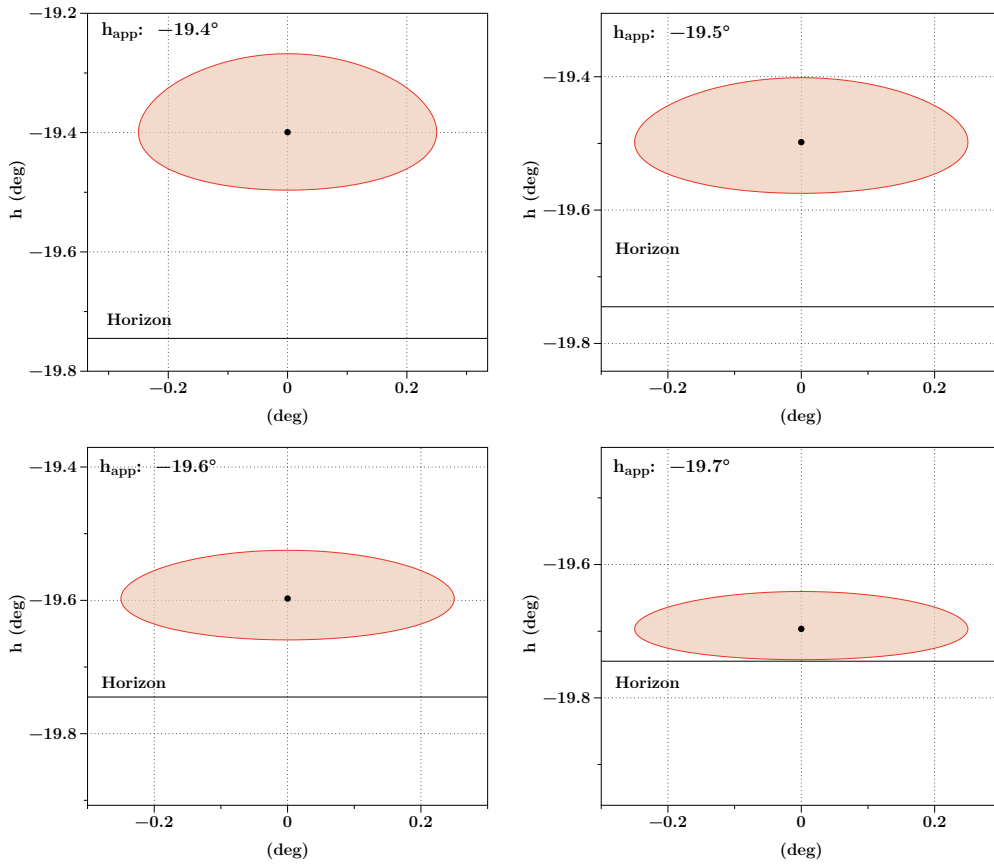


**FIGURE 13.** Forme de la Lune vue de l'ISS calculée par la méthode de tracés de rayons au travers de l'atmosphère. La valeur de  $h_{app}$  est celle de la hauteur apparente du rayon qui aboutit au centre du disque lunaire, figuré par le point noir. La position de la Lune vraie figurée par le cercle en tirets confirme bien la prépondérance de l'effet sur le bord inférieur.

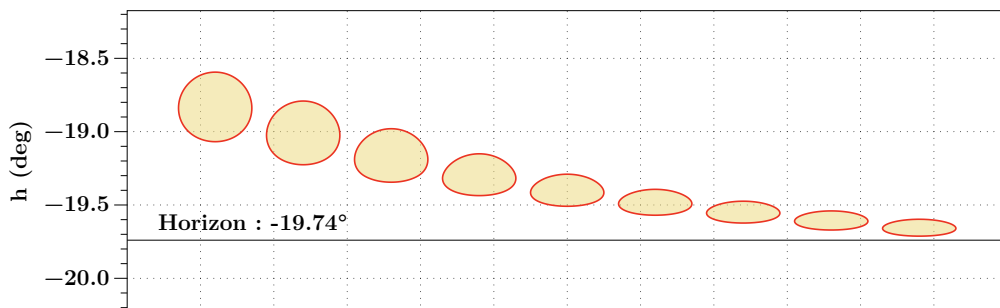
image est celle du coucher du bord inférieur et est identique à celle du cliché à bord de l'ISS.

Finalement, la figure 15 reconstitue la séquence de la figure 7. La seule différence notable, mais essentielle, réside dans l'extension verticale dont nous avons déjà noté qu'elle posait un problème. La séquence ISS n'étant pas datée il est impossible de réaliser un échantillonnage exactement identique et par défaut ces reconstructions sont à pas régulier en hauteur vraie.





**FIGURE 14.** Forme de la Lune vue de l'ISS calculée par la méthode de tracés de rayons au travers de l'atmosphère. La valeur de  $h_{app}$  est celle de la hauteur apparente du rayon qui aboutit au centre du disque lunaire, figuré par le point noir.



**FIGURE 15.** Phases d'un coucher de la Lune depuis la Station Spatiale calculées à partir de la réfraction atmosphérique. Les positions verticales sont à la bonne échelle angulaire, alors que le positionnement en azimut est arbitraire. On voit plus clairement que l'extension verticale totale à partir du début de la déformation est inférieure à un degré.

#### **4. Conclusion**

Nous avons montré dans ces deux sections comment une modélisation relativement élémentaire permet d'interpréter quantitativement deux phénomènes résultant de la réfraction de la lumière dans l'atmosphère terrestre, au voisinage de l'horizon. Le cas de l'aplatissement solaire est classique, (voir par exemple [5, 6]), mais rarement étudié au-delà de l'interprétation qualitative. On voit qu'avec une table de la réfraction bien échantillonnée on peut le proposer à des étudiants en physique ou en astronomie. L'application plus complexe à la Station spatiale est unique et à ma connaissance n'a pas fait l'objet d'une simulation numérique permettant de rendre compte avec précision des déformations complexes apparaissant durant le coucher de l'astre, à l'exception d'une étude visionnaire de 1963 [7] qui envisageait des couchers de Soleil depuis l'espace, mais en ne considérant que la valeur de l'aplatissement. Les calculs ont permis également de montrer que l'image utilisée pour la communication de la NASA présentait un sérieux problème dans l'échelle verticale.

#### **Conflit d'intérêt**

L'auteur n'a pas de conflit d'intérêts à déclarer.

#### **Remerciements**

Je remercie Luc Dettwiller pour sa relecture très soignée de la version initiale de ce document et pour l'ensemble de ses remarques constructives qui ont bien amélioré la cohérence de l'ensemble.

TABLE 3. Notations utilisées dans ce document

Symbole	Grandeur	Unités
$\zeta, z$	distances zénithales vraie et apparente	°
$z_{\text{app}}$	distance zénithale apparente (incluant la réfraction)	°
$\eta, h$	hauteurs angulaires vraie et apparente	°
$H$	altitude au dessus du niveau de la mer	m, km
$R_{\oplus}$	rayon moyen de la Terre (6371 km)	km
$\xi, \eta$	coordonnées cartésiennes dans le plan objet	deg
$x, h$	coordonnées cartésiennes dans le plan image	deg
$T$	température absolue	K
$P$	pression atmosphérique	Pa
$R$	constante des gaz parfaits	$\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
$\rho$	masse volumique de l'air	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
$\gamma$	gradient de température dans la troposphère ( $-dT/dz$ )	$\text{K} \cdot \text{km}^{-1}$
$n$	indice de réfraction de l'air	-
$\mathcal{R}$	réfraction atmosphérique ( $\mathcal{R}(z), \mathcal{R}(h)$ )	°, '
$\kappa$	rayon de courbure des rayons lumineux	km
$\Gamma$	grandissement d'une image	-
$\mathcal{F}$	aplatissement apparent du Soleil ( $= 1 - \Gamma$ )	-
$\Delta$	facteur d'asymétrie d'une image	$\text{deg}^{-1}$

## Références

- [1] R. D. Sampson, E. P. Lozowski, A. E. Peterson, « Comparison of modeled and observed astronomical refraction of the setting Sun », *Appl. Opt.* **42** (2003), n° 3, p. 342-353.
- [2] F. Mignard, « Les tables de réfraction astronomique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 133-178.
- [3] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, Oxford et New York, 1975.
- [4] L. Dettwiller, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 13-62.
- [5] A. T. Young, « Sunset Science. IV. Low-Altitude Refraction », *Astronomical Journal* **127** (2004), n° 6, p. 3622-3637.
- [6] Z. Néda, S. Volkán-Kacsó, « Flatness of the setting Sun », *Am. J. Phys.* **71** (2003), n° 4, p. 379-385.
- [7] W. S. Cameron, J. H. Glenn, M. S. Carpenter, J. A. O'Keefe, « Effect of refraction on the setting sun as seen from space in theory and observation », *Astron. J.* **68** (1963), n° 5, p. 348-351.

**Seconde partie. Histoire spécialisée :  
décryptage de données théoriques fécondes,  
sur des documents originaux (xviii<sup>e</sup>–xx<sup>e</sup>)**





---

Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

# L'invariant de Bouguer et ses conséquences : commentaire historique

*The Bouguer invariant and its consequences:  
an historical commentary*

Luc Dettwiller<sup>® a</sup>

<sup>a</sup> Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School,  
Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France  
*Courriel*: [dettwiller.luc@gmail.com](mailto:dettwiller.luc@gmail.com)

**Résumé.** Dans la seconde partie de son essai primé de 1729, Bouguer (1698–1758) introduit, pour un rayon lumineux dans un milieu à symétrie sphérique, son invariant ainsi qu'une forme de l'intégrale de réfraction, dont il dresse une table pour un modèle particulier d'atmosphère ; puis il étudie l'influence de la courbure des rayons sur la dépression de l'horizon — à propos de laquelle il prédit l'effet *hillingar*. À titre de complément, on rappelle que la formule de Bradley pourra se déduire du modèle de Bouguer ; on montre qu'elle aide à comprendre la forte convexité de la réfraction horizontale en fonction de la réfractivité.

**Abstract.** In the second part of his prize-winning essay of 1729, Bouguer (1698–1758) considers a light ray in a spherically symmetric medium and introduces the invariant named after him. He deduces an expression of the refraction integral, leading to a table which is computed for a particular atmospheric model. He then studies the influence of the ray's curvature on the horizon dip and predicts the *hillingar* effect. As a complement, we recall that the Bradley formula can be derived from the Bouguer model. This helps to understand the strong convexity of horizontal refraction versus refractivity.

*Published online*: 3 March 2023, *Issue date*: 11 August 2023

## 1. Introduction

Pierre Bouguer est né le 16 février 1698 au Croisic, port très florissant où son père Jan (ou bien Jean) avait été nommé premier *maître d'hydrographie* (enseignant « l'art de naviguer par règles et principes » [1, p. 372–375]) dans une nouvelle école, gratuite et publique, créée en 1691. Il se révèle vite comme un enfant surdoué, ouvert et curieux, faisant de brillantes études au collège des Jésuites à Vannes. Puis il revient dans sa ville natale à cause de la maladie de son père, et il y commence sa carrière à 16 ans en lui succédant le 27 juin 1714 comme professeur royal (i.e. « maître ») d'hydrographie ; celui-là, décédé le 17 mai 1714, était l'un des meilleurs hydrographes de son temps. Sa compétence de très jeune enseignant force l'admiration de ses élèves, tous plus âgés, et lui vaut une célébrité précoce, grâce à laquelle l'école du Croisic devient rapidement très cotée.

À partir de 1720, et pendant plus d'un siècle, l'Académie des sciences lançait des concours annuels sur des questions de physique générale alternant avec des questions de navigation, en vue de l'attribution d'un prix (d'au moins 2 000 £ au XVIII<sup>e</sup> siècle) ; un exemple célèbre dans l'histoire de l'optique est la question sur la diffraction, posée en 1817 pour le prix de 1819, remis à Fresnel en récompense de son magnifique mémoire de 135 pages. Bouguer en a remporté trois sur la navigation, tous consécutifs : en 1727 avec *De la mâturation des vaisseaux* [2], en 1729 avec *De la méthode d'observer exactement sur mer la hauteur des astres* [3], et en 1731 avec *De la méthode d'observer en mer la déclinaison de la boussole* [4]. Au moins avec son essai primé de 1729, où il utilise le calcul infinitésimal qui n'est pratiqué en France que depuis une dizaine d'années, Bouguer surfe sur l'intérêt nouveau de l'Académie pour cette nouvelle théorie [5, p. 67], ainsi que pour une physique plus mathématique [6, p. 560], comme le montre l'étude du contexte intellectuel [7].

En 1729 aussi, il fait œuvre de physicien en publiant un *Essai d'optique sur la gradation de la lumière* [8], véritablement novateur, que Lambert [9] déclarera très beau (voir [10] dans ce numéro spécial). Le 1<sup>er</sup> décembre 1730, il est nommé professeur à l'école d'hydrographie du Havre. Début septembre 1731, l'Académie des Sciences le reçoit comme associé géomètre, sur la place libérée par la promotion de Pierre Louis Moreau de Maupertuis, du grade d'associé à celui de pensionnaire ; Bouguer saute donc le grade d'adjoint, ce qui est exceptionnel — le seul cas connu avant lui étant celui de Dortous de Mairan. Alors il sera souvent absent du Havre, se faisant remplacer pour venir à Paris ; par conséquent, il ne s'intégrera pas réellement dans la société havraise. Suite au décès de l'astronome pensionnaire Jacques Lieutaud en 1733, il est choisi par le roi pour lui succéder le 24 janvier 1735, car il était déjà connu pour un travail en mécanique céleste [11] ; il doit s'établir à Paris, où il ne restera pas longtemps.

En effet, en remplacement de l'astronome (et assistant à l'Académie des sciences, futur Secrétaire perpétuel) Jean-Paul Grandjean de Fouchy « qui se désista pour d'obscures raisons de santé (en fait, il était amoureux et ne voulait pas quitter sa belle) » [12, p. 74], Bouguer part pour 9 ans le 9 mars 1736 vers le Pérou avec l'expédition de Godin et La Condamine, dont le but est de mesurer la longueur d'un arc de méridien auprès de l'équateur [13, 14], afin d'en déduire le sens de l'aplatissement terrestre et sa valeur, grâce à la comparaison avec un arc de méridien mesuré en Laponie par l'expédition de Maupertuis (1736–1737). Avec ses mesures de la pesanteur en août 1737 au sommet du volcan Pichincha (à 2 434 toises = 4 744 m d'altitude), mais aussi à Quito qui se trouve au pied de celui-ci (à 1 466 toises = 2 857 m d'altitude), et plus tard au niveau de la mer [15, p. 329–364], il introduit la « correction à l'air libre » et la « correction de plateau » [16, p. 362–365] ; en 1738 il est intrigué aussi par la faiblesse de la déviation du fil à plomb (quelques secondes d'angle, considérées par lui comme peu fiables [17, p. 248]) qu'il mesure à proximité du Chimborazo, par rapport à l'ordre de grandeur prévu par son modèle (14 fois plus) — il effectue donc un travail de géophysicien et d'astronome, qui lui fait soupçonner la présence de zones de densité anormalement faible sous la montagne, ce en quoi il est précurseur de la théorie de l'isostasie et des racines crustales des chaînes de montagnes [15, p. 379–394].

De retour à Paris en 1744, il publie ses observations dans son livre sur *La Figure de la Terre*, paru en 1749 [15] ; et de par son expérience de la géodésie, il prend position, mais de manière ambiguë, dans la polémique de 1743–1757 sur la longueur d'un degré de méridien en France. Dès 1745, il avait été sollicité par l'Académie des sciences et par les ministres de la Marine successifs, Phélypeaux (comte de Maurepas) puis Rouillé (comte de Jouy), pour examiner un certain nombre de mémoires et projets visant à résoudre le problème des « longitudes à la mer », déposés devant les autorités. Sur terre, la mesure des longitudes était efficacement réalisée au XVII<sup>e</sup>–XVIII<sup>e</sup> siècle par l'utilisation de bonnes horloges et l'observation synchronisée des éclipses des satellites galiléens de Jupiter : c'est ainsi qu'en 1671 Jean Picard, sur le site de l'ancien observatoire de Tycho Brahe au Danemark, et Jean-Dominique Cassini à l'Observatoire de Paris, ont pu observer simultanément cinq de ces éclipses, et en déduire la différence de longitude entre

ces deux lieux. Mais cette méthode s'est avérée inutilisable en mer, à cause des mouvements du bateau qui perturbaient les horloges à pendule et rendent quasiment impossible l'observation des satellites de Jupiter [18]. Maupertuis étant parti début 1745, sur l'invitation de Frédéric II de Prusse, pour présider l'Académie des sciences de Berlin, Bouguer avait été chargé de le remplacer au poste de « préposé au perfectionnement de la marine ». En 1746 paraît son œuvre magistrale, probablement écrite en grande partie dans les Andes, pendant les longues périodes d'inactivité forcée : le *Traité du navire*, où il introduit la notion mathématique de métacentre permettant de prédire la stabilité des vaisseaux [19]. En 1748 il invente l'héliomètre (ou lunette à double objectif) pour mesurer avec précision le diamètre apparent du Soleil, afin de voir « si la théorie de Newton est vérifiée pour cet astre, à savoir s'il est aplati aux pôles » ; il n'obtient pas de résultat positif, vu la petitesse cet effet :  $0,0089'' \pm 0,0021''$  mesurés pour le 10 septembre 1996 par l'héliomètre de Jean Rösch au Pic du Midi, en parfait accord avec les  $0,0087'' \pm 0,0028''$  mesurés par le satellite SOHO pour les 19–20 mars 1997. Mais très vite Bouguer découvre avec son héliomètre les liserés colorés du limbe solaire (rouge en bas, bleu en haut si l'image est redressée) et les explique correctement par le pouvoir dispersif de l'air [20, 21].

En 1749, le ministre Rouillé lui attribue la pension de 3 000 £ qui avait été spécialement créée par son prédécesseur pour le poste de Maupertuis, à l'automne 1739. Bouguer s'acquittera scrupuleusement de la tâche afférente jusqu'à son décès. Ses expertises sur les propositions de méthode de mesure des longitudes le conduiront à penser que l'utilisation d'horloges dans ce but est vouée à l'échec et ne mérite pas d'être encouragée, car on ne dispose pas d'horloges ayant un fonctionnement suffisamment régulier (quoique des horlogers — au moins les familles Le Roy et Berthoud — y travaillaient) ; ainsi, les avis émis par Bouguer auraient agi comme un obstacle au développement de l'horlogerie de marine en France dans les années 1750 [22]. En 1753, son *Nouveau traité de navigation contenant la théorie et la pratique du pilotage* [23] est fort bien accueilli — comme en 1757 son dernier gros ouvrage de marine, *De la manœuvre des vaisseaux* [24].

Il participe activement à la rédaction du *Journal des sçavans* jusqu'en 1755. En août 1754, année de la mort de son seul frère, il suggère au tout nouveau ministre de la Marine, Machault d'Arnouville, d'ordonner de nouvelles mesures géodésiques en France, avec l'espoir évident de s'en voir confier la responsabilité — pour combattre une solitude devenue trop pesante (il ne s'est jamais marié) [19] ou compenser une gloire émoussée, et assombrie par de pénibles querelles [12, p. 280 et 409–410] avec La Condamine qui jetaient le discrédit sur l'ensemble de la communauté scientifique [25], depuis un retour d'expédition vieux de 10 ans [26] ? Son souhait est partiellement exaucé, car il fait partie d'une des deux commissions chargées par l'Académie des sciences de remesurer en 1756 la distance Paris-Amiens pour clore les controverses sur le degré de France.

À côté de tout cela, il continue à travailler sur la photométrie jusqu'à la fin de sa vie. Car il avait toujours le souci de perfectionner les instruments de mesure, d'éviter les perturbations et de développer des corrections, comme il l'avait déjà fait entre autres pour ses pendules gravimétriques à Quito et au sommet du Pichincha où, pour analyser leurs différences de période il tient compte, non seulement de la différence de température, mais aussi de celle de pression qui entraîne un changement de masse volumique de l'air et donc de poussée d'Archimède [15, p. 338–340] ; par la suite, Bessel a montré (en 1826) comment l'usage d'un pendule réversible de forme symétrique permet d'éliminer cette influence de l'air dans les calculs de gravimétrie [16, p. 320–321 et 342–347], ce qui rend inutile cette prise en compte de la pression. Il reste que Bouguer se trouve être l'un des principaux instigateurs d'une nouvelle approche des mesures qui accroît leur exactitude et leur qualité, permettant ainsi un net développement de la physique de son siècle.

Il a été juge pour 6 prix de l'Académie des sciences (notamment sur des questions de mécanique céleste), et accumule aussi les titres et les honneurs : membre de la *Royal Society* (1750),



de l'Académie royale de Bordeaux, membre honoraire de l'Académie de Marine (1752), sous-directeur de l'Académie royale des Sciences de Paris en 1747 et 1754, et directeur en 1748 puis 1755.

En photométrie, « il passa les deux dernières années de sa vie à se mettre en état de faire un nouvel Ouvrage sur la même matière, mais qui n'auroit plus besoin du titre d'Essai. Après avoir fait toutes les expériences & tous les calculs dont il avoit besoin, M. Bouguer s'occupoit à les rédiger, lorsqu'il fut attaqué d'une maladie qui le fit languir plusieurs mois : elle ne put l'obliger à interrompre son travail ; forcé même par une hydropisie déclarée, de garder le lit, il ne fut pas possible de l'empêcher de s'occuper de son Livre pendant plusieurs heures du jour : il eut enfin la satisfaction d'en voir les dernières pages mises au net, quelques jours avant que de mourir » le 15 août 1758 [27, p. iv-v].

Ses travaux en construction navale, en hydrographie, en mathématiques, en optique, en astronomie, en géodésie et en géophysique font de lui une figure emblématique de savant aux connaissances encyclopédiques, conforme à l'idéal du siècle des Lumières [28-30]. Le poète croisicais Paul Desforges-Maillard, son cadet d'un an et ami de toujours avec qui il entretenait une abondante correspondance, écrira [31] :

### XXIII \*

#### SUR LA MORT DE BOUGUER †.

**B**OUGUER est mort. Il étoit de mon âme,  
 Pendant qu'il a vécu, la plus chère moitié ;  
 Et la noire Atropos, qui vint couper sa trame,  
 N'a pu rompre les nœuds de ma tendre amitié.

Ses immenses talents, de mémoire immortelle,  
 N'égalent point encor la bonté de son cœur :  
 Accompli, né sans fard, prévenant et fidèle <sup>2</sup>,  
 Tous ceux qui l'ont connu connoissoient sa candeur.

Éclairés en tous lieux par son sçavoir sublime,  
 Le ciel, la terre et l'eau lui doivent des regrets,  
 Et jamais des humains la plus célèbre estime  
 Ne pourra payer ses bienfaits.

\* *Journal de Verdun* de 1758, t. II, Décembre, p. 448.

[31, p. 78] Source : gallica.bnf.fr / BnF

L'interminable querelle avec La Condamine (1701-1774), qui ne cessera vraiment qu'à la mort de ce dernier, avait laissé de Bouguer l'image d'un homme difficile ; Condorcet le réhabilitera dans son *Eloge de M. de La Condamine*, lu par lui à l'assemblée publique de l'Académie (qui se

déroule deux fois par an), comme l'a été celui de Bouguer par Grandjean de Fouchy [1, p. 372–375].

Nous présentons ici son deuxième essai [3] primé : [P.] Bouguer, *De la Méthode d'Observer Exactly sur Mer la Hauteur des Astres*, Claude Jombert, Paris, 1729. Il est disponible à <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN528571516>

Ce n'est pas son seul texte où il traite de réfraction astronomique : il en publiera d'autres pour l'Académie des Sciences de Paris [32, 33], et ses travaux seront aussi présentés par le Secrétaire perpétuel [34, 35] ; mais l'essentiel de ses idées novatrices se trouve déjà dans son essai primé de 1729, et nous présentons les quelques idées supplémentaires de ses autres articles dans le paragraphe 3 de notre « panorama historique [...] » [36] dans ce numéro spécial. Pour une bibliographie plus complète de Bouguer, on pourra se reporter à celle établie par Maheu [37], qui recense 47 titres sûrs.



DE LA METHODE  
D'OBSERVER  
EXACTEMENT SUR MER  
LA HAUTEUR DES ASTRES.

\*\*\*\*\*

— Oculosque sub astra tenebat.

*Virg. Mar. Ænei. Lib v.*

**L**ORSQUE l'Académie Royale des Sciences proposa aux Sçavans de toutes les Nations, de déterminer *quelle est la meilleure Méthode d'observer les hauteurs sur Mer, par le Soleil ☉ par les Etoiles, soit par des instrumens déjà connus, soit par des instrumens de nouvelle invention*, Elle montre dans cette rencontre, comme dans toutes les autres, l'extrême attention qu'elle a pour l'utilité publique, & pour la perfection des Arts. Elle ne pouvoit pas choisir en effet de matiere plus importante, & qui interessât davantage les Marins. Car réduits en Mer à ne pouvoir trouver que la seule latitude, avec un peu de précision, les Pilotes ne

A

## 2. Résumé et commentaires

Ce mémoire [3] de 74 pages se compose de deux parties.

La première (p. 3–38) est formée de 4 chapitres (et non pas 6, comme cela est marqué par erreur en tête des pages 33 et 35) consacrés aux divers instruments de mesure de la hauteur angulaire apparente  $\psi' = 90^\circ - Z'$  d'un astre, à leurs avantages et leurs inconvénients respectifs, et leurs perfectionnements éventuels. Ils sont classés en deux catégories, selon qu'ils se servent de l'horizon marin comme référence (c'est le cas de l'arbalestrille, du bâton astronomique, etc. — mais le sextant moderne ne sera inventé que dans les années 1730), ou bien utilisent un fil à plomb (resp. une disposition imprimée par la pesanteur à l'instrument) comme le quadrant de Gunter (resp. l'astrolabe lourd et pendu par un anneau), etc. — ce qui semble *a priori* exclu à cause du balancement du navire, mais Bouguer remet en cause cet *a priori* en réétudiant au chap. III différents systèmes : « car est-il certain qu'on ne pourroit pas à l'aide d'une bonne suspension, garantir [ces derniers] des plus grandes agitations du vaisseau ? »

La seconde partie (p. 39–72) est consacrée aux corrections optiques qu'il est nécessaire d'apporter aux mesures. Bouguer montre très clairement la nécessité, en navigation astronomique, de tenir compte (pour un observateur  $S$ ) de corrections dues d'une part à la réfraction astronomique  $\chi_S$  (qui fait l'objet du chapitre I — p. 39–62 — de cette partie), d'autre part à la réfraction atmosphérique (ou « terrestre ») qui fait l'objet du chapitre II — et que Lambert [9] caractérisera en moyenne par le coefficient de réfraction  $\kappa_S$ , i.e. le quotient de la courbure des rayons horizontaux en  $S$  par la courbure méridienne de la Terre (voir le paragraphe 3 de [36], puis 7.1.1 de notre exposé des « propriétés remarquables de la réfraction astronomique [...] » [38], et 3 de [39], tous dans ce numéro spécial).

Indépendamment de Newton qui l'avait précédé en 1694 sur l'étude de  $\chi_S$  dans un milieu à symétrie sphérique mais ne l'avait pas publiée (voir le sous-paragraphe 2.2 de [36]), Bouguer écrit, moins approximativement que Newton, l'expression de  $\chi_S$  sous la forme d'une intégrale (dite « de réfraction ») pour un rayon lumineux (R) supposé plan et allant d'un astre à  $S$ ; si on utilise la fonction tangente et l'indice de réfraction  $n$  (ainsi que sa valeur  $n_S$  en  $S$ ) au lieu de rapports de côtés de triangles et de sinus comme Bouguer, on peut la mettre sous la forme actuelle

$$\chi_S = \int_1^{n_S} \frac{\tan \alpha}{n} dn \quad (1)$$

où  $\alpha$  est, en un point courant  $P$  de (R), l'angle entre un vecteur tangent à (R) et le vecteur **grad** $n$  — pour une démonstration moderne de (1), voir le paragraphe 2 de [38] (mais rappelons surtout que cette intégrale suppose que  $\tan \alpha$  soit une fonction non-équivoque de  $n$ ). Bouguer consacre tout son §. XLI, intitulé « LEMME », à démontrer ce que nous appelons actuellement son invariant : à savoir, après transposition (cf. Table 1) en termes actuels ici comme dans toute la suite,

$$I_B := nr \sin \alpha = n_S r_S \sin Z' \quad (2)$$

pour (R) dans un milieu à symétrie sphérique de centre  $C$  — l'indice  $S$  mis à une grandeur indiquant que l'on considère sa valeur au niveau de  $S$ , le symbole  $:=$  indiquant une définition ou une notation, et la variable  $r$  désignant la longueur du segment CP (Bouguer appelle ce dernier « l'appliquée » de  $P$ ). La démonstration de Bouguer [3, p. 41–42] est rédigée encore en termes de géométrie sans aucune équation, et toujours indépendamment de Newton. Puis, après des explications (qui seront plus claires dans son mémoire de 1753 [33]) occupant essentiellement les pages 44–46, Bouguer en tire (p. 46) l'expression de l'élément différentiel de réfraction, sous

la forme

$$d\chi = \frac{I_B}{\sqrt{r^2 - (n^{-1})^2 I_B^2}} dn^{-1}. \quad (3)$$

Bouguer dit que « presque tous les personnes qui ont traité ce sujet » [3, p. 47] ont supposé que les valeurs de  $1/n$  — et non pas  $1/(n-1)$ , car il parle ici « des sinus » — sont proportionnelles aux valeurs d'un volume massique (Bouguer parle de « dilatations »). Or il note qu'avec la forte baisse de masse volumique  $\mu$  de l'air en fonction de l'altitude, cela donnerait  $\chi_S$  bien plus grand que ce qui est observé, donc il écrit que ceci l'a « obligé de supposer que les réfractions étoient causées dans l'Atmosphère par une matiere différente de l'air, & que nous avons apellée *réfractive* » (p. 48) ; derrière cette supposition se trouve vraisemblablement l'idée que  $1/n$  est proportionnel au volume massique de cette « matiere réfractive », qui ne forme pas un mélange homogène avec l'air dans l'atmosphère : en cela, il reprend une idée émise au tournant du XVIII<sup>e</sup> siècle, afin d'expliquer des faits troublants pour l'époque, au moins selon Giacomo Filippo Maraldi [40] suivi par les Cassini ([41, p. 197], [42, p. 84]) — mais sans les citer. Alors Bouguer considère que, vraisemblablement,  $1/n$  est une fonction (peut-être proportionnelle à une puissance) du volume massique de l'air, et il suppose plus quantitativement que  $1/n$  est proportionnel à  $r^q$  [3, p. 48]. Sans le savoir, Bouguer considèrerait donc pour cette « matiere réfractive » un modèle d'état d'équilibre polytropique d'un certain indice  $j$  (voir le sous-paragraphe 2.2 de [36]), car on sait maintenant que dans ce modèle la masse volumique est inversement proportionnelle à  $r^j$  (avec une pesanteur inversement proportionnelle à  $r^2$ ) et la température absolue  $T$  inversement proportionnelle à  $r$  pour un gaz parfait. Autrement dit, Bouguer ignorait, ou occultait, ou interprétait mal les conclusions expérimentales de Hauksbee [43, p. 175] qui préfiguraient la loi empirique de Gladstone–Dale. Serait-ce un cas de *wishful thinking*, car Bouguer aurait eu très envie d'utiliser les belles propriétés qu'il a découvertes pour des rayons dans un milieu où  $n$  est inversement proportionnel à  $r^q$  ? À sa décharge, signalons que le résultat de l'expérience de Hauksbee mit longtemps à être admis, vu les doutes de l'époque liés notamment à son résultat contradictoire avec l'expérience (en fait défectueuse) de Homberg [44, p. 115] ; mais surtout, au XVIII<sup>e</sup> siècle les appellations, différentes des nôtres, étaient encore bien ambiguës et entretenaient la confusion entre ce qu'on appelle maintenant l'indice  $n$  et la réfractivité  $\eta := n - 1$  : le mot « réfraction » était utilisé pour désigner tantôt, à l'instar de  $\chi_S$ , une déviation (quasi proportionnelle à  $n - 1$  dans les expériences de Hauksbee, qui écrivait « By these Experiments it plainly appear'd, That the Refraction of the Air was, as far as the Eye could distinguish it, exactly proportional to its *Density* » [43, p. 175]), tantôt le rapport des « sinus des angles d'incidence & de réfraction » [3, p. 47]. Bouguer aurait-il pris dans l'article de Hauksbee le mot « refraction » [43, p. 175] avec sa seconde acception, alors qu'il relevait ici de la première ? Puisqu'on ne parlait donc pas encore d'indice de réfraction à cette époque, mais de rapports de sinus,  $n$  ne saurait alors être défini qu'à une constante multiplicative près, donc il est naturel que  $n_S$  soit absent du modèle de Bouguer, et selon lui il ne serait pas illogique de considérer un profil d'indice tel que  $\lim_{r \rightarrow \infty} n(r) = 0$  ; cependant Bouguer considère que l'atmosphère de son modèle a une étendue limitée, et que les rayons lumineux ne présentent pas de point anguleux à sa frontière haute, donc (en termes actuels) que l'indice n'y est pas discontinu.

Bouguer déduit de son invariant  $I_B$  l'équivalence entre l'existence de rayons en spirale logarithmique et le fait que les valeurs des « dilatations » (donc de  $n^{-1}$  selon Bouguer) sont proportionnelles à  $r$  [3, p. 43 et 52] — notons qu'alors l'élément différentiel de l'intégrale de réfraction  $d\chi = (\tan \alpha) dn/n$  est, en vertu de simples propriétés géométriques, égal (en valeur absolue) à l'angle au centre  $d\theta$  correspondant. Bouguer a trouvé aussi (p. 49) une loi plus générale dans le cas où  $n$  est inversement proportionnel à  $r^q$ . Notons qu'avec ce profil d'indice particulier on a  $\kappa_S = q$  — en vertu de la relation (43) de [38] de ce numéro spécial. Et c'est en appliquant

« des méthodes géométriques » [3, p. 52] aux rayons dans un tel modèle d’atmosphère (de hauteur  $H$  au-dessus de l’observateur) que Bouguer construit une table de  $\chi_S(\psi')$ , en ajustant (comme Newton) les deux seuls paramètres indépendants ajustables de son modèle,  $q$  et  $h_\tau := H/r_S$ , à deux valeurs de référence :  $\chi_S(0^\circ) \cong 33'$  d’après les observations, et  $\chi_S(26^\circ) \cong 2' 12''$  d’après les tables de La Hire [3, p. 57]. Malheureusement la table obtenue par Bouguer (et qui correspond à  $q \cong 0,1281 \cong 1/7,805$ ) donne des valeurs en moyenne 10 % trop élevées, sauf aux faibles hauteurs (nous reviendrons sur ce point aux sous-paragraphes 3.4 et 3.5 du présent article) ; pendant l’expédition du Pérou, Bouguer annoncera le calcul d’autres tables, « en suivant en partie la méthode que j’ai expliquée dans la Pièce que je publiai en l’année 1729, sur la manière d’observer en Mer la hauteur des Astres. » [32] Après avoir cité la table de Tycho, il termine ce chapitre en comparant la sienne à celle de *La connaissance des Temps*, qui est calculée selon le modèle de Cassini [3, p. 61–62] ; il constate que la variation des réfractions près de l’horizon, qui était mal reproduite avec le modèle de Cassini, l’est mieux avec le sien (ce que le théorème de Biot explique très facilement — voir le sous-paragraphe 7.1 de [38]).

Le dernier chapitre est consacré à la dépression de l’horizon, à savoir l’angle  $\delta$  égal à la hauteur de l’horizon astronomique (i.e. l’ensemble des directions horizontales pour  $S$ ) par rapport à l’horizon réel (qui usuellement est plus bas) ; Bouguer commence par calculer  $\delta$  (qu’il appelle « l’inclinaison de l’horison sensible ») en considérant que les rayons lumineux venant de l’horizon marin sont rectilignes (comme le faisaient ses prédécesseurs), et il produit ainsi une table de  $\delta$  en fonction de l’élévation  $E$  de l’observateur  $S$  [3, p. 65], mais il montre qu’il y a un désaccord net avec une observation datant de la campagne géodésique des Cassini (au début du XVIII<sup>e</sup>) depuis une élévation de 408,5 toises (2 451 pieds) :  $50' 20''$  observées, contre  $54' 20''$  attendues (p. 66). Alors il montre (et il semble être en cela le premier) comment tenir compte de la courbure des rayons lumineux pour analyser les observations des objets terrestres ; elle diminue  $\delta$ , d’où une nouvelle table de  $\delta$  (p. 70), dont la différence avec l’ancienne n’est pas négligeable pour les marins (p. 71). Cette diminution de  $\delta$  était déjà prévue par Jean-Dominique Cassini, à propos des observations faites depuis Perinaldo lors de son bref et unique retour dans son village natal en novembre 1694, mais il ne savait pas comment mettre en équations les rayons courbes pour calculer  $\delta$  théoriquement (voir la fin du sous-paragraphe 2.1 de [36]). À la dernière page, Bouguer tombe dans le travers de la plupart de ses illustres contemporains (comme Jacques Cassini [42] — voir le paragraphe 1 de [36]) et de ses prédécesseurs (Newton et Flamsteed dans leur correspondance de 1694–1695, Huygens, Brahe, etc.), consistant à attribuer les « irrégularités » de réfraction à « la différente quantité de vapeurs qui se soutiennent dans la partie basse de l’Atmosphère » [3, p. 72], au lieu de les expliquer par un profil thermique non standard.

Pour d’autres détails, voir

A. T. Young. (Page consultée 12 janvier 2022), *Annotated bibliography of mirages, green flashes, atmospheric refraction, etc.*, [En ligne]. Adresse URL : <https://aty.sdsu.edu/bibliog/bibliog.html>

### 3. Présentation illustrée des idées fondamentales

La partie qui nous intéresse est la seconde, puisqu’elle seule traite de la réfraction — voir aussi [7] pour une présentation moins analytique. Dès son premier chapitre consacré à  $\chi_S$ , Bouguer laisse clairement entendre qu’il vise une étude meilleure que le traitement sommaire de  $\chi_S$  par Newton (1642–1727) dans son *Opticks* (1704) [45, Prop. X de la part. III du second livre] : voir ci-dessous, dans les pages 39–40 de [3], le paragraphe qui, malgré sa déférence envers les « grands Géomètres » comme Newton récemment décédé, n’en est pas moins une pierre jetée dans son jardin.

## SECON. PARTIE. CHAP. I.

39



## SECONDE PARTIE.

*Des corrections qu'il faut faire à la hauteur aparente  
des Astres, pour avoir la hauteur véritable.*

## CHAPITRE PREMIER.

*De la réfraction Astronomique.*

## §. XXXIX.

**P**lusieurs grands Géometres ont cherché la nature de la *Solaire*, ou de cette ligne courbe que tracent dans l'air les raions qui nous viennent des Astres : mais ils ont toujours négligé la sphéricité des différentes couches, dont on peut concevoir que l'Atmosphère est formée. Cependant il est certain qu'on doit y faire une expresse attention ; & qu'il ne suffit pas, comme on le pourroit croire d'abord, de chercher la nature de la *Solaire* pour des couches planes, & de courber ensuite cette ligne à proportion qu'on suppose que les couches se courbent elles-mêmes pour devenir Sphériques. Car un raion de lumière qui avance ici horifontalement, fait avec les couches supérieures des angles de 30<sup>min.</sup> d'un degré, de deux degrez &c. & cette diversité d'angles d'incidence, qui vient principalement de la courbure des couches, doit apporter de la différence dans la réfraction même. C'est aussi par cette raison qu'on ne peut pas apliquer à l'Atmosphère, le fameux Théorème avancé par M. *Newton* dans son Opti-

[3, p. 39] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

## 40 DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &amp;c.

que, \* qu'un raion de lumière qui passe à travers plusieurs milieux de différentes densitez, & compris entre des surfaces paralleles, souffre précisément par le trajet de tous ces milieux, la même réfraction que s'il passoit immédiatement du premier au dernier. Cette proposition n'est vraie que lorsque les surfaces sont planes, & il s'en faut extrêmement qu'on puisse s'en servir pour déterminer les réfractions astronomiques, ni pour découvrir le pouvoir *refringent* qu'a l'air grossier d'ici-bas, par raport à celui qu'a l'air subtil du haut de l'Atmosphère.

[3, p. 40] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Avec son modèle d'atmosphère stratifiée sur une Terre plate, Newton introduisait donc l'invariant de Snell-Descartes. Bien sûr, dans ses lettres de 1694 à Flamsteed (voir le sous-

paragraphe 2.2 de [36]), il avait fait mieux, et introduit l'invariant  $I_B$  (2) ; mais Bouguer ne pouvait pas le savoir, puisque cette correspondance n'a été publiée qu'en 1835. Alors, après avoir posé le problème de l'étude du rayon (R) que Bouguer appelle la *Solaire*, celui-ci démontre son invariant  $I_B$  dans un lemme [3, p. 41].

### 3.1. Invariant de Bouguer

#### Correspondance des notations

TABLE 1. Notations (le symbole := indique une définition)

Notations de Bouguer [3]	Notations de Dettwiller [36, 38] dans ce numéro de <i>C. R. Phys.</i>	Indications [et unités usuelles]
A	S	Point de l'observateur
la <i>Solaire</i>	le rayon lumineux (R)	Rayon allant d'un astre à S
« la distance » $y :=$ CP de « l'appliquée »	$r$	Distance entre un point courant $P$ — du rayon lumineux (R) — et le centre $C$ de la Terre, pour un modèle d'atmosphère à symétrie sphérique [km]
$a$	$r_S$	CS (quasiment le rayon terrestre) [km]
$dy :=$ SP de la Fig. 11 de Bouguer	$dr$	Variation élémentaire de $r$ pour un déplacement élémentaire de $P$ sur (R) [m]
« l'ordonnée » $z :=$ FG du point courant G d'une « courbe » qui est le graphe des « dilatations $z$ de la matière réfractive »	$r_S n^{-1}$	Inverse de l'indice de réfraction, multiplié par $r_S$ [km]
$c$	$I_B$	Invariant de Bouguer [km]
« progrès horizontal » élémentaire, $du$	$r_S d\theta$	Longueur de la projection sur Terre du déplacement élémentaire de $P$ sur (R) [m]
$\frac{c dz}{\sqrt{y^2 - (c^2/a^2)z^2}}$	$r_S d\chi = \frac{I_B r_S dn^{-1}}{\sqrt{r^2 - (n^{-1})^2 I_B^2}}$	Réfraction élémentaire — correspondant au déplacement élémentaire de $P$ sur (R) — et multipliée par le rayon terrestre [m]

(suite sur la page suivante)

TABLE I. (suite)

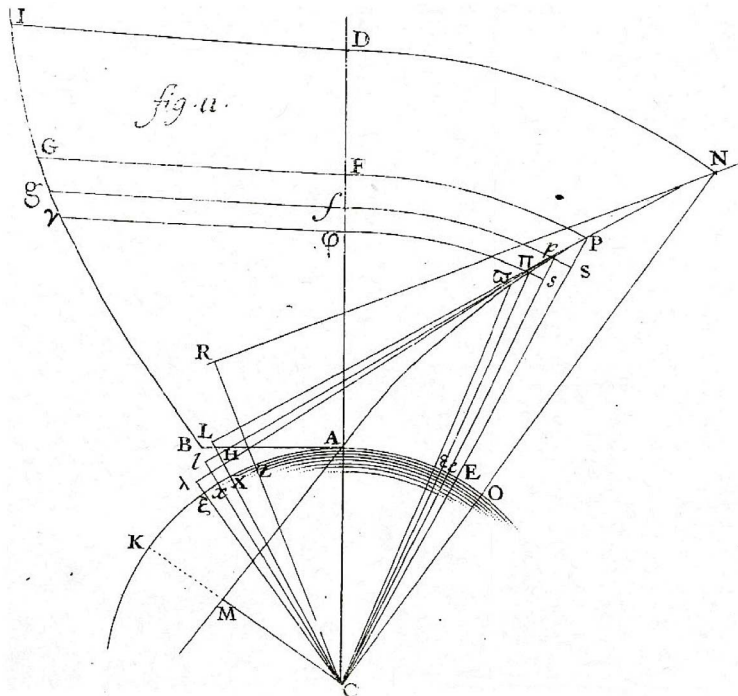
Notations de Bouguer [3]	Notations de Dettwiller [36, 38] dans ce numéro de <i>C. R. Phys.</i>	Indications [et unités usuelles]
$m$	$q$	Exposant du modèle de Bouguer
CN	$r_S + H$	Rayon de la frontière supérieure de l'atmosphère, dans le modèle de Bouguer [km]
$h = (m - 1) / m$	$-2w = (q - 1) / q$	Coefficient utile
$1 - g = a^{1-m} \text{CN}^{m-1}$	$[1 + (H/r_S)]^{m-1} = r_S^{1-m} (r_S + H)^{m-1}$	Autre coefficient utile
$q$	$\sin \psi'$	Sinus de la hauteur apparente
$p$	$\cos \psi' = \sin Z'$	Sinus de la distance zénithale apparente
$e$	$\chi_S(0) := \chi_{Sh}$ (1 <sup>e</sup> valeur de référence)	Donnée numérique utilisée pour la construction de la table de Bouguer [°, ', '' ]
$f$	$\chi_S(26^\circ)$ (2 <sup>e</sup> valeur de référence)	<i>Idem</i>

§. XL.

Peut-être donc qu'on entreprend ici de donner la première solution légitime du problème de la *Solaire*. Pour entrer en matière; on supposera que KAO (*Fig. II.*) est une portion de la surface de la terre, dont le point C est le centre: on concevra le semidiametre CA prolongé indéfiniment vers D, & on imaginera une courbe BGI qui ait CD pour axe, & dont les ordonnées AB, FG, DI représentent les différentes dilatations de l'air à chaque hauteur au-dessus de la terre; ou plutôt ces ordonnées doivent marquer les diverses dilatations de la matière réfractive répandue dans l'air. Concevant après cela un rayon de lumière NPA, qui à cause de la réfraction continue qu'il souffre en passant toujours dans un milieu plus dense, décrit avant de parvenir à nous la courbe NPA, nous considererons les trois parties consécutives & infiniment petites Pp, pπ, πσ; & les aiant prolongées indéfiniment vers le bas, afin d'avoir les trois tangentes PL, pλ, πλ à la courbe NPA, nous abaisserons du centre C de la terre, les trois perpendiculaires CL, Cl, & Cλ sur ces tangentes. Enfin on tirera les lignes CP, Cπ; & aiant décrit du point C comme centre, les trois arcs PF, Spf,

\* Dans la propof. X de la troisiéme Partie du second Livre.





[3, Fig. 11 en fin d'ouvrage] Source : Biblioteca Virtual del Patrimonio Bibliografico (<https://bvpb.mcu.es/es/consulta/registro.do?id=576360>). CC-BY 4.0

Noter que la courbe (BGI) ci-dessus, de point courant G, est d'abord présentée comme le graphe de  $\mu^{-1}$  (« dilatation de l'air ») en fonction de la « hauteur au-dessus de la terre » [3, p. 40] ; mais ensuite Bouguer se raviserait ouvertement (p. 48) : à une constante multiplicative près, (BGI) devient le graphe de la « dilatation de la matière réfractive » (en fait, celui de  $r_S n^{-1}$  en termes actuels) que Bouguer appelle « l'ordonnée  $z$  » du point courant.

## SECON. PARTIE. CHAP. I. 41

$s\pi\phi$ , on élèvera perpendiculairement à l'axe CD de la courbe BGI, les trois ordonnées FG,  $fg$ ,  $\phi\gamma$ .

### LEMME.

#### §. XL I.

Cela supposé, il est évident qu'à cause de l'infinie petitesse des épaisseurs  $Ff$ ,  $f\phi$ , on peut supposer que l'ordonnée GF exprime la dilatation de l'air ou de la matière réfractive qui est comprise dans toute la couche sphérique, dont  $FPpf$  est une portion, & dont  $Ff$  est l'épaisseur; & que l'ordonnée  $gf$  représente pareillement la dilatation de la matière réfractive, comprise dans toute la couche qui est immédiatement au-dessous, & dont  $f\phi$  ou  $p_s$  est la petite épaisseur. Ainsi le rayon de lumière fera le petit trajet  $Pp$  sans se courber : mais rendu en  $p$ , il s'y rom-

pra, parce qu'il rencontrera en cet endroit de l'air plus condensé; & par conséquent, au lieu de continuer le long de  $pL$ , il se détournera selon  $pl$ ; & le détour sera tel, qu'il y aura même rapport de  $FG$  au sinus de l'angle d'incidence que de  $fg$  au sinus de l'angle de réfraction. C'est ce qui doit arriver selon la loi ordinaire des réfractions: mais si on considère que  $Cpl$ , est égal à l'angle d'incidence, & que  $Cpl$  est l'angle même de réfraction, on conclura que  $FG$  est à  $CL$ , comme  $fg$  est à  $Cl$ ; puisque dans les deux triangles  $CpL$ ,  $Cpl$  qui ont même hypoténuse  $Cp$ , les côtés  $CL$ , &  $Cl$  sont en même raison que les sinus des angles  $CpL$ ,  $Cpl$ , & que par la nature de la réfraction,  $FG$  doit être au sinus de l'angle  $CpL$ , comme  $fg$  au sinus de l'angle  $Cpl$ . On prouvera avec la même facilité que  $fg$  est à  $Cl$ , comme  $\varphi\gamma$  est à  $C\lambda$ : car le rayon étant parvenu en  $\pi$  en faisant avec la verticale  $C\pi$ , un angle d'incidence  $C\pi l$ , il souffrira dans ce point un second détour, ensuite duquel il avancera selon  $\pi\lambda$  & fera avec la même verticale  $C\pi$ , l'angle de réfraction  $C$   
F

[3, p. 41] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

#### 42 DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &c.

πλ. Mais comme les deux triangles rectangles  $C\pi l$ ,  $C\pi\lambda$  ont encore une même hypoténuse  $C\pi$ , il est clair que  $Cl$  sera à  $C\lambda$ , comme le sinus de l'angle  $C\pi l$  sera au sinus de l'angle  $C\pi\lambda$ : & qu'ainsi les ordonnées  $gf$  &  $\gamma\varphi$  qui expriment le rapport qui doit être entre les sinus des angles d'incidence & de réfraction  $C\pi l$  &  $C\pi\lambda$ , exprimeront aussi le rapport qui doit se trouver entre  $Cl$  &  $C\lambda$ ; & il y aura donc par conséquent même raison de  $gf$  à  $Cl$ , que de  $\gamma\varphi$  à  $C\lambda$ . Or il résulte de tout cela que  $GF$  est à  $CL$ , comme  $\lambda\varphi$  est à  $C\lambda$ ; puisque l'un & l'autre de ces rapports, est égal à celui de  $gf$  à  $Cl$ . Et comme on peut appliquer le même raisonnement à toutes les autres Parties de la Solaire ou de la courbe tracée par le rayon de lumière; il s'ensuit que les perpendiculaires tirées du centre de la terre sur les tangentes de cette courbe, seront continuellement proportionnelles aux ordonnées correspondantes de la courbe  $IGB$  des dilatations: c'est-à-dire, que si on tire du centre  $C$  de la terre des perpendiculaires  $CR$ ,  $CM$  &c. sur les tangentes  $NR$ ,  $AM$  &c. de la Solaire, il y aura continuellement même rapport de  $ID$  à  $CR$  que de  $AB$  à  $CM$ , que de  $GF$  à  $CL$ , &c.

[3, p. 42] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Ce §. XLI, que nous avons reproduit intégralement, est tout entier occupé par la démonstration de l'invariance de  $I_B := nr \sin \alpha$ . Muni de ce résultat, et après une digression intéressante (§. XLII) mais inutile dans la pratique, Bouguer va écrire  $\chi_5$  rigoureusement sous la forme d'une intégrale.

## 3.2. Intégrale de réfraction

## §. XLIV.

Si on fait maintenant attention au Lemme démontré §. 41. que les ordonnées de la courbe des dilatations sont continuellement proportionnelles aux perpendiculaires tirées du centre C sur les tangentes de la folaire, on pourra faire cette proportion  $AB = a \mid CM = c \parallel GF = z \mid$   
 $CL = \frac{cz}{a}$ . Ainsi la question se réduit à faire en sorte que la courbe ANP que décrit le rayon de lumière, ait effectivement dans tous les points,  $\frac{cz}{a}$  pour les perpendiculaires comme CL tirées du centre C, sur les tangentes PL. Pour cela je cherche la petite ligne ou le petit arc pS, par cette analogie;  $CE = a \mid cE = du \mid Cp = y \mid pS =$

[3, p. 44] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

SECON. PARTIE CHAP. I. 45  
 $\frac{y du}{a}$ ; & ajoutant le quaré de pS avec celui de SP = dy, & tirant la racine quarée de la somme, il me vient  $\sqrt{\frac{y^2 du^2 + a^2 dy^2}{a^2}}$   
 $dy = \frac{\sqrt{y^2 du^2 + a^2 dy^2}}{a}$  pour la valeur de pP. La ressemblance du petit triangle pSP & du grand CLP me fait ensuite découvrir la valeur de la perpendiculaire CL par cette analogie,  $pP = \frac{\sqrt{y^2 du^2 + a^2 dy^2}}{a} \mid pS = \frac{y du}{a} \parallel CP = y \mid CL = \frac{y^2 du}{\sqrt{y^2 du^2 + a^2 dy^2}}$ . Et comme cette perpendiculaire CL que nous trouvons ainsi égale à  $\frac{y^2 du}{\sqrt{y^2 du^2 + a^2 dy^2}}$ , le doit être aussi à  $\frac{cz}{a}$ , nous aurons l'équation  $\frac{y^2 du}{\sqrt{y^2 du^2 + a^2 dy^2}} = \frac{cz}{a}$ , dont nous tirons  $a^2 y^4 du^2 = c^2 z^2 y^2 du^2 + a^2 c^2 z^2 dy^2$ , &  $a^2 y^4 du^2 - c^2 z^2 y^2 du^2 = a^2 c^2 z^2 dy^2$ , & enfin la formule  $du = \frac{acz dy}{y \sqrt{a^2 y^2 - c^2 z^2}}$ , ou  $du = \frac{cz dy}{y \sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}}$ . Or on voit assez

qu'on peut toujours construire aisément la folaire par cette formule; pourvû qu'on suppose connuë la quadrature des courbes. C'est ce qu'il n'est pas nécessaire d'expliquer. Nous pourrions aussi nous dispenser de dire que pour trouver la valeur de u ou de l'arc AE par le calcul, il n'y a qu'à tirer l'expression de z en y, de l'équation qui marque la nature de la courbe BGI des dilatations, & qu'introduisant cette expression à la place de z, dans la formule  $du = \frac{cz dy}{y \sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}}$  le second membre ne

contiendra plus que y de seule variable avec sa différentielle; ce qui nous permettra toujours d'en prendre l'intégrale, & de trouver au moins par approximation, la valeur de l'arc u qui répond à chaque apliquée y.

F iij

[3, p. 45] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

## 46 DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &amp;c.

## §. XLV.

On peut non-seulement construire de cette sorte la ligne APN que tracent dans l'air les rayons de lumière; mais on peut toujours aussi découvrir la quantité de la réfraction astronomique, ou la quantité dont ces rayons se courbent depuis leur entrée dans l'Atmosphère jusqu'à nous. La courbure qu'ils souffrent en chaque point  $p$ , est mesurée par l'angle infiniment petit que font deux tangentes voisines PL,  $p'l$ ; & la courbure totale est égale à l'angle que font les tangentes aux deux extrémités de la courbe. Il suit de là que si nous abaissons du centre C de la terre, des perpendiculaires CL,  $C'l$  sur les deux tangentes PL,  $p'l$ ; nous pourrons regarder le petit arc  $Xx$  compris entre ces deux perpendiculaires, comme l'élément de la réfraction astronomique, puisqu'il mesurera l'angle LC $l$ , qui est égal à celui que font les deux tangentes: & par la même raison l'arc entier KZ intercepté entre les deux lignes CMK & CR, qui sont perpendiculaires aux tangentes AM & NR, aux deux extrémités de la courbe, pourra être pris pour la courbure que souffre le rayon dans tout son trajet. Or si on se souvient que CL

$= \frac{cz}{a}$ , on aura  $\frac{cdz}{a}$  pour la petite partie LH dont CL surpasse  $C'l$ ; & on pourra découvrir la valeur de ce petit arc  $Xx$  par cette analogie  $PL = \sqrt{CP^2 - CL^2} = \sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2}z^2}$  |  $LH = \frac{cdz}{a}$  ||  $CX = a$  |  $Xx$ . Il vient de cette sorte  $\frac{cdz}{\sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2}z^2}}$  pour l'expression de ce petit arc: ex-

pression qui est générale, & qui convient également à toutes les différentes hypothèses des dilatations de l'air.

[3, p. 46] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

## SECON. PARTIE. CHAP. I. 47

Mais on la réduira, comme on le sçait, à chaque hypothèse particulière, en substituant à la place de  $z$  sa valeur exprimée en  $y$ ; & il ne restera plus ensuite qu'à en

prendre l'intégrale, pour avoir la quantité  $\int \frac{cdz}{\sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2}z^2}}$

de la réfraction astronomique.

[3, p. 47] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

En transposant dans nos notations (cf. Table 1), on voit que Bouguer a obtenu l'intégrale de réfraction (qui est la première intégrale de son mémoire) sous la forme

$$\chi_S = \int_{n_S^{-1}}^1 \frac{I_B}{r \sqrt{r^2 - (n^{-1})^2 I_B^2}} dn^{-1} \quad (4)$$

(voir les relations (14) de [36]) ; Newton a obtenu une forme voisine dans ses lettres à Flamsteed mais moins rigoureuse, car il lui manque un facteur  $n^{-1}$ . Bouguer a aussi (p. 45) l'expression de l'angle au centre élémentaire associé à un élément de (R) :

$$d\theta = I_B \frac{n^{-1}}{r \sqrt{r^2 - (n^{-1})^2 I_B^2}} dr ; \quad (5)$$

on le vérifie facilement en notant que

$$d\theta = \frac{r \sin \alpha}{r \sqrt{r^2 \cos^2 \alpha}} dr = (\tan \alpha) \frac{dr}{r}, \quad (6)$$

ce qui revient bien à la formule classique suivante pour les courbes en coordonnées polaires :

$$\frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta}. \quad (7)$$

### 3.3. *Le modèle de Bouguer*

Dans le résumé, nous avons annoncé les raisons pour lesquelles Bouguer adopte une loi de proportionnalité entre  $1/n$  et  $r^q$  ; voyons avec ses propres mots comment il justifie ce choix curieux (sans pour autant tenir fermement à l'existence de la « matière réfractive »), et regardons les élégantes conséquences qu'il en tire.

#### §. LXVI.

Il feroit assez facile felon cela, si on connoissoit les différentes dilatations  $z$  de la matiere réfractive à différentes hauteurs au-dessus de la terre, de découvrir la nature de la courbe que décrivent les rayons de lumiere ; & le rapport des réfractions : car on n'auroit toujours qu'à se servir pour la premiere de ces déterminations de la formule

$$n = \int \frac{cz dy}{y \sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}} \quad \& \text{ pour la seconde de la formule}$$

$$\int \frac{cdz}{y \sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}}. \text{ Mais malheureusement on ne connoit point}$$

les dilatations de la matiere réfractive, dont on auroit besoin. On a bien quelque connoissance des différentes dilatations de l'air ; mais il est certain que les réfractions n'en suivent pas le rapport. En effet l'air pris à une grande hauteur au-dessus de la terre, est mille fois & dix mille fois plus dilaté qu'ici bas ; & ainsi, si les sinus des angles d'incidence & de réfraction, suivoient le rapport simple de ces dilatations, comme l'ont supposé presque toutes les personnes qui ont traité ce sujet, un rayon de lumiere qui feroit d'abord horizontal, devoit se rompre si considérablement dans l'Atmosphere, qu'il deviendroit presque vertical, avant de parvenir jusqu'à nous.

## 48 DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &amp;c.

C'est ce qui nous a obligé de supposer que les réfractions étoient causées dans l'Atmosphère par une matière différente de l'air, & que nous avons appelée *réfractive*. Mais si on ne veut point admettre l'existence de cette matière, nous ne nous en mettons point en peine. Car les sinus des angles d'incidence & de réfraction, qui ne sont point proportionnels aux dilatations de l'air, le sont certainement à quelque puissance ou à quelque fonction de ces dilatations : or on n'a qu'à regarder la courbe BGI, comme exprimant les dilatations de l'air élevées à ces puissances ou à ces fonctions quelles qu'elles soient.

*Déterminer la Solaire pour toutes les Hypotheses dans lesquelles les dilatations  $z$  sont proportionnelles aux distances  $y$  au centre de la terre, élevées à une puissance quelconque  $m$ .*

## §. XLVII.

Mais enfin, puisque nous ne connoissons point la courbe BGI des dilatations, nous allons supposer que ses ordonnées  $FG = z$  sont égales à une puissance quelconque  $m$  des distances  $y$  au centre de la terre ; c'est-à-dire, que nous supposerons  $z = y^m$ , ou plutôt  $z = a^{1-m} y^m$ , afin d'observer la loi des Homogenes. De cette sorte nous comprendrons dans notre calcul une infinité de différentes hypotheses de dilatations, puisque  $m$  peut représenter une infinité de différentes puissances. Cette supposition donne  $dz = ma^{1-m} y^{m-1} dy$ , & si on introduit cette valeur à la place de  $dz$ , &  $a^{1-m} y^m$  à la place de  $z$ ,

dans les formules générales  $\frac{cz dy}{y \sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}}$  &  $\int \frac{cdz}{\sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}}$ ;

la première qui exprime l'élément  $du$  des abscisses AE  
ou

SECON. PARTIE. CHAP. I. 49

ou AO de la Solaire , se changera en . . . . .

$$\frac{ca^2 - my^m dy}{y \sqrt{y^2 - \frac{c^2 a^2 - 2m}{a^2} y^{2m}}} = \frac{ca^2 - my^{m-2} dy}{\sqrt{a^2 - c^2 a^2 - 2m y^{2m-2}}} \quad \& \text{ on aura}$$

donc par conséquent  $n = \int \frac{ca^2 - my^{m-2} dy}{\sqrt{a^2 - c^2 a^2 - 2m y^{2m-2}}}$  , pour ces abscisses , ou pour les arcs AE , ou AO qui répondent à chaque appliquée CP ou CN = y . D'un autre côté ,

la seconde formule  $\int \frac{cdz}{\sqrt{y^2 - \frac{c^2}{a^2} z^2}}$  , qui exprime la

quantité de la réfraction astronomique , se changera par

de pareilles substitutions , en  $\int \frac{mca^2 - my^{m-2} dy}{\sqrt{y^2 - \frac{c^2 a^2 - 2m}{a^2} y^{2m}}} =$

$$\int \frac{mca^2 - my^{m-2} dy}{\sqrt{a^2 - c^2 a^2 - 2m y^{2m-2}}} \quad \& \text{ c'est donc là la quantité de la}$$

réfraction . Il nous reste maintenant à trouver les va-

leurs de ces deux intégrales  $\int \frac{ca^2 - my^{m-2} dy}{\sqrt{a^2 - c^2 a^2 - 2m y^{2m-2}}} = n_1$  ,

$\& \int \frac{mca^2 - my^{m-2} dy}{\sqrt{a^2 - c^2 a^2 - 2m y^{2m-2}}} = n_2$  . Mais c'est assez que nous en

trouvions une , pour que nous aïons les deux ; car on voit qu'elles sont dans un rapport constant , que la première ou que le progrès horizontal OA du rayon de lumière à mesurer sur la circonférence de la terre , est à la seconde intégrale ou à la réfraction astronomique , comme l'unité est à m : & c'est ce qui est très-remarquable .

[3, p. 49] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Transposée avec nos notations, la propriété obtenue à la fin du §. XLVII est

$$d\chi = -q d\theta \tag{8}$$

« & c'est ce qui est très-remarquable ». On peut retrouver cela plus brièvement, en notant qu'à cause des relations (1) et (7) on a

$$d\chi = \frac{\tan \alpha(n)}{n} dn = \frac{r(\theta)}{n(r(\theta))} \frac{dn}{dr} (r(\theta)) d\theta \tag{9}$$

qui redonne bien (8) quand n est proportionnel à r<sup>-q</sup>.

Regardons maintenant la technique d'intégration utilisée par Bouguer.

§. XLVIII.

On peut trouver très-aifément ces deux intégrales, en supofant la rectification des arcs de cercle. On n'a d'abord qu'à tirer du centre C de la terre (Figure 12.) une

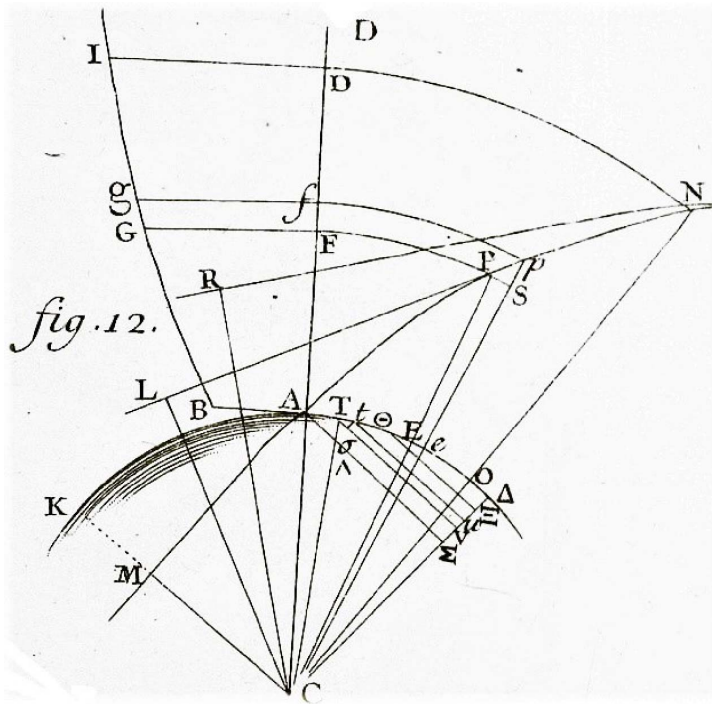
G

[3, p. 49] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

50 DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &c.  
 ligne CA parallèle à AM, qui est tangente à l'extrémité A de la Solaire NPA; l'arc AΔ fera du même nombre de degrez, que l'angle CAM, qui est le complement de la hauteur aparente de l'Astre; & le sinus droit AZ fera égal à CM = c. Si on regarde ensuite quelque appliquée CP (y) de la Solaire, comme connuë; on n'aura qu'à faire le sinus droit TV = ca<sup>m-1</sup>y<sup>m-1</sup>, & multiplier l'arc compris entre le point A & le point T par  $\frac{1}{m-1}$  pour avoir l'arc AE, par l'extrémité E duquel on doit faire passer l'appliquée CP: & multipliant ce même arc AT par  $\frac{m}{m-1}$ , il viendra la quantité de la réfraction que souffre le raion de lumiere dans le trajet PA. Pour démontrer cela, je conçois la ligne tv parallèle & infiniment proche de TV; & du point t je tire la petite ligne tδ parallèlement à CΔ. Il est clair que ca<sup>m-1</sup>y<sup>m-1</sup> étant la valeur de TV, nous aurons  $\sqrt{a^2 - c^2 a^{2m-2} y^{2m-2}} = \sqrt{CT^2 - TV^2}$  pour celle de CV, & si nous prenons la différentielle de ca<sup>m-1</sup>y<sup>m-1</sup>, il nous viendra  $\frac{m-1}{m-1} \times ca^{m-2} y^{m-2} dy$  pour Tδ. Mais comme le grand triangle CVT est semblable au petit Tδt, nous pouvons faire cette proportion CV =  $\sqrt{a^2 - c^2 a^{2m-2} y^{2m-2}}$  | CT = a || Tδ =  $\frac{m-1}{m-1} \times ca^{m-2} y^{m-2} dy$  | Tt, & nous trouverons de cette sorte que Tt =  $\frac{m-1 \times ca^{m-2} y^{m-2} dy}{\sqrt{a^2 - c^2 a^{2m-2} y^{2m-2}}}$ . Or il suit de là que l'arc entier AT, qui est la somme de tous les petits arcs Tt, sera la valeur de l'intégrale  $\int \frac{m-1 \times ca^{m-2} y^{m-2} dy}{\sqrt{a^2 - c^2 a^{2m-2} y^{2m-2}}}$ : car y étant supposée égale à a, comme cela arrive au point

[3, p. 50] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen





[3, Fig. 12 en fin d'ouvrage] similaire à la Fig. 11 mais moins chargée.  
 Source : Biblioteca Virtual del Patrimonio Bibliografico  
 (https://bvpb.mcu.es/es/consulta/registro.do?id=576360). CC-BY 4.0

SECONDE PARTIE. CHAP. II. DE LA RÉFRACTION.

A, le sinus  $TV = ca^2 - my^{m-1}$  se trouve égal à  $A\Sigma = c$ , & l'arc est par conséquent nul ; mais à mesure que  $y$  augmente, le sinus  $TV$  s'éloigne de  $A\Sigma$ , & l'arc  $AT$  croit d'une nouvelle partie  $Tz$  qui est, comme on le voit, continuellement égale à  $\frac{m-1}{\sqrt{a^2 - c^2 a^2 - 2my^{2m-2}}}$ . Mais enfin puisque l'arc  $AT$  est la valeur de l'intégrale . . .

$\int \frac{m-1}{\sqrt{a^2 - c^2 a^2 - 2my^{2m-2}}} dy$ , il est évident qu'il ne reste plus qu'à le multiplier par  $\frac{1}{m-1}$  pour avoir l'intégrale . . .

$\int \frac{ca^2 - my^{m-2}}{\sqrt{a^2 - c^2 a^2 - 2my^{2m-2}}} dy = u$ , qui est la valeur de l'ab-

scisse  $AE$ , qui répond à chaque appliquée  $CP$  de la So-

laire ; & que si on multiplie ce même arc  $AT$  par  $\frac{m}{m-1}$ , on aura l'intégrale  $\int \frac{mca^2 - my^{m-2}}{\sqrt{a^2 - c^2 a^2 - 2my^{2m-2}}} dy$  qui exprime la quantité de la réfraction. Rien n'empêchera de faire la même chose pour toutes les autres appliquées  $y$ . Mais il est évident que si  $DN$  est la surface supérieure de l'Atmosphère, ou que si la matière réfractive ne change plus de densité au-dessus de cette surface ; il faudra pren-

dre CN, pour dernière appliquée, puisque le rayon de lumière ne souffrira aucune réfraction au-dessus du point N. Ainsi si on fait le sinus droit  $\odot Z$  égal à  $ca^{m-1}$  &  $CN^{m-1}$ , ce fera l'arc  $A\odot$  intercepté entre les sinus  $A \approx$  &  $\odot Z$  qu'il faudra multiplier par  $\frac{1}{m-1}$  pour avoir l'abscisse correspondante AO; & qu'il faudra multiplier par  $\frac{m}{m-1}$  pour avoir la réfraction astronomique, ou la courbure totale que reçoit le rayon de lumière, en traversant toute l'épaisseur de l'Atmosphère, depuis N jusqu'en A.

G ij.

[3, p. 51] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

## DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR; &c.

### §. XLIX.

Il s'agit de tout cela qu'il n'importe que l'exposant  $m$  soit un nombre positif ou négatif, entier ou rompu, & que pourvu qu'il ne soit pas irrationnel, on peut toujours déterminer géométriquement la quantité de la réfraction, & tracer géométriquement la Solaire. Car il sera toujours possible de trouver la valeur  $ca^{m-1}y^{m-1}$  des sinus TV &  $\odot Z$  pour les appliquées CP & CN: & l'arc AT ou  $A\odot$  étant déterminé, on pourra toujours découvrir la réfraction, aussi-bien que l'arc AE ou AO qui sert d'abscisse à l'appliquée CP ou CN: puisque ces arcs sont des multiples ou des soummultiples de l'arc AT ou  $A\odot$ , & que nous avons des méthodes géométriques, pour diviser un arc, ou pour le multiplier, selon quel rapport nous voulons, aussi-tôt que ce rapport est de nombre à nombre. Il faut cependant qu'outre l'irrationnalité de l'exposant  $m$ , nous exceptions encore un cas, dans lequel la Solaire se trouve être une courbe mécanique. C'est lorsque les différentes dilatations de la matière réfractive sont en même raison que ses distances au centre de la Terre. Dans ce cas  $z$  est égale ou proportionnelle à  $y$ ;  $m$  désigne l'unité, & la Solaire est une logarithmique spirale. C'est ce qu'on reconnoît par la formule  $u = \int \frac{ca^{2-m}y^{m-2}dy}{\sqrt{a^2 - c^2a^{2-2m}y^{2m-2}}}$ , qui se réduit à  $u = \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}} \int \frac{ady}{y}$ , laquelle appartient à la logarithmique spirale. C'est aussi ce qui est conforme à ce qu'on a vu cy-devant, (§. 42.) que pour que les rayons de lumière suivent cette ligne courbe, il faut que les dilatations des différentes couches de l'Atmosphère, soient proportionnelles à leurs distances au centre de la terre.

[3, p. 52] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Ici Bouguer note que si  $n$  est proportionnel à  $r^{-1}$ , alors les rayons sont des spirales logarithmiques ; il avait montré la réciproque au §. XLII [3, p. 43]. Il exclut donc  $q = 1$  de son étude, et avec raison si  $H$  est infini, car dans ce cas  $\chi_S$  n'est plus défini ! Mais il se trompe dans la première phrase de cette page, car  $\chi_S$  n'est pas défini non plus pour des astres de hauteur angulaire réelle trop faible quand  $q > 1$  (voir le sous-paragraphe 3.6 du présent article) ; mais cette situation donne des phénomènes très intéressants (voir le sous-paragraphe 3.6), que Bouguer ne mentionnera qu'en 1753 dans son mémoire [33].

### 3.4. La table de Bouguer

Il est intéressant de voir maintenant comment Bouguer, à partir des deux valeurs de référence (indiquées dans le résumé — paragraphe 2) qu'il a choisies pour  $\chi_S$ , lui permettent de construire sa table.

## SECON. PARTIE. CHAP. I. §)

### *De la construction de la Table des réfractions ; & du choix d'une hypothese des dilatations de l'air.*

#### §. L.

On n'insistera pas davantage sur la nature de la So-  
laire, & on se bornera à parler des réfractions. Il est  
évident que puisqu'elles sont toujours proportionnelles à  
l'arc  $A\Theta$  intercepté entre le sinus  $A \approx (\epsilon)$  du comple-  
ment de la hauteur aparente, & le sinus  $\Theta \approx (ca^{1-m}y^{m-1})$   
qui a un raport constant avec le sinus  $A \approx$ , & qui est tou-  
jours égal au produit de ce sinus par  $a^{1-m}y^{m-1}$  ou par  
 $a^{1-m}CN^{m-1}$  ; il est, dis-je, évident qu'il fera tou-  
jours facile de les calculer (les réfractions), par le moïen  
des tables des sinus ; pourvû qu'on connoisse l'exposant  $m$ ,  
& la plus grande apliquée  $CN$ . On pourra auffi en venir  
à bout par le moïen des séries : car si continuant de nom-  
mer  $a$  le semi-diametre  $CA$  de la Terre &  $C$  le sinus  
plement  $A \approx$  de la hauteur aparente, nous désignons  
par  $b$  le sinus de cette même hauteur, & nous supposons

$$\frac{x}{b} = \frac{m}{m-1} \text{ \& } 1-g = a^{1-m} CN^{m-1} ; \text{ nous aurons } \epsilon X$$

$1-g$  ou  $\epsilon - \epsilon g$  pour le sinus  $\Theta \approx$  & la série infinie

$$\frac{\epsilon g}{b} = \frac{\epsilon c^3}{2b^3} g^2 + \frac{3\epsilon c^5 + \epsilon b^2 \epsilon^3}{6b^5} g^3, \text{ \&c. pour la valeur de l'arc}$$

$A\Theta$ , comme on peut le voir aisément ; & il ne restera

donc plus qu'à multiplier cette série par  $\frac{x}{b} = \frac{m}{m-1}$  pour

$$\text{avoir } \frac{\epsilon c}{b} g = \frac{\epsilon c^3}{2b^3} g^2 + \frac{3\epsilon c^5 + \epsilon b^2 \epsilon^3}{6b^5} g^3, \text{ \&c. pour la}$$

quantité de la réfraction. Mais il est clair que faute de  
connoître les quantitez  $g$  &  $b$ , nous ne pouvons point  
faire usage de cette série. Nous ne connoissons point  $b$ ,

G ij

## 54 DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &amp;c.

parce que nous ignorons la valeur de  $m$ , ou que nous ne savons pas laquelle de toutes les hypothèses représentées par l'équation  $z = a' - m y^m$  est la plus conforme à la nature : & nous ne connoissons pas non plus  $g$ , parce qu'outre que la valeur de  $m$  nous est inconnue, nous ne connoissons point aussi la hauteur de l'Atmosphère, ou la longueur de la plus grande appliquée CN.

## §. L I.

Mais rien n'est plus facile que de découvrir ces deux grandeurs  $h$  &  $g$ , aussi-tôt qu'on a seulement trouvé par des observations exactes, la réfraction astronomique pour deux différentes hauteurs apparentes. Car comparant l'ex-

pression générale  $\frac{ac}{bh} g - \frac{ac^3}{2b^3h} g^2 + \frac{3ac^5 + ab^2c^3}{6b^5h} g^3$ , &c.

avec ces deux réfractions connus par observation ; on aura deux différentes équations, & on sçait qu'il n'en faut pas davantage, pour pouvoir déterminer deux inconnues. C'est ce qu'on va tâcher d'exécuter ici ; mais en employant comme cela est absolument nécessaire la méthode des suites & celle de leur retour, parce que, comme il s'agit d'arcs & de sinus, l'opération appartient à la géométrie transcendante. Nous supposons d'abord pour une plus grande facilité que la réfraction horizontale est une des deux que nous connoissons, & nous la désignerons par  $e$  : l'autre réfraction connue, nous la nommerons  $f$ , & nous nommerons  $q$  le sinus de la hauteur apparente &  $p$  le sinus de complément. Si nous introduisons ensuite  $q$  &  $p$  à la place de  $b$  & de  $c$  dans l'expression générale

$\frac{ac}{bh} g - \frac{ac^3}{2b^3h} g^2 + \frac{3ac^5 + ab^2c^3}{6b^5h} g^3$  — &c. des réfractions, nous

aurons  $\frac{ap}{qh} g - \frac{ap^3}{2q^2h} g^2 + \frac{3ap^5 + ap^2q^3}{6q^5h} g^3$  — &c. pour la ré-

fraction  $f$  qui convient à la hauteur apparente, dont  $q$  est

[3, p. 54] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Les « deux grandeurs  $h$  &  $g$  », mentionnées dans la première phrase du §. LI, sont reliées à l'exposant et à la hauteur  $H$  d'atmosphère du modèle de Bouguer (voir notre Table 1) ; cette phrase est amusante, car à la fin du siècle précédent, Cassini ne trouvait pas si facile de déterminer la hauteur de son modèle d'atmosphère, beaucoup plus simple cependant, car supposée homogène (modèle de Ptolémée) — et il trouvait un résultat deux fois trop petit : quasiment 2 000 toises (voir le sous-paragraphe 2.1 de [36]).

SECON. PARTIE CHAP. I. §.

le sinus &  $p$  le cosinus ; & ainsi nous aurons  $f = \frac{ap}{q} g -$   
 $\frac{ap^3}{2q^2b} g^2 + \frac{3ap^5 + ap^2q^3}{6q^5b} g^3 - \&c.$  Je change cette équation  
 en  $h = \frac{ap}{qf} g - \frac{ap^3}{2q^2f} g^2 + \frac{3ap^5 + ap^2q^3}{6q^5f} g^3 - \&c.$  & je trou-  
 ve par la methode qu'on appelle le retour des suites ;  
 $g = \frac{qf}{ap} h + \frac{f^2}{2a^2} h^2 - \frac{f^3q}{6a^3p} h^3 - \frac{f^4}{24a^4} h^4 + \&c.$  Voilà  
 donc une valeur de  $g$  qui nous est fournie par la se-  
 conde hauteur aparente & par la réfraction astronomi-  
 que  $f$  qui lui convient : mais la premiere hauteur & la  
 premiere réfraction ; c'est-à-dire, la réfraction horifonta-  
 le  $e$  peut nous fournir aussi une valeur de  $g$ , & il est évi-  
 dent que pour la trouver tout d'un coup, nous n'avons  
 qu'à mettre  $e$  à la place de  $f$ ; &  $zero$  &  $a$  à la place de  $q$   
 & de  $p$ , parce que lorsqu'un Astre paroît dans l'horifon,  
 le sinus de sa hauteur aparente est nul, & le sinus com-  
 plement de cette hauteur est égal au sinus total  $a$ . Il vien-  
 dra de cette sorte  $g = \frac{e^2}{2a^2} h^2 - \frac{e^4}{24a^4} h^4 + \&c.$  ; & com-  
 binant cette seconde valeur de  $g$  avec la premiere, on fe-  
 ra disparoître  $g$ , & on aura l'équation  $\frac{qf}{ap} h + \frac{f^2}{2a^2} h^2 -$   
 $\frac{f^3q}{6a^3p} h^3 - \frac{f^4}{24a^4} h^4 + \&c. = \frac{e^2}{2a^2} h^2 - \frac{e^4}{24a^4} h^4 + \frac{e^6}{720a^6} h^6 -$   
 &c. qui ne contient plus que la seule inconnüe  $h$ . Mais  
 cette derniere équation se réduit à  $\frac{qf}{ap} = \frac{e^2 - f^2}{2a^2} h +$   
 $\frac{f^3q}{6a^3p} h^2 - \frac{e^4 + f^4}{24a^4} h^3 - \frac{f^5q}{120a^5p} h^4 + \&c.$ , & elle donne  
 par le retour des suites  $h = \frac{2aqf}{p \times e^2 - f^2} - \frac{4af^3q^3}{3p^3 \times e^2 - f^2^3}$

[3, p. 55] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Bouguer utilise ici des séries : il semble avoir manqué la solution simple et rigoureuse, que l'on trouve très facilement moyennant un bon changement de variable comme celui de Biot [46] (voir le sous-paragraphe suivant), mais que l'on savait déjà traiter moins aisément dès 1772 [47]. Il élimine l'inconnue  $g$  au profit de  $h$ , qu'il exprime par une série — en utilisant une méthode itérative ? Nous détaillerons à la fin de notre sous-paragraphe 3.5 une façon plus simple d'ajuster  $m$  de Bouguer (notre  $q$ ) et  $h$  (cf. Table 1).

56. DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &c.

$$\frac{16 \text{ } af^2 q^5 + 6aq^3 f^3 p^2 \times e^2 - f^2 \times e^4 - f^4}{2p^5 \times e^2 - f^2 \times 5}$$

$$\frac{+ 300aq^5 p^2 f^7 \times e^2 - f^2 \times f^4 - e^4 - 400aq^7 f^3 + 36aq^4 p^2 f^5 \times e^2 - f^2^6}{335p^7 \times e^2 - f^2 \times 7}$$

&c. Ainsi on peut maintenant regarder  $h$ , comme con-  
 nuë ; puisque la série précédente qui l'exprime, n'est  
 formée que de grandeurs connües, & que d'ailleurs il  
 est facile de voir que cette série est très-convergente. En-  
 fin il ne reste plus qu'à introduire cette valeur de  $h$  dans

l'équation  $g = \frac{e^2}{2a^2} b^2 - \frac{e^4}{24a^4} b^4 + \frac{e^6}{720a^6} b^6$  &c. pour

$$\text{avoir } g = \frac{2q^2e^2f^2}{p^2 \times e^2 - f^2} - \frac{2q^4e^2f^6 - 2q^4e^4f^4}{3p^4 \times e^2 - f^2} + \frac{400q^6e^2f^{10} + 160q^6e^4f^8 + 2q^6e^6f^6 + 120q^4p^2e^2f^4 \times e^2 - f^2 \times e^4 - f^4}{90p^6 \times e^2 - f^2} + \dots$$

&c. & il viendra donc  $1 - g = 1 - \frac{2q^2e^2f^2}{p^2 \times e^2 - f^2} +$

$$\frac{2q^4e^2f^6 + 2q^4e^4f^4}{3p^4 \times e^2 - f^2} - \frac{400q^6e^2f^{10} + 160q^6e^4f^8 + 2q^6e^6f^6 + 120q^4p^2e^2f^4 \times e^2 - f^2 \times e^4 - f^4}{90p^6 \times e^2 - f^2} + \dots$$

+ &c.

§. LII.

Connoissant ainsi les valeurs de  $b$  & de  $g$ , rien n'empêche de trouver à présent la réfraction astronomique, pour quelle hauteur aparente on voudra. On n'a qu'à introduire les valeurs de  $b$  & de  $g$  dans la formule gé-

nérale  $\frac{ac}{bb} g - \frac{ac^3}{2bb} g^2 + \dots$  du §. 50. Ou si on veut dé-

couvrir la même chose par les tables des sinus, on multipliera le sinus  $A \approx c$  du complement de la hauteur proposée par la valeur de  $a^{1-m} y^{m-1}$  ou de  $a^{1-m} CN^{m-1}$

[3, p. 56] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

SECON. PARTIE. CHAP. I. 57

$CN^{m-1}$  que fournit la dernière série du §. 51. en donnant la valeur de  $1 - g$ ; & on aura au produit le sinus  $\Theta \approx ca^{1-m} CN^{m-1}$ . On cherchera ensuite dans les Tables à quel arc  $\Theta \Delta$  ce sinus répond; & retranchant cet arc de celui  $A \Delta$  du complement de la hauteur aparente, il viendra l'arc  $A \Theta$ , qu'il ne restera plus qu'à multiplier par

$\frac{x}{k} = \frac{m}{m-1}$ , ou qu'à diviser par  $b$ , dont la série

$$\frac{2aqf}{p \times e^2 - f^2} - \frac{4af^3q^3}{3p^3 \times e^2 - f^2}, \text{ \&c. est l'expression; \& il vien}$$

dra au quotient la réfraction qu'on vouloit découvrir. On fera la même chose pour toutes les autres hauteurs aparentes, & on trouvera donc de cette sorte toutes les réfractions, en suposant simplement qu'on en connoît deux par les observations; sçavoir l'une ( $e$ ), lorsque l'Astre paroît dans l'horison; & l'autre ( $f$ ), lorsque l'Astre est élevé d'une hauteur aparente, dont  $q$  est le sinus &  $p$  le sinus de complement, pendant que  $a$  désigne le sinus total.

§. LIII.

Le Livre de la connoissance des Tems marque 32' 20'' pour la réfraction horisontale; mais comme les observations donnent presque toujours cette réfraction un peu plus grande, on l'a suposée de 33' complètes. On a pris ensuite la réfraction qui appartient au 26<sup>me</sup> degré de hauteur, & on l'a fixée à 2' 12'', en se conformant aux Tables de M. de la Hire. Si après cela on prend 1000000 pour le sinus total, & qu'on cherche combien valent à

proportion les petits arcs de 33' & de 2' 12'' de réfraction, on trouvera 95944 & 6400, comme on le peut voir tout d'un coup en cherchant dans les Tables les sinus de ces arcs, parce que leurs sinus leur sont sensiblement égaux. Ainsi 10000000 étant la valeur de  $a$ ; 95944 sera celle de  $e$  & 6400 celle de  $f$ ; & on aura de plus 4383712 pour le sinus  $g$  de 26 degrés, & 8987940 pour le sinus  $p$  de complement. Or introduisant ces nombres

H

[3, p. 57] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

C'est dans ce §. LIII que Bouguer indique les valeurs de référence qu'il choisit pour  $\chi_s$ . Il y a une petite erreur dans ses calculs numériques : concernant  $\sin 33'$ , il faut remplacer 95944 par 95992. Est-ce à cause d'un écart dû à l'interpolation, ou d'un défaut dans les tables de logarithmes et de fonctions trigonométriques (à 7 décimales) dont il disposait?

§ DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &c.

dans la série  $1 - g = 1 - \frac{2g^2e^2f^2}{p^2 \times e^2 - f^2} - +$

$$\frac{8g^4e^2f^4 + 2g^4e^4f^4}{3p^4 \times e^2 - f^2^4}$$

$$\frac{400g^6e^2f^2 - 160g^6e^4f^8 - 8g^6e^6f^6 - 120g^4p^2e^2f^4 \times e^2 - f^2 \times e^4 - f^4}{50p^6 \times e^2 - f^2^6}$$

+ &c, on trouvera  $\frac{9978668785}{10000000000}$  pour la valeur de  $1 - g$  ou de  $a^1 - m \text{ CN}^{m-1}$ ; & il faut remarquer que cette série est si convergente, qu'il n'est pas nécessaire de pousser l'approximation au-delà du second terme. L'autre série

$$h = \frac{2agf}{p \times e^2 - f^2} - \frac{4af^3q^3}{3p^3 \times e^2 - f^2^3}$$

$$+ \frac{16af^9q^5 + 6ag^3f^3p^2 \times e^2 - f^2 \times e^4 - f^4}{5p^5 \times e^2 - f^2^5} + \&c. \text{ qui est également}$$

convergente, donnera en même-tems  $\frac{22458}{3300}$  pour la valeur de  $h$ , & on aura donc  $\frac{22458}{22458}$  pour celle de

$$\frac{1}{b} \text{ ou de } \frac{m}{m-1}$$

§. LIV.

Ainsi c'est la fraction  $\frac{9978668785}{10000000000}$  qui exprime le rapport constant des sinus  $A\Sigma$  &  $\Theta\Sigma$ , entre lesquels l'arc  $A\Theta$  est intercepté, & c'est  $\frac{22458}{22458}$  qui marque le rapport de cet arc & de la réfraction. C'est-à-dire qu'on doit toujours multiplier le sinus de complement  $A\Sigma$  de chaque hauteur aparente, par  $\frac{9978668785}{10000000000}$  pour avoir le sinus  $\Theta\Sigma$ ; & que lorsque l'arc  $A\Theta$  est trouvé en degrés, minutes & secondes, il faut le multiplier par  $\frac{22458}{22458}$  pour avoir la réfraction requise. Si on nous propose, par exemple, 10 degrés de hauteur aparente, nous multiplierons le sinus complement 9848077 de cette hauteur par  $\frac{9978668785}{10000000000}$ , ou ce qui est la même chose, nous retrancherons du logarithme 9. 9933515 de ce sinus, le nombre constant 9274, parce que - 9274 est le logarithme de  $\frac{9978668785}{10000000000}$ . Il nous viendra 9. 9924241, pour le logarithme du sinus  $\Theta\Sigma$

[3, p. 58] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

SECON. PARTIE. CHAP. I. 39

qui répond à 79 . 19'. 45'' ; & ainsi l'arc AΘ fera de 40'. 15'' ou de 2415'' ; & si on le multiplie par le nombre consé-

tant  $\frac{1100}{12418} = \frac{1}{b} = \frac{m}{m-1}$  on trouvera 355'' ou 5'. 55''

pour la quantité de la réfraction qu'on vouloit découvrir. C'est de cette sorte que nous avons calculé la Table suivante.

*Nouvelle Table des réfractions Astronomiques.*

Hau- teurs appa- rentes.		Réfrac- tions.		Hau- teurs appa- rentes.		Réfrac- tions.		Hau- teurs appa- rentes.		Réfrac- tions.	
Deg.	Min. Sec.	D.	Min. Sec.	D.	Min. Sec.	D.	Min. Sec.	D.	Min. Sec.	D.	Min. Sec.
0	33	31	1 47	61	35						
1	25 20	32	1 43	62	34						
2	19 47	33	1 39	63	32						
3	15 50	34	1 35	64	30						
4	13 1	35	1 32	65	29						
5	10 58	36	1 29	66	28						
6	9 25										
7	8 5	37	1 26	67	27						
8	7 18	38	1 23	68	26						
9	6 3	39	1 20	69	25						
10	5 55	40	1 17	70	24						
11	5 24	41	1 15	71	22						
12	4 57	42	1 12	72	21						
13	4 35	43	1 9	73	20						
14	4 15	44	1 6	74	19						
15	3 58	45	1 4	75	17						
16	3 43	46	1 2	76	16						
17	3 29	47	1 0	77	15						
18	3 17	48	58	78	13						
19	3 6	49	56	79	12						
20	2 56	50	54	80	11						
21	2 47	51	52	81	10						
22	2 39	52	50	82	9						
23	2 32	53	48	83	8						
24	2 25	54	46	84	7						
25	2 18	55	45	85	6						
26	2 12	56	43	86	4						
27	2 6	57	42	87	3						
28	2 1	58	40	88	2						
29	1 56	59	38	89	1						
30	1 52	60	37	90	0						

H ij

[3, p. 59] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Notons que cette table (qui correspond à  $q \cong 0,1281 \cong 1/7,805$ ) indique les réfractions à la seconde d'angle près, comme on le faisait à partir de 1702. Malheureusement elle donne des valeurs en moyenne 10 % trop élevées, sauf aux faibles hauteurs ; corrélativement, la valeur de référence tirée de la table de La Hire (2' 12'') est 11 % plus forte que la valeur correspondante donnée par la table d'Ivory ( $\chi_S(26^\circ) \cong 1' 59,22''$ ) [48].

60 DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &c.

§. L V.

Il n'est pas nécessaire de s'arrêter ici à expliquer l'usage de cette Table. Tous les Pilotes un peu instruits dans la théorie de leur art, savent assez que les réfractions sont



communes aux hauteurs mesurées par toutes sortes d'instrumens ; & que puisque ces réfractions sont paroître les Astres un peu plus élevez qu'ils ne sont en effet, on doit toujours retrancher la réfraction de la hauteur aparente, pour avoir la hauteur véritable. On n'insiste pas davantage sur cet article. Mais les Lecteurs seront sans doute bien-aîsés de connoître la valeur de  $m$ , afin de sçavoir le degré de l'équation  $z = a^{1-m} y^m$  & de connoître quelle est l'hypothèse qui sert de fondement à nôtre table.

Nous avons trouvé (§. 15.) que  $\frac{1}{z}$  ou  $\frac{m}{m-1} = \frac{3300}{22458}$  :

mais cette fraction  $\frac{3300}{22458}$  doit être regardée comme *negative*, parce qu'elle marque le raport de l'arc  $A\ominus$  à la réfraction astronomique, & que l'arc  $A\ominus$  est *negatif*, parce que les sinus  $TV$  ou  $\ominus Z$  diminuent ici à mesure que les apliquées  $AP$ , ou  $AN = y$  augmentent. Ainsi au lieu de

l'équation  $\frac{m}{m-1} = \frac{3300}{22458}$ , nous avons  $\frac{m}{m-1} = -\frac{3300}{22458}$  ;

d'où nous tirons  $25758 m = 3300$  &  $m = \frac{3300}{25758}$  & si nous mettons cette valeur à la place de  $m$  dans l'équation  $z = a^{1-m} y^m$  de la courbe  $BGI$  des dilatations, il vien-

dra  $z = a^{\frac{22458}{25758}} \times y^{\frac{3300}{25758}}$  ou  $z^{25758} = a^{22458} y^{3300}$  ; & c'est donc là l'équation qui représente nôtre hypothèse particulière ; hypothèse qui est préférable à la multitude infinie d'autres renfermées dans l'équation  $z = a^{1-m} y^m$ . Il est vrai que quelque système qu'on embrasse sur cette matiere, il arrive presque toujours que les réfractions sont proportionelles à un arc  $A\ominus$  intercepté entre deux sinus  $A\aleph$ ,  $\ominus Z$  qui ont entr'eux un raport cons-

[3, p. 60] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

#### SECON. PARTIE. CHAP. I. 61

tant. Mais il suffit que ce raport soit différent, ou que les deux sinus soient pris en quelqu'autre endroit du quarr de cercle, pour que les réfractions suivent une autre progression, & que la Table soit différente ; & enfin nôtre hypothèse a toujours cet avantage singulier, d'être choisie entre une infinité d'autres. On pouvoit bien avoir fait quatre ou cinq différentes supositions. & examiné ensuite laquelle étoit la meilleure : mais ce n'est qu'en suivant une méthode semblable à celle qu'on vient d'expliquer qu'on pouvoit pousser la discussion infiniment plus loin ; & choisir, non pas entre quatre ou cinq hypothèses, mais entre une infinité.

[3, p. 61] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

### 3.5. Prolongement : la formule dite « de Bradley »

Il est intéressant de rappeler ici qu'une formule synthétique — (19) de [36] — peut se déduire du modèle de Bouguer ainsi que du résultat de Simpson [49, p. 58–59] ; Bouguer, dans son mémoire [3], ne l'avait pas remarqué — c'est Lagrange [47] qui l'a fait le premier, en 1772. En termes

actuels, considérons donc un modèle d’atmosphère tel que  $n(r) = K/r^q$  (avec  $q$  positif différent de 1) tant que  $n$  décroît de  $n_S$  à 1, puis

$$n(r) = 1 \text{ pour } r \geq r_S + H = r_S n_S^{1/q} \tag{10}$$

où  $H$  est la hauteur de ce modèle d’atmosphère ; on a vu dans [36] que Bouguer a cherché, par la suite, des valeurs numériques de  $q$ . À condition de prendre garde aux artefacts dus au point anguleux du profil d’indice en  $r_S + H$ , l’analyse des propriétés de la réfraction avec ce modèle est instructive, car elle aide à comprendre des points délicats de la fin des paragraphes 8 et 9.2 de [38].

L’intégrale de réfraction est calculable dans ce cas (cf. le sous-paragraphe 4.2.3 de [50] dans ce numéro spécial), comme l’a vu Bouguer géométriquement [3, p. 51], puis Simpson en 1743 [49, p. 58–59] — en partant d’un profil de réfractivité affine et en procédant à « plusieurs réductions ou simplifications qui ne paraissent pas toujours bien légitimes », ainsi que le rappellent clairement avec des formules la note de Mathieu dans son édition posthume de Delambre en 1827 [51, p. 777–782], et une note de Bowditch dans sa traduction de la *Mécanique Céleste* de Laplace [52, note 3899 et p. 497–500]. Nous préférons utiliser pour cela le changement de variable de Biot — voir le paragraphe 6 de [38], relation (41) — qui donne plus rapidement une formule simple, car

$$\chi_S = \int_{Z_0}^{Z'} -\frac{d \ln r^{-q}}{d \ln r^{1-q}} d\alpha = \frac{q}{1-q} (Z' - Z_0) \quad \text{où } n_S r_S \sin Z' = (r_S n_S^{1/q}) \sin Z_0, \tag{11}$$

donc dans ce cas on trouve facilement la loi rigoureuse de Bouguer-Simpson :

$$\chi_S = \frac{q}{1-q} \left[ Z' - \arcsin \left( n_S^{-\frac{1-q}{q}} \sin Z' \right) \right]. \tag{12}$$

On peut encore la présenter sous la forme

$$n_S^{-\frac{1-q}{q}} \sin Z' = \sin \left( Z' - \frac{1-q}{q} \chi_S \right), \tag{13}$$

d’où

$$\left( 1 - n_S^{-\frac{1-q}{q}} \right) \sin Z' = \sin Z' - \sin \left( Z' - \frac{1-q}{q} \chi_S \right) = 2 \sin \left( \frac{1-q}{2q} \chi_S \right) \cos \left( Z' - \frac{1-q}{2q} \chi_S \right) \tag{14}$$

$$\left( 1 + n_S^{-\frac{1-q}{q}} \right) \sin Z' = \sin Z' + \sin \left( Z' - \frac{1-q}{q} \chi_S \right) = 2 \sin \left( Z' - \frac{1-q}{2q} \chi_S \right) \cos \left( \frac{1-q}{2q} \chi_S \right) \tag{15}$$

En éliminant  $\sin Z'$  entre ces deux dernières équations (14)–(15) on obtient

$$\tan \left( \frac{1-q}{2q} \chi_S \right) = \left[ \tan \left( Z' - \frac{1-q}{2q} \chi_S \right) \right] \left( 1 - n_S^{-\frac{1-q}{q}} \right) / \left( 1 + n_S^{-\frac{1-q}{q}} \right). \tag{16}$$

La petitesse de  $\eta_S$  et de  $\chi_S$  vis-à-vis de 1 permet d’écrire à l’ordre total 2, indépendamment de la distance zénithale,

$$\tan \left( \frac{1-q}{2q} \chi_S \right) \cong \frac{1-q}{2q} \chi_S \tag{17}$$

et donc finalement

$$\chi_S \cong \eta_S \left( 1 - \frac{\eta_S}{2} \right) \tan(Z' - w \chi_S) \tag{18}$$

qui est la formule de Bradley avec

$$w = \frac{1-q}{2q} \tag{19}$$

au lieu de 3 — voir le paragraphe 4 de [36].

Pour Bouguer, son utilisation des deux valeurs de référence qu’il a choisies pour  $\chi_S$  lui permet de déduire, après d’assez lourds calculs montrés au sous-paragraphe précédent,  $((r_S + H)/r_S)^{q-1} \cong 0,997\,866\,8785$  et  $q/(1-q) \cong 3\,300/22\,458$  [3, p. 57–60], dont il déduit (p. 60)  $q = 3\,300/25\,758$  (soit 1/7,805, alors que Bradley trouvera 1/7); on en tire aussi  $w \cong 3,40$  [51, p. 777–782] (Bradley disait 3) et  $H \cong 15,62$  km. Bouguer n’a pas effectué cette dernière application numérique : il n’avait pas encore l’idée de chercher à déduire, à partir des observations de  $\chi_S(Z')$ ,

des informations sur la structure de l'atmosphère (voir [53] dans ce numéro spécial) ; on a vu que, selon lui,  $n$  était proportionnel à la masse volumique de ce qu'il imaginait comme étant une « matière réfractive ». Il aurait pu se montrer intéressé par la détermination de la hauteur maximale de cette « matière réfractive » ; s'il ne l'a pas été, c'est peut-être parce qu'il avait conscience du fait que son modèle n'était pertinent que pour calculer  $\chi_S(Z')$ , et pas pour étudier l'atmosphère. Dans le paragraphe 2 du présent article, nous avons vu aussi pourquoi  $n_S$  est absent des considérations de Bouguer [3] ; en posant anachroniquement  $n(r_S + H) = 1$ , à partir des valeurs numériques de la hauteur relative  $h_\tau := H/r_S$  et de  $q$  nous déduisons  $n_S \cong 1 + 3,138 \times 10^{-4}$ , et Bouguer aurait pu trouver cette valeur numérique pour  $[n(r_S + H)]^{-1}/[n(r_S)]^{-1}$  : par rapport à la valeur moderne connue  $2,821 \times 10^{-4}$  pour  $n_S - 1$  à 10 °C et 1 atm pour la raie d de l'hélium ( $\lambda_0 \cong 588$  nm) dans l'air sec, c'est surestimé de 11 %, et cela coïncide avec le fait que la table de Bouguer donnait des valeurs trop grandes d'environ 10 %, sauf auprès de l'horizon — par construction.

Toute valeur de référence pas trop proche de l'horizon impose quasiment  $q h_\tau$ . En outre, de l'égalité (10) on tire

$$1/q = \ln(1 + h_\tau) / \ln(1 + \eta_S) \sim h_\tau / \eta_S. \quad (20)$$

Par contre, pour  $\psi' := 90^\circ - Z' \ll 1$  rad, et en considérant que  $\eta_S[1 - (\eta_S/2)] \cong \eta_S$ , on a

$$\chi_S = \eta_S \tan(90^\circ - \psi' - w \chi_S) = \eta_S \cot(\psi' + w \chi_S) \cong \eta_S / (\psi' + w \chi_S) \quad (21)$$

— où nous avons mis = au lieu de  $\cong$  au début car nous n'y avons pas introduit de nouvelle approximation depuis celle indiquée juste après l'expression (20). Cela donne une équation du second degré en  $\chi_S$  dont on ne retient que la racine positive

$$\chi_S = \frac{-\psi' + \sqrt{\psi'^2 + 4w\eta_S}}{2w}; \quad (22)$$

et avec les relations (19)–(20) il vient l'expression suivante de  $\chi_S$  (tant que sa valeur est positive, ce qui exclut le cas où  $h_\tau - \eta_S$  et  $\psi'$  sont tous deux négatifs — or  $h_\tau - \eta_S < 0$  équivaut quasiment à  $q > 1$  à cause de la relation (20)) :

$$\chi_S(\psi') = \frac{\eta_S}{h_\tau - \eta_S} [\sqrt{2(h_\tau - \eta_S) + \psi'^2} - \psi'] = \frac{2\eta_S}{\sqrt{2(h_\tau - \eta_S) + \psi'^2} + \psi'}; \quad (23)$$

donc si on prend aussi la valeur numérique de  $\chi_{Sh}$  comme valeur de référence, cela impose une seconde relation entre les paramètres indépendants ajustables  $q$  et  $h_\tau$ , qui montre aussi qu'il faut  $q < 1$  pour que l'image d'un astre puisse exister sur l'horizon astronomique :

$$\chi_{Sh} := \chi_S(0) = \eta_S \sqrt{\frac{2}{h_\tau - \eta_S}} = q \sqrt{\frac{2h_\tau}{1 - q}} = \sqrt{\eta_S \frac{2q}{1 - q}} = \sqrt{\frac{\eta_S}{w}}. \quad (24)$$

Comme nous l'avons vu au sous-paragraphe 9.2 de [38], cette expression aide bien à comprendre, à  $h_\tau$  fixé, la non-linéarité de  $\chi_{Sh}$  (et sa forte convexité) par rapport à  $\eta_S$ , même si celui-ci est petit : car  $h_\tau$  est petit aussi, supérieur à  $\eta_S$  mais du même ordre. Cependant, (24) donne  $\chi_{Sh} \cong 30'$  pour la raie d dans les conditions normales de température et de pression en S, donc 5' en dessous de la valeur normale actuellement admise (voir le paragraphe 4 de [36]).

### 3.6. Cas limite où $H$ est infini

La quadrature avec  $h(r, I_B)$  vue au sous-paragraphe 7.2.2 de [38] nous montre que, pour des morceaux de rayons, la fonction  $\theta(r)$  est une primitive de  $1/\sqrt{h(r, I_B)}$ , i.e. de  $I_B \{n^{-1}/[r\sqrt{r^2 - (n^{-1})^2 I_B^2}]\}$  ; ce résultat est présent dans ce mémoire [3, p. 44–47]. Donc l'angle au centre  $\Delta\theta$  sous-tendant tout le rayon lumineux (R), qui relie l'observateur S à l'astre A situé à l'infini, vaut

$$\Delta\theta = \int_{\theta_S}^{\theta_A} d\theta = \int_{r_S}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{h(r, I_B)}}. \quad (25)$$

Si  $H$  est infini, la propriété « très-remarquable » trouvée par Bouguer montre que la réfraction en découle très simplement :

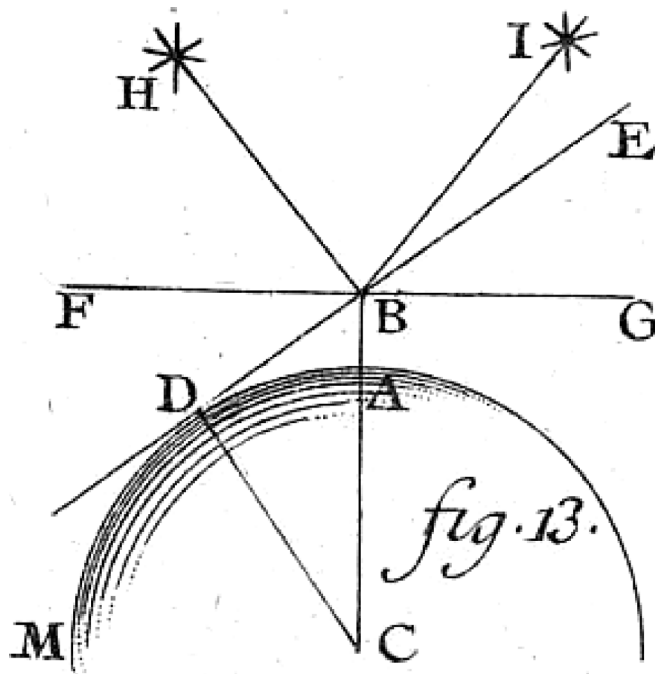
$$\chi_S = q\Delta\theta = q \int_{r_S}^{\infty} \frac{dr}{r\sqrt{[(r_S/r)^{(q-1)} / \sin Z']^2 - 1}}. \tag{26}$$

Cette intégrale n'est pas définie ou diverge si et seulement si  $q \geq 1$ . En effet, si  $q = 1$  l'intégrande est proportionnel à  $1/r$ , le rayon est une spirale logarithmique, de toute façon  $\chi_S$  n'existe pas ; et, pour  $q > 1$ ,  $h(r, I_B)$  présente une annulation simple en  $r = r_S / (\sin Z')^{1/(q-1)}$  qui est le rayon d'une sphère que le rayon lumineux peut éventuellement atteindre et tangenter (il le fait si et seulement si  $\psi' := 90^\circ - Z' > 0$ ), mais au-delà de laquelle il ne peut aller — ce comportement se voit encore plus directement sur le diagramme de Young–Kattawar [54] (voir [55] lié à [38]). Par contre, avec  $q < 1$  (pour Bouguer,  $q \cong 0,1281 \cong 1/7,805$ ) l'intégrale ci-dessus converge, et aussi ne dépend pas de  $n_S$  : la multiplication de la distribution de  $n$  par une constante ne change pas  $\chi_S$  ni  $\Delta\theta$ .

**Remarque.** Pour  $H$  fini et  $q > 1$ , alors si et seulement si  $Z' > \arcsin[(r_S / (r_S + H))^{q-1}]$ , un rayon lumineux arrivant en  $S$  ne peut pas provenir de l'extérieur de l'atmosphère (il ne traverse pas son sommet) : cela se voit avec la valeur de  $r$  donnant l'annulation simple de  $h(r, I_B)$ , et encore plus directement avec le diagramme de Young–Kattawar [55].

### 3.7. Influence de la réfraction terrestre sur la dépression de l'horizon

Dans le chap. II de la seconde partie de son mémoire, en supposant la surface de la mer parfaitement sphérique de rayon  $r_0$ , Bouguer s'intéresse à ce que l'on nomme actuellement la dépression  $\delta$  de l'horizon (définie au paragraphe 2 du présent article) ; il commence par calculer  $\delta$  (qu'il appelle « l'inclinaison de l'horison sensible ») par de simples relations dans le triangle rectangle BCD de sa Fig. 13 — voir ci-dessous.



[3, Fig. 13 en fin d'ouvrage] Source : Biblioteca Virtual del Patrimonio Bibliografico (<https://bvpb.mcu.es/es/consulta/registro.do?id=576360>). CC-BY 4.0

Puis il dresse le tableau suivant, avec lequel il nous réserve une surprise...

## SECON. PARTIE. CHAP. II.

65

Table des inclinaisons de l'Horison sensible.

Élévations au-dessus de la Mer.		Inclinais. de l'horison visuel.	Élévations au-dessus de la Mer.		Inclinais. de l'horison visuel.	Élévations au-dessus de la Mer.		Inclinais. de l'horison visuel.
Pieds.	Pouc.	Min.	Pieds.	Min.	Pieds.	Min.	Pieds.	Min.
0	10	1	365	21	1395	41		
3	4	2	401	22	1470	42		
7	5	3	439	23	1534	43		
13	3	4	478	24	1607	44		
20	9	5	519	25	1681	45		
29	11	6	561	26	1756	46		
39	9	7	605	27	1833	47		
53	2	8	651	28	1912	48		
67	3	9	698	29	1993	49		
83	0	10	747	30	2074	50		
100	5	11	798	31	2159	51		
119	5	12	850	32	2244	52		
140	3	13	904	33	2331	53		
162	8	14	960	34	2420	54		
186	8	15	1017	35	2511	55		
212		16	1076	36	2603	56		
240		17	1136	37	2697	57		
269		18	1198	38	2792	58		
299		19	1262	39	2889	59		
331		20	1328	40	2988	60		

### §. LX.

Comme les plus grands Vaisseaux ne sont pas fort élevés au-dessus de la surface de la Mer, il n'y aura que les premiers nombres de la Table précédente qui pourront servir. Les autres seroient seulement d'usage, si étant à terre sur quelque montagne proche de la Mer, on vouloit observer la hauteur des Astres à la maniere des Marins, en prenant pour horison l'extremité aparente de la Mer. Mais dans ce cas la Table précédente ne seroit pas assez exacte : car le rayon visuel BD se courbe sensiblement.

[3, p. 65] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Noter que le pied français était (entre sa réforme par Colbert en 1668 et son abolition par la Révolution en 1799) le pied-de-roi, correspondant à 324,839 mm ; le pouce est son douzième.

### 66 DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &c.

blement par les réfractions, dans le long trajet qu'il a à faire depuis l'œil jusques vers le point D. Le rayon visuel doit se courber sensiblement, puisqu'il est, comme nous l'avons déjà dit à la fin de la première Partie, une portion de la *solaire* ou de la ligne courbe que tracent les rayons de lumière, en traversant l'Atmosphère : & il est clair que cette courbure des rayons, doit rendre les inclinaisons de l'horison un peu plus petites que celles qui sont marquées ci-dessus. Si on étoit, par exemple, élevé au-dessus de la surface de la Mer de 2440 pieds ou de 2460, l'inclinaison de l'horison visuel seroit selon la Table d'environ 54' 20" : & cependant M. *Cassini* observa le 12 Mars 1701, au pied de la tour de la *Massane*, qui est proche de *Collioure*, & qui est élevé de 408  $\frac{1}{2}$  Toises ou de 2451 pieds que l'inclinaison de l'horison visuel n'étoit que de 50' 20". La différence étant assez considérable, nous avons cru qu'il étoit à propos de nous servir de la Théorie établie dans le Chapitre précédent, pour tâcher de découvrir les inclinaisons de l'horison avec plus d'exactitude. C'est même ce qui nous a engagé à ne traiter ce sujet qu'après avoir examiné les réfractions; sans cela nous eussions suivi un ordre contraire. Ce que nous avons dit des réfractions nous met en effet plus en état de connoître exactement les inclinaisons de l'horison. Mais cela n'empêche pas que pour avoir la hauteur véritable d'un Astre, on ne doive toujours, à parler dans la rigueur, corriger l'inclinaison de l'horison avant de corriger la réfraction : Car les réfractions qui sont marquées dans la Table, ne sont pas calculées pour des hauteurs mesurées au-dessus d'un horison incliné; mais pour des hauteurs mesurées au-dessus d'un horison parfaitement de niveau.

[3, p. 66] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Noter la fine remarque formée par la dernière phrase de cette page ! Elle sera reprise par la suite dans les procédures de point nautique — voir le sous-paragraphe 4.3 de [39] dans ce numéro spécial.

## 70 DES CORRECTIONS DE LA HAUTEUR, &amp;c.

*Nouvelle Table des Inclinaisons de l'Horizon visuel.*

Elévations au-dessus de la Mer.		Inclinaison de l'horizon sensible.	Elévations au-dessus de la Mer.		Inclinaison de l'horizon sensible.	Elévations au-dessus de la Mer.		Inclinaison de l'horizon sensible.
PiedsPouc.		Min.	Pieds.	Min.	Pieds.	Min.	Pieds.	Min.
	11	1	420	21	1601	41		
3	9	2	459	22	1680	42		
8	7	3	504	23	1761	43		
15	3	4	548	24	1844	44		
23	10	5	595	25	1928	45		
34	3	6	645	26	2015	46		
46	7	7	694	27	2103	47		
60	11	8	747	28	2194	48		
77	0	9	801	29	2286	49		
95	2	10	857	30	2381	50		
115	1	11	915	31	2477	51		
136	11	12	975	32	2575	52		
160	9	13	1037	33	2674	53		
186	5	14	1101	34	2777	54		
214		15	1166	35	2882	55		
243		16	1234	36	2986	56		
275		17	1304	37	3094	57		
308		18	1375	38	3203	58		
343		19	1448	39	3324	59		
381		20	1524	40	3428	60		

## §. LXIII.

Il paroitra peut-être que c'est pousser la délicatesse trop loin, de vouloir obliger les Pilotes à ne se servir que de cette seconde Table au lieu de la première. Mais cependant il suffit que l'observateur soit élevé de trente pieds, pour que la différence soit déjà de près d'une demie minute : & si on étoit obligé de monter dans la hune afin de découvrir la Mer par-dessus quelques îles ou quelques rochers, l'erreur pourroit aller à près d'une minute. Or nous sommes persuadés qu'on ne doit pres-

**SECON. PARTIE. CHAP. II. 77**

**que rien négliger dans une semblable matiere : car quelque soin & quelque peine qu'on se donne, il arrive qu'on se trompe encore souvent d'une quantité trop sensible. D'ailleurs il étoit toujours nécessaire d'entreprendre la discussion précédente, au moins pour sçavoir, comme on l'a déjà dit, ce qu'on doit penser de l'exacritude de la Table ordinaire.**

[3, p. 71] Source : Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Bouguer a recalculé  $\delta$  en profitant de l'invariant, ce qui donne

$$I_B = n_0 r_0 = n_S r_S \cos \delta \quad \text{et} \quad \delta = \arccos \frac{n_0 r_0}{n_S r_S} \quad (27)$$

pour un profil d'indice  $n(r)$  quelconque et en posant  $n_0 := n(r_0)$  ; mais pour un profil en  $r^{-q}$  cela donne, en introduisant l'élévation  $E$  de l'observateur  $S$ ,

$$\ln(\cos \delta) = \ln \frac{n_0 r_0}{n_S r_S} = (1 - q) \ln \frac{r_0}{r_0 + E} \quad (28)$$

qui coïncide exactement avec les relations obtenues par Bouguer sur sa p. 69 à condition d'y poser

$$Lr := \ln(\sin 90^\circ) = 0, \quad (29)$$

lui permettant ainsi de calculer sa table de la p. 70. Comme

$$\ln(\cos \delta) \cong -\delta^2/2 \quad \text{et} \quad \ln \frac{r_0}{r_0 + E} \cong -\frac{E}{r_0} \quad (30)$$

on retrouve l'expression attendue

$$\delta = \sqrt{1 - q} \sqrt{2E/r_0} = \sqrt{1 - \kappa_S} \sqrt{2E/r_0}. \quad (31)$$

En bas de sa page 71, il trouve l'expression de « la distance à l'horison ou à l'extremité apparente de la mer »

$$L = r_0 \delta / (1 - q) \quad (32)$$

que nous démontrerons par une autre méthode — relation (12) de [39].

Dans le modèle de Bouguer,  $\kappa_S = q$ . C'est peut-être pour cette raison que Bouguer n'introduit pas spécifiquement le coefficient de réfraction  $\kappa_S$ , alors qu'il en avait l'entière possibilité ; 29 ans plus tard Lambert introduira  $1/\kappa_S$  auquel il ne donnera pas de nom [9] — voir le paragraphe 2 de [10] dans ce numéro spécial. Comme lui et à partir de la même mesure de  $\delta$  par Jean-Dominique et Jacques Cassini depuis le pied de la Tour de la Massane le 12 mars 1701 [56, p. 141], Bouguer trouve  $1 - q \cong 22\,458/25\,758$  dont nous tirons  $q \cong 0,1281 \cong 1/7,805$  alors que Lambert trouvera  $\kappa_S \cong 1/7,06$ . Ce coefficient  $\kappa_S$  joue un rôle important dans la réduction de mesures utilisées en navigation astronomique. Pour d'autres applications numériques, voir le sous-paragraphe 4.2 de [39].

Bouguer comprend que  $q$  supérieur à 1 produirait la suppression d'une bande de l'image usuelle du ciel au-dessus de l'horizon astronomique car l'observateur serait dans un chenal optique [39, 55] ; et comme dans ce cas on aurait  $n_0 r_0 > n_S r_S$ , l'observateur  $S$  verrait une mer (ou un grand lac [57, p. 541]) concave (voir le paragraphe 3 de [39]), comme l'a vu von Schrötter qui observa en 1908 un cas frappant de dépression négative avec un horizon 27' au-dessus de l'horizon normal [58], ainsi que d'autres marins [59], [60, p. 385], [61, 62], [63, p. 291], [64] faisant état d'une surface d'eau qui semble concave (par effet *hillingar* [65, 66]) : « Through an optical



illusion, dependent on the mirage of the ice horizon, it appeared to us as if we were proceeding on the bottom of a shallow, saucer-shaped cavity.» [67, p. 272]

## Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

## Remerciements

L'auteur exprime sa gratitude au Dr. Andrew Young pour la mise à disposition de sa fabuleuse bibliographie en ligne (citée à la fin du paragraphe 2). Il remercie aussi Lilie Pons (secrétaire éditoriale — Centre Mersenne) et Julien Desmaretz (du service des publications de l'Académie des sciences) pour leur précieux travail technique sur les images de textes anciens.

## Références

- [1] D. Fauque, « Du bon usage de l'éloge : Cas de celui de Pierre Bouguer », *Rev. hist. sci.* **54** (2001), p. 351-382.
- [2] P. Bouguer, *De la Mâturation des Vaisseaux*, Claude Jombert, Paris, 1727.
- [3] P. Bouguer, *De la Méthode d'Observer Exactlyement sur Mer la Hauteur des Astres*, Claude Jombert, Paris, 1729.
- [4] P. Bouguer, *De la Méthode d'observer en mer la déclinaison de la boussole*, Claude Jombert, Paris, 1731.
- [5] J. L. Greenberg, « Mathematical physics in eighteenth-century France », *Isis* **77** (1986), p. 59-78.
- [6] J. E. McClellan, « The Académie Royale des Sciences, 1699–1793: A statistical portrait », *Isis* **72** (1981), p. 541-567.
- [7] A. Mayrargue, « De la méthode d'observer exactement sur mer la hauteur des astres », *Rev. hist. sci.* **63** (2010), p. 67-91.
- [8] P. Bouguer, *Essai d'Optique sur la Gradation de la Lumière*, Claude Jombert, Paris, 1729.
- [9] J. H. Lambert, *Les propriétés remarquables de la route de la lumière*, H. Scheurleer F. Z. & Compagnie? La Haye, 1758.
- [10] L. Dettwiller, « Les développements de Lambert : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 453-465.
- [11] P. Bouguer, *Entretiens sur la cause de l'inclinaison des orbites des planètes*, Charles-Antoine Jombert, Paris, 1734.
- [12] É. Badinter, *Les Passions intellectuelles*, t. I, *Désirs de gloire (1735–1751)*, Fayard, Paris, 1999.
- [13] F. Trystram, *Le procès des étoiles*, Seghers, Paris, 1979.
- [14] P. Murdin, *Full Meridian of Glory*, Springer, New York, 2009.
- [15] P. Bouguer, *La Figure de la Terre, Déterminée par les Observations de Messieurs Bouguer, & de la Condamine, de l'Académie Royale des Sciences, envoyés par ordre du Roy au Pérou, pour observer aux environs de l'Equateur*, Charles-Antoine Jombert, Paris, 1749.
- [16] G. Bruhat, *Cours de Physique générale — Mécanique*, Masson, Paris, 1955.
- [17] I. Todhunter, *A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth, from the Time of Newton to that of Laplace*, vol. 1, Macmillan, Londres, 1873.
- [18] J. Lequeux, *L'Observatoire de Paris — 350 ans de science*, Gallimard / Observatoire de Paris, Paris, 2012.
- [19] J. Dhombres, « "Mettre la géométrie en crédit" : Découverte, signification et utilisation du métacentre inventé par Pierre Bouguer », in *Éprouver la science : Pierre Bouguer et le premier XVIII<sup>e</sup> siècle, Actes du colloque Nantes-Le Croisic, 6–7 juin 1998*, S & TP II<sup>e</sup> série, vol. 3, 1999, p. 305-363.
- [20] « Sur la mesure du diamètre des plus grandes planètes », *Hist. Acad. R. Sci. année 1748* (1752), p. 87-94.
- [21] P. Bouguer, « De la mesure du diamètre des plus grandes planètes : Description d'un nouvel Instrument qu'on peut nommer Héliomètre, propre à les déterminer ; & Observations sur le Soleil », *Mém. Acad. R. Sci. année 1748* (1752), p. 11-34.
- [22] G. Boistel, « Pierre Bouguer, commissaire pour la marine et expert pour les longitudes : Un opposant au développement de l'horlogerie de marine au XVIII<sup>e</sup> siècle », *Rev. hist. sci.* **63** (2010), p. 121-159.
- [23] P. Bouguer, *Nouveau traité de navigation, contenant la théorie et la pratique du pilotage*, Guérin & Delatour, Paris, 1753.
- [24] P. Bouguer, *De la manœuvre des vaisseaux*, Guérin & Delatour, Paris, 1757.
- [25] G. Maheu, « La vie scientifique au milieu du XVIII<sup>e</sup> siècle : introduction à la publication des lettres de Bouguer à Euler », *Rev. Hist. Sci. Appl.* **19** (1966), p. 206-224.
- [26] J. Gapaillard, « Pierre Bouguer, Lacaille et la mesure du méridien », in *Éprouver la science : Pierre Bouguer et le premier XVIII<sup>e</sup> siècle, Actes du colloque Nantes-Le Croisic, 6–7 juin 1998*, S & TP II<sup>e</sup> série, vol. 3, 1999, p. 233-252.
- [27] P. Bouguer, *Traité d'Optique sur la Gradation de la Lumière — Ouvrage posthume publié par M. l'Abbé de La Caille*, Guérin & Delatour, Paris, 1760.

- [28] Pierre Bouguer. *Un savant breton au xviii<sup>e</sup> siècle. Actes de la journée d'étude : La vie et l'œuvre de Pierre Bouguer*, Institut culturel de Bretagne, Vannes, 2002.
- [29] D. Fauque, « Introduction : Pierre Bouguer, figure emblématique ou savant singulier? », *Rev. hist. sci.* **63** (2010), p. 5-21.
- [30] R. Lamontagne, *La vie et l'œuvre de Pierre Bouguer*, PUF, Paris, 1961.
- [31] A. de la Borderie, R. Kerviler (éds.), *Ceuvres nouvelles de Des Forges Maillard*, Société des bibliophiles bretons, Nantes, 1888.
- [32] P. Bouguer, « Sur les réfractions astronomiques dans la Zone Torride », *Mém. Acad. R. Sci. année 1739* (1741), p. 407-423.
- [33] P. Bouguer, « Second mémoire sur les réfractions astronomiques, observées dans la Zone Torride ; avec diverses remarques sur la manière d'en construire les Tables », *Mém. Acad. R. Sci. année 1749* (1753), p. 75-112.
- [34] « Sur les réfractions astronomiques », *Hist. Acad. R. Sci. année 1739* (1741), p. 45-48.
- [35] « Sur les réfractions », *Hist. Acad. R. Sci. année 1749* (1753), p. 152-157.
- [36] L. Dettwiller, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 13-62.
- [37] G. Maheu, « Bibliographie de Pierre Bouguer (1698–1758) », *Rev. Hist. Sci. Appl.* **19** (1966), p. 193-205.
- [38] L. Dettwiller, « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 63-102.
- [39] L. Dettwiller, « La discussion par Kummer d'une quadrature sur la réfraction astronomique : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 503-525.
- [40] J.-P. Maraldi, « Expériences du baromètre faites sur diverses montagnes de France », *Mém. Acad. R. Sci. année 1703* (1720), p. 229-237.
- [41] J.-D. Cassini, « Des irregularitez de l'abaissement apparent de l'horizon de la mer », *Mém. Acad. R. Sci. année 1707* (1730), p. 195-197.
- [42] J. Cassini, « Sur les refractions astronomiques », *Hist. Acad. R. Sci. année 1714* (1719), p. 79-87.
- [43] F. Hauksbee, *Physico-Mechanical Experiments on Various Subjects*, R. Brugis, Londres, 1709.
- [44] « Sur les refractions », *Hist. Acad. R. Sci. année 1700* (1761), p. 112-116.
- [45] I. Newton, *Opticks*, Royal Society, Londres, 1704.
- [46] J.-B. Biot, « Sur les réfractions astronomiques », *Additions à la Connaissance des Temps 1839* (1836), p. 3-114.
- [47] J.-L. la Grange, « Sur les réfractions astronomiques », in *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres (Berlin), Année MDCCLXXII [1872]*, 1774, p. 259-282.
- [48] J. Ivory, « On the astronomical refractions », *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **113** (1823), p. 409-495.
- [49] T. Simpson, *Mathematical Dissertations on a Variety of Physical and Analytical Subjects*, T. Woodward, Londres, 1743.
- [50] F. Mignard, « Les tables de réfraction astronomique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 133-178.
- [51] J.-B. Delambre, *Histoire de l'Astronomie au Dix-Huitième Siècle* (M. Mathieu, éd.), Bachelier, Paris, 1827.
- [52] N. Bowditch, *Mécanique Céleste. By the Marquis de La Place, translated, with a commentary*, vol. VI, Little and Brown, Boston, 1839.
- [53] A. T. Young, « Relations among atmospheric structure, refraction, and extinction », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 179-212.
- [54] A. T. Young, G. W. Kattawar, « Sunset science. II. A useful diagram », *Appl. Opt.* **37** (1998), p. 3785-3792.
- [55] L. Dettwiller, « Properties of optical ducts, their chromatism and its effects on astronomical refraction », *preprint*, arXiv:2204.02605, 2022.
- [56] J. Cassini, *Traité de la grandeur et de la figure de la Terre*, Pierre de Coup, Amsterdam, 1723.
- [57] E.-A. Forel, *Le Léman — Monographie limnologique*, t. 2, F. Rouge, Lausanne, 1895.
- [58] Frhr. von Schrötter, « Hebung der Kimm und Luftspiegelungen in der Nordsee », *Ann. Hydrogr. Berlin* **36** (1908), p. 490-497.
- [59] W. Wales, « Journal of a voyage, made by order of the Royal Society, to Churchill River, on the North West Coast of Hudson's Bay; of thirteen months residence in that country; and of the voyage back to England; in the years 1768 and 1769 », *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **60** (1770), p. 100-136.
- [60] D. Brandes, « Einige kritische Bemerkungen zu den in den Annalen befindlichen Aufsätzen über die irdische Strahlenbrechung, und Nachricht von der Vollendung seiner Refractions-Beobachtungen », *Gilb. Ann. Phys.* **23** (1806), p. 380-393.
- [61] W. Scoresby, *Journal of a Voyage to the Northern Whale-Fishery*, Constable, Edimbourg, 1823.
- [62] J. Parnell, « On a mirage in the English Channel », *Phil. Mag.* **37** (1869), p. 400-401.
- [63] R. L. Ives, « Recurrent mirages at Puerto Peñasco, Sonora », *J. Franklin Inst.* **252** (1951), p. 285-295.
- [64] D. A. Hunt, A. O. Proudfoot, B. G. Gouldthorpe, « Abnormal refraction, Australian waters », *Mar. Obs.* **30** (1960), p. 134.
- [65] H. L. Sawatzky, W. H. Lehn, « The Arctic mirage and the early North Atlantic », *Science* **192** (1976), p. 1300-1305.
- [66] L. Dettwiller, « Some theorems on "arctic mirages": hillinger effect and superior mirages », *J. Opt. Soc. Am. A* **36** (2019), p. 1997-2004.

[67] G. F. Wright, W. Upham, *Greenland Icefields and Life in the North Atlantic*, D. Appleton, New York, 1896.



---

Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

# Les développements de Lambert : commentaire historique

## *Lambert's series expansions: an historical commentary*

Luc Dettwiller<sup>® a</sup>

<sup>a</sup> Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School,  
Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France  
*Courriel*: [dettwiller.luc@gmail.com](mailto:dettwiller.luc@gmail.com)

**Résumé.** Dans son livre de 1758, Lambert (1728–1777) introduit l'intégrale de réfraction sous sa forme la plus compacte, et la développe en série entière du sinus ou de la tangente de la distance zénithale (la seconde devant converger plus vite — sous réserve de convergence) ; puis il s'intéresse aux conséquences géodésiques de la courbure des rayons lumineux.

**Abstract.** In his 1758 book, Lambert (1728–1777) established the most compact expression of the refraction integral, and developed it in a power series of sine or tangent of the zenithal distance. He then examined the geodetic consequences of the curvature of the light rays.

**Mots-clés.** Lambert (séries de), Intégrale de réfraction, Coefficient de réfraction, Dépression de l'horizon, Distance de l'horizon.

**Keywords.** Lambert series, Refraction integral, Refraction coefficient, Horizon dip, Horizon distance.

*Published online: 21 February 2023, Issue date: 11 August 2023*

### 1. Introduction

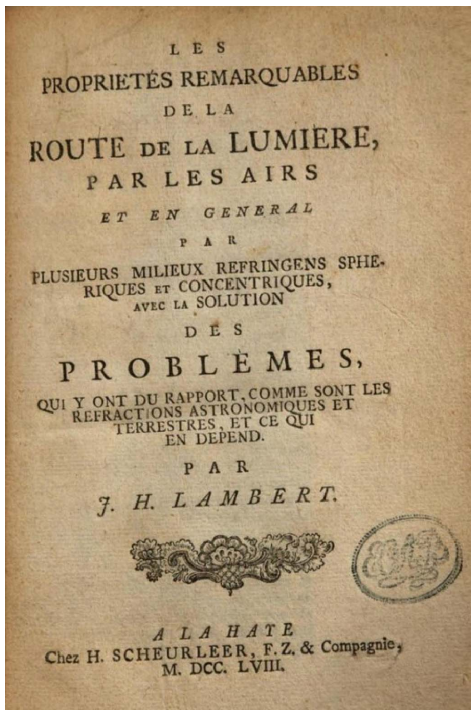
Né à Mulhouse en 1728, mort à Berlin en 1777 où il était académicien des sciences sous le mécénat de Frédéric II de Prusse, Johann Heinrich Lambert a connu une activité scientifique intense et variée touchant à la logique, aux mathématiques, à la physique, l'astronomie, la météorologie et la cartographie ! En physique, il a travaillé sur les propriétés des gaz, mais il est surtout connu pour son traité de photométrie en latin [1], continuateur de celui de Pierre Bouguer [2] ; on y voit apparaître la notion de source lambertienne, qui s'avère n'être qu'une idéalisation (qu'on ne sait matériellement approcher qu'à 5 % près au mieux), hélas inutilisable en ce qui concerne les surfaces des planètes ou des satellites [3, 4] — ceci étant connu dès le XIX<sup>e</sup> siècle [5], d'où l'appréciation d'Arthur Searle : « In particular, Lambert's theory, developed in his *Photometria*, had been regarded as almost demonstrably true, while, in fact, it consisted of an ingenious mathematical superstructure on a very insecure foundation. » [6] Deux ans avant la parution de *Photometria*, Lambert publia *Les propriétés remarquables de la route de la lumière*,

un ouvrage à la frontière des mathématiques, de l'optique, de la géodésie et de l'astronomie [7]. C'est à lui que nous nous intéressons, pour sa contribution à l'étude théorique de la réfraction astronomique.

Dans son édition de 1758 chez Scheurleer, F. Z. & Compagnie [7] il est disponible sur Google Books : [https://books.google.fr/books?id=V7xkAAAAcAAJ&newbks=0&printsec=frontcover&dq=lambert+les+propri%C3%A9t%C3%A9s+de+la+route+de+la+lumi%C3%A8re+dans+les+airs&hl=fr&redir\\_esc=y](https://books.google.fr/books?id=V7xkAAAAcAAJ&newbks=0&printsec=frontcover&dq=lambert+les+propri%C3%A9t%C3%A9s+de+la+route+de+la+lumi%C3%A8re+dans+les+airs&hl=fr&redir_esc=y) et dans celle de 1759 chez van Daalen (La Haye), sur Gallica : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k148910g/#>.

Le corps de ces deux éditions est le même, y compris en ce qui concerne (en bas de la page finale) la liste des « Fautes à corriger » (p. 116). Seule apparaît recomposée, pour l'édition de 1759, la page de titre. Les typographes hollandais semblent avoir eu quelques difficultés avec le français : le titre courant de gauche varie, de « Les Propriétés Remarquables » (p. 10–16) à « Les Propriétés Remarquables » (p. 18), « La Propriétés Remarquables » (p. 20) puis « Propriétés Remarquables » (p. 22–26) et retour.

Nous utilisons l'édition de 1758 : J. H. Lambert, *Les propriétés remarquables de la route de la lumière*, H. Scheurleer F. Z. & Compagnie, La Haye, 1758.



#### 49 Les Propriétés Remarquables



### SECTION II.

Des Refractions Astronomiques, de la manie-  
re de les déterminer par approximation  
aussi exactement que l'on voudra, &  
de leur rapport à divers au-  
tres Problèmes.

#### EXPOSITION DU CAS.

§. 69. IL ne s'agit ici que d'appliquer la 3<sup>e</sup>. fi-  
gure à notre terre & à son atmosphère. Soit donc  
C son centre & celui des couches de l'air : CA  
le demi-diamètre, le cercle tiré par A sa surfa-  
ce, BM une couche de l'air, bn une autre, qui  
lui est infiniment proche ; n MA un rayon de lu-  
mière qui y passe, & qui tombe en A : AJ sa tou-  
chante en A, & JAB sa distance apparente du  
Zenith. Ceci posé, les autres lignes ont la mê-  
me signification & dénomination, que nous leur  
avons données ci-dessus (§. 30. 58.) Ainsi l'an-  
gle TGA sera la réfraction que la lumière souf-  
fre en parcourant la partie MA de sa route par  
l'air, & si AM est la route entière, cet angle se-  
ra la réfraction totale.

[7] Source : Google Books

## 2. Résumé et commentaires

Dans son Avant-propos (p. 3–8), Lambert présente l'optique comme étant constituée de deux parties : l'optique géométrique (quoiqu'il n'utilise pas cette appellation), et la photométrie — donc il occulte les interférences (découvertes par Boyle et Hooke en 1664–1665) et la diffraction (par Grimaldi à la même époque). Selon lui, l'optique géométrique a « été [portée] à un si haut point de perfection, qu'on n'y trouve presque plus qu'à glaner. [...] » : bel exemple de mentalité fin de siècle, qui concorde avec l'étude menée par Rescher [8, chapitre 2 et figure 1 p. 36]

sur l'évolution temporelle du « degré de complétude perçue » concernant les connaissances scientifiques : il est passé par trois maxima successifs très nets, vers 1750 (cf. Diderot, Kant, Lambert), vers 1900 (cf. Kelvin) et vers 1975 (cf. Feynman, Wigner et Stent). Néanmoins, Lambert trouve quand même un dernier centre d'intérêt en optique géométrique, car quelques lignes plus loin, il écrit :

Le seul cas, qui sembloit encore moins examiné, c'est celui, où la lumière passe successivement par plusieurs milieux sphériques & concentriques. J'ai essayé dans ce traité de suppléer à ce défaut. On y verra, que ce Cas n'est ni si compliqué, ni si difficile, qu'il

paroit du premier abord, & qu'il y a moyen d'aller plus loin qu'on n'a été. On fait qu'il existe dans l'Atmosphère, & que les réfractions des Astres & des objets terrestres en dépendent. Ce seul point suffit, pour le rendre intéressant & digne de la peine, que les plus grands Géomètres se sont donnée, pour le déterminer dans cette vue.

[7, p. 3–4] Source : Google Books

Tel est son but : faire progresser l'étude théorique des rayons dans un milieu à symétrie sphérique (de centre  $C$ ), et appliquer les résultats obtenus aux réfractions astronomique et terrestre respectivement — i.e. affectant la vision d'un objet extra-atmosphérique (resp. terrestre). Lambert montre clairement qu'il va faire œuvre de mathématicien plus que de physicien ; il ne traite pas de la relation entre la longueur d'onde (d'ailleurs il n'aurait sans doute pas utilisé cette notion, peu en vogue pour la lumière à l'époque, mais il aurait pu considérer la couleur), l'indice de réfraction de l'air et sa densité, ni de la variation de celle-ci avec la température et la pression dans l'atmosphère : « en l'omettant, mon traité est purement optique & mathématique, c'est à dire, démonstratif. En admettant [d'aborder les lois régissant] les densités, il auroit tenu à des hypothèses Physiques [...] Voici tout ce que j'avois à dire préalablement sur ce petit ouvrage. » [7, p. 4] Il n'indique pas son plan, mais consacre les quatre pages restantes de l'avant-propos à présenter la suite de ses projets, cohérente avec son idée d'avoir achevé le développement de l'optique géométrique (ce à quoi les travaux de Gauss, Seidel et Abbe au XIX<sup>e</sup> siècle apporteront un démenti flagrant, et même déjà ceux, longtemps méconnus [9, 10], de Clairaut et d'Alembert dans les années 1760 sur les aberrations) : « L'autre partie de l'Optique, dont j'ai principalement dessein de parler, c'est la *Photométrie*. » Il annonce alors sa future grande publication, dans laquelle il veut donner une vision unifiée de la photométrie, après avoir reconnu quelques mérites à ses prédécesseurs : « La Photométrie n'est pas un país entièrement inculte. Des savans fort célèbres y ont travaillé. Mr. Bouguer en a donné un tres bel Essai sur la Gradation de la lumiere. »

Lambert a donc prévenu qu'il abordait le sujet de son présent livre [7] en mathématicien ; alors dès la fin de l'avant-propos, la suite (sauf la dizaine de pages finales) se présente sèchement comme une succession de théorèmes (numérotés), démonstrations, corollaires numérotés pour chaque théorème, remarques, problèmes numérotés et solutions, expériences (rares), etc. C'était courant aux XVII<sup>e</sup> et XVIII<sup>e</sup> siècles, où survivait l'idée aristotélicienne et scolastique selon laquelle la connaissance véritable du monde ne peut venir que de la logique, relayée par la raison chez Descartes, puis le formalisme de Newton qui voulait surpasser celui de Descartes — mais nous verrons que cette rigueur affichée n'est pas exempte de failles.

Aussi la section I (p. 9–39) de son traité est-elle consacrée uniquement à des théorèmes de géométrie appliqués à « la route de la lumière » ou aux « raïons visuels » et à leur « raïon de courbure » (nos  $y$  mouillés étaient des  $\tilde{y}$ ). Un passage essentiel est son « PROBLÈME I. » (p. 34–35), où il fait exprimer (voir le paragraphe 3 du présent article) l'élément différentiel de réfraction que nous notons  $d\chi$  ; Lambert semble le premier à utiliser ici la fonction tangente, ce qui lui permet une écriture qui deviendra classique, étant plus concise que celle donnée par Bouguer (voir l'expression (3) de l'article [11] dans ce numéro spécial, et [12, p. 46]) :

$$d\chi = dn / \sqrt{(n/\sin \alpha)^2 - n^2} = (\tan \alpha) dn / n, \quad (1)$$

après avoir transcrit depuis les notations de Lambert (voir la table 1) vers celles des articles [13, 14] de ce numéro spécial, où  $n$  désigne l'indice de réfraction de l'air en un point courant  $M$  du rayon lumineux (R) considéré, et  $\alpha$  l'angle entre  $CM$  et (R).

L'étude explicite de la réfraction astronomique ne commence qu'à la section II (p. 40–63). Lambert part de l'intégrale de  $d\chi$ , qui donne la valeur de la réfraction astronomique  $\chi_S$  vue par un observateur  $S$ ; à la p. 45, il montre comment développer cette intégrale en série entière de  $\sin Z'$  (où  $Z'$  désigne la distance zénithale apparente) puis de  $\tan Z'$  — voir le paragraphe 3.

La troisième et dernière section (p. 64–116) s'intéresse aux rayons circulaires, puis à la réfraction terrestre : les rayons lumineux pertinents pour ce sujet sont quasi horizontaux, leur rayon de courbure ne varie qu'au second ordre en fonction de leur petite inclinaison, et Lambert les assimilera à des arcs de cercle.

Il commence par estimer la valeur de ce que l'on appelle maintenant le coefficient de réfraction au niveau de  $S$  (i.e. le quotient  $\kappa_S$  de la courbure des rayons horizontaux en  $S$  par la courbure méridienne de la Terre — voir le sous-paragraphe 7.1 de [14]), à partir de la dépression de l'horizon marin — i.e. l'angle  $\delta$  mesurant, pour  $S$  ayant une élévation  $E$  au-dessus de la mer, la « bassesse apparente de l'horizon de la Mer » [15, p. 141] par rapport à l'horizontale. Elle a été mesurée depuis divers lieux élevés lors de la campagne géodésique de Jean-Dominique et Jacques Cassini, qui savaient au moins depuis les années 1690 (voir la fin du sous-paragraphe 2.1 de [13]) que la courbure des rayons lumineux intervient, mais ils ne savaient pas comment la mettre en équations pour calculer  $\delta$  théoriquement. Ils ont trouvé notamment, le 12 mars 1701,  $\delta \cong 50' 20''$  « au pied de la Tour de la Massane » [15, p. 141], à 795 m d'altitude; Lambert l'appelle « le clocher à Massanne » et, connaissant la valeur du rayon terrestre  $r_S - E \cong r_S$  (la campagne géodésique 1669–1670 de l'Abbé Picard avait permis de l'estimer précisément à 6 371,9 km), il en déduit  $\kappa_S \cong 1/7,06$  (p. 70–71), ce qui est cohérent avec  $E \cong 408,3$  toises selon Lambert au lieu de 408,5 toises selon les Cassini [7, p. 111]. Cependant il semble ignorer qu'une trentaine d'années auparavant, Bouguer avait déjà utilisé cette mesure des Cassini (pour justifier la nécessité de prendre en compte la réfraction terrestre introduite par lui [12]), et que  $\kappa_S$  s'identifie à l'exposant du modèle de Bouguer estimé par ce dernier à  $3\,300/25\,758$  (soit  $1/7,81$  — voir le sous-paragraphe 3.5 de [11]) ; précisons que Bouguer n'assimile pas les rayons lumineux à des arcs de cercle, et que ses chiffres ne viennent pas de visées terrestres mais astronomiques.

Puis Lambert démontre (cf. « THÉORÈME XXX. », p. 77) que la réfraction terrestre ne peut que *translater* l'image des objets verticalement vers le haut ; mais il omet de rappeler les hypothèses de ce théorème, surtout celle posée 10 pages plus tôt et sur laquelle était déjà fondé son calcul de  $\kappa_S$  : la « déviation » du rayon lumineux, quasi horizontal, par rapport à celle d'un arc de cercle osculateur en un de ses points, est toujours négligeable parce

**que si cette déviation devoit être sensible, il faudroit que la courbure de la trajectoire crût ou décroût avec une vitesse extrême, ce qui est contre toute expérience. Ainsi nous sommes en droit de supposer que la route de la lumière dans deux couches assez voisines, est circulaire.**

[7, p. 67] Source : Google Books

Donc Lambert ignore visiblement le phénomène de mirage ainsi que les multiples autres effets de réfraction sortant du cas standard (voir l'article [16] de ce numéro spécial) ; il fournit ainsi

un bel exemple du mécanisme psychologique d'exposition sélective aux faits, probablement par excès de confiance (typiquement scolastique) envers les idées *a priori*.

Ce décalage de l'image vers le haut influe naturellement sur  $\delta$  et sur la distance  $L$  de l'horizon ; Lambert les exprime (« PROBLÈME IX. » et « PROBLÈME X. », p. 78–81) en fonction de l'élévation  $y$  relative au rayon terrestre, et d'un paramètre  $R$  qui n'est autre que l'inverse de  $\kappa_S$ , qu'il ne nomme pas spécifiquement. Il observe (p. 82) que, pour une élévation  $E$  de  $S$ , la dépression (standard)  $\delta$  de l'horizon est quasiment donnée par  $\delta \cong 1,0' \sqrt{E/1 \text{ pied}}$  (avec  $\kappa_S \cong 0,17$ ). Attention : le pied utilisé ici est celui de France, correspondant à 324,839 mm de 1668 à 1799, et non pas le pied anglophone actuel (304,8 mm). Ses formules, obtenues géométriquement, sont exactement les formules (6) et (12) de l'article [17] de ce numéro spécial où elles sont obtenues analytiquement de façon à les généraliser ; elles sont différentes de celles de Bouguer, qui utilisait une autre modélisation des rayons lumineux, et qui s'intéressait surtout à  $\delta$  pour perfectionner la navigation astronomique — dont Lambert ne parle pas.

Ce qui intéresse Lambert pour finir, c'est la géodésie. En guise d'entrée en matière, il nous avertit :

## REMARQUE.

**§. 120. Mr. J. Cassini, a observé l'abaissement apparent de l'horison de la mer sur diverses hauteurs, qu'il avoit mesurées géométriquement. Ces observations se trouvent dans son *Traité sur la Grandeur & la Figure de la Terre P. I. Cb. 10.* Nous verrons ci-dessous, que la plupart de ces hauteurs souffrent une correction considerable parcequ'elles sont calculées sans la refraction. Voici donc les hauteurs corrigées, & l'abaissement observé.**

[7, p. 82] Source : Google Books

Puis il donne les résultats importants qui font intervenir la courbure des rayons lumineux ; il les répartit entre un théorème, 3 corollaires et 4 problèmes, dont voici l'énoncé du dernier (p. 96–99) :

## PROBLÈME XIV.

**§. 135. L'angle de l'elevation apparente d'une montagne & sa distance borizontale etant donnés, trouver sa hauteur.**

[7, p. 96] Source : Google Books

Il est suivi de 11 pages d'applications numériques, qui culminent avec le tableau ci-dessous où on voit l'importance de la correction due à la réfraction.



Noms des Montagnes.	Hauteur suivant Mr. Cassini en toises.	Hauteur corrigée en toises.	Hauteur du Baromètre.
			'' ''
Le Canigou. . .	1441,5	1424,5	20 : 0 $\frac{1}{2}$
Le Mouffet. . .	1253,0	1228,0	20 : 10 $\frac{2}{3}$
La Matelotte. . .	335,5	335,4	
La Maffanne. . .	408,5	408,3	25 : 4
St. Elme. . .	101,5	101,5	
Puy de Bugarac. . .	650,5	628,4	24 : 1 $\frac{1}{2}$
St. Jaques à Perpignan. . .	41,5	36,5	
Tautavel. . .	258,0	245,2	
Magrin. . .	77,0	157,7	
Puy - Laurent. . .	97,0	177,2	
Rupeyroux. . .	407,5	446,3	25 : 1 $\frac{1}{2}$
Plomb de Cantal. . .	993,0	982,2	
Puy de Violent. . .	860,0	846,8	
Rodes. . .	318,5	361,8	25 : 8
La Bastide. . .	431,5	438,6	
La Courlande. . .	846,0	801,3	23 : 2
La Coste. . .	859,0	807,4	23 : 2
Le Mont d'or. . .	1048,0	1001,3	
Le Lage-Chevalier. . .	332,0	338,3	
Le Puy de Dome. . .	817,0	789,1	23 : 2 $\frac{1}{2}$
Le St. Barthelemi. . .	1189,2	1225,4	21 : 0 $\frac{1}{2}$

[7, p. 111] Source : Google Books

Puis le livre s'achève sur une remarque et deux tables concernant l'altimétrie.

Pour des détails complémentaires, voir A. T. Young. (Page consultée le 12 janvier 2022), *Annotated bibliography of mirages, green flashes, atmospheric refraction, etc.*, [En ligne]. Adresse URL : <https://aty.sdsu.edu/bibliog/bibliog.html>.

### 3. Présentation illustrée de quelques idées fondamentales

Un point clé du cheminement de Lambert consiste à exprimer l'élément différentiel de réfraction  $d\chi$ .

#### *Correspondance des notations*

L'appellation d'indice de réfraction n'existait pas encore à l'époque : c'était le rapport des sinus de « l'angle d'inclinaison » et de « l'angle brisé », où ces sinus étaient vus comme des rapports de longueurs de côtés de triangles rectangles. Donc plusieurs grandeurs introduites par Lambert sont homogènes à une longueur de référence  $L$  constante (voir la Table 1).

TABLE I. Notations

Notations de Lambert [7]	Notations de Dettwiller [13, 14] dans ce numéro de <i>C. R. Phys.</i>	Indications [et unités usuelles]
v	$nL$	Indice de réfraction multiplié par une longueur de référence $L$ [m]
dz	$d\chi = ds/\mathcal{R}$	Réfraction élémentaire — correspondant au déplacement élémentaire d'un point courant $M$ sur un rayon lumineux (R), de rayon de courbure $\mathcal{R}$ [°, ', '' ]
z	$\chi_S$	Réfraction vue par l'observateur $S$ [°, ', '' ]
$\omega$	$\alpha$	Angle entre (R) et le rayon vecteur de $M$ , d'origine au centre $C$ de la Terre [°, ', '' ]
r	$nL/\sin \alpha$	Grandeur intervenant notamment dans des intégrales (en haut de [7, p. 46] par exemple) [m]
$\gamma$	$Z'$	Distance zénithale apparente [°, ', '' ]
P	$nL/\sin Z'$	Variable des intégrales du haut de [7, p. 46] [m]
R	$1/\kappa_S$	Inverse du coefficient de réfraction au niveau de l'observateur $S$
y	$E/r_S$	Élévation de $S$ divisée par $CS$

Pour obtenir  $d\chi$ , une façon de procéder consiste à utiliser le rayon de courbure  $RM$  du rayon lumineux en  $M$  (voir la *Fig. III* de [7]), que Lambert commence à considérer à partir de son « THÉORÈME XI. » [7, p. 23] Quelques pages plus loin, il propose le « PROBLÈME I. » qui est le seul de la première section.

### PROBLÈME I.

**§. 59. Trouver l'équation différentielle pour les réfractions.**

#### SOLUTION.

Exprimant le rayon  $CA$  par l'unité, de sorte que  $CA = 1$ , soit la distance  $CM = r$  l'angle  $BAG = DAC = \gamma$ , l'arc  $AM = x$ ,  $Mn = dx$

$$\begin{aligned} TMC &= \omega, \\ ACM &= s, & MCm &= ds \\ TGA &= z, & TMt &= dz \end{aligned}$$



Contrairement à ce que la lecture de Lambert [7] pourrait laisser croire, l'obtention des expressions de (1) ne nécessite pas de supposer le milieu à symétrie sphérique — voir le paragraphe 2 de [14].

Dans la deuxième section, Lambert s'attaque au traitement de l'intégrale de réfraction. Selon Houzeau [18], c'est à lui que l'on doit l'introduction [7, p. 45] de la célèbre technique du développement en série dans ce cadre ; en fait cela avait déjà été expliqué par Euler en 1754 [19] dans un article qui a suscité toutes sortes de controverses [20] — notamment des critiques acerbes de la part de Kramp en 1799 [21] mais qui l'avait mal lu, comme l'a montré Plana en 1828 [22].

Il s'agit ici d'un développement binomial (dont le rayon de convergence est donc 1 [23, p. 212–213]) : celui de  $(1 + x)^{-1/2}$ . Comme on peut le voir ci-dessous, cela commence p. 45, par l'énoncé très aride du « Problème II ». Dans sa solution, Lambert applique d'abord le développement binomial pour exprimer

$$\frac{1}{\sqrt{(n/\sin \alpha)^2 - n^2}} = \frac{\sin \alpha}{n} (1 - \sin^2 \alpha)^{-1/2}, \tag{2}$$

et il trouve que l'intégration terme à terme de ce développement donne  $\chi_S$  sous la forme d'une série entière de  $\sin Z'$  dont les coefficients ne dépendent que du profil d'indice dans l'atmosphère — cf. *infra*.

### PROBLÈME II.

§. 76. *Exprimer les refractions par une suite.*

#### SOLUTION.

Par le Problème I. ( §. 59.) on a

$$dz = dv : \sqrt{(rr - vv)}$$

Or en resolvant cette expression par la formule connue des binomes, on trouvera

$$dz = dv \left( \frac{1}{r} + \frac{1 \cdot v^2}{2 \cdot r^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot v^4}{2 \cdot 4 \cdot r^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot v^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot r^7} + \&c. \right)$$

Or la perpendiculaire  $v$  est en raison composée du sinus de l'angle  $DAC$  & d'une fonction de la hauteur  $CM$  (§. 67.) Faifant donc cette fonction =  $P$ , en forte que  $v = P \cdot \sin \gamma$ , on aura  $dv = dP \cdot \sin \gamma$ , donc en substituant, la suite trouvée se transforme en

$$dz = \frac{dP}{r} \cdot \sin \gamma + \frac{1 \cdot P^2 dP}{2 \cdot r^3} \cdot \sin \gamma^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot P^4 dP}{2 \cdot 4 \cdot r^5} \cdot \sin \gamma^5 + \&c.$$

& en prenant les intégrales

[7, p. 45] Source : Google Books

(les exposants successifs de  $\sin \gamma$  sont 1, 3, 5, etc.)

### 46 Les Propriétés Remarquables

$$z = \sin. \gamma. \int \frac{dP}{r} + \frac{\sin. \gamma^3}{2} \int \frac{P^2 dP}{r^3} + \frac{1.3. \sin. \gamma^5}{2.4.} \int \frac{P^4 dP}{r^5} + \&c.$$

Or comme les intégrales de tous les termes de cette suite dependent simplement de la hauteur de l'atmosphère, & qu'elles sont indépendantes de l'angle  $\gamma$ , il est evident qu'on peut les considerer comme des coefficients, & que par conséquent la constitution de l'atmosphère restant la même, les refractions qui répondent à chaque distance des astres du Zenith, seront exprimées par la suite

$$z = A \sin. \gamma + \frac{1}{2} B. \sin. \gamma^3 + \frac{1.3}{2.4} C \sin. \gamma^5 + \&c.$$

dont les termes croissent suivant les puissances impaires du sinus de la distance des astres du Zenith.

#### REMARQUE.

§. 77. Cette suite n'est pas fort convergente, & il faut plusieurs termes, pour définir les refractions des hauteurs moins grandes.

Car la fonction  $P$  de même que le rayon  $r$  variant fort peu, toutes les intégrales seront assez peu différentes l'une de l'autre, de sorte que la convergence des Coefficiens n'est gueres plus grande que celle de la suite  $1, \frac{1}{2}, \frac{1.3}{2.4} \&c.$

Afin donc de transformer la suite trouvée en une autre, qui soit plus convergente, il faut exprimer les refractions par une suite dont les termes procedent par les puissances impaires des tangentes de l'angle  $\gamma$ . Ce qui peut toujours se faire. On trouvera donc

[7, p. 46] Source : Google Books

Le fait que les intégrales du haut de la p. 46 de Lambert ne dépendent que du profil d'indice dans l'atmosphère se comprend à l'aide de l'invariant de Bouguer [12] (que Lambert n'écrit jamais sous forme de formule, et ne cite jamais — voir le sous-paragraphe 4.2 de [14]), car celles-ci s'écrivent (avec nos notations des articles [13, 14])

$$\begin{aligned} \int_1^{n_s} \frac{(nL/\sin Z')^{2p}}{(nL/\sin \alpha)^{2p+1}} d\left(\frac{nL}{\sin Z'}\right) &= \int_1^{n_s} \frac{1}{n} \left(\frac{nr \sin \alpha}{nr \sin Z'}\right)^{2p+1} dn \\ &= \int_\infty^{r_s} \frac{1}{n} \left(\frac{n_s r_s}{nr}\right)^{2p+1} \frac{dn}{dr} dr > 0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3)$$

Lambert obtient donc  $\chi_S/\sin Z'$  sous la forme d'une série entière de  $\sin^2 Z'$ , à termes tous positifs si  $n$  est une fonction décroissante de  $r$ , comme dans le cas standard.

Il est vrai que la décroissance de « la suite  $1, 1/2, (1 \cdot 3)/(2 \cdot 4), \&c.$  », i.e. celle de terme général  $(2p-1)!!/(2^p p!)$  (où  $N!$  et  $N!!$  désignent respectivement la factorielle et la double factorielle de  $N$ ) est lente, car au voisinage de l'infini il est équivalent à  $1/\sqrt{\pi p}$ , en vertu de la formule de Stirling [24, p. 2868].

**De la Route de la Lumiere. 47**

$$z = A \operatorname{tang.} \gamma - \frac{1}{2} A \operatorname{tang.} \gamma^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} A \operatorname{tang.} \gamma^5 - \&c.$$

$$+ \frac{1}{2} B \operatorname{tang.} \gamma^3 - \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 4} B \operatorname{tang.} \gamma^5 + \&c.$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} C \operatorname{tang.} \gamma^5 - \&c.$$

Or si tous les coefficients  $A, B, C, D, \&c.$  étoient égaux entre eux, tous les termes de cette suite outre le premier s'anéantiroient, & on auroit

$$z = A. \operatorname{tang.} \gamma.$$

Mais comme ces constantes  $A, B, C \&c.$  ne diffèrent que très peu entre elles, il s'en suit, que cette série est infiniment plus convergente que la précédente, puisque le coefficient du premier terme est le même dans l'une & dans l'autre suite, & que les tangentes d'un angle croissent bien plus fortement que les sinus &c.

**COROLLAIRE.**

§. 78. On pourra donc exprimer les refractions par la suite

$$z = a \operatorname{tang.} \gamma - b. \operatorname{tang.} \gamma^3 + c. \operatorname{tang.} \gamma^5 - \&c.$$

dont il faudra très peu de termes, pour les définir, si on en excepte les plus horizontales, parce que la tangente de l'angle  $\gamma$  devenant alors fort grande, la suite deviendra divergente.

[7, p. 47] Source : Google Books

En haut de sa p. 47, Lambert réutilise la même série binomiale, dont le rayon de convergence est 1, pour écrire

$$\sin Z' = (\tan Z') (1 + \tan^2 Z')^{-1/2} = (\tan Z') \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \tan^{2p} Z'. \tag{4}$$

Par substitution de cette seconde série (4) à  $\sin Z'$  dans la série précédente, il obtient donc  $\chi_S/\tan Z'$  sous la forme d'une série entière de  $\tan^2 Z'$ , alternée, et dont les coefficients tendent plus vite vers zéro. Si on ignorait que l'étude des séries n'en était en 1758 qu'à ses balbutiements, on pourrait s'amuser de la faiblesse de la justification de cette accélération de convergence, surtout par contraste avec la rigueur apparente de l'ensemble du livre présenté comme un austère traité de mathématiques ; mais il faut plutôt, au contraire, saluer chez Lambert l'irruption de l'idée féconde, quoiqu'encore peu formalisée, selon laquelle deux séries exprimant la même grandeur ( $\chi_S$ ) n'ont pas forcément le même intérêt ni la même efficacité.

Pendant cette première méthode, pour obtenir  $\chi_S$  sous la forme d'une série entière de  $\tan Z'$ , restait très lourde. Ce n'est donc peut-être pas un hasard si Ernst Kummer, un autre mathématicien intéressé par les séries et inventeur d'un procédé d'accélération de leur convergence [25], écrira lui aussi sur les propriétés des rayons lumineux dans un milieu à symétrie sphérique — voir [17] dans ce numéro spécial. La technique des développements de Lambert sera améliorée au siècle suivant : au sous-paragraphe 5.2 de [14], on a vu comment obtenir directement le développement en  $\tan Z'$ , d'une part sans substitution de développement en série entière dans un autre, et d'autre part de façon que la somme des premiers termes soit tout de suite une bonne approximation de  $\chi_S$  (sauf pour  $Z'$  trop proche de  $90^\circ$ ), car on peut s'arranger pour que le terme devant  $\tan^2 Z'$  dans la racine carrée soit très petit sur l'essentiel de l'atmosphère.

## Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

## Remerciements

L'auteur exprime sa reconnaissance au Dr. Andrew Young pour la mise à disposition de sa fabuleuse bibliographie en ligne (citée à la fin du paragraphe 2), ainsi que pour ses réponses très attentionnées et consistantes, à des questions précises. Il remercie aussi le Dr. Siebren van der Werf pour ses commentaires, et pour lui avoir fourni la Fig. III de [7] qui lui manquait cruellement. Enfin, il exprime sa gratitude à Julien Desmarests (du service des publications de l'Académie des sciences) pour son précieux travail technique améliorant la lisibilité des extraits de textes anciens.

## Références

- [1] J. H. Lambert, *Photometria, sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae*, Eberhard Klett, Augsbourg, 1760.
- [2] P. Bouguer, *Essai d'Optique sur la Gradation de la Lumière*, Claude Jombert, Paris, 1729.
- [3] H. N. Russell, « The light variations of asteroids and satellites », *Astrophys. J.* **24** (1906), p. 1-18.
- [4] M. Minnaert, « Photometry of the Moon », in *Planets and Satellites* (G. P. Kuiper, B. Middlehurst, édés.), Chicago University Press, Chicago, 1961, p. 213-248.
- [5] F. Zöllner, *Photometrische Untersuchungen*, Engelmann, Leipzig, 1865.
- [6] A. Searle, « The meteoric theory of the gegenschein », *Observatory* **22** (1899), p. 310-311.
- [7] J. H. Lambert, *Les propriétés remarquables de la route de la lumière*, H. Scheurleer F. Z. & Compagnie, La Haye, 1758.
- [8] N. Rescher, *Le progrès scientifique – Un essai philosophique sur l'économie de la recherche dans les sciences de la nature*, PUF, Paris, 1993.
- [9] H. Boegehold, « Die Leistungen von Clairaut und D'Alembert für die Theorie des Fernrohrobjektivs und die französischen Wettbewerbsversuche gegen England in des letzten Jahrzehnten des 18. Jahrhunderts », *Z. Instrument.* **55** (1935), p. 97-111.
- [10] F. Ferlin, « New insights into major theoretical research in optics in the Age of Enlightenment », *Centaurus* **59** (2017), p. 308-319.
- [11] L. Dettwiller, « L'invariant de Bouguer et ses conséquences : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 415-452.

- [12] P. Bouguer, *De la Méthode d'Observer Exactly sur Mer la Hauteur des Astres*, Claude Jombert, Paris, 1729.
- [13] L. Dettwiller, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 13-62.
- [14] L. Dettwiller, « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 63-102.
- [15] J. Cassini, *Traité de la grandeur et de la figure de la Terre*, Pierre de Coup, Amsterdam, 1723.
- [16] L. Dettwiller, « Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 103-132.
- [17] L. Dettwiller, « La discussion par Kummer d'une quadrature sur la réfraction astronomique : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 503-525.
- [18] J. C. Houzeau, *Vade-mecum de l'astronome*, F. Hayez, Bruxelles, 1882.
- [19] L. Euler, « De la réfraction de la lumière en passant par l'atmosphère selon les divers degrés tant de la chaleur que de l'élasticité de l'air », *Hist. Acad. Roy. Sci. Belles-Lettres Berlin, Année MDCCLIV* **10** (1756), p. 131-172.
- [20] C. Bruhns, *Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwicklung*, Voigt & Günther, Leipzig, 1861.
- [21] C. Kramp, *Analyse des Réfractions Astronomiques et Terrestres*, Dannbach, Strasbourg, an VII – et Schwikkert, Leipzig, 1799.
- [22] J. Plana, *Observations astronomiques faites en 1822, 1823, 1824, 1825 à l'Observatoire Royal de Turin – précédées d'un mémoire sur les Réfractions astronomiques*, Imprimerie Royale, Turin, 1828.
- [23] R. Couty, J. Ezra, *Analyse*, t. 2, 4<sup>e</sup> éd., A. Colin, Paris, 1976.
- [24] E. W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, 2<sup>e</sup> éd., Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [25] E. E. Kummer, « Eine neue Methode, die numerischen Summen langsam convergirender Reihen zu berechnen », *J. für die Reine und Angew. Math.* **16** (1837), p. 206-214.







---

Astronomie, atmosphères et réfraction / *Astronomy, Atmospheres and Refraction*

# Did Monge really explain inferior mirages?

## *Monge a-t-il vraiment expliqué les mirages inférieurs ?*

Andrew T. Young<sup>\*, a</sup>

<sup>a</sup> Astronomy Department, San Diego State University, San Diego, California,  
92182-1221, USA

E-mail: [ATYoung@sdsu.edu](mailto:ATYoung@sdsu.edu) (A. T. Young)

**Abstract.** Gaspard Monge has received undue credit for his observations of mirages in 1798 in Egypt. He did not discover inferior mirages; they were known to sailors before 1687, and the term *mirage* had entered the French literature in 1753. Monge's "total reflection" explanation for them was seriously flawed; it had already been considered and rejected by Gruber and by Büsch, and was promptly criticized by others. Yet he continues to be given credit for the first scientific explanation of mirages; and his false total-reflection mechanism survives today in some textbooks. Apparently this is due to its superficial simplicity, which appeals to novices.

**Résumé.** Gaspard Monge a reçu une reconnaissance imméritée pour ses observations de mirages en 1798 en Egypte. Il n'a pas découvert les mirages inférieurs : avant 1687 ils étaient déjà connus des marins, et le terme *mirage* fut introduit dans les publications françaises à partir de 1753. L'explication par Monge en terme de réflexion totale est gravement erronée ; elle avait été déjà examinée puis rejetée par Gruber et par Büsch, et promptement critiquée par d'autres. Cependant, on continue d'attribuer à Monge le mérite de la première explication scientifique des mirages ; et son idée fautive de réflexion totale survit aujourd'hui encore dans certains manuels. Apparemment, cela vient de son indue simplicité, qui n'est qu'un vernis attirant pour les novices.

**Keywords.** Monge, mirages, refraction, meteorological optics, apparent horizon, horizon dip, history of optics.

**Mots-clés.** Monge, mirages, réfraction, optique météorologique, horizon sensible, dépression de l'horizon, histoire de l'optique.

Published online: 20 December 2022, Issue date: 11 August 2023

## 1. Introduction

In 1798, Gaspard Monge, a mathematician acquainted with physics and engineering, accompanied Napoleon Bonaparte's expedition to Egypt. During his time there, he (along with many of the French soldiers, as well as the scientists in the expedition) noticed the common appearance of water on the desert sand. On 28 August, a month after arriving in Cairo, Monge gave a talk [1, 2] on this phenomenon, and later published a paper [3, 4] on this subject, attributing the word *mirage* to sailors in the titles of these publications.

---

\* Corresponding author.

Neither the word nor the phenomenon was previously unknown. The optical mechanism (total internal reflection) that Monge used to explain the phenomenon had already been considered, and rejected, by people who (unlike Monge) had performed experiments to help understand it. His mirage papers contain neither equations nor numbers, unlike his usual mathematical theses; nor even a ray diagram, though Monge was famous for his skills in geometry and mechanical drawing. His explanation was promptly dismissed by scientists who studied optics, and has continued to be criticized in expert reviews of the subject.

Nevertheless, Monge is still associated with “the mirage of the desert”. One readily finds books — and, of course, websites — repeating his claim that it is caused by total internal reflection, or saying that Monge’s was “the earliest attempt to explain the mirage,” or even that “the term ‘mirage’ was coined by Gaspard Monge” [5], or that he was the first person to explain it correctly. But none of these is true. Why do such errors persist?

Let’s consider how this mirage came to be understood.

## 2. The word

Long before mirages were studied in deserts, they were a common sight at sea. The French seamen had a phrase that was common enough to appear in a dictionary of nautical terms [6] as early as 1687: “*La terre se mire.*” The definition translates as “This is said when the vapors make the lands appear as if they were raised above the low clouds.” (This was at a time when refraction and other atmospheric effects were routinely attributed to unspecified “vapors” near the horizon.)

A similar definition was offered in a French/Dutch dictionary [7] published in 1702. From its second edition (1736), Le Gentil [8] took the description of this phrase for use in his last published work, in 1789, which has been cited by many later writers.

Meanwhile, the sailors had turned the verb phrase into a noun. By 1753 it had come to the attention of the astronomer Joseph-Bernard de Chabert, who was sent to survey the French settlements in what is now Nova Scotia. His official report [9] says that “I was busy three days in mapping operations, ... in which I was often stopped by the effect of *mirage*. This is what many sailors call a change that sometimes occurs in the appearance of coasts a little way off, because they attribute it to the reflection of the sky, which is painted in the sea below the coast, making this coast seem raised in the sky. Instead, this phenomenon seems to come from the large refraction suffered by objects seen through very dense vapors: this density not being at all equal in the whole extent of a coast, the diversely bent rays rendering it unrecognizable. This is the reason given by the late M. Maraldi, in the Memoirs of the Academy for the year 1722.” (In the abstract of de Chabert’s work given in the *Histoire* [10], the term “mirage” is attributed to “the inhabitants” rather than sailors.)

Evidently, “mirage” had been used for half a century or more, mostly by mariners, before Monge used it.

## 3. The observations

Mirages had been seen in antiquity, but the ancient descriptions are vague and lack specific details. In 1670, Jean Picard [11] went to Uraniborg to determine the position of Tycho’s instruments. One day he found that an island near Copenhagen that he had been using as a reference point unexpectedly appeared to be floating in the sky; he attributed this to the sea being so flat that its surface acted like a mirror. This is clearly an observation of the inferior mirage, but Picard did not realize that atmospheric refraction was the cause.

However, half a century later, J. P. Maraldi [12] studied a series of observations made from a private observatory in Genoa, which showed mirages of features on Corsica, some 260 km away. “From the coasts of Genoa and Provence, one sees the mountains of Corsica, which sometimes appear raised above the apparent horizon, as if they had emerged from the water, and which disappear at other times in a sky just as pure and clear, as if they had been plunged into the sea.” He also described the times of the day and year at which such observations could best be made, adding that “All these appearances are made on the coast of Genoa by an observer who is always in the same place and at the same height above the surface of the sea.”

He then considers the idea that these variations might be due to the rise and fall of the sea with the tides, but rejects it: “But this explanation is not the most natural, and it is more probable to attribute these appearances to refractions, and to suppose that the visual rays which go from that island to the observer who is on the opposite coasts are refracted differently in the vapors that are between the two . . . .

“This explanation seems all the more probable, as it is equally suited to account for the similar appearances that occur in the middle of the land; as one has noticed for a long time at the Observatory that houses seven or eight leagues to the north, which are hidden during the day by others that are closer, and placed at only half a league distance, often appear in the morning at sunrise, raised above those that are close. The distant houses sink little by little, until they are completely hidden by the nearby ones. This appearance is thus an obvious proof that the rays are curved differently in the air according to the different densities of the air, or the different quantity of vapors through which the rays pass. . . . The appearance of Corsica seen from Genoa, being similar to that which we have reported, can be explained in the same way.”

Then follows a detailed account of the survey of Corsica and other nearby places, including measurements of the varying dip of the sea horizon. The diurnal changes in terrestrial refraction correspond to looming and sinking, and are much more detailed than those described in Mariotte’s 1672 treatise on levelling [13] or Perrault’s “De l’origine des fontaines” (1674) [14].

Similar observations were made by Thomas Shaw [15] in the Sinai desert, some 60 years before Monge went to Egypt: “Where any Part of these Deserts is sandy and level, the *Horizon* is as fit for astronomical Observations as the Sea, and appears, at a small Distance, to be no less a Collection of Water [which] always advances, about a Quarter of a Mile before us, whilst the intermediate Space appears to be in one continued Glow, occasioned by the quivering undulating Motion of that quick Succession of Vapours and Exhalations, which are extracted by the powerful Influence of the Sun.”

A very detailed observation of an inferior mirage was recorded by Boscovich and Maire [16], whose triangulation along the beach near Rimini in July, 1752, was interrupted by the disappearance of a target 8 miles away. They found that the mirage varied with the height of the eye, so that by climbing a ladder, the view of the target could be regained. By raising their quadrant onto a wagon, they were able to finish their measurements. This work was translated into French in 1770 [17].

By this time, several accounts of superior mirages had been published, as well as the inferior mirages of interest here. Among these was Antonio Minasi’s monograph [18] on the Fata Morgana in the Strait of Messina; the accompanying engraving by Willem Fortuyn shows a variety of mirages, including some that look like inferior mirages. Some inferior mirages were also described by Le Gentil [8], a decade before Monge.

The differences among the different types of mirage were not well understood until the middle of the 19<sup>th</sup> Century. However, inferior mirages were fairly well understood well before Monge, thanks to careful observational and experimental work by Tobias Gruber and by Johann Georg Büsch.

## 4. Experiments and explanations

### 4.1. *Gruber*

Tobias Gruber was a minor functionary in an obscure corner of the Habsburg Empire, whose duties took him through the dry bed of the seasonal Lake Zirknitz. In 1781, his “Letters from Carniola” [now part of Slovenia] were published [19]. In a postscript to the Fifth Letter, dated 20 April 1779, Gruber described the essential points: flat, smooth ground; the hiding of objects below a limiting ray; the dependence on season, height of the eye and distance to the object. He specified heights and distances numerically: “At a distance of 1000 to 2000 fathoms [i.e., 2 to 4 km] I saw just the roofs of the village houses, which looked to me like a transparent thicket. ... Somewhat higher objects, like trees, structures, towers, etc., appeared twice as high, just because they were reflected as if in a pool of water. ... On approach, [the water] vanished, and constantly withdrew. If I stood up from my seat in the carriage, where I still saw them, and raised myself up 3 feet higher, they retreated, or no longer appeared.” He was alarmed at the first sight of these phenomena; but “The repeated view in varied circumstances, the appearance and disappearance in relation to rising and descending, and the analogy from optical experiments finally revealed to me the whole mystery.” He explained it with a ray diagram, pointing out that the “reflected” rays do not reach the ground. “So one sees nothing of the objects that lie under this line, and the reflected ones will look like water ...”

“But the matter demands a closer definition, for which I have too little time now.”

### 4.2. *Büsch*

Meanwhile, Johann Georg Büsch, a mathematics professor at the academic Gymnasium in Hamburg, had become interested in mirages, inspired by a problem proposed by the Royal Danish Academy of Sciences in 1781. He published his observations in Latin [20] to make them available to the learned societies.

The first 38 pages contain his observations. Unfortunately, he scrupulously gave barometric readings, but no temperatures. Worse, he thought the phenomena have something to do with electricity, and lightning. And, because only distant objects are miraged, he thought the curvature of the ray depends on distance. But he put his finger on a common error of previous workers, saying “Non in vaporibus causa est sita.” And he discussed how the mirage varies with the height of the observer, the time, and the weather conditions.

As he was about to publish his observations, he discovered Gruber’s letter. He added a Latin translation of Gruber’s text, with his own comments, to his manuscript, saying that Gruber is “the first man besides me to have observed the whole phenomenon.” But he disagreed with some of Gruber’s assertions.

On p. 53, Büsch considered total internal reflection, but rejected it on the grounds that the denser air cannot separate from the lighter to form a visible surface, “like two immiscible liquors, such as terebinth oil [turpentine] and spirit of wine.” Finally, he offered advice to those who would investigate further: make observations in all seasons from a fixed place; use an instrument capable of measuring small angles; an achromatic telescope “for avoiding all confusion of the image that deceives the naked eye”; a level to observe “how much objects are raised and lowered for various conditions of the air.”

Despite its weaknesses, this is a solid piece of work; together with Gruber’s papers, the natural history of inferior mirages was well established, a dozen years before Monge went to Egypt.

### 4.3. *Gruber again*

After seeing Büsch's comments [20] on his 1781 letter, Gruber continued his investigation with both field observations and experiments, publishing the results in 1786 [21]. There he denied Büsch's suggestion that Gruber had thought the "reflection" in the mirage was due to a definite surface: "It never, not once, occurred to me to have the idea Prof. Büsch expects of me on p. 70, ... through the example of two superimposed liquids, e.g. turpentine oil and wine spirit ..."

He found the mirage easily visible on a sunlit wall, and was able to show it to "anyone who is not short-sighted." His continued observations of mirages outdoors convinced him that their occurrence was not affected by the height of the barometer; that they only appeared when the surface was warmer than the ambient air; and that the heated air that caused these images was not "thicker," [i.e., denser] as he had supposed, but "thinner," as shown by the rising air over a stove. He also noticed that the wave-like motion of the mirage on a hot wall was upward, like the hot air above a candle flame or a coal fire, and the hot smoke from chimneys.

His kitchen experiments, using a heated rectangular iron bar, are similar to Wollaston's [22] later laboratory simulations; but Gruber's observations are scrupulously quantitative, including the exact geometry of the apparatus, and the atmospheric temperature and pressure. Gruber points out that the temperature gradient over a warm surface makes the path of a ray curved, as in his Figure 2. He gives detailed explanations of double images and image elongation where the erect and inverted images meet, with useful ray diagrams.

### 4.4. *Huddart*

Büsch's wish for someone to measure altitudes in mirages was granted by Joseph Huddart in November, 1796, whose paper [23] contains both measurements of dip (the depression of the apparent horizon below the astronomical one) and drawings of inferior mirages. "I have often observed that low lands and the extremity of headlands or points, forming an acute angle with the horizon of the sea, and viewed from a distance beyond it, appear elevated above it, with an open space between the land and the sea. ... I am convinced that those appearances must arise from refraction, and that instead of the density of the atmosphere increasing to the surface of the sea, it must decrease from some space above it ..." He was aware of the continuous change in density of the air with height, and knew that "the ray of light will form a curve" as a result.

This study provides quantitative measurements of angles, temperatures, and pressures. His measurements of a miraged ship, made from a height of about 40 meters, plainly showed the contraction of the inverted image. He noticed the line "where inversion begins; therefore no land lower than this can be seen;" later this was called the "vanishing line" by Minnaert [24], but today, it is called the "fold line" [25]. Huddart saw that features near this line were "confused, and ill defined." He described the appearance of miraged headlands at this level as "blunted." In addition to drawings of the mirages, he provided ray diagrams to explain what he saw. He knew that two images of the same object require that one set of rays must "pass through one medium which the other has not entered"; this constrained the maximum density to be lower than 10 feet (3 meters) in height. He recorded several observations of how the images change with the height of the eye.

In discussing his dip measurements, he showed how the true dip could be measured from a ship by observing the sun's angular distances from both the northern and southern horizons at noon. This principle was widely used in the following centuries, aided by various specialized instruments designed to make the observation easier. Huddart's measurements provided useful guidance to later workers, despite his conviction that all the effects were caused by "evaporation."

This paper was reprinted [26] in the July, 1797, issue of Nicholson's Journal, and later summarized by Gilbert [27] in 1800.

#### 4.5. *Woltman*

Meanwhile, Reinhard Woltman, a student of Büsch's in Hamburg, became interested in these mirages, and began measuring dip toward the end of the year 1794. He used his position as the Director of the coastal works at Ritzebüttel to get special surveying done to support the investigation, and sent a partial account of his work to Gruber; a 9-page notice of this work appeared in the *Göttingische Anzeigen* in May, 1796 [28]. His full paper [29] appeared in the proceedings of the Bohemian Scientific Society in 1798, and was later summarized by Gilbert [30]. He was well aware of the works of Gruber and Büsch.

He frequently observed inferior mirages, noting that “objects, houses, trees etc. near the horizon often are separated from the visible ground surface by a bright strip of air, and almost seem to stand in the air; or as if a shining empty space were present between the visible horizon and the objects; or if the eye is considerably raised, and sees several distant objects behind one another, as if these houses, mills, churches, trees etc. stood in a calm shining sea, in which the entire landscape were immersed and reflected.” He used an achromatic telescope to confirm that the images were inverted. Even in rain the images did not disappear completely, unless the opacity of the air prevented seeing into the distance. They were still seen when the ground and the river ice were covered with snow. He described how the “bright strip” shrinks and vanishes as the miraged object approaches the observer, and also recorded the effects of increasing the height of the eye. “Therefore the bright strip is no object, like a luminous surface, ... but is itself an image of a reflected bright object.”

[By the way, inferior mirages are “a common winter mirage over frozen lakes,” according to Greenler [31], who shows photographs of them in his Plates 7-2 and 7-3, and discusses them on pp. 158–159. Inferior mirages over a frozen lake were also discussed by Forel [32, p. 532]; they were seen over ice or snow by Mathieu [33, p. 697].]

Woltman had two pilings driven into the dikes near his house, and compared the apparent position of another house on the far shore of the Elbe with the sight-line between the tops of the piles. His papers include precise measurements of the positions of the piles and the house, and extensive tables of measured changes in the apparent altitude of the distant house, together with the air and water temperature and other meteorological conditions. He found the terrestrial refraction greatest in the morning and lowest in the evening, with a total range of over 10 arc minutes. The measurements showed that heat has the strongest effect of all the variables: “If the water is 2 or more Fahrenheit degrees warmer than the air, the rays passing over the water are always depressed; but raised, if the air is 2 degrees or more warmer than the water. Among more than 150 observations this rule has not a single exception.”

His measurements showed that this mirage is always accompanied by a depression of the apparent horizon, and that the inverted image is always appreciably smaller than the erect one. (This was because his eye was about 6 meters above the water, though he was unable to show that this is an effect of the Earth's curvature.) He was also able to observe some inferior mirages over land: “One must have a whole open plain before him, or a high sight-line over bushes and the like. Then the whole landscape seems to stand in an immobile shining sea, in which all raised objects are reflected.” From a low rise, he saw the marshes as if they were covered by shining water. And he found the reflections over land similar to those over water; “the refraction is greater as the difference in heat between the two materials [air and water] is greater.” He concluded that “These images cannot arise just from reflection, because no mirror surface exists in the air.”

Woltman also noticed the inferior mirages of the Sun and Moon at the horizon. “If one sees the sun come up bright in the morning, its shape gives an infallible indication whether looming or depression will occur. In the latter case, it is not round, but part of the solar disk is reflected downwards; that can amount to a whole eighth or a quarter of the solar diameter.” It is as if, at

the bottom of the solar disk, even at the part that has risen, the beginning of another disk were placed; he had seen the same effect with the full moon.

In addition to inferior mirages, Woltman saw a few superior ones, accompanied by looming. He found that "... the sea surface, distant shores, coasts, and sandbanks take on an extraordinary appearance. The sea surface becomes concave, nearby ships are lowered, or rather the distant horizon seems almost in front of them, distant low shores look like high coasts; and these, if they are 7 or 8 [German] miles away, and far below our horizon, look like clouds above it; whole landscapes, otherwise hidden by interposed sand hills, appear above them."

Woltman's attempts to explain these phenomena suffered from his inability to allow for the continuous curvature of the rays; however, he did appreciate the importance of considering the Earth's curvature. On the other hand, Gruber's commentary [34] on Woltman's observations took the ray curvature into account, but neglected the Earth's. But Gruber understood that the general ray curvature explains the connection between mirages and dip of the horizon.

## 5. Monge's memoir

Compared to what was done before, Monge's paper [4] seems very feeble. It has no references to the earlier literature; there are no field measurements, no numbers or calculations. The descriptions of mirages read like a travelogue; then comes a purely verbal description of total internal reflection. This is followed by an assertion that the inverted images are produced by "the surface which separates the lower layer ... from the denser layer above it"; later, he again talks about "the reflecting surface which separates the two layers of different densities." But no such separating surface exists. In fact, this notion had already been rejected by Büsch [20], by Gruber [21], and by Woltman [29].

Monge's argument involves the logical error of asserting the consequent: if the air acts like a mirror, an inverted image will be produced; an inverted image is observed; therefore the air is acting like a mirror. But there are other ways of producing inverted images — for example, with a positive lens. (And in fact, the actual formation of the inverted image in the inferior mirage is very much like the inverted real image produced by a convex lens.)

Because Monge was the President of the Institute in Cairo, his mirage paper attracted much attention. An unsigned review [35] of the whole *Memoires* volume is typical: "One will be more satisfied with the description of this phenomenon than with the explanation that M. attempts."

## 6. Reactions to Monge

### 6.1. *Reinecke et al.*

As might have been expected, the immediate criticism of Monge's paper fixed on his unjustified assumption of a density discontinuity in the air. The earliest discussion is in *Allgemeine Geographische Ephemeriden*, led by Johann Christoph Matthias Reinecke, a frequent contributor to that journal. Its third issue (March) for 1800 contains an introduction by Reinecke himself, discussing refraction phenomena generally [36], followed by comments from Büsch [37], and Reinecke's reply to Büsch [38]. Then comes a German translation of Monge's paper by Reinecke [39], and finally Reinecke's "translator's supplement" [40] commenting on Monge. The last two are most important here, though the earlier discussions of Minasi's monograph (based entirely on a German translation of Nicholson's partial English translation [41] of Minasi's Italian), and Büsch's "Tractatus" are also relevant, as they contain some discussion of Gruber's work.

The very first sentence of Reinecke's comment on Monge is: "The above theory requires a correction." And of course, that is the unphysical assumption of a discontinuity in air density.



Of Monge's "single definite surface", Reinecke says: "But such a precisely isolated surface does not occur in Nature, as Prof. Büsch remarked on the occasion of Gruber's explanation of the same phenomenon. Instead, the density of the air changes continuously and gradually, and there is no reason why it should reflect more at one place than at another. Instead of a simple reflection, a ray of light experiences a bending at every point of its path through a medium of decreasing density, and therefore describes a curved line . . ." He explains that the rays are usually concave toward the Earth; but if we invert the usual decrease of density upward, the rays will be concave upward and turn their convex sides to the Earth — "although no actual reflection results."

"Now this is also the phenomenon treated by Prof. Büsch in his Tractate and in the letter above. His explanation, which *Monge* seems not to have known, is completely different from that given here . . ." Reinecke clearly understood that it is the change in ray curvature that produces the inverted images. The different models can be distinguished by the absolute values of the altitudes near the horizon. But "Monge made no angular measurements, and anyway seems to have given no consideration to this point."

Büsch [37] was equally dismissive of Monge's work. He related some of his own mirage observations made while traveling on the Baltic coast. These were clearly inferior mirages, "which had been so remarkable to the French, but from which they learned nothing."

At about the same time, Ludwig Wilhelm Gilbert, Professor of Physics at the University of Leipzig, who had taken on the publication of the "Annalen der Physik" the previous year, began publishing a series of articles on refraction and mirages, which take up most of Part 3 of its third volume. It begins with a German translation of Huddart's paper [23], and contains a German translation of excerpts from Büsch's "Tractatus", followed by summaries [42] of the works of Boscovich, Monge, Gruber, and others. Gilbert complains that Monge's description is much less complete and satisfying than Huddart's, that the inverted image gets "not a word" in Monge's account, and that simple reflection of the rays is in no way sufficient to explain the phenomenon.

## 6.2. *Wollaston*

Also in 1800, William Hyde Wollaston undertook to explain [43] the phenomena described by Huddart. In this paper, he points out that there are "two opposite states of the atmosphere" that produce double or triple images, and explicitly points out mirages on roads — though without being able to use that word. He also distinguishes simple looming from the multiple-image phenomena. Wollaston re-invents the two-liquid laboratory demonstration of refraction phenomena first described in Hooke's *Micrographia* [44] (1665); these experiments on liquids showed him how "adjacent portions of the converging rays will form a focus, beyond which they will diverge again; and the varied medium will produce effects similar to those caused by a medium of uniform density having a surface similar to the curve of densities . . ." He notes that an oblique line appears "bent into different forms" when viewed through such layered media, and that "If it be at the distance of the principal focus, one point of it is bent into a vertical line . . ." (This is due to the infinite vertical magnification in mirages at the altitude where erect and inverted images meet, sometimes called the "fold line" [25]) He shows this effect in Figure 10; the appearance is quite different from the sharp angle where an inclined object reflected in a mirror meets its reflection. This paper was translated into German by Gilbert in 1802 [45].

Soon after this, Wollaston found Monge's mirage paper, and commented on it in his Bakerian lecture [22], where he introduced the word *mirage* into English. He began by dismissing Monge's density discontinuity: "The definite reflecting surface which he [Monge] supposes to take place between two strata of air of different density, is by no means consistent with that continued ascent of rarefied air which he himself admits; and the explanation founded on this hypothesis

will not apply to other cases, which may all be satisfactorily accounted for, upon the supposition of a gradual change of density, and successive curvature of the rays of light by refraction.”

## 7. Refraction theory

Though Monge never developed a quantitative theory for mirages, others soon did. By 1808, two remarkable theoretical works on refraction existed.

### 7.1. Biot

The physicist Jean-Baptiste Biot had served as Laplace’s proofreader on the *Mécanique Céleste*. In 1805, Biot published the first edition of his introductory textbook on astronomy [46], in which he briefly dealt with astronomical refraction, and devoted one page to Monge’s mirage observations, saying merely that “Monge has explained this phenomenon according to the laws of optics.”

In 1806, Biot was sent with François Arago to finish measuring the southern part of the meridian of Paris to confirm the definition of the meter. In 1808, he continued geodetic measurements near Dunkirk with Claude-Louis Mathieu. This field work made him familiar with the variations of terrestrial refraction, and he prepared a comprehensive treatment of refraction phenomena [47], in which the theory is not only well developed, but is compared with meticulous measurements made during his field observations.

Biot’s mirage monograph is illustrated with drawings made by Mathieu during their work near Dunkirk. These engravings were widely reproduced in encyclopedias and other popular works for many years; many of them appeared in Pernter’s *Meteorologische Optik* [48] and its revisions by Felix Exner [49], over a century after their first publication.

Its theoretical pages contain many results that were rediscovered many years later, such as the theorem on p. 65 that an inverted image is only possible if one ray is horizontal between the object and the observer, and the well-known fact that erect and inverted images are distinguished by the positions of the extrema of the ray trajectories, which is often attributed to Tait [50].

Biot is clear that the rays are curved, not broken abruptly: “The rays bent in these lower layers of variable densities have trajectories convex toward the surface, and produce inverted images.” Of Monge’s total internal reflection idea, Biot says, “This comparison makes the thing sensible, and it would be completely correct if the layers of different density were not infinitely thin,” and adds: “calculation confirms this explanation by making some very slight modification of it . . .”.

But this is itself not really right. Monge did not merely “compare this inversion” to that produced by internal reflection; he identified these two phenomena, which are in fact quite different. Monge insists on a discontinuous density profile; but in fact heat transfer (which was not understood in his day) forces the profile to be not merely continuous, but smooth — i.e., its *second* derivative must be continuous. The necessary modification turns out to be fundamental, not “very slight.”

### 7.2. Gergonne

While Biot was preparing his monograph, Joseph Diez Gergonne was independently developing a theory of mirages at Nîmes. He had seen mirages locally, and the one-page abstract [1] of Monge’s talk (which he called [51] “a pathetic explanation” [*une pitoyable explication*] of the mirage); but was unable to obtain a copy of Monge’s paper [3]. So he relied primarily on Biot’s one-page synopsis of it in his Astronomy textbook [46], without realizing that this was itself taken nearly verbatim from Monge. From just this limited observational information, Gergonne produced an

impressively general theory of mirages. While Gergonne's full memoir seems to have been lost, an extended summary of it is available [52], and some of the missing analysis appears in his 1829 papers [51, 53].

Gergonne assumed a medium whose refractive power varies continuously with height. He derived the differential equation for the ray trajectory in a plane-parallel atmosphere, and determined the shapes of possible trajectories (represented as piecewise parabolic splines) from the structure of the differential equation. By considering combinations of atmospheric layers with different refractive profiles, he showed that two rays leaving an object point can intersect elsewhere, so that an eye at that intersection sees two images of the object. He found that an odd number of images can be produced, and determined the positions and orientations of the images.

On applying this theory to the inferior mirages described in Biot's book, Gergonne found that solar heating of the ground causes the density to increase upward in the surface layer, making the rays parabolic and convex toward the ground, and producing inverted images below objects near the horizon, as if they were reflected in water; "and as this double impression can only take place for objects sufficiently distant from the spectator, it happens that as he advances, the limits of the apparent inundation retreat."

"One can thus affirm that, in any place which presents vast, perfectly horizontal plains, quite smooth, strongly heated ... by the solar rays, ... the phenomenon of mirage should take place daily during the summer at the hottest part of the day." And his summary [52] concludes with a plausible ray diagram.

Gergonne's theory was general enough that he could also predict the possibility of ducted rays, and describe some properties of superior mirages. Unfortunately, it is too long and complicated to summarize here; some of its features appear in the annotated bibliography [54].

## 8. Reflection or refraction?

### 8.1. *The smooth bend at the fold line*

Wollaston [22, 43] has fine illustrations of the smooth bend where the erect and inverted images meet. He points out that this feature can be used to distinguish between inverted images produced by reflection and refraction: "... by a moderate share of attention, a very evident difference may be discovered between the inversion occasioned by reflection, and that which is caused by atmospherical refraction. In cases of reflection, the angles between the object and image are sharp, the line of contact between them straight and well defined, but the lower part of the image indefinite and confused, by means of any slight undulation of the water. But, when the images are caused by refraction, the confines of the object and its inverted image are rounded and indistinct, and the lower edge of the image is terminated by a straight line at the surface of the water."

Very similar advice was given by Bravais [55], in the paper that converted Wollaston's "two opposite states" into the modern terminology of *inferior* and *superior* mirages. "The junction of an oblique line with its symmetric [image] below is made, not by an angle with a sharp vertex, but by an arc of a curve having its principal part vertical." In his historical review of the subject, Bravais called Büsch's 1783 treatise "the first truly scientific work that has been published on the mirage." He devoted only a single sentence to Monge's work.

But a few months later, he outlined his plans for further work on mirages to the new Société Météorologique in March, 1853 [56]: "Up to now, the phenomenon of total reflection of objects has played a large part in the theory of the mirage. The reversion of luminous trajectories which, after plunging toward the ground, become horizontal for a short part of their path, and then recede from the ground, appeared to many physicists incapable of explanation by ... total

reflection. I will show that the conditions necessary to produce this reflection can not exist, and that the mirage is a simple phenomenon of refraction.” Unfortunately, this meeting abstract was not printed until 1857.

However, in submitting his publication list to the Académie to support his application for membership, Bravais [57] dealt briefly with Monge’s model (though without mentioning his name): “This phenomenon appears to have perplexed the geometers, and has led some to assume total reflection. I show that there is no total reflection, and that the upturn of the trajectory is a natural consequence of applying the wave theory to the path of the ray.” Here he cited the short abstract [58] of a paper [59] that was published two years later.

### 8.2. *The wave structure at the apparent horizon*

Bravais mentioned some additional distinguishing features of the inferior mirage over water: “... if the mirage is strong, [the apparent horizon] will be bordered by a jagged crest whose sinuosities will appear to rise and fall unceasingly; to disappear and reappear.” Forel [60] studied these structures further, and published a drawing [32] of the miraged wave crests just beyond the apparent horizon, where Biot’s caustic meets the mean sea surface. Perhaps the most vivid description of this “boiling horizon” is that of Ferguson [61]: “Even when neither land nor ships are in sight, the miraging can be determined by the unique moving appearance of the horizon seen through a telescope. The water seems to wave unnaturally and seems to flicker like flames along the upper surface. It does this with a strongly increased dip.”

### 8.3. *The relative smoothness of a mirage on rougher water*

Another characteristic of inferior mirages over water is the remarkable smoothness of the “reflected” mirage image, compared to the fragmented, irregular reflection from the water surface. This was pointed out by Büsch [20, 62]: “I noticed this phenomenon already in my youth on crossings from Hamburg to Harburg, a [German] mile away, where my grandfather lived. If the wind moved the waves in the middle of the river rather briskly about the ship, the water at the shore seemed to be completely calm, like a mirror. The shore inhabitants told me this was caused by the shallow beach; only, if we climbed to a height, and looked at the opposite shore from there, the water was full of waves there too.” The effect is well illustrated in his figures 1, 3, 4, and 6. (Cf. Woltman’s [28] “immobile shining sea” covering the marshland.)

## 9. Complications

The 19<sup>th</sup> Century theoreticians imagined that all they needed to understand inferior mirages was a correct density profile; but that would not become available until boundary layers were discovered and applied to convectively unstable surface layers [63]. The temperature profile turns out to be determined not by heat conduction, as Gergonne [52] had supposed, but by turbulent heat transfer — one of the most difficult problems in fluid dynamics.

Why is the ocean like the desert? They both support obvious inferior mirages. It turns out that turbulent heat transfer produces a strongly curved temperature profile, and the curvature of the refractivity profile causes the focusing effect that Wollaston [43], Gergonne [52] and Everett [64] identified as producing the ray-crossing needed for multiple images. So these mirages are a side effect of the “law of the wall” — any suitable warm surface will do.

But then why don’t other warm surfaces work as well? Because the scaling of the temperature profile depends on the aerodynamic roughness length [65]; and this length depends on the linear

size of the surface irregularities with the greatest curvature. In the desert, that's a grain of sand; on the ocean, it's the capillary waves that determine the drag coefficient when the wind interacts with the water surface. In both these cases, the length is about a millimeter [66]. The smaller the roughness length, the more strongly curved is the refractivity profile near the surface, and the more obvious is the mirage. So the inferior mirage is typically found where the surface is smooth: water, sand, and snow work equally well.

Yet another effect is at work here. The lower edge of the inverted image in the inferior mirage (i.e., the apparent horizon) depends on how close to the mean surface we can see. The line of sight can be intercepted by obstructions that stick up enough to block our view of the lowest part of the inverted image. So the total width of this image depends on the height of the tallest irregularities on the surface: rocks and bushes on dry land, or the largest waves on water. The importance of the dip of the sea horizon for celestial navigation has produced a huge literature on this subject; e.g., [67–71], some of which has been incorporated in the literature of refraction [72] and mirages [73, 74].

## 10. Discussion

Today, explaining these mirages involves much more than optics: boundary-layer meteorology, air-sea interactions, turbulent heat transfer, and other complex topics are involved. Monge's simplistic picture is simply wrong. He was not the first to use the word *mirage*, nor the first to describe mirages in deserts, nor the first to study them scientifically, nor even the first to identify the bright strip at the horizon as an image of the sky. Yet his name is still attached to mirages, after two centuries. Why?

A century ago, Pernter [48] was puzzled that Monge's description had become generally known, while the older works of Gruber and Büsch were forgotten. "On the one hand," says Pernter, that is "thanks to the great name of Monge"; and on the other, to "the circumstance that it was observed during the historical event of Napoleon's Egyptian campaign." (Probably Wollaston's inability to read German played a part as well.) Invoking Monge's great reputation is rather like Merton's [75] "Matthew effect." Yet today, Monge hardly seems famous enough to make this explanation adequate.

However, his work was well publicized. An English translation [4] quickly appeared, but was immediately described [76] as "neither very clear nor scientific." As Gergonne [51] said, Monge's memoir seems "much less written for geometers than for the great number of men who only aspire to acquire a superficial tincture of the causes of various phenomena which the spectacle of Nature can offer to our observation." In other words, it is not a scientific paper, but a shallow popularization. From that point of view, it was a complete success.

There were several descriptions of mirages decades before Monge, a couple of which were in French [8, 17], and one of which [9] even connected an eyewitness description of the phenomenon with the word *mirage*, and correctly attributed it to refraction. So Monge was not the first person to connect the phenomenon to the word in print. Why, then, is he still often given credit for doing so?

Worse yet, some people still believe his explanation was correct. For example, a journalist recently said of Monge, "His hypothesis is remarkably close to the way modern optics explains the phenomenon" [77]. Perhaps its simplicity appeals to writers of elementary textbooks. One finds assertions that "A mirage is formed by total reflection of light" [78] and that "Total internal reflection can cause mirages" [79] in modern textbooks. (Here, Monge has been forgotten; but his incorrect model lives on.)

It is not enough to say, as Minnaert [24] does, that "total reflection" is "wrong because the transition between the different layers is gradual everywhere." The simplistic idea of reflection is

attractive to people who know a little optics, but no atmospheric physics; but it is also misleading to those who really want to understand mirages.

The contrast between the simplicity of internal reflection and the actual complexity of mirages is striking. Perhaps the saying [80] that “there is always a well-known solution to every... problem—neat, plausible, and wrong” accounts for the persistence of Monge’s story. The only real accomplishment of his mirage papers was to popularize the word *mirage*.

## Acknowledgements

I thank Luc Dettwiller, Éric Frappa, Marcella Pace, and Siebren van der Werf for bringing many important references to my attention, and San Diego State University for providing access to them.

## References

- [1] “Copie des procès-verbaux des séances de l’Institut d’Égypte, envoyés à l’Institut national de France”, *Décade Philosophique, An VII, 2<sup>me</sup> Trimestre* (1798), no. 10, p. 4-5.
- [2] G. Monge, “Extrait du mémoire lu à la séance de l’institut du Caire, du II fructidor an 6, par le cit. Monge. Sur le phénomène optique, nommé MIRAGE par les marins”, *Ann. Chim.* **29** (1798), p. 207-208.
- [3] G. Monge, “Mémoire sur le phénomène d’optique connu sous le nom de MIRAGE”, *La Décade égyptienne* **1** (1799), no. 2, p. 37-46.
- [4] G. Monge, “Sur le phénomène d’optique, connu sous le nom de Mirage”, *Mémoires sur l’Égypte* **1** (1800), p. 64-79.
- [5] J. Naylor, *Out of the Blue: A 24-Hour Sky-Watcher’s Guide*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, p. 51.
- [6] N. Desroches, *Dictionnaire des Termes propres de Marine*, Amable Auroy, Paris, 1687, p. 352.
- [7] N. Aubin, *Dictionnaire de Marine*, Pierre Brunel, Amsterdam, 1702, p. 565.
- [8] G. Le Gentil, “Extrait d’un mémoire sur des observations astronomiques faites sur les réfractions, en 1786, 1787 et 1788”, *Mém. Acad. Roy. Sci. année 1789* (1793), p. 224-236.
- [9] J.-B. de Chabert, *Voyage fait par ordre du Roi en 1750 et 1751 ...*, Suite des Mémoires de l’Académie des sciences, Imprimerie Royale, Paris, 1753, p. 136.
- [10] J.-B. de Chabert, “Voyage fait par ordre du Roi en 1750 et 1751 ...”, *Hist. Acad. Roy. Sci. année 1753* (1757), p. 242-256.
- [11] J. Picard, *Voyage d’Uranibourg ou observations astronomiques faites en Dannemarck*, Imprimerie Royale, Paris, 1680, p. 8.
- [12] J. P. Maraldi, “Détermination géographique de l’Isle de Corse”, *Mém. Acad. Roy. Sci. année 1722* (1724), p. 348-355.
- [13] E. Mariotte, *Traité du nivellement*, Jean Cusson, Paris, 1672.
- [14] P. Perrault, *On the origin of springs*, Hafner, New York, 1967, trans. by Aurele LaRocque, [new ed. of *De l’origine des fontaines*, Pierre Le Petit, Paris, 1674].
- [15] T. Shaw, *Travels, or Observations Relating to Several Parts of Barbary and the Levant*, Theatre, Oxford, 1738, p. 362.
- [16] R. J. Boscovich, C. Maire, *De Litteraria Expeditione per Pontificiam Ditionem ...*, Typographo Palladis, Roma, 1755, p. 94-96.
- [17] C. Maire, R. J. Boscovich, *Voyage Astronomique et Géographique, dans l’État de l’Église ...*, Tilliard, Paris, 1770, p. 94-96.
- [18] A. Minasi, *Dissertazioni sopra diversi fatti meno ovvi della storia naturale*, Benedetto Francesi, Roma, 1773.
- [19] T. Gruber, *Herrn Tobias Grubers Briefe hydrographischen und physikalischen Inhalts aus Krain, an Ignaz Edlen von Born*, Johann Paul Krauß, Wien, 1781, p. 54-57.
- [20] J. G. Büsch, *Tractatus duo optici argumenti*, apud Carolum Ernestum Bohnium, Hamburgi, 1783.
- [21] T. Gruber, “Physikalische Abhandlung über die Stralnbrechung und Abprellung auf erwärmten Flächen”, *Abhandlungen der Böhmisches Gesellschaft der Wissenschaften* **2** (1786), p. 298-330.
- [22] W. H. Wollaston, “Observations on the Quantity of horizontal Refraction; with a Method of measuring the Dip at Sea”, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **93** (1803), p. 1-11.
- [23] J. Huddart, “Observations on horizontal Refractions which affect the Appearance of terrestrial Objects, and the Dip, or Depression of the Horizon of the Sea”, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **87** (1797), p. 29-42.
- [24] M. Minnaert, *The Nature of Light & Colour in the Open Air*, Dover Publications, New York, 1954.
- [25] W. Tape, “The topology of mirages”, *Scientific American* **252** (1985), no. 6, p. 120-129.
- [26] J. Huddart, “Observations on horizontal Refractions which affect the Appearance of terrestrial Objects, and the Dip, or Depression of the Horizon of the Sea”, *Journal of Natural Philosophy, Chemistry and the Arts* **1** (1797), p. 145-152.

- [27] J. Huddart, "Beobachtungen über die horizontale Strahlenbrechung bey irdischen Gegenständen und über die Vertiefung des Seehorizontes (dip of the sea)", *Gilb. Ann. Phys.* **3** (1800), no. 3, p. 257-280.
- [28] "Göttingen", *Göttingische Anzeigen von gelehrten Sachen*, 82. St. (1796), p. 809-818.
- [29] R. Woltmann, "Bemerkungen über ein Katoptrisches Phänomen, welches an den Gegenständen nahe am Horizont nicht selten sichtbar ist", *Neuere Abhandlungen der königlichen Böhmisches Gesellschaft der Wissenschaften* **3** (1798), p. 69-97.
- [30] R. Woltmann, "Beobachtungen über die Brechung der Lichtstrahlen, die nahe über der Erdoberfläche hinfahren", *Gilb. Ann. Phys.* **3** (1800), no. 4, p. 397-438.
- [31] R. Greenler, *Rainbows, Halos, and Glories*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [32] F.-A. Forel, *Le Léman. Monographie limnologique, Vol. 2*, F. Rouge, Lausanne, 1895.
- [33] J.-B. Delambre, *Histoire de l'Astronomie au Dix-Huitième Siècle*, Bachelier, Paris, 1827, p. 697.
- [34] T. Gruber, "Abbé Gruber's Theorie dieses katoptrischen Phänomens, von Senkung und Hebung der Objekte am Horizonte", *Neuere Abhandlungen der königlichen Böhmisches Gesellschaft der Wissenschaften* **3** (1798), p. 97-107.
- [35] "Paris", *Göttingische Anzeigen von gelehrten Sachen*, 186. St. (1800), p. 1849-1852.
- [36] "Über die Fata Morgana, das Seegesicht und die Erhebung", *Allgemeine Geographische Ephemeriden* **5** (1800), no. 3, p. 195-222.
- [37] J. G. Büsch, "Schreiben des Hrn. Prof. Büsch in Hamburg, an d. Herausgeber der A.G.E.", *Allgemeine Geographische Ephemeriden* **6** (1800), no. 1, p. 3-14.
- [38] J. M. Reinecke, "Antwort auf das Schreiben des Hrn. Prof. Büsch", *Allgemeine Geographische Ephemeriden* **6** (1800), no. 1, p. 14-15.
- [39] G. Monge, "Abhandlung über ein optisches Phänomen, die Kimmung genannt, von Gaspard Monge", *Allgemeine Geographische Ephemeriden* **6** (1800), no. 1, p. 15-25.
- [40] J. M. Reinecke, "Zusatz des Übersetzers", *Allgemeine Geographische Ephemeriden* **6** (1800), no. 1, p. 25-30.
- [41] W. Nicholson, "An Account of the Fata Morgana; or the Optical Appearance of Figures, in the Sea and the Air, in the Faro of Messina. With an Engraving", *Journal of Natural Philosophy, Chemistry and the Arts* **1** (1797), p. 225-227.
- [42] L. W. Gilbert, "Beobachtungen besonderer Strahlenbrechung von Boscovich, Monge und Ellicot", *Gilb. Ann. Phys.* **3** (1800), p. 302-308.
- [43] W. H. Wollaston, "On double Images caused by atmospherical Refraction", *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **90** (1800), p. 239-254.
- [44] R. Hooke, *Micrographia*, Dover Publications, New York, 1961, [republication of *Micrographia*, John Maryn and James Allestry, London, 1665].
- [45] W. H. Wollaston, "Untersuchungen, wie durch atmosphärische Strahlenbrechung doppelte Bilder von Gegenständen entstehen", *Gilb. Ann. Phys.* **11** (1802), p. 1-65.
- [46] J.-B. Biot, *Traité Élémentaire d'Astronomie Physique*, Bernard, Paris, 1805.
- [47] J.-B. Biot, "Recherches sur les réfractions extraordinaires qui ont lieu près de l'horizon", in *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France, Année 1809*, Garnery, Paris, 1810, p.1-266.
- [48] J. M. Pernter, *Meteorologische Optik*, Wilhelm Braumüller, Vienna, Leipzig, 1902.
- [49] J. M. Pernter, F. M. Exner, *Meteorologische Optik*, second ed., Wilhelm Braumüller, Vienna, Leipzig, 1922.
- [50] P. G. Tait, "On mirage", *Trans. Roy. Soc. Edinburgh* **30** (1883), p. 551-578.
- [51] J. D. Gergonne, "Du mouvement de la lumière dans un milieu transparent, dont la densité varie, dans tous les sens, suivant une loi mathématique quelconque", *Annales de mathématiques pures et appliquées* **19** (1829), p. 257-285.
- [52] J. D. Gergonne, "Recherches sur les réfractions terrestres et particulièrement sur le mirage", *Notice Travaux Acad. Gard année 1808* (1809), p. 219-256.
- [53] J. D. Gergonne, "Essai analytique sur le phénomène du mirage", *Annales de mathématiques pures et appliquées* **20** (1829), p. 1-31.
- [54] A. T. Young, "Annotated bibliography of mirages, green flashes, atmospheric refraction, etc.", <https://aty.sdsu.edu/bibliog/bibliog.html>.
- [55] A. Bravais, "Notice sur le mirage", *Annuaire Météorologique de la France pour 1852* **4** (1853), p. 227-280.
- [56] A. Bravais, "Notice sur le mirage", *Annuaire de la Société Météorologique de France pour 1853 : Bulletin des séances* **1** (1857).
- [57] A. Bravais, *Notice des travaux scientifiques de M. A. Bravais*, Mallet-Bachelier, Paris, 1854.
- [58] A. Bravais, "Optique. Réfraction", *L'Institut* **21** (1853), p. 193.
- [59] A. Bravais, "Explication, par le système des ondes, d'un cas remarquable de la réfraction de la lumière", *Ann. Chim. Phys.* **46** (1856), p. 492-501.
- [60] F.-A. Forel, "Mirages d'hiver sur le lac Léman", *Bull. Soc. Vaud.* **25** (1890), p. XII-XIII.
- [61] T. Ferguson, "Eenige opmerkingen betreffende de Kimduiking in verband met de temperatuur van zee en lucht", *De Zee* **24** (1902), p. 357-361.
- [62] J. G. Büsch, "Beobachtungen über horizontale Strahlenbrechung und die wunderbaren Erscheinungen, welche sie bewirkt", *Gilb. Ann. Phys.* **3** (1800), p. 290-301.

- [63] T. Foken, "50 years of the Monin–Obukhov similarity theory", *Boundary-Layer Meteorology* **119** (2006), p. 431-447.
- [64] J. D. Everett, "On the optics of mirage", *Phil. Mag., Series 4*, **45** (1873), no. 299, p. 161-172.
- [65] S. S. Zilitinkevich, A. A. Grachev, C. W. Fairall, "Scaling reasoning and field data on the sea surface roughness lengths for scalars", *J. Atmos. Sci.* **58** (2001), no. 3, p. 320-325.
- [66] A. C. Chamberlain, "Roughness length of sea, sand, and snow", *Boundary-Layer Meteorology* **25** (1983), p. 405-409.
- [67] H. C. Freiesleben, "Geophysikalische Folgerungen aus Kimmtiefenbeobachtungen", *Deutsche Hydrographische Zeitschrift* **2** (1949), p. 78-82.
- [68] H. C. Freiesleben, "Investigations into the dip of the horizon", *Journal of Navigation (London)* **3** (1950), no. 3, p. 270-279.
- [69] L. Hasse, "Über den Zusammenhang der Kimmtiefe mit meteorologischen Größen", *Deutsche Hydrographische Zeitschrift* **13** (1960), p. 181-197.
- [70] L. Hasse, "Temperature-difference corrections for the dip of the horizon", *Journal of Navigation (London)* **17** (1964), no. 1, p. 50-56.
- [71] H. H. Shufeldt, "Precision Celestial Navigation", *Journal of Navigation (London)* **15** (1962), no. 3, p. 301-324.
- [72] A. T. Young, G. W. Kattawar, "Sunset science. II. A useful diagram", *Appl. Opt.* **37** (1998), no. 18, p. 3785-3792.
- [73] A. T. Young, "Inferior mirages: an improved model", *Appl. Opt.* **54** (2015), no. 4, p. B170-B176.
- [74] S. Y. van der Werf, I. Shokaryev, "Wave height and horizon dip", *Navigation, Journal of The American Institute of Navigation* **62** (2015), no. 2, p. 161-169.
- [75] R. K. Merton, "The Matthew Effect in Science", *Science* **159** (1968), no. 3810, p. 56-63.
- [76] "Biographical Anecdotes and Characters: Domestic Literature", in *The New Annual Register for the Year 1800*, G. and J. Robinson, London, 1801, p. 270.
- [77] N. Burleigh, *Mirage: Napoleon's Scientists and the Unveiling of Egypt*, HarperCollins, New York, 2007, p. 30.
- [78] N. Giordano, *College Physics: Reasoning and Relationships. Vol. 2*, second ed., Cengage Learning, Boston, Mass., 2012, p. 832.
- [79] D. Reid, G. Groves, C. Price, I. Tennant, *Science for the New Zealand Curriculum Year 11*, Cambridge University Press, Port Melbourne, 2011, p. 87.
- [80] H. L. Mencken, *Prejudices: Second Series*, Alfred A. Knopf, New York, 1920, p. 158.







---

Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

# Le théorème de Biot et le changement de variable de Biot–Auer–Standish : commentaire historique

*Biot's theorem and Biot–Auer–Standish's change of variable: an historical commentary*

Luc Dettwiller<sup>® a</sup>

<sup>a</sup> Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School,  
Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France  
Courriel: [dettwiller.luc@gmail.com](mailto:dettwiller.luc@gmail.com)

**Résumé.** À l'occasion d'un mémoire paru en 1836 sur les réfractions astronomiques, Biot (1774–1862) introduit son changement de variable devenu classique pour calculer numériquement l'intégrale de réfraction — ainsi rendue non-impropre dans le cas d'un astre vu sur l'horizon astronomique. Biot démontre aussi un beau théorème donnant le grandissement angulaire vertical local sur cet horizon. Il commente divers modèles d'atmosphère.

**Abstract.** In a 1836 publication on astronomical refractions, Biot (1774–1862) introduced a change of variable, which would become classical, in order to numerically calculate the refraction integral. This change renders well-behaved the integral, in the case when a celestial body is seen on the astronomical horizon. Biot also proves a beautiful theorem, giving the local vertical angular magnification on such horizon. In addition, he comments on various atmospheric models.

*Published online: 21 February 2023, Issue date: 11 August 2023*

## 1. Introduction

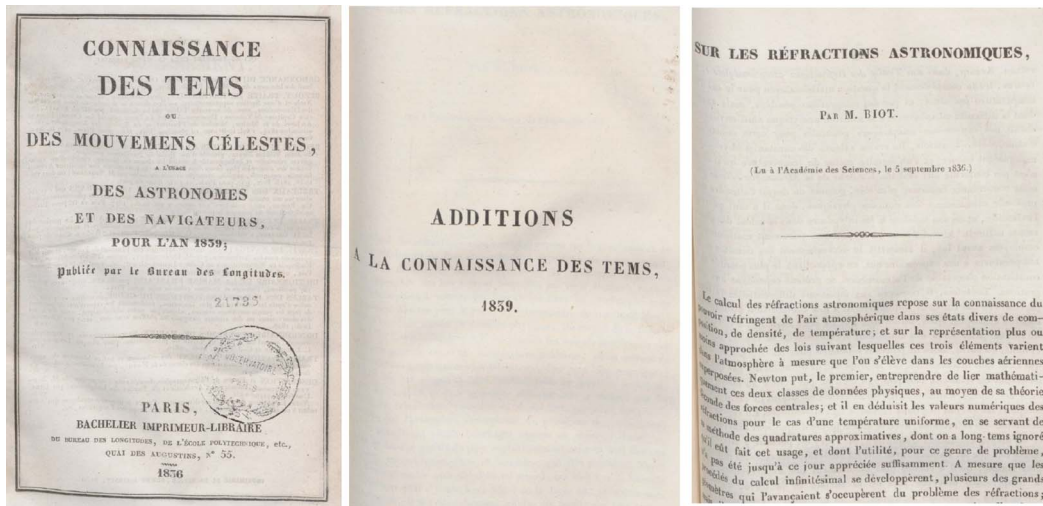
Physicien en déficit de célébrité — par comparaison avec certains de ses illustres collègues de la même époque [1] — malgré sa carrière brillante et multiforme (il est devenu membre associé de la section de mathématiques de l'Institut puis professeur au Collège de France à 26 ans, académicien des sciences à 28 ans, et membre de deux autres académies plus tard), Jean-Baptiste Biot (1774–1862) laisse à la postérité une œuvre imposante et pluridisciplinaire. En 1803 notamment, il fut envoyé en mission pour enquêter sur la chute, du 6 floréal an XI (26 avril 1803), d'environ 3 000 aérolithes sur la petite ville de l'Aigle, dans l'Orne ; son rapport établit clairement l'origine extraterrestre de ces pierres, et clôt la controverse de l'époque sur ce sujet.

Il a mené de 1806 à 1808, avec François Arago (de 12 ans son cadet), une longue campagne géodésique en Espagne, afin de prolonger jusqu'aux Baléares la mesure du méridien (accomplie

de 1792 à 1798 par Delambre et Méchain) de Dunkerque à Barcelone, dans le but de définir le mètre. Juste auparavant, en 1804, Biot avait été mis en détachement à l'Observatoire de Paris pour effectuer, à la demande de Laplace, une étude de la réfraction astronomique. Dans ce cadre, il réalisa en 1805 avec Arago (âgé seulement de 19 ans) des mesures de l'indice de réfraction de différents gaz, et notamment de l'air plus ou moins humide, pour savoir si l'humidité influe sur la réfraction astronomique; leur verdict contredit les idées de l'époque : « Il ne nous a pas paru que l'état hygrométrique de l'air eût une influence appréciable sur sa force réfringente » [2]. Peu après, Arago et lui avaient rappelé à Laplace, qu'ils côtoyaient à tour de rôle, l'intérêt de prolonger la mesure du méridien jusqu'aux Baléares : la latitude d'Ibiza étant symétrique de celle de Dunkerque par rapport à 45°, cela réduit les risques d'erreurs quant au calcul de la longueur d'un méridien entier de notre Terre aplatie, car l'extrapolation nécessaire ne fait plus intervenir l'aplatissement terrestre qu'à l'ordre 2. Ce projet plut à Laplace, et le 2 mai 1806, le Bureau des longitudes chargea Biot et Arago de l'accomplir. Lors de cette mission, ils ont rattaché par triangulation l'île d'Ibiza à la côte d'Espagne, grâce à un triangle dont un côté au-dessus de la mer atteint les 160 km : un record, et une prouesse d'observateurs ! Sur un tel trajet, les effets de réfraction peuvent être importants; Biot et Arago les observaient à la lunette, donc ils en voyaient mieux les détails. Qu'on en juge, par l'extrait ci-dessous :

**nous étions stationnés sur la montagne de Desierto de las Palmas, élevée de 727 mètres sur le bord de la mer, dans le royaume de Valence. Nous observions de nuit, au cercle répétiteur, les réverbères allumés dans l'île d'Yviza, sur la montagne de Campvey, élevée de 420<sup>m</sup> et distante de 161008<sup>m</sup> (41  $\frac{1}{5}$  lieues). C'étoit là un des côtés de notre grand triangle. Nous vîmes d'abord la lumière de Campvey simple, et semblable à une très-petite étoile, comme elle paroissoit ordinairement, et nous fîmes ainsi trois couples d'observations. Mais au quatrième couple, nous commençâmes à voir à Campvey deux lumières exactement dans la même verticale, et distantes d'une quantité que, sur le fil, nous estimâmes au moins de trois minutes. La vraie lumière, du moins celle que nous jugeâmes telle, étoit à sa place ordinaire. L'autre, que nous crûmes être la lumière factice, étoit plus élevée dans le ciel en réalité; ce qui la mettoit plus bas dans nos lunettes qui renversent. Elle étoit aussi plus grosse que l'autre, plus dilatée et un peu irisée. Nous la prîmes d'abord pour une étoile, bien étonnés d'en rencontrer une précisément dans le vertical des réverbères de Campvey. Mais enfin cette prétendue étoile ne changeant point de place, il fallut bien y reconnaître une image extraordinaire. Bientôt nous ne vîmes pas seulement deux lumières, mais trois, quatre ou davantage.**

[3, p. 13–14] Source : Google Books



**FIGURE 1.** Fascicule contenant l'article de Biot [19], disponible aussi sur <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6506570n>

En 1809, Biot fut nommé professeur d'astronomie à la Faculté des sciences de Paris, nouvellement créée; en 1815, il fut élu membre étranger de la Royal Society. En 1817, le Bureau des Longitudes lui confia la tâche de prolonger la méridienne au nord de l'Écosse, jusqu'à la plus septentrionale des îles Shetland; et en 1824, le même Bureau le chargea de mesurer, le long de l'arc de parallèle allant quasiment de Fiume (sur la côte Adriatique) à Bordeaux, la longueur d'un pendule battant la seconde — et il y détecta des irrégularités très sensibles.

Nul doute que ses multiples observations géodésiques lui ont donné matière à réflexion sur les phénomènes de réfraction, dont il est devenu fin connaisseur. Sur ce sujet, dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences on ne compte pas moins de 6 textes de sa plume pour la période 1836–1838 [4–9], et 8 pour 1854–1855 à cause d'une controverse avec l'astronome Hervé Faye [10–17]; à cela s'ajoutent ses travaux pour le *Journal des Savants* [18] ainsi que pour la *Connaissance des Tems* [19, 20]. Entre ces nombreuses publications, il y a d'inévitables redites; nous choisissons d'en commenter une [19] qui représente une avancée très significative dans la théorie de la réfraction astronomique, et où sont rédigées les démonstrations d'importantes trouvailles — qu'il redonne à des séances de l'académie des sciences [4, 5] mais seulement de manière qualitative. Il s'agit de :

J.-B. Biot, « Sur les réfractions astronomiques », *Additions à la Connaissance des Tems* 1839 (1836), p. 3–114.

Le fascicule (voir Figure 1) contenant cet article est disponible sur : <https://cdt.imcce.fr/items/show/188>

## 2. Résumé et commentaires

Biot n'est pas le premier à écrire sur la réfraction astronomique dans les *Additions à la Connaissance des Tems* : entre 1762 et 1796 il y a été précédé par Cassini, Bradley et Lacaille. Dans une belle introduction de 7 pages, Biot rappelle notamment (p. 6) que, pour une distance zénithale apparente  $Z' < 74^\circ$ , une excellente approximation de la réfraction  $\chi_S$  au niveau de l'observateur  $S$  dépend seulement des conditions de température et de pression en  $S$  (conformément au théorème d'Oriani — voir le sous-paragraphe 4.1 de notre exposé des « propriétés remarquables de la réfraction astronomique [...] » [21], dans ce numéro spécial); et il pointe, dans les travaux de

Laplace, l'hypothèse implicite d'uniformité de composition de l'atmosphère, dont il veut se démarquer — car c'est une « uniformité qui ne peut avoir lieu à la rigueur, ne fût-ce qu'en vertu des conditions d'existence de la vapeur aqueuse, et dont, en outre, nous ne pouvons répondre pour les couches aériennes qui nous sont inaccessibles [...] » (p. 4). Cela lui fait appliquer la règle du doute méthodique au théorème d'Oriani : « Mais, puisque l'uniformité de composition des couches atmosphériques que nos tables admettent n'est pas et ne peut pas être rigoureuse, jusqu'à quel point leur diversité possible affectera-t-elle l'indépendance dont il s'agit ? » (p. 6) ; il ne donne pas la réponse dans son texte, mais nous pouvons remarquer que l'on peut esquiver et déplacer le problème soulevé par Biot en définissant la hauteur réduite  $H_1$  de l'atmosphère à partir du profil de réfractivité  $\eta$  (comme nous l'avons fait au sous-paragraphe 4.1 de [21]) plutôt qu'à partir de celui de masse volumique  $\mu$ ... Cinq parties s'ensuivent.

Dans la première (p. 9–33), intitulée « Conditions d'équilibre de l'atmosphère », Biot étudie la pression dans l'atmosphère terrestre, ainsi que sa masse volumique, et l'influence de l'hygrométrie sur ces paramètres.

La 2<sup>e</sup> partie (« Détermination des réfractions astronomiques », p. 34–75) est celle qui contient la démonstration de son théorème (voir le sous-paragraphe 7.1 de [21]) que l'on pourrait aussi qualifier, en paraphrasant Poirier (son biographe [1]), de théorème méconnu de l'optique, donnant une expression de  $d\chi_S/d\psi'(0)$  que Biot appelle le « coefficient varié de la réfraction »,  $\psi'$  désignant la hauteur (angulaire) apparente et  $\chi_S$  la réfraction pour l'observateur  $S$ . Il mentionne (p. 42) la possibilité du guidage de la lumière dans l'air, et prédit la bande vide de Wegener : « les trajectoires [lumineuses] jouissant de cette propriété seraient rentrantes sur elles-mêmes, et comprises dans l'intérieur de l'atmosphère réfringente ; de sorte que la vision des objets extérieurs ne serait pas généralement possible par une trajectoire horizontale. » ; mais il ne pense pas qu'elle se produise, et il le dit aussi à l'Académie [4] — hélas cette opinion est erronée (voir le document [22] lié à [21], ainsi que [23], et les paragraphes 2.2 et 3 de [24], dans ce numéro spécial). Conformément à ses mesures de 1805 avec Arago sur l'indice de l'air plus ou moins humide et d'autres gaz, il note (p. 71) que les effets de la vapeur d'eau sont trop faibles pour expliquer « des variations accidentelles de 5'' et 6'' à 75° de distance zénithale, comme Delambre assure en avoir observées. » — pour des informations quantitatives sur l'effet de l'humidité, voir le paragraphe 3 de [25]. Il remarque numériquement (p. 73) que la structure de la haute atmosphère joue très peu sur la réfraction horizontale, et il explique pourquoi — voir la fin du sous-paragraphe 4.1 de [21].

Dans la 3<sup>e</sup> partie (« Calcul des réfractions, par quadratures numériques à toute distance du zénith, et dans une constitution quelconque d'atmosphère », p. 76–94) Biot utilise le changement de variable (voir le paragraphe 6 de [21], et [26]) qu'il vient d'introduire et qui lui a servi à prouver son théorème, pour calculer numériquement l'intégrale de réfraction par la méthode de Simpson (car il utilise « l'expression parabolique » pour un intervalle élémentaire), ce qu'il fait avec 13 points tirés de ses données sur le profil de réfractivité en fonction de l'altitude ; il montre que sa méthode redonne à 1,247'' près la réfraction horizontale calculée par Ivory, et conclut ce calcul par un commentaire intéressant : « Il se peut que cette petite différence vienne de ce que l'interpolation n'aurait pas été tout-à-fait assez serrée dans ses premiers termes ; mais je n'oserais pas non plus répondre qu'elle ne soit pas due à quelques petites erreurs dans l'appréciation des dernières décimales des nombres que ces calculs nécessitent. » (p. 81). Ensuite il applique sa méthode à l'atmosphère isotherme, puis à celle polytropique d'indice 1, et discute la formule de Bradley. Il montre en outre que sa méthode fonctionne aussi pour des objets vus sous l'horizon astronomique.

Dans la 4<sup>e</sup> partie (p. 95–107), il prouve en détail que la table des réfractions de Newton a été construite avec une atmosphère isotherme.

Dans la 5<sup>e</sup> partie (p. 108–114) il présente, en l'affinant, le modèle d'atmosphère d'Ivory (dont il vante avec tact l'élégance par rapport à celui de Laplace, vu au paragraphe 4 de notre « panorama historique [...] » [27] dans ce numéro spécial). Laplace voulait, par une combinaison linéaire

de deux modèles (voir la relation (34) de [27]), neutraliser les défauts opposés de chacun d'eux; mais il faisait intervenir dès le départ une variable  $Y$  qui n'a pas de signification physique directe. Le remède décrit dans cette partie consiste à combiner encore deux modèles dont les relations fondamentales font intervenir des variables physiques basiques ( $\mu$  et la pression  $P$ ) : le modèle isotherme où  $P$  varie proportionnellement à  $\mu$  (voir le sous-paragraphe 2.2 de [27]), et le modèle polytropique d'indice 1 où  $P$  varie proportionnellement à  $\mu^2$  (voir encore le sous-paragraphe 2.2 de [27]). C'est *a priori* meilleur que les modèles de Cassini, Newton, Simpson, Mayer, Bouguer, etc., qui ont deux paramètres libres : d'une part parce que ce nouveau modèle en a trois (la réfractivité au niveau de l'observateur, et les deux coefficients de la combinaison linéaire des lois reliant  $P$  à  $\mu$ ), d'autre part parce que les modèles combinés ont aussi des défauts opposés (l'un donne des réfractions trop fortes, et l'autre trop faibles). Ce modèle est élégant; mais Biot y pointe quelques faiblesses, et ne présente pas le calcul de l'intégrale de réfraction correspondante — détaillé par Ivory [28, p. 458–475].

Biot fait souvent référence à Ivory, Delambre, Kramp et, bien sûr, à « l'auteur de la *Mécanique céleste* » — Laplace, pour qui il avait volontairement relu, à partir de 1799, les épreuves du premier volume de son traité, en cours de publication.

Pour plus de citations, voir A. T. Young. (Page consultée le 12 janvier 2022), *Annotated bibliography of mirages, green flashes, atmospheric refraction, etc.*, [En ligne]. Adresse URL : <https://aty.sdsu.edu/bibliog/bibliog.html>

### 3. Présentation illustrée de quelques démonstrations importantes

Dans le mémoire sur les mesures des pouvoirs réfringents des gaz faites avec Arago en 1806, Biot rappelait, en ce qui concerne le phénomène de réfraction, que « Newton a prouvé qu'il résulte d'une attraction que les corps exercent sur les molécules de lumière » dont la vitesse devient supérieure à celle qu'elles ont dans le vide [2].

Trente ans plus tard, suite aux succès croissants remportés par Augustin Fresnel (1788–1827) avec la théorie ondulatoire de la lumière à partir de 1816, Biot serait-il devenu plus circonspect? Car dans le présent article [19], il ne parle plus de molécule de lumière, mais seulement de « l'élément lumineux » — ou, uniquement en note de bas de page, de « corpuscule lumineux » [19, p. 34]. Cependant, Biot ne se détachera jamais d'un mode d'expression lié à celui de Laplace, dont il avait relu les épreuves de son *Traité de Mécanique Céleste* (voir le paragraphe 4 de [27]) : il reste que « l'élément lumineux » subit une « force centrale variable » ayant pour effet *a priori* de changer la « vitesse de la lumière » [19, p. 34] et de courber la « trajectoire décrite » [19, p. 38] ou le « trajet de l'élément lumineux » [19, p. 41] — Biot parle peu de « rayon lumineux » [19, p. 38]. Les relations fondamentales utilisées par lui rejoignent celles de *l'analogie* cinématique pour les rayons (que nous utilisons aussi dans [21]), où la vitesse de la particule *fictive* de lumière sur une « trajectoire lumineuse » [19, p. 39] dans l'air est proportionnelle à son indice de réfraction  $n$  et change le long du rayon en lien avec la « force réfringente » [19, p. 36, 38]. Nous savons que les lois de cette analogie peuvent se déduire de l'électromagnétisme via l'équation de l'eikonale; pour Biot [19], leur validité était à tout le moins un fait d'expérience, sur lequel il se basait sans chercher à le justifier précisément.

Il faut rajouter à ces lois la proportionnalité entre le « pouvoir réfringent »  $n^2(r) - 1$  et la « densité » du gaz (p. 34). Mais Biot ne suppose pas uniforme la constante de proportionnalité (positive), puisqu'il veut tenir compte de l'hétérogénéité de composition de l'atmosphère *a priori*; il le dit très explicitement :

« [...] quant aux dernières couches de l'atmosphère, on ne peut pas savoir si la valeur de [cette constante] s'y continue exactement la même; car, non-seulement

elles nous sont inaccessibles, mais, comme je le prouverai plus tard, leur état propre ne peut pas même nous être indiqué par les réfractions observées ici-bas.» (p. 51).

### 3.1. *Changement de variable de Biot–Auer–Standish*

Un changement de variable astucieux est la première découverte importante présentée dans la 2<sup>e</sup> partie de son mémoire [19]. Nous allons voir tout de suite (en nous aidant de la Table 1) comment Biot l'introduit.

#### *Correspondance des notations*

**TABLE 1.** Notations

Notations de Biot [19]	Notations de Dettwiller [21, 27] dans ce numéro de <i>C. R. Phys.</i>	Notations de Auer & Standish [26]	Indications [et unités usuelles]
O	S		Point où se trouve l'observateur recevant un rayon lumineux (R) en provenance du point A d'un astre
$n(r)$	$n(r)$	$\mu(r)$	Indice de réfraction de l'air, dont la distribution est supposée à symétrie sphérique de centre C
$n_1$	$n_S$	$\mu_o$	Indice au niveau de l'observateur
$\nu$	$\theta$		Angle des coordonnées polaires (d'origine C) pour un point courant M de (R) [°, ', '' ]
$\nu'$	$\alpha$	$\psi$	Angle entre (R) et le rayon vecteur de M, d'origine C [°, ', '' ]
$V'$			Valeurs de $\alpha$ telles que $Z' = 0$ [°, ', '' ]
$d\theta = d\nu + d\nu'$	$ds/\mathcal{R}$ , noté $d\chi = d\theta + d\alpha$		Réfraction élémentaire due à un élément de longueur $ds$ de (R) dont $\mathcal{R}$ est le rayon de courbure [rad]
$\theta_1$	$Z'$	$\psi_o = z = \zeta$	Distance zénithale apparente de A pour S [°, ', '' ]
$R_{\theta_1}$	$\chi_S$	$R$	Réfraction astronomique de A pour S [°, ', '' ]
$\rho, \rho_1$	$\mu, \mu_S$		Masse volumique l'air en M, en S [kg · m <sup>-3</sup> ]
$n^2(\lambda_0, M) - 1 = 4k(\lambda_0, M)\rho(M)$ $n_1^2 - 1 = 4k_1\rho_1$	$n(\lambda_0, M) - 1 = C(\lambda_0, M)\mu(M)$ $n_S - 1 = C\mu_S$		Lois empiriques sur le « pouvoir réfringent » (colonne 1) ou la réfractivité (colonne 2), en M puis en S
$a$	$r_S$	$r_o$	Distance CS entre l'observateur et le centre de la Terre (quasiment le rayon terrestre) [km]
$(\delta\theta/\delta\theta_1)_q$	$(d\chi_S/dZ')(90^\circ)$		Dérivée de la réfraction par rapport à $Z'$ , sur l'horizon astronomique
$l$	$H_1$		Hauteur réduite de l'atmosphère

Au point O, où la trajectoire se termine,  $\nu'$  est toujours égal à la distance apparente  $\theta_1$ . On verra tout-à-l'heure que dans l'état d'équilibre de l'atmosphère terrestre, la faiblesse de l'action réfringente de l'air, relativement à sa densité, fait que, sur la même trajectoire, cet angle diminue graduellement à mesure que le point M s'éloigne du centre, et devient toujours nul à une distance infinie. Mais dans le progrès de son décroissement il y a une distinction physique à faire, selon que l'étendue de l'atmosphère réfringente est supposée limitée ou illimitée; car, dans ce dernier cas, la courbure de la trajectoire se continue aussi indéfiniment, et la dégradation progressive des pouvoirs réfringents se fait mathématiquement sentir à toute distance dans le décroissement de l'angle  $\nu'$ . Mais, si l'étendue de l'atmosphère réfringente est limitée, l'angle  $\nu'$  est assujéti à son influence seulement jusqu'à la dernière valeur que cette étendue lui assigne; après quoi son décroissement ultérieur suit indéfiniment la loi plus simple qui convient à une ligne droite.

Les variations de l'angle  $\nu'$  sur une même trajectoire sont réglées par la théorie des forces centrales. En effet, dans tout mouvement opéré par une pareille force, les vitesses, en divers points d'une même trajectoire, sont réciproques aux longueurs des perpendiculaires menées du centre des forces sur les tangentes. Ici, pour le point M, la perpendiculaire CP est  $r \sin \nu'$ ; pour le point O, en nommant  $a$  le rayon de la couche où l'observateur se trouve, elle est CP<sub>1</sub>, ou  $a \sin \theta_1$ . En outre, d'après la théorie des attractions à petites distances, la vitesse en M est  $\sqrt{1 + 4k_g}$ ; et en O,  $\sqrt{1 + 4k_{g_1}}$ . On aura donc généralement

$$(2) \quad \frac{r \sin \nu'}{a \sin \theta_1} = \frac{\sqrt{1 + 4k_{g_1}}}{\sqrt{1 + 4k_g}} \quad \text{ou} \quad \sin \nu' = \frac{a}{r} \frac{\sqrt{1 + 4k_{g_1}}}{\sqrt{1 + 4k_g}} \sin \theta_1.$$

Dans cette dernière expression le coefficient de  $\sin \theta_1$  est la valeur parti-

[19, p. 41]

culière de  $\sin \nu'$  qui convient à la trajectoire horizontale de l'observateur, c'est-à-dire à celle qui arrive au point O sous la distance apparente  $\theta_1 = 90^\circ$ . Désignant donc spécialement par  $V'$  les angles  $\nu'$  relatifs à cette trajectoire, pour la distance  $a$  du centre, nous aurons, dans une même couche quelconque, ayant pour rayon  $r$ , les deux équations simultanées :

$$(2) \quad \sin V' = \frac{a \sqrt{1 + 4k_{g_1}}}{r \sqrt{1 + 4k_g}}, \quad \sin \nu' = \sin V' \sin \theta_1.$$

Ces valeurs de  $\sin V'$  et de  $\sin \nu'$  seront toujours positives dans notre atmosphère, parce que la force réfringente centrale y étant attractive, n'engendre que des trajectoires concaves vers le centre, sur lesquelles l'angle  $\nu'$  ne peut jamais devenir négatif, ni plus grand que  $180^\circ$ .



Veut-on savoir à quelle distance du centre la trajectoire correspondante à la distance  $\theta_1$ , devient horizontale ? Il n'y a qu'à supposer  $\sin v' = 1$  ; et l'on aura , dans les couches où cela a lieu ,

$$r \sqrt{1 + 4k_\xi} = a \sin \theta_1 \sqrt{1 + 4k_{1,\xi_1}}.$$

Lorsque la constitution adoptée pour l'atmosphère sera assignée,  $k_\xi$  sera donnée en  $r$ . En le substituant dans cette équation l'on en conclura  $r$  qui sera la distance au centre des couches, du point où le phénomène a lieu. Ce résultat s'obtiendra ainsi sans intégration, comme je l'ai annoncé précédemment.

[19, p. 42]

[...]

A cet effet, prenons le changement différentiel de  $\sin V'$ , pour un accroissement infiniment petit de la hauteur, égal à  $+ dr$ . L'expression générale de  $\sin V'$ , nous donnera

$$d. (\sin V') = - \frac{\sin V'}{r(1 + 4k_\xi)} \left[ 1 + 4k_\xi + 2r \frac{d(k_\xi)}{dr} \right] dr.$$

[19, p. 43]

La concavité des trajectoires vers le centre des couches, rend  $\sin V'$  toujours positif. Donc, puisque nous supposons  $dr$  positif, le signe de la différentielle  $d(\sin V')$ , sera contraire au signe de la fonction....  $1 + 4k_\xi + 2r \frac{d(k_\xi)}{dr}$ . Cette fonction joue un très grand rôle dans les réfractions.

D'après un théorème que je démontrerai plus tard, dans toutes les atmosphères où  $\frac{d(k_\xi)}{dr}$  est négatif, cette fonction est positive, si la réfraction astronomique est plus grande immédiatement au-dessous de l'horizon qu'à l'horizon même. C'est ce qui a lieu dans notre atmosphère, depuis le niveau de la mer jusqu'aux sommets des plus hautes montagnes où l'on ait pu observer les réfractions. Ainsi, dans tout cet intervalle, l'angle  $V'$  décroît à mesure qu'on s'élève.

[19, p. 44]

[...]

Pour y parvenir, il faut établir entre les éléments consécutifs de chaque trajectoire la relation suivante, qui a lieu dans toutes les courbes continues :

$$(3) \quad \text{tang } v' = r \frac{dv}{dr};$$

et, en la joignant aux deux premières,

$$(1) \quad \theta = v + v', \quad (2) \quad \sin v' = \sin V' \sin \theta_1,$$

on en déduira toutes les équations différentielles qui régulent le mouvement de la lumière dans une atmosphère composée de couches sphériques, dont les pouvoirs réfringents varient d'une manière quelconque en passant d'une couche à une autre.

Veut-on, par exemple, en déduire la nature des trajectoires décrites? Il n'y a qu'à éliminer  $v'$  entre (2) et (3). On a ainsi

$$(4) \quad dv = \pm \frac{\sin \theta_1 \sin V' dr}{r \sqrt{1 - \sin^2 V' \sin^2 \theta_1}},$$

c'est-à-dire,

$$dv = \pm \frac{adr \sin \theta_1 \sqrt{1 + 4k_1 \xi_1}}{r^2 \sqrt{1 + 4k_1 \xi_1 - \frac{a^2}{r^2} (1 + 4k_1 \xi_1) \sin^2 \theta_1}}.$$

Le signe supérieur du radical s'applique au cas où la distance apparente  $\theta_1$  est égale à  $90^\circ$ , ou moindre; parce qu'alors la trajectoire, à partir du point O, s'éloignant du centre,  $v$  doit croître en même tems que  $r$ . Lorsque  $\theta_1$  surpasse  $90^\circ$ , la trajectoire commence au contraire par se rapprocher du centre, ce qui exige que l'on donne au radical le signe négatif.

[19, p. 48]

[...]

de former l'expression immédiate de  $d\theta$ , qui est l'élément différentiel de la réfraction. On l'obtiendra en différentiant (1) et (2). En effet, la première donne

$$d\theta = dv + dv';$$

et la seconde

$$r \cos v' dv' + \sin v' dr = - \frac{a \sin \theta_1 \sqrt{1 + 4k_1 \xi_1}}{(1 + 4k_1 \xi_1)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2 \frac{d(k_1 \xi_1)}{dr} \cdot dr;$$

ou, en profitant de l'équation (2)

$$r \cos v' dv' + \sin v' dr = - \frac{r \sin v'}{1 + 4k_1 \xi_1} \cdot 2 \frac{d(k_1 \xi_1)}{dr} \cdot dr.$$

Or l'équation (3) donne

$$dr \sin v' = r dv \cos v'.$$

Substituant cette valeur, tout devient divisible par  $r \cos \nu'$ . Le premier membre se réduit ainsi à  $d\nu' + d\nu$  ou  $d\theta$ ; de sorte que l'on a, en définitif,

$$(5) \quad d\theta = - \frac{2 \cdot \frac{d(k_\xi)}{dr} \cdot r d\nu}{1 + 4k_\xi}.$$

Si l'on élimine  $d\nu$  au moyen de sa valeur trouvée plus haut, et qu'on écrive simplement  $d(k_\xi)$  pour  $\frac{d(k_\xi)}{dr} dr$ , il vient

$$(6) \quad d\theta = - \frac{2a \sin \theta_1 \sqrt{1 + 4k_{\xi_1}} \cdot d(k_\xi)}{(1 + 4k_\xi) r \sqrt{1 + 4k_\xi - \frac{a^2}{r^2} (1 + 4k_{\xi_1}) \sin^2 \theta_1}}.$$

D'après le mode de décroissement que nous avons attribué au pouvoir réfringent  $4k_\xi$ ,  $d(k_\xi)$  est négatif quand  $r$  augmente; et, au contraire,  $d\theta$  est alors positif. Il faut donc, dans l'expression de  $d\nu$ , attribuer au radical le signe positif, comme je l'ai fait ici.

Les équations (4), (5), (6) sont analogues à celles que l'on trouve dans la *Mécanique céleste*, et elles leur deviennent identiques lorsque l'on suppose le coefficient  $k$  constant pour toute l'étendue de l'atmosphère, comme l'a fait M. Laplace, et comme l'ont admis également les géomètres qui se sont occupés après lui des réfractions astronomiques. Puisque nos

[19, p. 49]

[...]

Je vais maintenant former une nouvelle expression de l'élément différentielle de la réfraction, qui nous sera d'un très grand usage dans la suite de ce travail.

Si, dans l'équation (5), on remplace  $d\nu$  par sa valeur  $d\theta - d\nu'$ , on en tire  $d\theta$  en  $d\nu'$ , ce qui donne

$$(7) \quad d\theta = \frac{2r \frac{d(k_\xi)}{dr}}{1 + 4k_\xi + 2r \frac{d(k_\xi)}{dr}} \cdot d\nu'.$$

Le coefficient de  $d\nu'$  est ici indépendant de  $\theta_1$ . Il est donc commun à

[19, p. 51]

toutes les trajectoires dirigées au même observateur, sous toutes les distances zénithales apparentes. Faisons, pour abrégé,

$$(7) \quad V = \frac{2r \frac{d(k\xi)}{dr}}{1 + 4k\xi + 2r \frac{d(k\xi)}{dr}};$$

il viendra  $d\chi = V dv'$ .

A quoi il faut toujours joindre les équations (2), savoir,

$$(2) \quad \sin v' = \sin V' \sin \theta, \quad \sin V' = \frac{a \sqrt{1 + 4k_1 \xi_1}}{r \sqrt{1 + 4k\xi}}$$

[19, p. 52]

Ainsi Biot a-t-il trouvé, en passant à la variable  $\alpha$ , une différentielle dont l'intégrale, qui donne la réfraction, n'est en général pas impropre quand  $Z' = 90^\circ$ , et qui se prêtera donc bien plus aisément et plus précisément au calcul numérique de la réfraction horizontale par la méthode de Simpson, qu'il effectuera p. 76–81. Avec nos notations, la première équation (7) de Biot [19, p. 51] s'écrit en effet

$$d\chi = \frac{r \left( \frac{d}{dr} \frac{n^2}{2} \right)}{n^2 + r \left( \frac{d}{dr} \frac{n^2}{2} \right)} d\alpha = \frac{r \frac{dn}{dr}}{n + r \frac{dn}{dr}} d\alpha = \frac{d \ln n / d \ln r}{1 + (d \ln n / d \ln r)} d\alpha \quad (1)$$

qui donne (au signe près à cause du sens de sommation) l'expression (41) du paragraphe 6 de [21]. Si Biot ajoute qu'« il faut toujours joindre les équations (2) », c'est parce que pour intégrer  $d\chi$  avec la variable angulaire  $\alpha$ , l'intégrande  $(d \ln n / d \ln r) / [1 + (d \ln n / d \ln r)]$  doit être exprimé en fonction de  $\alpha$ , alors qu'au départ on l'a en fonction de  $r$ ; il s'agit donc de relier  $r$  à  $\alpha$  pour le rayon donnant la réfraction  $\chi_S(Z')$  calculée, or puisque le profil de  $\mu(r)$  est supposé connu les équations (2) de Biot [19, p. 52] donnent une relation entre  $\alpha$ ,  $r$  et  $Z'$ , dont il faut tirer (au moins numériquement)  $r(\alpha, Z')$  afin d'en déduire  $\chi_S(Z')$  par intégration (numérique) de  $d\chi$  par rapport à  $\alpha$ .

L'aspect laborieux de cette démonstration par Biot est en grande partie dû à son style d'écriture très prolixe (même pour son époque), rempli de nombreuses digressions — on pourra constater qu'entre les pages 41 et 52 de Biot [19] nous en avons sauté plusieurs ! Mais au moment où il écrivait, tant de choses étaient encore relativement nouvelles, méconnues (par exemple, le peu d'influence de la vapeur d'eau) ou très discutables car inconnues (comme la structure de la haute atmosphère et sa composition, etc.), que l'exposé ne pouvait être court s'il voulait être sérieux et formateur. On appréciera le contraste, sur exactement le même sujet, avec la sobriété et la concision de l'article d'Auer et Standish [26] (accepté une vingtaine d'années après sa soumission initiale !); ils proposaient sous forme de photocopie dès 1979 [29], indépendamment de Biot, le même changement de variable que lui, et une implémentation utilisant la méthode itérative de Newton–Raphson pour relier  $r$  à  $\alpha$  (voir l'extrait ci-dessous). La similarité avec le travail de Biot a été mise en évidence par Andrew Young en 2000 [30], [31, section 4.2].

THE ASTRONOMICAL JOURNAL, 119:2472–2474, 2000 May  
 No copyright is claimed for this article. Printed in U.S.A.

## ASTRONOMICAL REFRACTION: COMPUTATIONAL METHOD FOR ALL ZENITH ANGLES

LAWRENCE H. AUER

Los Alamos National Laboratory, Mail Stop B226, Los Alamos, NM 87545; lha@lanl.gov

AND

E. MYLES STANDISH

Jet Propulsion Laboratory, Mail Stop 301-150, 4800 Oak Grove Drive, Pasadena, CA 91109; ems@smyles.jpl.nasa.gov

Received 2000 January 19; accepted 2000 January 20

### ABSTRACT

It is shown that the problem of computing astronomical refraction for any value of the zenith angle may be reduced to a simple, nonsingular, numerical quadrature when the proper choice is made for the independent variable of integration. The angle between the radius vector and the light ray is such a choice. The implementation of the quadrature method is discussed in its general form and illustrated by means of an application to a piecewise polytropic atmosphere. The flexibility, simplicity, and computational efficiency of the method are evident.

*Key words:* methods: numerical

La démonstration tient en une vingtaine de courtes lignes [26, p. 2472].

The astronomical refraction,  $R$ , for a spherically symmetric atmosphere is given by the integral

$$R = \int_0^{\ln \mu_0} \tan \psi \, d(\ln \mu), \quad (1)$$

subject to the invariant relation

$$\mu r \sin \psi = \mu_0 r_0 \sin \psi_0, \quad (2)$$

where  $\mu$  is the index of refraction,  $r$  is the distance from the center of Earth, and  $\psi$  is the angle between the light ray and the radius vector, as shown in Figure 1. The subscript  $0$  denotes the values at the observer's station. Thus,  $\psi_0$  is the apparent zenith angle, often denoted by  $z$  or  $\zeta$ .

In principle,  $R$  could be calculated directly from equation (1) by numerical quadrature, but because of numerical difficulties (for  $\psi \approx 90^\circ$ ), it is preferable to use  $\psi$  itself as the variable of integration. Taking the logarithmic derivative of equation (2) and substituting into equation (1),

we find

$$R = - \int_0^{\psi_0} \frac{d(\ln \mu)}{d(\ln r \mu)} \, d\psi = - \int_0^{\psi_0} \frac{d(\ln \mu)/d(\ln r)}{1 + d(\ln \mu)/d(\ln r)} \, d\psi, \quad (3)$$

where the value of the integrand as a function of  $\psi$  is given by the solution of equation (2).

The integrand of equation (3) is a well-behaved function. It would become singular only for the unlikely atmospheric model given by the relation  $\mu \propto 1/r$ . Even so, in such a case,  $\psi = \text{const}$ , as seen by equation (2), and the integral of equation (1) would be trivial.

L'astucieuse trouvaille de Biot, qui n'a guère suscité d'écho au XIX<sup>e</sup> faute de calculatrices performantes et était tombée dans l'oubli, a connu une résurrection informatique depuis sa redécouverte indépendante par Auer et Standish ! En 1985 Hohenkerk et Sinclair ont proposé une implémentation numérique plus complète et fourni le code Fortran [32] pour le modèle d'atmosphère du *Royal Greenwich Observatory* reprenant celui de Garfinkel [33] et Saastamoinen [34] (une troposphère polytropic surmontée d'une stratosphère isotherme). Cette procédure a été tellement appréciée qu'elle est devenue la technique standard, recommandée par l'*Explanatory supplement to the Astronomical Almanac* depuis 1992. Malgré cette caution, elle est concurrencée [35] par la méthode de Kivalov et Young, et ne doit pas être considérée comme universelle, car elle ne permet pas de traiter les cas où il y a un chenal optique (voir le document [22] lié à l'article [21]) : l'intégrande diverge pour, entre autres, la valeur de  $\alpha$  correspondant au bord supérieur du chenal; et, comme l'a remarqué Andrew Young il y a une vingtaine d'années, la méthode itérative de Newton–Raphson fait de même au voisinage de ce bord [36]. La procédure d'Auer–Standish–Hohenkerk–Sinclair fonctionne bien pour l'atmosphère standard ainsi que pour le modèle du *Royal Greenwich Observatory*, mais elle nécessite des corrections [36], notamment pour des cas plus difficiles comme ceux où il y a un chenal optique.

3.2. Théorème de Biot

Nous avons vu au sous-paragraphe 7.1.3 de [21] que le changement de variable de Biot est un bon préliminaire pour démontrer son théorème. C'est pourquoi la démonstration de celui-ci commence à l'alinéa suivant la fin de l'extrait précédent de [19], sans aucun sous-titre, ce qui fait que ce début passe inaperçu. Dans un premier temps, Biot doit préciser son vocabulaire et poser des notations supplémentaires; laissons-lui la parole.

L'expression  $Vd\nu'$ , que nous venons de former, nous montre que l'élément différentiel  $d\theta$  renferme deux causes de variabilité tout-à-fait distinctes. Ses valeurs diffèrent sur la même trajectoire à des hauteurs diverses,  $\theta_1$  restant constant. Elles diffèrent aussi d'une trajectoire à une autre, à hauteur égale. Alors c'est  $\theta_1$  seul qui change, et  $V$  reste constant. Pour distinguer ces deux genres de variabilité, je conserverai à la première le nom de différentielle, et je donnerai à la seconde le nom de *variation*, en employant la caractéristique particulière  $\delta$  pour exprimer ses effets infiniment petits.

Or, si nous faisons varier ainsi  $\theta_1$  d'une quantité infiniment petite  $\delta\theta_1$ , qui sera constante par rapport à la caractéristique  $d$ , comme l'est  $\theta_1$  lui-même, nous aurons

$$\frac{\delta \cdot d\theta}{\delta\theta_1} = V \frac{\delta \cdot d\nu'}{\delta\theta_1}, \quad \text{ou } d\left(\frac{\delta\theta}{\delta\theta_1}\right) = Vd\left(\frac{\delta\nu'}{\delta\theta_1}\right).$$

[19, p. 52]

Mais l'équation (2) étant variée, donne

$$\frac{\delta\nu'}{\delta\theta_1} = \frac{\sin V'}{\cos \nu'} \cos \theta_1.$$

Donc, puisque  $\theta_1$  est insensible à la caractéristique  $d$ ,

$$d\left(\frac{\delta\nu'}{\delta\theta_1}\right) = \cos\theta_1 \cdot d\left(\frac{\sin V'}{\cos \nu'}\right);$$

et, par suite,

$$d\left(\frac{\delta\theta}{\delta\theta_1}\right) = \cos\theta_1 \cdot Vd\left(\frac{\sin V'}{\cos \nu'}\right). \tag{a}$$

En intégrant les deux membres de cette dernière équation relativement à la caractéristique  $d$ ,  $\theta_1$  doit être considéré comme constant. Effectuant donc cette intégration par parties, il vient

$$\frac{\delta\theta}{\delta\theta_1} = \frac{\cos\theta_1 \cdot V \sin V'}{\cos \nu'} - \cos\theta_1 \int \frac{\sin V'}{\cos \nu'} \cdot dV.$$

La partie intégrée doit être prise depuis la limite extrême de l'atmosphère réfringente, jusqu'à la station où se trouve l'observateur. A ce dernier point on a toujours  $\nu' = \theta_1$ , et  $\sin V' = 1$  par la définition même de ces quantités. Quant à la fonction  $V$ , elle y prend une certaine valeur spéciale résultante du mode de constitution attribué à l'atmosphère, et que je désignerai par  $V_1$ . Ce sera aussi la valeur de la fonction  $\frac{\cos \theta_1 \cdot V \cdot \sin V'}{\cos \nu'}$  pour le point d'observation, quelle que soit la trajectoire que l'on considère.

(Dans l'équation précédente qui montre une intégration par parties, il faut considérer la variation du premier terme de l'intégration, entre les bornes, comme Biot l'explique juste en dessous) [19, p. 53]

Examinons maintenant l'autre limite. Si l'atmosphère réfringente est supposée indéfinie,  $V'$  y devient nul, ainsi que  $\nu'$ ; et comme la fonction  $V$  ne devient jamais infinie, et même, dans notre atmosphère, ne fait que décroître à mesure qu'on s'élève, le produit  $\frac{\cos \theta_1 \cdot V \sin V'}{\cos \nu'}$  s'évanouit à cette seconde limite, quel que soit  $\theta_1$ . La valeur définie totale de la partie intégrée est donc alors

$$+ 0 - V_1, \quad \text{ou} \quad - V_1.$$

Mais si l'atmosphère réfringente n'a qu'une étendue bornée, l'angle  $V'$  peut ne pas être nul à sa limite, et y prendre une certaine valeur particulière que je désignerai par  ${}_1V'$ . Marquant de même, par un indice antérieur, les valeurs spéciales de  $V$  et de  $\nu'$  qui y correspondent, la partie

[19, p. 53]

intégrée deviendra alors  $\frac{\cos \theta_1 \cdot V \sin {}_1V'}{\cos {}_1\nu'}$ ; et la valeur définie de toute l'intégrale effectuée sera

$$\frac{\cos \theta_1 \cdot V \sin {}_1V'}{\cos {}_1\nu'} - V_1.$$

De sorte qu'en la joignant à la partie qui reste à intégrer, on aura

$$(b) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \theta_1} = \frac{\cos \theta_1 \cdot V \sin {}_1V'}{\cos {}_1\nu'} - V_1 - \cos \theta_1 \int \frac{\sin V'}{\cos \nu'} dV.$$

Il importe de remarquer que  $\cos {}_1\nu'$  ne peut jamais devenir nul, quel que soit la trajectoire que l'on considère, dans des atmosphères où les points lumineux extérieurs sont visibles par des trajectoires horizontales non-rentrantes; car alors  $V'$  ne peut être  $90^\circ$  qu'à la station d'observation, et à plus forte raison aussi  ${}_1\nu'$ . Nous savons, en outre, que  ${}_1V$  n'est jamais infini. Conséquemment, le produit  $\frac{\cos \theta_1 \cdot V \sin {}_1V'}{\cos {}_1\nu'}$  s'évanouira toujours pour la trajectoire horizontale, relativement à laquelle la distance apparente  $\theta_1 = 90^\circ$ .

Or, je dis que le produit  $\cos \theta_1 \int \frac{\sin V'}{\cos \nu'} dV$  s'évanouira aussi dans la même circonstance. Car, à la vérité, la première valeur de  $\nu'$ , qui a lieu à la station d'observation, se trouve être alors  $90^\circ$ , parce qu'elle est toujours égale à  $\theta_1$ ; et ainsi  $\cos \nu'$  devient nul en ce point de la trajectoire, ce qui y rend infini le facteur  $\frac{\sin V'}{\cos \nu'}$ . Mais cela n'a lieu rigoureusement qu'en ce point unique de la trajectoire; car, pour tout autre, si peu élevé qu'il soit au-dessus de la station,  $\nu'$  devient moindre que  $90^\circ$ . Les éléments  $\frac{\sin V'}{\cos \nu'} dV$  de l'intégrale à effectuer sont donc tous infiniment petits, excepté un seul. Or, pour celui-là même,  $\nu'$  est toujours égal à  $\theta_1$ ; et il ne devient  $90^\circ$  qu'en même tems que lui. Séparons donc cet élément de tous les autres, en marquant d'un indice inférieur la valeur particulière de  $dV$  qui s'y rapporte, nous aurons alors généralement

$$\cos \theta_1 \int \frac{\sin V'}{\cos \nu'} dV = (dV)_1 + \cos \theta_1 \int \frac{\sin V'}{\cos \nu'} dV.$$

Le reste de l'intégration est supposé comprendre tous les autres éléments pour lesquels  $\nu'$  est moindre que  $90^\circ$ . Toute cette partie s'évanouira donc rigoureusement sous l'influence du facteur  $\cos \theta_1$ , lorsque  $\theta_1$  sera égal

[19, p. 54]

à  $90^\circ$ ; et il restera seulement l'élément différentiel unique  $(dV)_1$ , qui, étant infiniment petit par lui-même, sera insensible dans la valeur finie de  $\frac{\partial \theta}{\partial \theta_1}$ .

Conséquemment, quelle que soit la loi de décroissement des pouvoirs réfringents à mesure qu'on s'élève au-dessus de la couche où l'observateur est placé, que cette loi donne à l'atmosphère une étendue indéfinie, ou la termine à une valeur fixe de  $r$ , pourvu qu'au niveau de la station, et dans les couches situées au-dessus, il n'en résulte pas des trajectoires horizontales rentrantes, les termes multipliés par  $\cos \theta_1$ , dans l'expression de  $\frac{\partial \theta}{\partial \theta_1}$ , s'évanouiront toujours lorsque  $\theta_1$  sera égal à  $90^\circ$ , ce qui a lieu précisément pour la trajectoire qui arrive horizontale à l'observateur. Désignant donc par l'indice  $q$  la valeur particulière de  $\frac{\partial \theta}{\partial \theta_1}$  qui s'y rapporte, on aura simplement

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta_1}\right)_q = -V_1.$$



$V_r$  est la valeur de la fonction  $V$  au point où l'observateur se trouve, c'est-à-dire lorsque  $r = a$  et  $\xi = \xi_r$ . Désignant aussi par  $\left[ \frac{d(k\xi)}{dr} \right]_r$  la valeur particulière de  $\frac{d(k\xi)}{dr}$  qui a lieu en ce point, il viendra

$$(c) \quad \left( \frac{\partial \theta}{\partial \theta_r} \right)_r = - \frac{2a \left[ \frac{d(k\xi)}{dr} \right]_r}{1 + 4k_r \xi_r + 2a \left[ \frac{d(k\xi)}{dr} \right]_r}.$$

[19, p. 55]

On voit qu'à partir du milieu de la p. 54, Biot a dû traiter une intégrale impropre, et que les moyens à sa disposition pour cela étaient encore fort peu formalisés.

Rappelons que Biot supposait  $n^2(r) - 1$  proportionnel à la masse volumique de l'air; avec nos notations, cette dernière relation (c) de Biot [19, p. 55] s'écrit

$$\frac{d\chi_S}{dZ'}(90^\circ) = - \frac{r_S \left( \frac{d n^2}{dr} \right)_S}{n_S^2 + r_S \left( \frac{d n^2}{dr} \right)_S}, \quad (2)$$

soit, en introduisant  $\kappa_S = -(r_S/n_S)(dn/dr)_S$  qui est par définition le coefficient de réfraction en  $S$  (voir le sous-paragraphe 7.1.1 de [21]) :

$$\frac{d\chi_S}{d\psi'}(0) = - \frac{d\chi_S}{dZ'}(90^\circ) = \frac{r_S \left( \frac{dn}{dr} \right)_S}{n_S + r_S \left( \frac{dn}{dr} \right)_S} = \frac{-\kappa_S}{1 - \kappa_S}. \quad (3)$$

Biot n'indique pas le lien entre  $\kappa_S$  et le gradient thermique en  $S$ , ni ne donne explicitement  $\gamma_{Sh}$ , i.e.  $[d\psi/d\psi'(0)]^{-1}$ , mais le lien avec  $d\chi_S/d\psi'(0)$  est trivial (voir la relation (53) du sous-paragraphe 7.1.3 de [21]); on peut lui en faire crédit, d'autant plus que dans le second tome de son traité d'*Astronomie physique* (1811) il a calculé — quoique de manière trop simpliste — l'aplatissement de la Lune vue sur l'horizon [37, p. 558-560], ce qui témoigne de son intérêt ancien pour ce sujet.

On aura constaté, en suivant la démonstration de Biot, que son résultat (c) [19, p. 55] ne suppose pas l'atmosphère bien mélangée ; ayant conscience de la non-uniformité de l'hygrométrie en fonction de l'altitude, et dans le doute quant à l'apparition d'autres constituants de l'air à des altitudes encore non atteintes à son époque, Biot privilégiait la recherche de lois indépendantes de l'uniformité de composition de l'atmosphère. Nous achevons cet article en montrant l'endroit précis où, dans les équations, l'idée d'une composition variable de façon *a priori* inconnue avec l'altitude  $z$  complique le problème inverse (i.e. celui de la détermination de la structure de l'atmosphère à partir des mesures de réfraction à différentes distances zénithales), sur lequel, comme nous le verrons, Biot ne se faisait guère d'illusions.

### 3.3. Biot et le problème inverse

Biot considérait à tort l'atmosphère bornée, mais il savait à juste titre que l'influence de la structure de ses parties hautes est infime sur la réfraction [19, p. 112] : « [...] les valeurs observées des réfractions astronomiques ne peuvent rien nous apprendre de certain sur l'état réel des dernières régions de l'atmosphère, parce que la constitution et le mode de superposition de

couches qui les composent n'y exercent pas une influence appréciable pour nous. » — voir aussi [38], dans ce numéro spécial.

De plus, le traitement du problème inverse donnerait d'abord le profil d'indice  $n(z)$  en fonction de l'altitude  $z$ , à  $\lambda_0$  fixé. On pourrait en déduire simplement  $\mu(z)$  qui lui serait proportionnel, en appliquant la loi empirique de Gladstone–Dale, si l'on savait que sa constante de proportionnalité  $C$  (cf. la Table 1, au début du paragraphe 3) est indépendante de  $z$ . Mais cela suppose un titre molaire en vapeur d'eau indépendant de  $z$ , ce qui n'est pas vrai : il varie beaucoup sur les deux premiers kilomètres d'altitude — l'air n'est pas bien mélangé. À 20 °C et 1 atm, quand le degré hygrométrique varie de 0 à 100 %,  $\mu$  passe de 1,20411 à 1,20401 kg · m<sup>-3</sup>, soit une variation de -0,009 %; et pour la raie d de l'hélium à  $\lambda_0 = 588$  nm,  $n - 1$  passe de  $2,724 \times 10^{-4}$  à  $2,716 \times 10^{-4}$ , soit une variation de -0,3 % (voir le paragraphe 3 de [25]), donc  $C(\lambda_0, M)$  varie de -0,3 %. En 1836 déjà, Biot avait conscience de ce problème, quand il écrivait que son paramètre  $k$  (cf. la Table 1) est pour l'air « un coefficient dépendant de sa nature chimique, lequel, dans une atmosphère sphérique de composition non-uniforme, devra être supposé une fonction de  $r$  [...] » [19, p. 34].

« [...] l'air atmosphérique, même sec, n'est pas un gaz simple, mais un mélange d'oxygène [*sic*], d'azote, et de quelques millièmes d'acide carbonique tel qu'on le trouve naturellement à la surface de la terre. On s'est assuré que les proportions de ce mélange sont, à très peu près, sinon exactement, les mêmes, dans toutes les saisons, dans tous les climats, et à toutes les hauteurs que l'homme a pu atteindre. Cette uniformité paraît d'autant plus naturelle qu'elle s'accorde avec la loi physique de la diffusion des gaz [...] Néanmoins, on ne peut savoir si cette parfaite égalité de répartition [...] s'opère aussi complètement dans des espaces libres, sous des conditions de pression et de température aussi excessivement inégales qu'elles le sont depuis le haut jusqu'au bas de l'atmosphère; et il se pourrait qu'elle dût y rester imparfaite, ou qu'elle exigeât, pour devenir complète, un temps que la durée de l'atmosphère n'aurait pas encore atteint. C'est pourquoi [...] nous [...] admettons [le coefficient  $k$ ] généralement comme susceptible de varier avec [la] hauteur [...]; et nous tâcherons de développer surtout les lois des réfractions astronomiques qui seraient indépendantes de pareilles variations [...] » [19, p. 36–37].

## Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

## Remerciements

L'auteur exprime sa reconnaissance au Dr. Andrew Young pour la mise à disposition de sa fabuleuse bibliographie en ligne (citée à la fin du paragraphe 2) et pour ses conseils personnalisés. Il remercie aussi, pour le document ayant permis de produire les images de [19] mises au paragraphe 3, le Dr. Siebren van der Werf et la Bibliothèque de l'Université d'Utrecht qui a scanné l'article [19] entier à la demande de celui-ci. Enfin, il exprime sa gratitude à Lillie Pons (secrétaire éditoriale — Centre Mersenne) pour son précieux travail technique sur les images de textes anciens.

## Références

- [1] J.-P. Poirier, *Jean-Baptiste Biot (1774–1862) Un savant méconnu*, Hermann, Paris, 2011.
- [2] J.-B. Biot, F. Arago, « Sur les affinités des corps pour la lumière, et particulièrement sur les forces réfringentes des différens gaz », *Mém. Inst.* **7** (1806), p. 39-66.
- [3] J.-B. Biot, *Recherches sur les réfractions extraordinaires qui ont lieu près de l'horizon*, Garnery, Paris, 1810.
- [4] J.-B. Biot, « Sur les réfractions astronomiques », *C. R. Acad. Sci.* **3** (1836), p. 237-244.
- [5] J.-B. Biot, « Note additionnelle à un mémoire sur les réfractions atmosphériques », *C. R. Acad. Sci.* **3** (1836), p. 504.
- [6] J.-B. Biot, « Sur la constitution des régions supérieures de l'atmosphère terrestre », *C. R. Acad. Sci.* **3** (1836), p. 597-604.
- [7] J.-B. Biot, « Remarques sur quelques points d'une discussion élevée dans la 7<sup>e</sup> réunion de l'Association Britannique pour l'avancement des sciences, partie Mathématique », *C. R. Acad. Sci.* **6** (1838), p. 71-78.
- [8] J.-B. Biot, « Sur la vraie constitution de l'atmosphère terrestre déduit de l'expérience, avec ses applications à la mesure des hauteurs par les observations barométriques, et au calcul des réfractions », *C. R. Acad. Sci.* **6** (1838), p. 390-401.
- [9] J.-B. Biot, « Addition au mémoire sur la constitution physique de l'atmosphère terrestre », *C. R. Acad. Sci.* **6** (1838), p. 479-481.
- [10] J.-B. Biot, « Note lue par M. Biot, à l'occasion du Compte rendu de la dernière séance », *C. R. Acad. Sci.* **39** (1854), p. 445-448.
- [11] J.-B. Biot, « Note sur les articles relatifs aux réfractions atmosphériques, inserés au dernier numéro du Compte rendu », *C. R. Acad. Sci.* **39** (1854), p. 517-519.
- [12] J.-B. Biot, « Sur les réfractions atmosphériques », *C. R. Acad. Sci.* **39** (1854), p. 567-580.
- [13] J.-B. Biot, « Sur la théorie des réfractions atmosphériques », *C. R. Acad. Sci.* **39** (1854), p. 708-721.
- [14] J.-B. Biot, « Sur la théorie des réfractions atmosphériques », *C. R. Acad. Sci.* **39** (1854), p. 817-828.
- [15] J.-B. Biot, « Sur la théorie des réfractions atmosphériques », *C. R. Acad. Sci.* **39** (1854), p. 933-949.
- [16] J.-B. Biot, « Sur le degré de confiance que l'on doit accorder aux Tables de réfractions actuelles. Détermination des circonstances hors desquelles leur application cesse d'être légitime », *C. R. Acad. Sci.* **40** (1855), p. 83-96.
- [17] J.-B. Biot, « Note de M. Biot sur l'ensemble des articles relatifs aux réfractions atmosphériques inserés par lui dans les Comptes rendus précédents », *C. R. Acad. Sci.* **40** (1855), p. 597-604.
- [18] J.-B. Biot, « Analyse des Tables de réfraction construites par Newton, avec l'indication des procédés numériques par lesquels il a pu les calculer », *J. Savants* (1836), p. 735-754.
- [19] J.-B. Biot, « Sur les réfractions astronomiques », *Additions à la Connaissance des Temps* **1839** (1836), p. 3-114.
- [20] J.-B. Biot, « Sur la vraie constitution de l'atmosphère terrestre déduite de l'expérience, avec ses applications à la mesure des hauteurs par les observations barométriques, et au calcul des réfractions », *Additions à la Connaissance des Temps* **1841** (1838), p. 3-112.
- [21] L. Dettwiller, « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 63-102.
- [22] L. Dettwiller, « Properties of optical ducts, their chromatism and its effects on astronomical refraction », 2022, *preprint*, <https://arxiv.org/abs/2204.02605>.
- [23] L. Dettwiller, « La discussion par Kummer d'une quadrature sur la réfraction astronomique : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 503-525.
- [24] L. Dettwiller, « Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 103-132.
- [25] L. Dettwiller, « Short review on the refractive index of air as a function of temperature, pressure, humidity and ionization », 2022, *preprint*, <https://arxiv.org/abs/2204.02603>.
- [26] L. Auer, E. M. Standish, « Astronomical refraction: Computational method for all zenith angles », *Astron. J.* **119** (2000), p. 2472-2474.
- [27] L. Dettwiller, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 13-62.
- [28] J. Ivory, « On the astronomical refractions », *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* (1823), p. 409-495.
- [29] L. H. Auer, E. M. Standish, « Astronomical refraction: Computational method for all zenith angles », Tech. report, Yale University Astronomy Dept., 1979.
- [30] A. T. Young, « "J. B. Biot and refraction calculations", American Astronomical Society, 197th AAS Meeting, », *Bull. AAS* **32** (2000), p. 1383.
- [31] A. T. Young, « Sunset Science. IV. Low-altitude refraction », *Astron. J.* **127** (2004), p. 3622-3637.
- [32] C. Y. Hohenkerk, A. T. Sinclair, « The computation of angular atmospheric refraction at large zenith angles », 1985, Nautical Almanac Office Tech. Note 63, H. M. Nautical Almanac Office, Royal Greenwich Observatory, Londres, p. 1-12.
- [33] B. Garfinkel, « Astronomical refraction in a polytropic atmosphere », *Astron. J.* **72** (1967), p. 235-254.
- [34] J. Saastamoinen, « Contributions to the theory of atmospheric refraction. Part II. Refraction corrections in satellite geodesy », *Bull. Géod.* **47** (1973), p. 13-34.

- [35] S. N. Kivalov, A. T. Young, « Horizontal magnification of finite-sized celestial objects », *Appl. Opt.* **49** (2010), p. 2720-2727.
- [36] A. T. Young, communication privée.
- [37] J.-B. Biot, *Traité Élémentaire d'Astronomie Physique*, t. 2, Bernard, Paris, 1811.
- [38] A. T. Young, « Relations among atmospheric structure, refraction, and extinction », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 179-212.





---

Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

# La discussion par Kummer d'une quadrature sur la réfraction astronomique : commentaire historique

*Kummer's discussion of a quadrature on astronomical refraction: an historical commentary*

Luc Dettwiller<sup>® a</sup>

<sup>a</sup> Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School,  
Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France  
*Courriel*: [dettwiller.luc@gmail.com](mailto:dettwiller.luc@gmail.com)

**Résumé.** Dans un mémoire de 1860, Kummer (1810–1893) discute analytiquement les conséquences de la quadrature régissant les rayons lumineux dans un milieu à symétrie sphérique. Son approche est ici présentée, et sa fécondité illustrée par sa traduction graphique dans le diagramme de Young–Kattawar (1998). Une classification détaillée des phénomènes possibles s'en déduit — dont les effets *hillingar* et *hafgerdingar*, l'apparition d'horizons multiples — dans le cas d'observations au travers d'une couche d'inversion raide. Ces considérations sont appliquées à la discussion des corrections — dont celle de la dépression de l'horizon — qui sont indispensables à une précision correcte en navigation astronomique.

**Abstract.** In an 1860 memoir, Kummer (1810–1893) discusses analytically the consequences of light rays' quadrature in a spherically symmetrical medium. This fertile approach is illustrated here by showing its graphical translation using the Young–Kattawar diagram (1998). A detailed classification of occurring phenomena is derived for the case of vision through a steep inversion layer: e.g. *hillingar* and *hafgerdingar* effects, multiple horizons. These considerations help discussing the corrections which are essential for an accurate astronomical navigation, including horizon's depression.

*Published online: 21 February 2023, Issue date: 11 August 2023*

## 1. Introduction

Nous avons déjà commenté ([1] dans ce numéro spécial) un texte mathématique de Lambert (1758), un des premiers (avec Euler en 1754) qui étudie la réfraction astronomique à l'aide d'un

développement en série, et qui montre pour cela deux séries possibles, en insistant sur le fait que la seconde converge plus vite.

Le mathématicien Ernst Kummer (1810–1893), qui a justement inventé une méthode d'accélération de la convergence d'une série en 1837 [2], publie ensuite aussi sur la réfraction en 1860 — une année avant de fonder le premier séminaire allemand de mathématiques. Docteur en 1831 de l'université de Halle, où il avait commencé des études en théologie, il enseigne d'abord une dizaine d'années au lycée de Leignitz ; ses premiers travaux datent de cette époque (en 1836 il publie un remarquable article d'analyse donnant 24 solutions de l'équation hypergéométrique avec des séries associées), mais l'essentiel de ses travaux ultérieurs porte sur des questions d'algèbre. En 1840 il est nommé Professeur à l'université de Breslau, puis de Berlin en 1855 — année où il devint aussi membre à part entière de l'Académie de Berlin. Avec Kronecker et Weierstrass, eux aussi à Berlin, il dominera les mathématiques allemandes pendant une vingtaine d'années. Son étude sur la réfraction date de cette période, trois ans avant son élection au poste de Secrétaire de cette Académie, qu'il tiendra jusqu'en 1878. Il sera aussi membre de l'Académie des sciences de Paris, et de la *Royal Society* de Londres.

Son texte qui nous intéresse [3] est

E. E. Kummer, « Über atmosphärische Strahlenbrechung », *Monatsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* 5 (1860), p. 405-420,

dont il existe une traduction française par Émile Verdet [4] :

É. Verdet, « Mémoire sur la réfraction atmosphérique par M. Kummer », *Ann. Chim. Phys.*, série 3, 61 (1861), p. 496-507.

( 496 )

---



---

## MÉMOIRES SUR LA PHYSIQUE PUBLIÉS A L'ÉTRANGER:

EXTRAITS PAR M. VERDET.

**Mémoire sur la réfraction atmosphérique** par **M. Kummer** (1).

Lu à l'Académie des Sciences de Berlin, le 12 juillet 1860.

On n'a ordinairement considéré l'influence d'une atmosphère de densité variable sur la marche des rayons lumineux qu'en vue d'éclairer la théorie des réfractions

astronomiques ou géodésiques, et par conséquent on a restreint le problème aux cas qui se présentent habituellement à la surface de notre planète. M. Kummer, en écartant ces restrictions, a obtenu quelques résultats très-intéressants, dont la démonstration n'offre aucune difficulté.

On sait que dans un milieu où l'indice de réfraction  $n$  est une fonction continue des coordonnées  $x, y, z$ , les équations différentielles de la trajectoire d'un rayon lumineux sont

$$\frac{d \cdot n \frac{dx}{ds}}{ds} = \frac{dn}{dx},$$

$$\frac{d \cdot n \frac{dy}{ds}}{ds} = \frac{dn}{dy},$$

---

(1) *Monatsberichte der Akademie zu Berlin*; année 1860, p. 405.

[4, p. 496] Source : gallica.bnf.fr / BnF

Comme Lambert avant lui, Kummer se penche sur la réfraction, non pas en tant que physicien, mais en tant que mathématicien : il examine diverses conséquences de la quadrature (vue au sous-paragraphe 7.2.2 de notre exposé des « propriétés remarquables de la réfraction astronomique [...] » [5] dans ce numéro spécial, et détaillée dans le document [6] lié à lui) régissant les rayons lumineux dans un milieu à symétrie sphérique, d'indice de réfraction  $n(r)$ . L'utilisation de cette quadrature dans ce contexte était nouvelle à l'époque. Kummer considère des atmosphères imaginaires, ne produisant pas d'extinction de la lumière, et beaucoup plus denses que celles de la Terre ; contrairement à Bravais qui avait rédigé une *Notice sur le mirage* sept années auparavant [7], il ne se penche pas sur les observations réelles faites dans des cas voisins. L'intérêt réside dans les conséquences inédites qu'il en tire, et qui affinent mathématiquement celles de Bravais (qu'il ne mentionne pas) quant à la visibilité de l'horizon, qui n'est pas un objet céleste ; ce texte ne traite donc pas de réfraction astronomique, mais plutôt de réfraction atmosphérique, comme le dit bien son titre. Nous le présentons quand même, d'une part car il illustre bien la puissance de la discussion par quadrature, d'autre part car il permet de mieux comprendre certaines propriétés de la dépression de l'horizon — i.e. l'angle  $\delta$  égal à la hauteur de l'horizon astronomique par rapport à l'horizon (réel, dit aussi « horizon sensible », qui usuellement est plus bas — mais dans le cas contraire  $\delta < 0$ ). Ceci a une grande importance pour la navigation astronomique (une discipline toujours d'actualité pour la marine comme nous l'avons annoncé dans notre « panorama historique [...] » [8] dans ce numéro spécial) ; la première table de  $\delta$  semble due à Wright en 1599 [9].

Nous commentons la version française de cet article de Kummer ; elle est disponible sur Gallica : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k348044?rk=21459;2>.

## 2. Résumé et commentaires

Kummer commence par prouver l'invariant de Bouguer  $I_B$  [4, p. 497–498], par une démarche très voisine de la nôtre vue au sous-paragraphe 4.2 de [5] ; pour étudier les rayons lumineux



en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , il arrive ainsi (p. 498) à la quadrature citée ci-dessus — avec les notations de [5] (voir aussi la Table 1),

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = r^2 \left[ \frac{f^2(r)}{I_B^2} - 1 \right] := h(r, I_B) \quad \text{où } f(r) := r \times n(r) \quad (1)$$

(le symbole  $:=$  indiquant une définition ou une notation). Ensuite, pour un rayon donné (et donc  $I_B$  fixé) partant de l'origine sur la surface de la mer ou du sol (supposé parfaitement sphérique et où  $r = r_0$ ), il discute l'intégrale donnant  $\theta(r)$  en considérant que la première annulation de  $h$  pour  $r \geq r_0$  est en  $r_0 + b$ , et en distinguant le cas où c'est une annulation simple (i.e. d'ordre 1) ou bien une annulation d'ordre 2 ou plus — ce qui fait que le rayon lumineux a un cercle asymptote de rayon  $r_0 + b$ . Si ce cercle est sur la frontière haute d'un chenal optique (notion définie dans le paragraphe 3 de [6]), alors grâce aux rayons voisins un observateur  $S$  devrait voir (dans une atmosphère idéale qui n'absorberait ni ne diffuserait la lumière) une infinité d'anneaux contigus centrés sur le zénith, montrant chacun une image de toute la voûte céleste, et se tassant contre un « niveau d'accumulation » ; si en plus le sol (ou la surface de la mer) est dans le chenal, alors  $S$  doit voir aussi une infinité d'images annulaires contiguës de toute la surface terrestre, se tassant contre le même niveau d'accumulation. À cause du caractère idéal de l'atmosphère considérée, cette étude a un intérêt académique mais ne s'applique pas aux situations réelles de l'optique atmosphérique.

Verdet n'a traduit littéralement que l'introduction. Pour la suite, il a réécrit une bonne part du travail de Kummer, afin de le présenter plus clairement et de manière plus compacte.

Pour des détails sur les republications et sur une traduction anglaise, voir

A. T. Young. (Page consultée le 12 janvier 2022), *Annotated bibliography of mirages, green flashes, atmospheric refraction, etc.*, [En ligne]. Adresse URL : <https://aty.sdsu.edu/bibliog/bibliog.html>.

### 3. Présentation illustrée de l'idée fondamentale

En partant de la quadrature (1), et en introduisant les variables  $u$  et  $v$  définies dans la Table 1, Kummer s'apprête à discuter la fonction donnant  $u$  (proportionnel à l'angle polaire — dont l'origine est au point de départ du rayon au sol) en fonction de la hauteur  $v := r - r_0$  au-dessus du sol. Regardons, juste après la Table 1, comment il procède.

#### Correspondance des notations

TABLE 1. Notations (le symbole  $:=$  indique une définition)

Notations de Verdet–Kummer [4]	Notations de Dettwiller [5, 8] dans ce numéro de <i>C. R. Phys.</i>	Indications [et unités usuelles]
$R$	$r_0$	Rayon terrestre [km]
$n(r)$	$n(r)$	Indice de réfraction de l'air, dont la distribution est supposée à symétrie sphérique de centre $C$
$r, \varphi$	$r, \theta$	Coordonnées polaires (telles que $r = 0$ en $C$ ) pour un point courant $M$ d'un rayon lumineux (R) [m, km], [°, ', '' ]
$ds$	$ds$	Abscisse curviligne élémentaire le long de (R) [m]
$C$	$I_B$	Invariant de Bouguer [km]
$i$	$Z'$	Distance zénithale apparente du point $A$ d'un astre [°, ', '' ]
$u$	$r_0 \theta$	Abscisse géodésique de $M$ [km]
$v$	$r - r_0$	Altitude de $M$ [m, km]
$k := n_0^2 - 1$	$n^2(r_0) - 1$	Grandeur souvent considérée en optique au XIX <sup>e</sup>
$V$	$f^2(r) - I_B^2$	Grandeur intervenant dans la quadrature de (R) — voir [5, 6]

$$C = R n_0 \sin i,$$

et

$$u = \int_0^{\nu} \frac{R^2 n_0 \sin i \, d\nu}{(R + \nu) \sqrt{(R + \nu)^2 n^2 - R^2 n_0 \sin^2 i}}.$$

On admettra pour discuter cette expression que l'indice de réfraction, toujours plus grand que l'unité, est une fonction continue de la seule hauteur  $\nu$ , qui tend vers une limite finie lorsque  $\nu$  devient infini, et dont les deux premières dérivées ne deviennent infinies pour aucune valeur positive de  $\nu$ .

On supposera d'abord que pour toute valeur de  $\nu$  l'expression

$$V = (R + \nu)^2 n^2 - R^2 n_0^2 \sin^2 i$$

garde une valeur positive différente de zéro. S'il en est ainsi, on démontre aisément que l'intégrale qui donne la valeur de  $u$ , prise entre les limites 0 et  $\infty$ , conserve une valeur finie; en désignant cette valeur par  $c$ , l'équation

$$u = c$$

représente une asymptote dont la trajectoire lumineuse s'approche indéfiniment à mesure qu'elle s'écarte de la planète. Réciproquement un point situé à une très-grande

[...]

[4, p. 499] Source : gallica.bnf.fr / BnF

Supposons, au contraire, que  $V$  s'annule pour une ou plusieurs valeurs positives de  $\nu$ , et soit  $b$  la plus petite de ces valeurs,  $a$  la valeur de  $u$  correspondante. On aura

$$a = \int_0^b \frac{R^2 n_0 \sin i \, d\nu}{(R + \nu) \sqrt{V}}.$$

On a d'ailleurs, en vertu du théorème de Taylor, en désignant par  $V(\nu)$  la valeur de  $V$  qui répond à une valeur particulière de la variable plus petite que  $b$ ,

$$V(\nu) = V(b) - (b - \nu)V'(b) + \frac{(b - \nu)^2}{1.2} V''(\varepsilon),$$

$\varepsilon$  étant compris entre  $0$  et  $b$ . Donc si  $V'(b)$  n'est pas nul en même temps que  $V(b)$ , c'est-à-dire si, lorsque  $\nu$  passe par la valeur  $b$ ,  $V$  s'annule en changeant de signe, on pourra poser

$$V = (b - \nu)W,$$

$W$  étant une fonction de  $\nu$  qui demeure finie et différente de zéro pour  $\nu = b$ . On en conclura, en appliquant les règles relatives aux intégrales définies singulières, que la valeur ci-dessus de  $a$  est finie. Au contraire, si  $V'(b)$  s'annule en même temps que  $V(b)$ , on devra poser

$$V = (b - \nu)^2 W,$$

$W$  étant une fonction de  $\nu$  qui ne devient pas infinie pour  $\nu = b$ , et on en conclura que la valeur de  $a$  est infinie.

Dans le premier cas,  $a$  étant fini, la trajectoire du

[4, p. 500] (I doit être changé en  $\varepsilon$ ) Source : gallica.bnf.fr / BnF

( 501 )

rayon s'élève de l'origine jusqu'au point dont les coordonnées sont  $a$  et  $b$ ; comme ensuite  $\nu$  ne peut dépasser la valeur  $b$  sans que  $\sqrt{V}$  devienne imaginaire, on doit, lorsque cette valeur est atteinte, considérer  $\nu$  comme décroissant et attribuer le signe  $-$  à  $d\nu$ . On détermine ainsi une seconde partie de la trajectoire, exactement symétrique de la première, qui par conséquent va rencontrer la surface de la planète au point dont l'abscisse est  $2a$ . Il est évident que cette marche des rayons lumineux constitue précisément le *mirage supérieur* des physiciens.

Dans le second cas,  $a$  devenant infini lorsque  $b$  tend vers la valeur finie  $b$ , la trajectoire lumineuse tourne indéfiniment autour de la planète en s'approchant du cercle asymptote dont le rayon est  $R + b$ .

[...]

[4, p. 501] (« lorsque  $b$  tend » doit être remplacé par « lorsque  $\nu$  tend »).

Source : gallica.bnf.fr / BnF

Ce second cas équivaut à celui où  $h(r, I_B)$  présente une annulation d'ordre 2 ou plus en  $r = r_0 + b$  ; il équivaut aussi à celui où le graphe de la fonction  $f$ , supposée différentiable sur un voisinage de  $r_0 + b := r_m$  et deux fois différentiable en  $r_m$ , est tangent — voir la Figure 1 — en  $r_m$  à l'horizontale d'ordonnée  $I_m := f(r_m)$  avec  $I_B = I_m$ , comme le montre facilement le calcul de  $(\partial h / \partial r)(r_m, I_m)$  en fonction de la dérivée  $f'(r_m)$ . Dans ce cas-là  $\int_{r_0}^{r_m} (dr / \sqrt{h(r, I_m)})$  diverge, comme le montre immédiatement un équivalent de  $h(r, I_m)$  au voisinage de  $r_m$ .

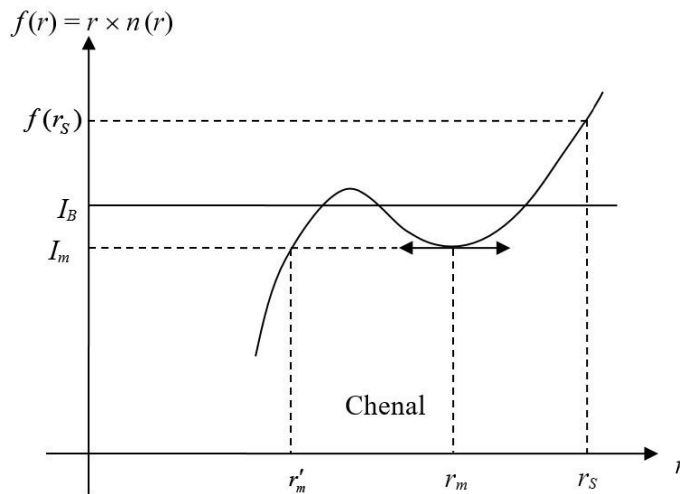


FIGURE 1. Diagramme de Young-Kattawar dans le cas d'un chenal optique (qui correspond ici à  $[r'_m, r_m]$ ). Dans les cas usuels de physique atmosphérique, la partie décroissante du graphe correspond par définition à la couche d'inversion raide de température dans l'air. Dans le second cas de Kummer,  $I_B = I_m$ .

Pour appliquer ces considérations aux diverses planètes du système solaire, on devra les supposer parfaitement sphériques et négliger la variation de la température de l'atmosphère qui dépend des coordonnées géographiques. On pourra même, dans une première approximation, négliger la variation qui dépend de la hauteur, et représenter en conséquence le rapport de la densité d'une couche atmosphérique de hauteur  $\nu$  à la densité de la couche superficielle par l'expression connue

$$e^{-\frac{R\nu}{\lambda(R+\nu)}},$$

où  $\lambda$  désigne la hauteur d'une colonne ayant partout la même densité que la couche superficielle, qui exercerait une pression égale à celle de l'atmosphère totale. Il suit de là qu'en appelant  $k$  la puissance réfractive de la couche superficielle, on aura

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + ke^{-\frac{R\nu}{\lambda(R+\nu)}}, \\ &= 1 + ke^{-\omega}, \end{aligned}$$

en faisant, pour abrégier,  $\omega = \frac{R\nu}{\lambda(R+\nu)}$ . On conclut de là

$$u = \int_0^\nu \frac{R^2 \sqrt{1+k} \sin i \, d\nu}{(R+\nu)\sqrt{V}},$$

$$V = (R+\nu)^2 (1+ke^{-\omega}) - R^2(1+k) \sin^2 i,$$

$$V' = 2(R+\nu)(1+ke^{-\omega}) - \frac{R^2 k}{\lambda} e^{-\omega},$$

$$V'' = 2 + ke^{-\omega} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{R^2}{\lambda(R+\nu)} \right)^2 \right].$$

[...]

[4, p. 502] Source : gallica.bnf.fr / BnF

Si on a au contraire

$$R > \frac{2\lambda(1+k)}{k},$$

$V'$  sera nul pour une valeur positive  $\beta$  de  $\nu$ , qui se calculera numériquement sans difficulté. Soit  $I$  l'angle aigu qui réduit  $V$  à zéro, pour  $\nu = \beta$ , on aura

$$\sin I = \frac{(R+\beta) \sqrt{1+ke^{-\frac{R\beta}{\lambda(R+\beta)}}}}{R\sqrt{1+k}},$$

[...]

[4, p. 503] Source : gallica.bnf.fr / BnF

Enfin, il est à remarquer qu'un observateur placé en dehors de la surface de la planète doit voir d'abord une image principale circulaire de la surface *totale* de la planète, et tout autour une infinité d'images annulaires. Il voit même dans l'atmosphère de cette planète une infinité d'images de la sphère céleste. Ces deux conséquences sont faciles à apercevoir en examinant avec un peu d'attention les propriétés des trajectoires lumineuses qui viennent d'être exposées. C'est en particulier ainsi que la planète sera vue par un astronome placé sur la Terre.

[...]

[4, p. 505] Source : gallica.bnf.fr / BnF

On peut arriver graphiquement à la conclusion ci-dessus de Kummer avec le diagramme de Young-Kattawar, en considérant les rayons qui arrivent en  $S$  (tel que  $r_S := CS > r_0$ , où  $C$  désigne le centre de la Terre) d'abord horizontalement, puis de plus en plus obliques (soit vers le bas, soit vers le haut) ; cela diminue  $I_B$ , à partir de sa valeur maximale  $f(r_S)$ , et on lit sur le diagramme le domaine de  $r$  accessible au rayon considéré : c'est celui où  $f(r) \geq I_B$  — voir la Figure 1. Dans les conditions idéales décrites par ce diagramme, pour un observateur  $S$  idéal doté d'une acuité visuelle infinie dans une atmosphère parfaitement claire, on distingue ainsi, en fonction de sa position par rapport au chenal (supposé unique dans toute cette discussion), plusieurs cas — dont trois se subdivisent.

- Quand  $r_S > r_m$ ,  $S$  est au-dessus du chenal (celui-ci correspond à  $[r'_m, r_m]$ ), et  $S$  voit une infinité d'anneaux, montrant chacun toute la voûte céleste, de plus en plus tassés, par le dessus, contre un niveau d'accumulation (A) qui s'avèrera bilatéral et caractérisé par sa hauteur (angulaire)  $\psi'_a = -\arccos(f(r_m)/f(r_S)) < 0$  — donc sous l'horizon astronomique (qui est par définition l'ensemble des directions horizontales pour  $S$ ).

- Alors si  $f(r_0) < f(r_m)$  — i.e. si le sol (ou la surface de l'eau) n'est pas dans le chenal, qui est alors un *elevated duct* dans la terminologie anglo-saxonne —  $S$  voit aussi une seconde infinité d'anneaux, montrant chacun *toute* la voûte céleste, de plus en plus tassés contre (A) mais par le dessous, et à la limite en (A) deux fois plus fortement que pour la première infinité — ce facteur 2 venant du rapport entre les équivalences (A6) et (A5) de l'annexe du présent article ; les images formant cette seconde infinité sont *toutes* renversées — ce que confirme la courbe de transfert de la Fig. 6 de [6], i.e. le graphe donnant la hauteur angulaire vraie d'un astre en fonction de sa hauteur angulaire apparente. L'horizon est sous (A), sa dépression est  $\delta = \arccos(f(r_0)/f(r_S)) > -\psi'_a > 0$ . Un coucher de Soleil dans des conditions approchant de celles de ce cas théorique a été filmé depuis de Pic du Midi, assez haut pour se trouver fréquemment au-dessus d'une couche d'inversion *raide* de température [10] où *par définition* le coefficient de réfraction  $\kappa(r)$  — i.e., le quotient de la courbure des rayons horizontaux (comptée positivement vers le bas, et à la distance  $r$ ) par  $1/r$  — est supérieur à 1.

- Mais si  $f(r_0) \geq f(r_m)$  — i.e. si le sol est dans le chenal — la seconde infinité d'images n'est pas de la voûte céleste mais de toute la surface terrestre, et les images sont droites. (A) est l'horizon, sa dépression est  $\delta = -\psi'_a = \arccos(f(r_m)/f(r_S)) > 0$ . Par rapport à l'expression de  $\delta$  du cas précédent,  $f(r_0)$  est remplacé par  $f(r_m)$  ; dès 1853 Bravais avait compris ce fait, car il écrit que « dans le cas examiné, et pour un œil situé au-dessus de la couche [(K)

de niveau  $r_m$ ], l'espace aérien [entre les niveaux  $r_0$  et  $r_m$ ] est pour l'observateur comme s'il n'existait pas, c'est-à-dire comme si le sol ou la mer s'élevaient jusqu'en »  $r_m$  [7, p. 262]. Mais contrairement à Kummer, Bravais n'a pas prédit l'existence de (A) (liée au fait que la fonction  $f$  est supposée deux fois différentiable avec  $f'(r_m) = 0$ ) donc pas non plus celle de rayons critiques — i.e. tels que  $I_B = I_m := f(r_m)$  — ayant un cercle asymptote, ce qui entraîne l'inexistence de rayons formant pour S l'image de l'horizon. Cependant ces derniers existeraient si le minimum de  $f$  en  $r_m$  était idéalement anguleux ; alors ils ne seraient en général pas tangents au sol (ou à la surface de l'eau, ce que Biot avait déjà compris en 1809 lors de ses mesures systématiques de la dépression de l'horizon [11], menées à Dunkerque avec l'aide de Claude-Louis Mathieu — 1783–1875) car ils feraient avec sa surface horizontale l'angle  $\sigma := \arccos(f(r_m)/f(r_0))$  : ils seraient tangents à la frontière haute (K) du chenal, tout en la traversant en partie. Sur la mer, l'altitude de (K) va de 3 à 30 m [12], donc des cas voisins de cette situation peuvent être observés dans la pratique par les marins ; on comprend pourquoi ils appellent *horizon layer* ou *Kimmfläche* cette frontière haute du chenal [12] — mais Bravais l'appelle la « couche de densité fictive minimum ».

De toute façon, par rapport à la situation où il n'y aurait pas de couche d'inversion sous l'observateur, mais  $dT/dr$  quasi uniforme entre l'observateur et le sol, l'horizon est relevé — qu'il soit sous (A) ou contre (A). « Dans plusieurs [...] cas [...] où la mer était plus froide que l'air, M. Biot a trouvé une dépression dans le sens habituel, mais d'une valeur absolue bien plus faible que la dépression ordinaire. » [7, p. 263] — voir les formules mentionnées au sous-paragraphe 4.2 du présent article, comme celles de Koss ou de Conrad. « Woltmann a observé que les phénomènes d'élévation des objets avaient toujours lieu sur l'Elbe, lorsque la température des eaux était inférieure de 2° Fahrenheit (1°,1 centigr.) à la température de l'air, et qu'ils se produisaient aussi pendant le dégel du fleuve. » [7, p. 264]

- Quand  $r_S = r_m$ , S est sur la frontière haute du chenal, alors à l'horizon astronomique il ne voit que l'image de l'air qui est à la même élévation que lui (comme l'avait déjà compris Bouguer au moins dès 1753 [13]), mais pas l'image d'un objet céleste (i.e. extra-atmosphérique) ni du sol. Aussi  $\psi'_a = 0$  : (A) est confondu avec l'horizon astronomique. À part cela, la discussion sur la double infinité d'images accumulées des deux côtés, contre (A) bilatéral, est inchangée ; donc  $\delta = \arccos(f(r_0)/f(r_S)) > 0$  dans le premier sous-cas,  $\delta = -\psi'_a = 0$  dans le second — qui a quasiment été observé par Biot auprès de Dunkerque le 19 mars 1809 : son œil étant à une élévation  $E$  de 1,45 m au-dessus du sol, il mesurait avec son cercle répétiteur une dépression  $\delta \cong -0' 2''$  [7, p. 263] au lieu de  $1,75' \sqrt{1,45} \cong 2' 6''$  attendus dans le cas usuel (voir le sous-paragraphe 4.2).

- Quand S est à l'intérieur du chenal, il voit une bande (B) vide d'images d'objets célestes (cf. le paragraphe 4 de [6]), qui contient toujours l'horizon astronomique. Le bord supérieur de (B) se trouve à la hauteur angulaire  $-\psi'_a > 0$  ; il est toujours, par en dessus (i.e. sur son côté haut), niveau d'accumulation d'une infinité d'anneaux montrant chacun une image entière de la voûte céleste. À 20 MHz en radioastronomie, la disparition sous  $-\psi'_a$  des échos lunaires peut s'expliquer ainsi, le chenal étant créé par l'ionosphère qui a un effet très sensible, sur l'indice de réfraction vers 20 MHz, pour l'air ionisé [14].

➤ Si le sol n'est pas dans le chenal, son image n'est quasiment pas déformée. (B) est appelé « bande vide de Wegener », elle est symétrique par rapport à l'horizon astronomique (qui passe donc en son milieu), et elle ne contient que des images de l'air du chenal [15] ; souvent sa luminance est plus faible que celle du reste du ciel (voir la vidéo de Mila Zinkova montrant un coucher de Soleil dans des conditions approchant celles de ce sous-cas [16]). Il y a au total deux niveaux d'accumulation, car le bord inférieur de (B) — qui

se trouve à la hauteur angulaire  $\psi'_a < 0$  — est, mais par en dessous (i.e. sur son côté bas), niveau d'accumulation (unilatéral) d'une infinité d'anneaux montrant chacun une image entière de toute la voûte céleste, et toutes ces images sont renversées. On a encore  $\delta = \arccos(f(r_0)/f(r_S)) > -\psi'_a > 0$  : dans ce sous-cas, l'horizon est sous le bord inférieur de (B).

➤ Si le sol est dans le chenal, il n'y a plus qu'un seul niveau d'accumulation (et il s'avérera bilatéral) : le bord supérieur de (B).

◦ Soit  $f(r_0) \geq f(r_S) > f(r_m)$  — ce qui n'est possible que si  $S$  est dans la portion *raide* de la couche d'inversion (portion qui existe puisque cette couche donne un chenal) — alors (B) est entièrement occupé par des images du sol, et contre le bord supérieur de (B) une infinité d'anneaux, montrant chacun toute la surface terrestre, vient s'accumuler par en dessous, toutes ces images *complètes* étant droites. Dans la pratique,  $S$  ne verra pas les images de toute la surface terrestre, mais de parties du sol usuellement invisibles car trop éloignées (on dit qu'il y a *surgissement* de ces parties qui sont d'habitude « au-delà de l'horizon ») ; et il verra que l'horizon est au-dessus de l'horizon astronomique ( $\delta = \psi'_a < 0$ ). Les rayons formant pour  $S$  l'image de l'horizon, s'ils existaient (i.e. si le minimum de  $f$  en  $r_m$  était anguleux), seraient alors les rayons critiques et ne seraient pas tangents au sol horizontal (car  $\sigma \neq 0$ , comme l'avait déjà compris Biot en 1809) mais à la *Kimmfläche* (K) du côté du chenal ; Bravais décrit ainsi ces rayons lumineux : ils « perceront la couche [(K)], et ce point [de contact avec (K)] divisera la trajectoire [lumineuse] en deux branches, l'une inférieure à la couche [(K)], concave vers le sol, l'autre supérieure et moins concave que [(K)] ou même convexe. » [7, p. 262] Un des mérites de Kummer [3, 4] est de faire comprendre qu'avec le minimum de  $f$  en  $r_m$  non pas anguleux mais avec  $f$  deux fois différentiable et telle que  $f'(r_m) = 0$ , les rayons critiques ne se divisent pas au contact de (K) — ils n'ont plus de contact avec (K) — cependant ils possèdent un cercle asymptote de rayon  $r_m$ .

– Si le sol (ou la surface de la mer) est aussi dans la portion *raide* de la couche d'inversion qui est alors une *surface-based strong inversion*, cette situation est très propice à l'effet *hillingar* (appelé aussi « mirage arctique » quoiqu'il n'y ait pas d'image renversée [17, 18]) : l'image du sol (ou de la mer ou d'un grand lac) est peu déformée mais paraît concave, avec un net surgissement. Malgré les écarts à l'idéalité qui empêchent bien sûr de voir ainsi l'intégralité de la surface terrestre (et, qui plus est, une infinité de fois), cette discussion académique est une première approche permettant d'expliquer le constat de von Schrötter qui observa en 1908 un cas frappant de dépression négative (avec un horizon 27' au-dessus de l'horizon normal [19]), ainsi que les rapports [20], [21, p. 385], [22, 23], [24, p. 291], [25], [26, p. 272] faisant état d'un océan (ou du Lac Léman [27, p. 541]) qui semble non pas plat, mais creux comme une soucoupe : « Woltmann et M. Biot font remarquer que l'on peut reconnaître cet état particulier de l'atmosphère à ce signe que la mer paraît comme une surface concave, qu'en même temps l'horizon se voit par-dessus la coque des navires, [...] et que les objets très-distants paraissent s'élever en l'air comme des nuages. › Lorsqu'on allait s'asseoir sur le rivage, dit M. Biot, on semblait être dans un fond autour duquel, suivant une pente douce, s'élevait la mer fortement azurée, surtout au large, et terminée par un horizon si net, si bien tranché, si exempt de vagues que le fil horizontal [du réticule de la lunette du cercle répétiteur] n'y pouvait pas rendre sensible la plus petite ondulation. › [C'est compréhensible avec  $\sigma \neq 0$ .] [...] Heim a décrit un effet de ce genre ob-



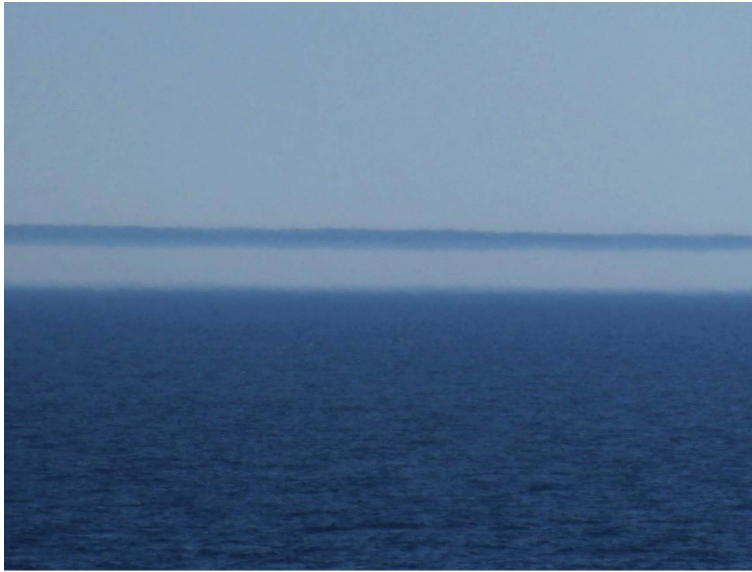
servé dans les montagnes de la Thuringe : il a vu tout d'un coup trois hauts sommets paraître par-dessus une chaîne intermédiaire qui aurait dû en masquer la vue, et ces sommets paraissaient si nets qu'il pouvait distinguer, avec une simple lorgnette, les touffes de gazons à une distance de 4 milles d'Allemagne (30 000 m) » [7, p. 257].

- Si le sol (ou la surface de la mer) n'est pas dans la portion de la couche d'inversion raide de température (cas de *surface-based duct, elevated strong inversion* — ou *lifted strong inversion* pour les météorologistes), alors il est possible que d'une certaine portion du sol  $S$  voie concrètement trois images contiguës : de bas en haut, successivement, droite, renversée puis droite, avec un étirement local qui est infini à leur jonction ; c'est une explication (restrictive car avec un modèle d'atmosphère à symétrie sphérique) de l'effet *hafgerdingar* [28–30], où sur la mer on a l'impression de voir une « barrière de mer » qui rehausse l'horizon — cf. la Fig. 11 de [31] dans ce numéro spécial. Cet effet est plus ou moins semblable [31] à la *Fata Brumosa* [28] sur un lac — pour Forel, le Léman où il avait l'impression de voir des « brouillards [qui] ont exactement la teinte du lac, tellement qu'en certains cas ils semblent des vagues gigantesques soulevant la surface [...] de dix ou vingt mètres [soit] 2 ou 4 minutes de degré. » [27, p. 551–553] La *Fata Morgana* ([27, p. 544–551], [32]) est similaire à ces deux effets, sauf qu'elle concerne des objets plus contrastés, dont les images très étirées des taches claires et sombres forment une « zone striée » — voir le paragraphe 3 de notre article sur les « Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre » [33] dans ce numéro spécial.
- Soit  $f(r_S) > f(r_0) \geq f(r_m)$  — autre cas de *surface-based duct, elevated strong inversion* — alors l'image de l'air occupe une partie centrale de la bande (B), dont les bords ont pour hauteur angulaire  $\pm \arccos(f(r_0)/f(r_S))$  — le résultat ressemblerait alors partiellement à celui de la photo de la Figure 2. L'image du sol (ou de la mer) au-dessus de l'horizon astronomique est, de bas en haut, d'abord renversée usuellement (c'est un mirage supérieur), puis vient une infinité d'images droites consécutives de toute la surface terrestre qui s'accumulent contre le bord supérieur de (B) par en dessous. Cela produit une impression d'horizon multiple, dont il existe une belle photographie ancienne publiée [34].

Voir (théoriquement !) la surface terrestre une infinité de fois est typique des cas où le sol et  $S$  sont à l'intérieur du chenal ; cela suppose non seulement que l'air est absolument non absorbant et non diffusant, mais encore que son profil de réfractivité en fonction de l'altitude est le même en tout lieu de la planète supposée parfaitement sphérique, ce qui est très irréaliste.

- Quand  $S$  est sur la frontière basse du chenal, alors à l'horizon astronomique — auquel se réduit (B) — il ne voit que l'image de l'air qui est à l'intérieur du chenal, mais pas l'image d'un objet céleste ni du sol. Il n'y a plus d'horizon multiple, mais un horizon ordinaire, de dépression  $\delta = \arccos(f(r_0)/f(r_m)) > 0$ . Aussi  $\psi'_a = 0$  ; il n'y a qu'un seul niveau d'accumulation, il est confondu avec l'horizon astronomique, et bilatéral : une double infinité d'images de toute la voûte céleste s'accumule sur lui, par en dessus et par en dessous.

- Quand  $S$  est sous le chenal — qui est donc un *elevated duct* — alors la vision qu'a  $S$  du sol et de l'horizon est ordinaire,  $\delta = \arccos(f(r_0)/f(r_S)) > 0$  ; il n'existe plus de niveau d'accumulation. Par contre l'image de la voûte céleste peut être très distordue : si  $S$  reste assez proche de la frontière basse du chenal, il voit d'une certaine portion de la voûte céleste trois images, successivement droite, renversée (forcément sous l'horizon astronomique en vertu du théorème de Biot–Sang–Meyer–Fraser–White — voir le sous-paragraphe 7.2 de [5]) puis droite — avec un



**FIGURE 2.** Horizon multiple dû à un chenal optique. De bas en haut, image principale de la mer et du ciel, puis image renversée du ciel et de la mer (formant la bande bleu sombre qui semble flotter dans l'air), et enfin image droite du ciel. Comme la largeur angulaire de la bande bleu sombre décroît de gauche à droite, on peut penser qu'il y a une différence dans les caractéristiques de la couche d'inversion raide entre le côté gauche et le côté droit de la photo : l'atmosphère réelle n'a pas la symétrie sphérique. © Photo : Luc Dettwiller.

grandissement angulaire local vertical qui est infini à leur jonction ; des distorsions similaires avec triple image se présentent dans le cas du pseudo-mirage, quand  $S$  est au-dessus d'une couche d'inversion ordinaire (i.e. qui n'est pas non raide).

Il est évident que les conclusions des calculs précédents ne s'appliquent en toute rigueur qu'au cas d'une atmosphère absolument transparente. Dans la réalité on ne verra un peu distinctement à la surface de Jupiter qu'une partie de la première image de la planète et de la première image du ciel. Tout au plus le Soleil demeurera-t-il constamment visible. Quant aux images ultérieures, elles seront sans doute tellement affaiblies, que leur ensemble donnera simplement naissance à une bande bleue s'étendant des deux côtés de l'horizon apparent à une distance plus ou moins grande.

[4, p. 507] Source : gallica.bnf.fr / BnF

#### 4. Conséquences utiles

##### 4.1. *Asymptotes des courbes de transfert pour un observateur dans un chenal optique ou au-dessus*

La présence d'asymptotes des courbes de transfert résulte directement (voir l'annexe du présent article) de la divergence signalée par Kummer-Verdet à la p. 505 de [4]. Elle est possible pour un

observateur  $S$  dans un chenal optique ou au-dessus, car dans ce cas  $f(r_S) > f(r_m)$ , donc on peut avoir  $I_B = I_m$ , et les asymptotes ont pour abscisse  $\psi'_a$  tel que

$$\cos \psi'_a = f(r_m)/f(r_S). \quad (2)$$

#### 4.2. Dépression et distance de l'horizon

La dépression de l'horizon joue un rôle très important en navigation astronomique, comme nous le verrons au sous-paragraphe 4.3 ; c'est d'ailleurs une des causes majeures d'erreur dans le point nautique. Elle était appelée aussi « bassesse apparente de l'horizon de la Mer » (1723), ou « inclinaison de l'horizon sensible » (1729), « dépression apparente de la surface de la mer » (1758), « déjection de l'horizon » (1768) ... En considérant qu'il n'y a pas de *Kimmfläche* et donc que le rayon joignant  $S$  à l'horizon tangente la mer, puis en introduisant la moyenne  $\langle G \rangle$  de diverses grandeurs  $G(r)$  sur l'intervalle mer-observateur  $]r_0, r_S]$  de largeur  $E$  (qui est l'élévation de  $S$  au-dessus de la mer), et en se servant de l'invariant de Bouguer, on peut exprimer  $\delta$  grâce à

$$\begin{aligned} f(r_S)\delta^2/2 &\cong n_S r_S (1 - \cos \delta) = n_S r_S - n_0 r_0 = \int_{r_0}^{r_S} \left( \frac{dnr}{dr} \right) dr \\ &= \int_{r_S-E}^{r_S} [1 - \kappa(r)] n(r) dr = \langle (1 - \kappa) n \rangle E \end{aligned} \quad (3)$$

où on a utilisé l'avant-dernière expression de l'Eq. (43) de [5] ; on généralise ainsi une expression classique qui devient

$$\delta = \sqrt{2 \frac{\langle (1 - \kappa) n \rangle E}{n_S} \frac{E}{r_S}} \cong \sqrt{(1 - \langle \kappa \rangle) \frac{2E}{r_S}} \quad (4)$$

puisque  $n(r)$  est toujours très proche de 1 — au début de l'expression (4) nous avons mis = au lieu de  $\cong$  car nous n'y avons pas introduit de nouvelle approximation depuis celle de l'expression (3). Nous retrouvons ainsi la possibilité, déjà signalée par Young et Kattawar [35, Section 5], d'exprimer  $\delta$  en fonction de  $\langle \kappa \rangle$ . En négligeant la petite variation (avec la température et la pression) du dénominateur de l'expression finale de la formule (56) de [5], et en désignant par  $\Delta T$  la variation de la température  $T$  de l'air sur l'intervalle  $]r_0, r_S]$ , on trouve

$$\delta \cong \sqrt{\left[ 1 - \frac{34 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1} + (\Delta T/E)}{150 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}} \right] \frac{2E}{r_S}} \cong 1,70' \times \sqrt{\frac{E}{1 \text{ m}} - 8,6 \frac{\Delta T}{1 \text{ K}}} \quad (5)$$

donc l'augmentation de  $\Delta T$  de 1 °C a le même effet sur  $\delta$  qu'une diminution de  $E$  de 8,6 m : à faible élévation  $E$  au-dessus de l'eau, comme celle d'un pont de navire par exemple, l'estimation de  $\Delta T$  devra donc être précise — il ne faudra pas confondre la température de l'air touchant le sommet des vagues avec celle de l'eau, comme celle qui est requise dans les formules empiriques de Koss [36] ou de Conrad [37]. Celles-ci sont peu fiables, car même en disposant de thermomètres gradués au dixième de degré, il est bien difficile d'estimer au degré près  $T$  aux altitudes requises pour ces formules de Koss ou de Conrad, d'une part à cause des vagues (une partie non négligeable de la variation de température dans la structure de la couche limite marine [38] ayant lieu sur la hauteur de la crête des vagues), d'autre part à cause de la perturbation thermique dans l'air due au bateau lui-même. Rappelons que dans la troposphère standard US1976  $\Delta T/E = -0,0065 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$ , et que dans une couche d'inversion le gradient critique au-delà duquel il y a formation d'un chenal optique correspond à  $\Delta T/E \cong 0,116 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1} \cong 1 \text{ K} / 8,6 \text{ m}$  (voir le sous-paragraphe 7.1.4 de [5]). À bord d'un avion en vol, déjà avec  $E$  valant quelques centaines de mètres l'effet de l'incertitude sur  $\Delta T$  devient peu gênant, mais l'horizon est beaucoup plus éloigné donc est très souvent caché par des nuages bas (ce qui arrive aussi sur un navire), et quand  $E$  atteint plusieurs kilomètres la diffusion due aux aérosols empêche de discerner précisément

l'horizon même par temps très clair [39] ; d'où l'utilisation d'un horizon artificiel, soit à bulle et monté sur un sextant (ce qui est assez peu précis, mais recommandé aux navigateurs polaires quand la glace peut fausser leur appréciation de l'horizon — [40, p. 269]), soit à réflexion (plus précis mais inutilisable sur un bateau).

Si  $\kappa(r)$  est quasi uniforme entre la mer et l'observateur, on retrouve l'expression bien connue ([41], [42, p. 201–203])

$$\delta \cong \sqrt{1 - \kappa_S} \sqrt{2E/r_S} = \sqrt{2E/r_a}, \quad (6)$$

où  $\kappa_S := \kappa(r_S)$  tandis que  $r_a^{-1} := (1 - \kappa_S)r_S^{-1}$  est la courbure apparente d'un méridien (passant par  $S$ ) par rapport à un rayon lumineux passant horizontalement par  $S$  (et parallèlement au méridien). Cette formule (6) coïncide avec celle trouvée géométriquement par Lambert en 1758 [41, p. 80–81] ; elle nous permet de vérifier la valeur  $\kappa_S \cong 1/7,06$  déduite par Lambert (*ibid.* p. 70–71 — voir aussi le paragraphe 2 de [1] dans ce numéro spécial) à partir de mesures prises par Jean-Dominique et Jacques Cassini en 1701 [43], ainsi que de la légère correction d'altitude effectuée par Lambert lui-même [41, p. 111] — ce qui suppose un processus itératif.

Mais c'est Bouguer qui, une trentaine d'années plus tôt, sut le premier prendre en compte la réfraction dans l'étude quantitative de la dépression de l'horizon (voir le sous-paragraphe 3.7 de [44] dans ce numéro spécial) : elle occupe le dernier quart de la publication de son essai ayant remporté le prix 1729 de l'Académie des sciences [45, p. 62–72] — i.e. le chap. 2 de la 2<sup>de</sup> partie. Numériquement,  $\delta \cong 1,75' \sqrt{E/1 \text{ m}}$  pour  $\kappa_S \cong 1/5,7$  (valeur donnée par le *Nautical Almanac* et correspondant à  $50^\circ \text{ F} = 10^\circ \text{ C}$  et  $1\,010 \text{ hPa}$  en  $S$ , avec un gradient thermique de  $-6,5^\circ \text{ C} \cdot \text{ km}^{-1}$ , ce qui donne  $r_a \cong 7\,727 \text{ km}$  à comparer à  $r_S \cong 6\,371 \text{ km}$ ) contre  $\delta \cong 1,93' \sqrt{E/1 \text{ m}}$  si on omet le coefficient de réfraction ; dans ces deux cas respectivement, cela donne  $\delta \cong 5,5'$  contre  $\delta \cong 6,1'$  pour une élévation  $E = 10 \text{ m}$  au-dessus des flots. Au sujet de l'importance de la différence entre ces deux estimations numériques, Bouguer se montre à la fois diplomate et convaincant :

« Il paroîtra peut-être que c'est pousser la délicatesse trop loin, de vouloir obliger les Pilotes à ne se servir que de cette seconde Table au lieu de la première [qui ne tient pas compte de la réfraction]. Mais cependant il suffit que l'observateur soit élevé de trente pieds, pour que la différence soit déjà de près d'une demie minute : & si on étoit obligé de monter dans la hune afin de découvrir la mer par-dessus quelques isles ou quelques rochers, l'erreur commise pourroit aller à près d'une minute. Or nous sommes persuadés qu'on ne doit presque rien négliger dans une semblable matière : car quelque soin & quelque peine qu'on se donne, il arrive qu'on se trompe encore souvent d'une quantité trop sensible. » [45, p. 70–71]

Les marins corrigent  $E$  en lui retranchant la moitié de la hauteur des vagues estimée à l'horizon [46], ou une fraction plus savante [47]. Ils savent aussi qu'en présence d'un mirage inférieur  $\delta > \sqrt{2E/r_S}$  car  $\langle \kappa \rangle < 0$  (voir le sous-paragraphe 7.2.3 de [5]) : « Les observations faites par MM. de Humboldt, Biot [...] prouvent évidemment la connexion du mirage [inférieur] avec l'augmentation de la dépression apparente de l'horizon. » [7, p. 239]

Toutes ces difficultés concernant le calcul de  $\delta$  peuvent lui faire préférer une mesure directe, grâce à un dépressiomètre de marine. Il en existe divers modèles, mais ils requièrent souvent la vision de l'horizon dans deux azimuts différant de  $180^\circ$ , ce qui est concrètement impossible à bord de grands navires où la vue de plus de la moitié de l'horizon est bouchée par les superstructures.

Un autre point intéressant pour la navigation est l'étude de la distance géodésique  $L$  entre  $S$  et l'horizon, i.e. la longueur de la projection au sol de chaque rayon lumineux joignant  $S$  à son horizon ([41], [42, p. 201–203]). En négligeant l'aplatissement terrestre, et en l'absence

de *Kimmfläche*, elle se calcule facilement grâce à la quadrature (1) qui donne ici une intégrale impropre :

$$L = r_0 \int_{r_0}^{r_S} \frac{dr}{\sqrt{h(r, I_0)}} \quad (7)$$

où  $I_0 := n_0 r_0$  car c'est l'invariant de Bouguer des rayons joignant S à son horizon, s'il n'y a toujours pas de *Kimmfläche*.

Si  $n$  est uniforme,

$$h(r, I_0) = \left( \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) r^2 \quad (8)$$

alors le changement de variable  $u := r_0/r$  permet de retrouver le résultat qui est géométriquement évident :

$$\begin{aligned} L &= r_0 \int_{r_0}^{r_S} \frac{1}{r} \left( \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right)^{-1/2} dr = -r_0 \int_1^{r_0/r_S} (1 - u^2)^{-1/2} du \\ &= r_0 [\arccos u]_1^{r_0/r_S} = r_0 \arccos \frac{r_S - E}{r_S}. \end{aligned} \quad (9)$$

Comme  $E \ll r_S$ , cela donne

$$L \cong r_S \sqrt{2E/r_S} = \sqrt{2r_S E}. \quad (10)$$

Si  $n$  n'est pas uniforme, mais présente une variation quasi affine sur  $[r_0, r_0 + E]$ , on repart de l'expression générale

$$L = r_0 \int_{r_0}^{r_S} \frac{1}{r} \left( \frac{n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2}{n_0^2 r_0^2} \right)^{-1/2} dr \quad (11)$$

et on réutilise la méthode approximative de développement du radical déjà vue au sous-paragraphe 5.1 de [5] ; en admettant aussi que  $1/r \cong 1/r_0$  (la variation du préfacteur  $1/r$  ayant beaucoup moins d'effet que celle de l'autre terme de l'intégrande car celui-ci diverge en  $r_0$ ), on obtient

$$\begin{aligned} L &\cong r_0 \int_{r_0}^{r_S} \frac{1}{r_0} \left\{ 2 \left[ \frac{1}{n_0} (r - r_0) \frac{dn}{dr}(r_0) + \frac{1}{r_0} (r - r_0) \right] \right\}^{-1/2} dr \\ &= \int_{r_0}^{r_0+E} \left\{ 2 \left[ \frac{-\kappa(r_0) + 1}{r_0} (r - r_0) \right] \right\}^{-1/2} dr \\ &= \left[ 2 \frac{1 - \kappa(r_0)}{r_0} \right]^{-1/2} [2\sqrt{r - r_0}]_{r_0}^{r_0+E} = \sqrt{\frac{2Er_0}{1 - \kappa(r_0)}} \cong \sqrt{\frac{2Er_S}{1 - \kappa_S}} = \sqrt{2Er_a} \end{aligned} \quad (12)$$

soit 3,93 km  $\sqrt{E/1}$  m pour  $\kappa_S \cong 1/5,7$ .

Si on additionne les valeurs de  $L$  obtenues en prenant pour  $E$  la hauteur d'un phare puis celle de S, on obtient la « portée géographique » du phare pour S — et dans les tables de portées géographiques la hauteur de S est souvent prise conventionnellement égale à 15 pieds. La portée réelle peut être très différente de celle déduite des formules ci-dessus [46, p. 54–56], car si  $\kappa$  n'est pas quasi uniforme sur  $[r_0, r_0 + E]$ , la valeur de  $L$  peut devenir très différente de celle que donnerait l'expression (12) où on remplacerait  $\kappa_S$  par  $\langle \kappa \rangle$ , puisque l'intégrale impropre de (11) pourrait être rendue divergente par la variation de  $\kappa$  avec  $r$ . Pour les cas réels, l'estimation de  $L$  par la formule (12) est donc encore beaucoup plus hasardeuse que celle de  $\delta$ .

Schématiquement la présence, au contact de l'eau, d'une couche limite plus chaude que l'air ambiant et où  $d^2 T/dr^2 > 0$ , augmente  $\delta$  (il y a le reflet du ciel juste au-dessus de l'horizon), et cela diminue  $L$ , comme sur la photo de la Fig. 2 du sous-paragraphe 7.2 de [5] où on voit un mirage inférieur (voir aussi le sous-paragraphe 2.1 de [33]) ; à l'opposé, la présence d'une couche limite plus froide diminue  $\delta$  et augmente  $L$ . Les marins faisaient grand cas des valeurs anormales de  $\delta$  [20, 48, 49], notamment quand leur navire, voguant sur une eau froide, est dans une couche

d'inversion *raide*, où  $\kappa(r)$  se trouve supérieur à 1 *par définition*, et dans ce cas la formule (6) n'est plus applicable ; le diagramme de Young–Kattawar présente alors l'allure montrée sur la Figure 1. La dépression de l'horizon fait encore l'objet de recherches actives, en lien avec les variations diurnes et annuelles de la structure thermique de la couche limite sur la mer qui l'affectent [50].

### 4.3. Corrections pour le point astronomique

Revenons au point astronomique [51, 52]. Un procédé efficace pour l'effectuer consiste à tracer, sur une carte marine, deux « droites de hauteur » du centre  $W$  du Soleil à deux instants différents et connus, ce qui nécessite pour chacun de ces instants la détermination de  $\psi(W)$  — i.e. la hauteur (angulaire vraie) de  $W$  — à partir de la mesure (au sextant) de la distance angulaire entre l'horizon et le point  $B$  le plus bas du limbe solaire [51] ; c'est la méthode de Marcq Saint-Hilaire, institutionnalisée dans la marine française dès le milieu du XIX<sup>e</sup> siècle. Une autre méthode est celle découverte par le capitaine Sumner en 1837, utilisant des « droites de position » et nécessitant aussi la connaissance de  $\psi(W)$  ; les méthodes antérieures étaient moins performantes. Rappelons que pour le point nautique, une erreur de 1' en latitude correspond à un écart de position Nord-Sud de 1 mille nautique, soit 1 852 m — ce qui peut être dramatique pour un navire au voisinage de récifs ou de hauts fonds !

Le calcul d'une droite de hauteur étant hors de notre propos, nous ne présentons ici que la détermination de  $\psi(W)$  à l'aide d'observations faites par un instrument qui, à l'instar du sextant, utilise aussi la visée de l'horizon marin. Grâce à lui, on détermine à la minute d'angle près la hauteur apparente du point bas  $B$  du limbe solaire par rapport à l'horizon *marin*. Diverses corrections doivent être appliquées [51, 52] à cette mesure pour en déduire  $\psi(W)$  : d'une part, à cause de l'élévation de l'instrument, la dépression  $\delta$  de l'horizon, qui doit elle-même être corrigée des effets de la réfraction « terrestre » (voir le sous-paragraphe précédent) ; d'autre part, indépendamment de l'élévation de l'instrument, plusieurs effets de réfraction « astronomique ». Cela nécessite plusieurs étapes.

- À la mesure brute, on commence par lui retrancher  $\delta$ , et cela donne  $\psi'(B)$  — i.e. la hauteur apparente de  $B$ .

Depuis 1599, des tables de  $\delta$  en fonction de l'élévation [9] ont été dressées à l'intention des marins (voir le sous-paragraphe 3.7 de [44]). En 1797 Huddart montre comment une valeur expérimentale de  $\delta$  peut être déduite de l'observation des distances angulaires entre le Soleil à midi et les horizons nord et sud [53]. Vu l'importance du problème de réfraction terrestre impliqué dans la connaissance précise de  $\delta$  pour le point astronomique, divers instruments ont été mis au point pour faciliter la mesure de  $\delta$  en utilisant ce principe.

Au sous-paragraphe 4.2 nous avons vu des formules semi-empiriques permettant de calculer de  $\delta$  dans les cas simples, mais la nature s'en écarte fréquemment et de manière importante. Une des premières mentions de cette variabilité est due au Père jésuite Antoine François Laval, professeur d'hydrographie à Marseille, en 1707 [54] : à une élévation de 144 m, il a vu  $\delta$  varier entre les valeurs extrêmes 11' 46'' et 14' 30'', sans lien clair avec la température ou la pression au niveau de l'observateur. Jean-Dominique Cassini s'y intéresse [55], et ajoute :

« Nous avons déjà remarqué par diverses autres observations, qu'une partie de la surface de la mer contiguë à l'horizon sensible, se confond à la vûë avec le Ciel, & que pour lors la circonference apparente de l'horizon sensible tombe dans la mer exposée à notre vûë. »

Il s'agit sans doute du classique mirage inférieur sur la mer (voir la Fig. 1 de [33]) dont ceci est une des premières mentions publiées.

« Comme nous avons communiqué cette reflexion au P. Laval sans qu'il ait eu aucune occasion de distinguer par quelque signe sensible cette difference, l'on voit combien il est difficile de la distinguer, & à quelle erreur est exposée la methode de chercher la grandeur du diametre de la Terre par l'observation de la tangente de la mer sans cette circonspection. [...] la variation des hauteurs apparentes de la mer n'a aucun rapport regulier avec la variation qui s'observe en même temps dans le Thermometre & dans le Barometre ; ce qui semble confirmer ce que nous avons remarqué plusieurs fois, que la partie de l'air qui cause la refraction est d'une nature differente de la partie à laquelle on attribue la pesanteur qui équilibre la hauteur des liqueurs dans le vuide. » [55, p. 196–197]

Et en 1827 Arago renchérisait :

« [...] l'observateur le plus exercé et muni des meilleurs instrumens, peut se tromper en plus ou en moins d'une minute, sans que les circonstances météorologiques puissent lui fournir ni les moyens de calculer l'erreur, ni même lui faire présumer dans quel sens elle a eu lieu. » [56]

Les erreurs sur  $\delta$  sont souvent attribuées, par les marins, à des erreurs sur l'estimation de la réfraction. Shufeldt rapporte avoir constaté une erreur de position de 0,85 mille si  $\delta$  est calculé à partir des mesures de température, mais de 0,115 mille seulement si  $\delta$  est mesuré avec l'appareil de Gavrisheff [57].

• Si le Soleil est vu assez haut au-dessus de l'horizon, on calcule  $\psi'(W) \cong \psi'(B) + (32'/2)$ . Mais si le Soleil est vu sur l'horizon, on tient compte de l'accourcissement en calculant  $\psi'(W) \cong \psi'(B) + (26'/2)$ , car il est bien connu que la pseudo-image du Soleil sur l'horizon astronomique est comprimée surtout dans le sens vertical : son diamètre apparent horizontal reste quasiment  $32'$  alors que son diamètre vertical devient  $26'$  dans le cas standard (phénomène d'accourcissement), conformément au théorème de Biot (voir le sous-paragraphe 7.1 de [5]). Delambre décrit ainsi ce phénomène [58] :

« le disque du soleil déformé par la réfraction, est sensiblement elliptique ; et c'est ainsi que je l'ai vu très-souvent, surtout lorsque d'une tour ou d'une montagne élevée je le voyais se lever à l'horizon de la mer ou s'y coucher. Souvent même la demi-ellipse inférieure m'a semblé plus aplatie que la supérieure. Quelquefois la supérieure seule paraissait elliptique et l'inférieure était singulièrement défigurée, ce qui indiquait des réfractions très-irrégulières pour les différents points du bord inférieur ; mais cet effet cesse dès que le soleil est sorti des vapeurs de l'horizon. » (voir notre Figure 3).

Cette idée de l'influence visible de la vapeur d'eau sur la réfraction est très ancienne mais erronée (voir les paragraphes 1–3 et 5 de [8], ainsi que le document [59] qui lui est lié) ; elle a perduré bien après le démenti expérimental apporté en 1806 par Biot et Arago [60]. Dans le cas de fortes déformations comme celles montrées par la Figure 3, il faut s'attendre à plusieurs minutes de différence entre le diamètre apparent vertical de l'image du Soleil sur l'horizon, et sa valeur standard  $26'$ .

• Ensuite on utilise les tables de réfraction astronomique  $\chi_S$  pour calculer  $\psi(W) = \psi'(W) - \chi_S(\psi'(W))$  ; noter que pour avoir une estimation juste de  $\chi_S(\psi'(W))$  il fallait bien effectuer auparavant les corrections précédentes, comme l'a finement noté Bouguer dès 1729 [45, p. 66] — voir le sous-paragraphe 3.7 de [44]. Dans le *Nautical Almanac*  $\chi_S$  est tabulé pour  $T_S = 50^\circ\text{F}$  et  $P_S = 1\,010\text{ hPa}$ , mais pour tenir compte des variations de  $T_S$  et  $P_S$ , il y a des tables de correction [40, p. 562 et 709 Tables 27–28] dont le principe est hélas contestable — voir le paragraphe 8 de [5]. Pour le domaine d'observation sous l'horizon astronomique (où on voit usuellement l'horizon marin et les astres qui s'y couchent) ou peu au-dessus de lui,  $\chi_S(\psi')$  n'est



**FIGURE 3.** Soleil levant vu depuis le Pic du Midi. Les inversions de température vues sous l'horizon astronomique provoquent, contrairement à celles vues au-dessus (voir le théorème de Biot–Sang–Meyer–Fraser–White au sous-paragraphe 7.2 de [5]) et sans que la vapeur d'eau soit en cause, la formation de fragments d'images renversées. Leur multiplicité témoigne de la complexité du profil thermique réel de l'atmosphère, ayant des longueurs caractéristiques allant du décimètre à quelques centimètres très souvent. © Photo : Patrick Muller.

pas paramétré que par la longueur d'onde et la température  $T_S$  et la pression  $P_S$  en  $S$ , mais très sensiblement par tout le profil de réfractivité de l'air assez proche de  $S$ , ce qui pose un problème majeur quand le point nautique utilise un astre dans ce domaine d'observation. Autre complication inhérente à ce domaine : si la table nautique donnant  $\chi_S(\psi'(W))$  pour l'observation sans filtre coloré a été établie par calcul, il faudrait qu'elle tienne compte de l'augmentation de longueur d'onde effective due au rougissement apparent du Soleil quand  $\psi'(W)$  décroît, ce qui diminue la réfractivité de l'air à cause de sa dispersion chromatique ; pour le Soleil sur l'horizon le changement correspondant de  $\chi_S$  est de l'ordre de  $0,1'$ , qui est la précision visée par les tables nautiques [40, p. 562 et 709 Tables 27–28]. Si la table est établie observationnellement par des mesures sans filtre, cet effet devrait automatiquement être pris en compte ; mais dans la pratique la réfraction horizontale est très difficile à mesurer précisément — en effet, Arago disait (en 1838) :

« Les astronomes qui ont essayé, même une seule fois dans leur vie, de déterminer la valeur des réfractions horizontales, savent combien peu il est permis de compter sur les résultats. C'est ordinairement le bord du soleil qui sert de point de mire ; mais près de l'horizon, ce bord paraît si fortement dentelé, si vivement irisé, si déchiqueté ; ces diverses irrégularités sont d'ailleurs tellement changeantes que l'observateur ne sait où diriger le fil du réticule, à quel point, à quelle hauteur arrêter sa lunette sur le limbe gradué de l'instrument qu'il emploie. » [61, p. 211]

• Enfin, on applique à  $\psi(W)$  une correction de parallaxe, afin de ramener cette valeur à celle qu'elle aurait si l'observateur était au centre  $C$  de la Terre ; cette correction de parallaxe vaut au maximum  $0,15'$  pour le Soleil, et  $0,3'$  pour les planètes les plus proches de la Terre (Vénus et Mars), donc elle est négligeable si la précision des mesures n'est pas meilleure que  $1'$ .



Bien sûr, tout ce que nous avons dit sur l'observation du Soleil s'applique aussi à la Lune, qui en plus a quasiment le même diamètre apparent que lui ; par contre, la correction de parallaxe lunaire est très importante : elle va de  $0,86^\circ$  à  $1,03^\circ$ , et se trouve tabulée pour chaque heure dans les pages journalières *Ephémérides nautiques*, éditées par le Bureau des longitudes.

### Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

### Remerciements

L'auteur exprime sa reconnaissance au Dr. Andrew Young pour la mise à disposition de sa fabuleuse bibliographie en ligne (citée à la fin du paragraphe 2) et pour ses conseils personnalisés. Il remercie aussi le Dr. Siebren van der Werf pour ses précisions sur les méthodes de navigation astronomique. Enfin, il exprime sa gratitude à Julien Desmarets (du service des publications de l'Académie des sciences) pour son précieux travail technique améliorant la lisibilité des extraits de textes anciens.

### Annexe A.

Dans cette annexe, pour le cas où le diagramme de Young–Kattawar a la forme donnée sur la Figure A1, et où  $r_S$  est strictement supérieur à l'abscisse  $r_m$  du minimum local sur le diagramme, nous voulons préciser la divergence de  $\psi$  en fonction de  $\psi'$  (cf. *infra*) quand celui-ci tend vers  $\psi'_a := -\arccos(I_m/(n_S r_S))$  où  $I_m$  est la valeur du minimum local.

Pour cela, rappelons que l'angle de réfraction astronomique du point  $A$  d'un astre vu de l'observateur  $S$  est  $\chi_S = \psi' - \psi$ , où  $\psi$  désigne la hauteur angulaire vraie, et  $\psi'$  la hauteur apparente de  $A$  en  $S$ . L'invariant de Bouguer du rayon joignant  $A$  à  $S$  est

$$I_B = n_S r_S \cos \psi' > 0. \quad (\text{A1})$$

Il nous permet de définir  $r_1(I_B) \leq r_m$  et  $r_3(I_B) \geq r_m$  dans les domaines où  $f$  est croissante — voir la Figure A1.

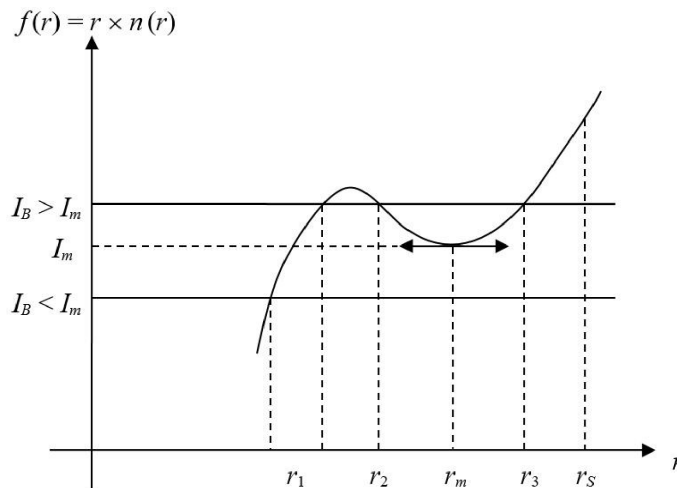


FIGURE A1. Diagramme de Young–Kattawar.

L'observateur est au-dessus d'un chenal, puisque  $r_S > r_m$ . Posons

$$A(I_B) := \begin{cases} \int_{r_1(I_B)}^{r_S} \frac{dr}{\sqrt{h(r, I_B)}} & \text{pour } I_B \leq I_m \\ \int_{r_3(I_B)}^{r_S} \frac{dr}{\sqrt{h(r, I_B)}} & \text{pour } I_B \geq I_m. \end{cases} \quad (A2)$$

Pour les points vus sur l'horizon astronomique ou au-dessus ( $\psi' \geq 0$ ) on a

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \int_{r_S}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{h(r, I_B)}},$$

(où l'intégrale converge car  $\sqrt{h(r, I_B)} \sim r^2/I_B$  pour  $r$  au voisinage de l'infini), et la réfraction  $\chi_S = \psi' - \psi$  peut s'exprimer par

$$\chi_S(\psi') = \int_{r_S}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{h(r, I_B)}} - \frac{\pi}{2} + \psi'. \quad (A3)$$

Quant à l'angle de réfraction pour les astres vus sous l'horizon astronomique ( $\psi' < 0$ ), on a

$$\chi_S(\psi') = 2A(I_B) + 2\psi' + \chi_S(-\psi') \quad (A4)$$

où  $\chi_S(-\psi')$  est fini, en accord avec le résultat précédent. Lorsque  $\psi'$  tend vers  $\psi'_a$  par valeurs supérieures,  $I_B$  tend vers  $I_m$  par valeurs supérieures aussi, et  $A(I_B)$  diverge ; alors au voisinage de  $\psi'_a$  (mais avec  $\psi'_a < \psi' < 0$ ) on a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned} \psi &\sim -2A(I_B) \\ &\sim -2 \int_{r_3(I_B)}^{r_S} \frac{dr}{\sqrt{\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r_m, I_m) \frac{(r-r_m)^2}{2} + \frac{\partial h}{\partial I_B}(r_m, I_m) n_S r_S (\cos \psi' - \cos \psi'_a)}} \\ &\sim -2 \sqrt{\frac{2}{\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r_m, I_m)}} \ln \frac{1}{\sqrt{\cos \psi' - \cos \psi'_a}} \\ &\sim \sqrt{\frac{2}{\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r_m, I_m)}} \ln(\psi' - \psi'_a). \end{aligned} \quad (A5)$$

Et pour  $\psi' < \psi'_a < 0$  on a, au voisinage de  $\psi'_a$ , la chaîne d'équivalences

$$\psi \sim -2A(I_B) \sim 2 \sqrt{\frac{2}{\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r_m, I_m)}} \ln(\psi'_a - \psi') \quad (A6)$$

avec un facteur 2 devant la racine car, pour calculer  $A(I_B)$ , il faut intégrer maintenant de part et d'autre de  $r_m$  puisque  $I_B < I_m$ .

Ces deux équivalents prouvent au passage l'existence, pour la courbe de transfert, d'une asymptote bilatérale d'abscisse  $\psi'_a$ .

## Références

- [1] L. Dettwiller, « Les développements de Lambert : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 453-465.
- [2] E. E. Kummer, « Eine neue Methode, die numerischen Summen langsam convergirender Reihen zu berechnen », *J. für die Reine und Angew. Math.* **16** (1837), p. 206-214.
- [3] E. E. Kummer, « Über atmosphärische Strahlenbrechung », *Monatsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* **5** (1860), p. 405-420.
- [4] É. Verdet, « Mémoire sur la réfraction atmosphérique par M. Kummer », *Ann. Chim. Phys.* **61** (1861), p. 496-507.
- [5] L. Dettwiller, « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 63-102.

- [6] L. Dettwiller, « Properties of optical ducts, their chromatism and its effects on astronomical refraction », 2022, *preprint*, <https://arxiv.org/abs/2204.02605>.
- [7] A. Bravais, « Notice sur le mirage », *Annuaire Météorologique de la France pour 1852* **4** (1853), p. 227-280.
- [8] L. Dettwiller, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : Une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 13-62.
- [9] E. Wright, *Certain Errors in Navigation, Arising either of the Ordinarie Erroneous Making or Vsing of the Sea Chart, Compasse, Crosse Staffe, and Tables of Declination of the Sunne, and Fixed Starres Detected and Corrected*, Valentine Sims, Londres, 1599.
- [10] J. L. Dauvergne, « Coucher de Soleil en temps réel au Pic du Midi », <https://www.youtube.com/watch?v=GwIphktocoQ> (consulté le 15 mars 2022).
- [11] J.-B. Biot, « Recherches sur les réfractions extraordinaires qui ont lieu près de l'horizon », in *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France, Année 1809*, Garnery, Paris, 1810, p. 1-266.
- [12] L. Hasse, « Über den Zusammenhang der Kimmtiefe mit meteorologischen Größen », *Dtsch. Hydrogr. Z.* **13** (1960), p. 181-197.
- [13] P. Bouguer, « Second mémoire sur les réfractions astronomiques, observées dans la Zone Torride ; avec diverses remarques sur la manière d'en construire les tables », *Mém. Acad. R. Sci.* **1749** (1753), p. 75-112.
- [14] A. Chvojková, F. Link, « Échos lunaires sur 20 MHz et structure de l'ionosphère », *Bull. Astron. Inst. Czech.* **5** (1954), p. 99-103.
- [15] A. Wegener, « Elementare Theorie der atmosphärischen Spiegelungen », *Ann. Phys.* **57** (1918), p. 203-230.
- [16] M. Zinkova, « Rare sunset mirage, mirage of the sea surface in the duct, October 8, 2016 », <https://www.youtube.com/watch?v=38rXMcTIB4> (consulté le 15 mars 2022).
- [17] H. L. Sawatzky, W. H. Lehn, « The Arctic mirage and the early North Atlantic », *Science* **192** (1976), p. 1300-1305.
- [18] L. Dettwiller, « Some theorems on "arctic mirages": *hillingar* effect and superior mirages », *J. Opt. Soc. Am. A* **36** (2019), p. 1997-2004.
- [19] Frhr. von Schrötter, « Hebung der Kimm und Luftspiegelungen in der Nordsee », *Ann. Hydrogr. Berlin* **36** (1908), p. 490-497.
- [20] W. Wales, « Journal of a voyage, made by order of the Royal Society, to Churchill River, on the North West Coast of Hudson's Bay; of thirteen months residence in that country; and of the voyage back to England; in the years 1768 and 1769 », *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **60** (1770), p. 100-136.
- [21] D. Brandes, « Einige kritische Bemerkungen zu den in den Annalen befindlichen Aufsätzen über die irdische Strahlenbrechung, und Nachricht von der Vollendung seiner Refractions-Beobachtungen », *Gilb. Ann. Physik* **23** (1806), p. 380-393.
- [22] W. Scoresby, *Journal of a Voyage to the Northern Whale-Fishery*, Constable, Edimbourg, 1823.
- [23] J. Parnell, « On a mirage in the English Channel », *Phil. Mag.* **37** (1869), p. 400-401.
- [24] R. L. Ives, « Recurrent mirages at Puerto Peñasco, Sonora », *J. Franklin Inst.* **252** (1951), p. 285-295.
- [25] D. A. Hunt, A. O. Proudfoot, B. G. Gouldthorpe, « Abnormal refraction, Australian waters », *Mar. Obs.* **30** (1960), p. 134.
- [26] G. F. Wright, W. Upham, *Greenland Icefields and Life in the North Atlantic*, D. Appleton, New York, 1896.
- [27] F.-A. Forel, *Le Léman — Monographie limnologique*, t. 2, F. Rouge, Lausanne, 1895.
- [28] S. van der Werf, « Hafgerdingar and giant waves », *Appl. Opt.* **56** (2017), p. G51-G58.
- [29] M. Zinkova, « Fata Morgana in coastal California », *Weather* **64** (2009), p. 287.
- [30] W. H. Lehn, I. I. Schroeder, « Hafgerdingar: a mystery from the King's mirror explained », *Polar Rec.* **39** (2003), p. 211-217.
- [31] S. van der Werf, « Novaya Zemlya effect and Fata Morgana — Raytracing in a spherically non-symmetric atmosphere », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 365-389.
- [32] A. T. Young, E. Frappa, « Mirages at Lake Geneva: the Fata Morgana », *Appl. Opt.* **56** (2017), p. G59-G68.
- [33] L. Dettwiller, « Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 103-132.
- [34] G. G. Pegler, « Mirage, Cape Town, South Africa », *Mar. Obs.* **19** (1949), p. 10-12.
- [35] A. T. Young, G. W. Kattawar, « Sunset science. II. A useful diagram », *Appl. Opt.* **37** (1998), p. 3785-3792.
- [36] K. Koss, E. Graf Thun-Hohenstein, « Kimmtiefen-Beobachtungen zu Verudella », *Denkschr. der kaiserl. Akad. Wiss. (Wien), math.-naturwiss. Cl.* **70** (1901), p. 347-428.
- [37] P. de Vanssay de Blavous, « On refraction and refraction tables », *Hydrogr. Rev.* **21** (1944), p. 17-36.
- [38] A. Sjöblom, A.-S. Smedman, « Vertical structure in the marine atmospheric boundary layer and its implication for the inertial dissipation method », *Boundary-Layer Meteorol.* **109** (2003), p. 1-25.
- [39] C. F. Bohren, A. B. Fraser, « At what altitude does the horizon cease to be visible? », *Am. J. Phys.* **54** (1986), p. 222-227.
- [40] National Imagery and Mapping Agency, *American Practical Navigator – Bowditch 2002 Bicentennial Edition*, NIMA, Bethesda (Maryland), 2002.
- [41] J. H. Lambert, *Les Propriétés Remarquables de la Route de la Lumière*, H. Scheurleer F. Z. & Compagnie, La Haye, 1758.
- [42] S. Newcomb, *A Compendium of Spherical Astronomy*, Macmillan, New York, 1906.
- [43] J. Cassini, *Traité de la Grandeur et de la Figure de la Terre*, Pierre de Coup, Amsterdam, 1723.

- [44] L. Dettwiller, « L'invariant de Bouguer et ses conséquences : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 415-452.
- [45] P. Bouguer, *De la Méthode d'Observer Exactly sur Mer la Hauteur des Astres*, Claude Jombert, Paris, 1729.
- [46] L. Hasse, « Temperature-difference corrections for the dip of the horizon », *J. Inst. Nav. (London)* **17** (1964), p. 50-56.
- [47] S. van der Werf, I. Shokaryev, « Wave height and horizon dip », *Navigation* **62** (2015), p. 161-169.
- [48] G. Reinicke, « Durch Luftspiegelung veränderte Kimmtiefe », *Ann. Hydrograph. Marit. Met.* **31** (1903), p. 511-512.
- [49] H. Ramforth, « Abnormal visibility at sea », *Mar. Weather Log* **17** (1973), p. 300-301.
- [50] M. E. Tschudin, « Refraction near the horizon — an empirical approach. Part 1: terrestrial refraction of the dip », *Appl. Opt.* **55** (2016), p. 3104-3115.
- [51] P. Brassier, *Navigation Astronomique*, nouv. éd., Vuibert, Paris, 1999.
- [52] UK Hydrographic, *Nautical Almanac 2020*, Paradise Cay Publications, Arcata (Californie), 2019.
- [53] J. Huddart, « Observations on horizontal refractions which affect the appearance of terrestrial objects, and the dip, or depression of the horizon of the sea », *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **87** (1797), p. 29-42.
- [54] « Sur les refractions », *Hist. Acad. R. Sci. année 1707* (1734), p. 111-114, [republ. amstellodamoise de l'édition originale parisienne, *Hist. Acad. R. Sci. année 1707* (1730), p. 89-91].
- [55] J.-D. Cassini, « Des irregularitez de l'abaissement apparent de l'horizon de la mer », *Mém. Acad. R. Sci. année 1707* (1730), p. 195-197.
- [56] F. Arago, « Sur les dépressions de l'horizon de la mer », in *Connaissance des Temps pour l'an 1827*, Bureau des Longitudes, Paris, 1827, p. 316-323.
- [57] H. H. Shufeldt, « Precision celestial navigation », *J. Inst. Nav. (London)* **15** (1962), p. 301-324.
- [58] J.-B. Delambre, *Astronomie Théorique et Pratique*, t. 1, Courcier, Paris, 1814.
- [59] L. Dettwiller, « Short review on the refractive index of air as a function of temperature, pressure, humidity and ionization », 2022, *preprint*, <https://arxiv.org/abs/2204.02603>.
- [60] J.-B. Biot, F. Arago, « Mémoire sur les affinités des corps pour la lumière, et particulièrement sur les forces réfringentes des différens gaz », *Mém. Inst.* **7** (1806), p. 39-66.
- [61] F. Arago, « Instructions concernant la Météorologie et la Physique du globe », *C. R. Acad. Sci.* **7** (1838), p. 206-224.





---

Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

# Les développements de Radau et leur divergence : commentaire historique

## *Radau's series expansions and their divergence: an historical commentary*

Luc Dettwiller<sup>® a</sup>

<sup>a</sup> Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School,  
Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France  
*Courriel*: [dettwiller.luc@gmail.com](mailto:dettwiller.luc@gmail.com)

**Résumé.** Dans un article primé de 1882, Radau (1835–1911) fait le point sur diverses expressions de la réfraction, dont celle en série entière de la tangente de la distance zénithale apparente. Nous nous focalisons sur l'expression intégrale de ses coefficients, sur l'approximation fondamentale utilisée pour les calculer, et sur l'introduction ultérieure (1906), dans ce but, de multiples familles de hauteurs caractéristiques de l'atmosphère. Nous commentons la divergence, due à l'approximation fondamentale, de la série obtenue dans le cas de l'atmosphère isotherme (donc illimitée).

**Abstract.** In an award-winning 1882 article, Radau (1835–1911) takes stock of various expressions of refraction, including the power series of the tangent of the apparent zenith distance. We focus on the integral expression of its coefficients, on the fundamental approximation used to calculate them, and on the subsequent introduction (1906) for this purpose of multiple families of characteristic heights of the atmosphere. We comment on the divergence, due to the fundamental approximation, of the series obtained in the case of the isothermal atmosphere (therefore unlimited).

*Published online: 21 February 2023, Issue date: 11 August 2023*

### 1. Introduction

Originaire de Prusse orientale, Rodolphe Radau (1835–1911) commence sa carrière professionnelle en 1855, comme astronome à Königsberg (auparavant Regiomonti, et maintenant Kalinigrad). Il accompagne en 1858 à Paris le *gentleman scientist* Antoine d'Abbadie [1] qui l'embauche pour effectuer la réduction de ses observations de géodésie recueillies au cours de son expédition en Abyssinie ; on sait (voir [2] dans ce numéro spécial) que les corrections de réfraction jouent un grand rôle aussi en géodésie. Radau devient rédacteur de la *Revue des deux Mondes* ; mais il poursuit en même temps ses travaux en astronomie et en géodésie (où il invente une transformation, encore utilisée de nos jours dans des études théoriques, pour traiter la question de la figure hydrostatique de la Terre). Il est naturalisé français en 1873, et collabore avec Tisserand sur des questions de mécanique céleste.

Dans les *Annales de l'Observatoire de Paris*, il produit deux articles de synthèse [3, 4] sur la réfraction astronomique, en 1882 puis 1889 ; ils sont disponibles sur NASA/ADS :

[https://ui.adsabs.harvard.edu/link\\_gateway/1882AnPar..16B...1R/ADS\\_PDF](https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/1882AnPar..16B...1R/ADS_PDF)

[https://ui.adsabs.harvard.edu/link\\_gateway/1889AnPar..19G...1R/ADS\\_PDF](https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/1889AnPar..19G...1R/ADS_PDF)

Ils seront tous deux primés par l'Académie des sciences, où il sera élu en 1897. Entre ces deux publications, il devient membre du comité de rédaction du *Bulletin astronomique* lors de sa création en 1884.

Nous présentons surtout le premier de ces deux articles : R. Radau, « Recherches sur la théorie des réfractions astronomiques », *Annales de l'Observatoire de Paris* **16** (1882), B.1–B.114.

## RECHERCHES

SUR LA

# THÉORIE DES RÉFRACTIONS ASTRONOMIQUES;

PAR M. R. RADAU.



En comparant entre elles les Tables de réfractions en usage parmi les astronomes, on constate qu'elles sont sensiblement d'accord pour les distances zénithales qui n'excèdent pas  $80^\circ$ , c'est-à-dire pour toute la région du ciel où se font habituellement les observations; et, malgré la dissemblance des théories qui ont servi de base à ces Tables, les petites différences qui subsistent encore ne sont guère dues qu'à la diversité des valeurs adoptées pour la constante qui dépend de l'indice de réfraction de l'air. C'est que, fort heureusement, dans ces limites, la loi suivant laquelle on fait décroître la densité des couches atmosphériques a très peu d'influence sur le résultat. Il n'en est plus de même pour les réfractions qui s'opèrent plus près de l'horizon. Les valeurs de la réfraction horizontale moyenne qui se déduisent des diverses théories diffèrent de plusieurs minutes, et les mêmes écarts se présentent lorsque l'on compare ces théories aux observations faites dans le voisinage de l'horizon.

[3, B.1] Source : NASA / ADS

## 2. Résumé et commentaires

Cet article de synthèse compare diverses théories, fondées sur des modèles d'atmosphère différents, en commençant par celui de Cassini — qui donne la relation (2) de notre « panorama historique [...] » [5] dans ce numéro spécial, où intervient la hauteur réduite de l'atmosphère, i.e. « la hauteur d'une colonne d'air de densité  $[\mu_S]$  qui ferait équilibre à la pression actuelle  $[P_S]$ . » [3, p. B.10]

Il introduit (p. B.12–14) le principe et l'écueil des développements en série pour calculer l'intégrale donnant la réfraction  $\chi_S$  pour l'observateur  $S$  dans le cas d'une atmosphère à symétrie sphérique, de profil de masse volumique  $\mu(r)$  quelconque.

Il ne s'en sert pas tout de suite : il fait un détour par l'intégration donnant  $\chi_S$  sans développement en série, dans le cas où l'on adopte une relation empirique comme celle de Kramp-Bessel (B.21–23) puis celle de Laplace (B.24–25), en se servant d'une fonction transcendante due à Kramp et qui se ramène simplement à la fonction d'erreur.

Puis il présente les différents modèles d'atmosphère susceptibles d'être traités avec ces développements en série (B.27–39) : celui de Kramp-Bessel, celui d'Ivory, de Kowalski, de Gyldén, ainsi que les modèles polytropiques d'indice  $k$  (Schmidt-Bauernfeind) pour lesquels il donne quelques résultats numériques avec  $k$  allant de 4 à 6 (B.30–32).

Il expose diverses techniques d'intégration, en commençant par des théorèmes généraux (B.40) dont celui de Lagrange, puis il les applique à certains modèles ; celui d'Ivory (B.42–44), de Schmidt-Bauernfeind (B.46–55), de Gyldén (B.55–56) — à propos duquel il mentionne les effets diurnes et saisonniers (B.57) ainsi que les chenaux optiques (B.58–60) — et de nouveau d'Ivory par une autre méthode (B.60–62), puis de Kowalski (B.62–63).

Les principaux modèles sont comparés en B.64. Radau note que ceux qui ont le plus petit gradient thermique vertical  $|(dT/dr)_S|$  au niveau de l'observateur (avec  $dT/dr < 0$ ) donnent la plus grande réfraction horizontale  $\chi_{Sh}$  (B.63), et vice-versa. Cela se devine en partant de la loi de Simpson [5, paragraphe 4] puis en utilisant le théorème de Biot : celui-ci donne (si on note  $Z'$  la distance zénithale apparente d'un astre)  $(d\chi_S/dZ')(90^\circ) = \kappa_S/(1 - \kappa_S)$  qui est d'autant plus grand que le coefficient de réfraction  $\kappa_S$  (voir le paragraphe 7.1 de notre exposé des « propriétés remarquables de la réfraction astronomique [...] » [6] dans ce numéro spécial) est grand (sachant que  $\kappa_S < 0,3$  car  $dT/dr < 0$ ), donc  $|(dT/dr)_S|$  petit.

Pour finir, il s'intéresse aux modèles d'atmosphère qui n'ont pas la symétrie sphérique (B.99 ss). Les écarts de réfraction proche de l'horizon, comme ceux observés par Delambre (qui écrit : « dans des circonstances qui étaient les mêmes en apparence, la réfraction variait de 15 à 20'' sans qu'on pût en soupçonner la cause ; mais les variations sont encore bien plus sensibles à l'horizon », et qui mentionne 45'' pour  $Z' = 89^\circ$  [7]), sont des écarts grands, attribués par Radau à des changements d'inclinaison des isopycnes (i.e. des surfaces d'égale masse volumique  $\mu$ ) de l'ordre de la minute d'angle (B.112). Pourtant, son calcul avec une inclinaison d'isopycne de 1' ne lui donne une variation de réfraction que de 10'' sur l'horizon astronomique (B.111) au lieu des 45'' attendues ; et les estimations (par visée d'une étoile au zénith) de l'inclinaison des isopycnes, publiées auparavant, montrent qu'elle ne dépasse pas quelques minutes [8]. Radau n'a pas compris que de telles variations de réfraction pour  $Z'$  proche de  $90^\circ$  proviennent plutôt de changements dans le profil de température, surtout au voisinage de  $S$ .

L'article de 1889 [4] prolonge le précédent, sans apporter de radicale nouveauté.

Visiblement Newcomb s'est inspiré de Radau (qu'il prolonge) pour écrire son traité de 1906 [9].

Pour d'autres détails, voir

A. T. Young. (Page consultée le 12 janvier 2022), *Annotated bibliography of mirages, green flashes, atmospheric refraction, etc.*, [En ligne]. Adresse URL : <https://aty.sdsu.edu/bibliog/bibliog.html>.



### 3. Présentation illustrée de quelques idées fondamentales

#### 3.1. Une méthode systématique de développement en série entière de $\chi_S(\tan Z')$

Dans [6] nous avons montré une approche emblématique de celles du XIX<sup>e</sup> siècle, qui se trouve contenue dans l'article [3] que nous présentons ici ; elle commence (voir l'extrait ci-dessous, dont les notations sont expliquées dans la Table 1 qui le suit) par

$$\chi_S = n_S r_S (\tan Z') \int_1^{n_S} n^{-2} r^{-1} [1 + F(n, Z')]^{-1/2} dn = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p \tan^{2p+1} Z' \tag{1}$$

où l'on a posé, en tenant compte de la relation entre  $r$  et  $n$  à  $Z'$  fixé,

$$F(n, Z') := \left( 1 - \frac{n_S^2 r_S^2}{n^2 r^2} \right) \tan^2 Z' \tag{2}$$

(le symbole  $:=$  indiquant une définition ou une notation), et

$$a_p = r_S \frac{(2p-1)!!}{p! 2^p} \int_1^{n_S} n_S n^{-2} r^{-1} \left( 1 - \frac{n_S^2 r_S^2}{n^2 r^2} \right)^p dn \tag{3}$$

où  $N!$  et  $N!!$  désignent respectivement la factorielle et la double factorielle de  $N$ . Attention : notre formule (3) n'est pas celle invoquée ci-dessous par Radau, et qui correspond à notre première formule (1).

La formule (3) peut s'écrire

$$\mathbf{r} = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\mu^2} \frac{r_0}{r} \frac{\operatorname{tang} z}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 z \left[ 1 - \left( \frac{\mu_0 r_0}{\mu r} \right)^2 \right]}}$$

Or nous avons

$$\frac{r_0}{r} = 1 - s, \quad \left( \frac{\mu}{\mu_0} \right)^2 = 1 - 2\alpha\omega, \quad \mu_0 \frac{d\mu}{\mu^2} = \frac{\alpha d\eta}{(1 - 2\alpha\omega)^{\frac{3}{2}}},$$

par conséquent

$$\mathbf{r} = \alpha \operatorname{tang} z \int_0^1 \frac{1-s}{(1-2\alpha\omega)^{\frac{3}{2}}} \left( 1 + \frac{2s-2\alpha\omega-s^2}{1-2\alpha\omega} \operatorname{tang}^2 z \right)^{-\frac{1}{2}} d\eta.$$

[3, B.12] Source : NASA / ADS

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}_0 \operatorname{tang} z - \mathbf{A}_1 \operatorname{tang}^3 z + \mathbf{A}_2 \operatorname{tang}^5 z - \dots,$$

[3, B.13] Source : NASA / ADS

Correspondance des notations

TABLE 1. Notations (le symbole := indique une définition)

Notations de Radau [3]	Notations de Dettwiller [5, 6] dans ce numéro de <i>C. R. Phys.</i>	Notations de Newcomb [9]	Indications [et unités usuelles]
$\mathbf{r}$	$\chi_S$	$R$	Réfraction astronomique pour l'observateur S [°, ', ''']
$\mathbf{R}$	$\chi_{Sh}$		Réfraction horizontale, i.e. pour un astre vu sur l'horizon astronomique [°, ', ''']
$\mu(r)$	$n(r)$	$\mu(r)$	Indice de réfraction de l'air, dont la distribution est supposée à symétrie sphérique de centre $C$
$\mu_0$	$n_S$	$\mu_1$	Indice au niveau de l'observateur S
$r_0$	$r_S$	$a$	CS (quasiment le rayon terrestre) [km]
$z$	$Z'$	$z$	Distance zénithale apparente d'un astre $A$ [°, ', ''']
$\alpha$	quasiment $\eta_S$		$\eta_S := n_S - 1$
Densité $\eta$ relative à S	$\mu/\mu_S$	$\rho/\rho_1$	Rapport de la masse volumique de l'air à sa valeur en S
$\omega$	$1 - (\mu/\mu_S)$	$w$	
$h$	$z := r - r_S$	$h$	Altitude par rapport à S [m, km]
$y$	quasiment $z/H_1$	$x$	$H_1$ : hauteur réduite de l'atmosphère
$u$	quasiment $Y := \eta - \eta_S + (z/r_S)$		Grandeur utilisée pour l'approximation fondamentale

3.1.1. Estimation de  $a_0$

On approxime par 1 le préfacteur  $n_S n^{-2}$  dans notre formule (3) ; et, avec la loi empirique de Gladstone–Dale pour l'air supposé bien mélangé [6, sous-paragraphe 4.1], il vient, en introduisant l'altitude  $z := r - r_S$  d'origine en S,

$$a_0 \cong \int_1^{n_S} \frac{r_S}{r} dn = \int_0^{\eta_S} \left(1 + \frac{z}{r_S}\right)^{-1} d\eta \tag{4}$$

où  $\eta := n - 1$  désigne la réfractivité, et  $\eta_S$  sa valeur en S. Ceci est supérieur mais — puisque  $z \ll r_S$  tant que la masse volumique  $\mu(r)$  n'est pas négligeable — à peu près égal à

$$\int_0^{\eta_S} \left(1 - \frac{z}{r_S}\right) d\eta = \eta_S(1 - h_1) \tag{5}$$

où on a introduit la « hauteur réduite relative »

$$h_1 := \frac{1}{\eta_S} \int_0^{\eta_S} \frac{z}{r_S} d\eta. \tag{6}$$

Finalement,

$$a_0 = (n_S - 1)(1 - h_1) \tag{7}$$

(nous avons mis = au lieu de  $\cong$  car nous n'avons pas introduit de nouvelle approximation en plus de celles indiquées précédemment). Ce résultat confirme le premier terme de la formule de Laplace — équation (14) de [6].

### 3.1.2. Estimation des coefficients $a_p$ pour $p \geq 1$

Pour traiter maintenant le cas où  $p \geq 1$ , on est obligés de considérer  $1 - (n_S^2/n^2)(r_S^2/r^2)$ . La technique de calcul traditionnelle et les notations déjà utilisées au sous-paragraphe 5.1 de [6] permettent de montrer facilement que, sur la hauteur utile de l'atmosphère,

$$1 - \frac{n_S^2 r_S^2}{n^2 r^2} \cong 2 \left( \frac{z}{r_S} + \eta - \eta_S \right) := 2Y \quad (8)$$

(ce qui est une approximation fondamentale et majorante) ; puis en y approximant toujours par  $r_S^{-1}$  (ce qui majore encore un peu mais sans introduire de divergence à l'infini) le préfacteur  $n_S n^{-2} r^{-1}$  dans notre relation (3), on obtient

$$a_p \cong \frac{(2p-1)!!}{p!} \int_0^{\eta_S} Y^p d\eta. \quad (9)$$

Avec un modèle qui est le cas particulier où  $\beta = 0$  — dans l'équation (34) de [5], caractérisant la dernière atmosphère considérée par Laplace dans son *Traité de Mécanique Céleste* [10, livre 10, article 1], [11, p. 497–521] —, donc un modèle voisin de celui à profil (de masse volumique) exponentiel, Radau obtient une expression voisine de la série (50) de [5], mais avec une autre hauteur d'échelle relative que  $h_1$  [3, B.14] : elle est caractérisée par  $\theta$ , et elle intervient dans la loi exponentielle décroissante qui, dans le modèle considéré, exprime  $\eta$  en fonction de  $Y$  (et non pas de  $z$ ) — voir l'extrait ci-dessous. Nous pouvons facilement la relier à  $h_1$ , vu que

$$\theta = \frac{1}{\eta_S} \int_0^\infty \eta_S e^{-Y/\theta} dY = \frac{1}{\eta_S} \int_0^\infty \eta dY = \frac{1}{\eta_S} \left( \int_0^\infty \eta \frac{dz}{r_S} + \int_{\eta_S}^0 \eta d\eta \right) = h_1 - \frac{\eta_S}{2}. \quad (10)$$

Pour  $n = 1$ , nous avons  $\int_0^1 u d\eta = \theta$ , en vertu de (14) ; le coefficient  $A$ , est

donc, à très peu près, égal à  $A\theta$ . En posant  $\eta = e^{-\frac{u}{\theta}}$ , hypothèse qui satisfait à l'équation (14), on trouve de même que  $A_n$  a pour valeur approchée

$$1.3 \dots (2n-1) A \theta^n.$$

Il s'ensuit que la série

$$r = A_0 \operatorname{tang} z (1 - \theta \operatorname{tang}^2 z + 3\theta^2 \operatorname{tang}^4 z - 15\theta^3 \operatorname{tang}^6 z + \dots)$$

fournit une valeur très approchée de la réfraction. C'est aussi ce qu'on trouve en développant la formule (8) :

[3, B.14] Source : NASA / ADS

À l'époque, en l'absence d'outils de calcul numérique puissants, ainsi que d'informations précises sur la structure de l'atmosphère entière, il était tentant de proposer des modèles qui soient commodes analytiquement, en donnant  $\eta$  en fonction de  $Y$  plutôt que de  $z$ , puisque les expressions approximatives classiques sont nettement plus simples en fonction de  $Y$  — voir la fin du paragraphe 4 de [5], ainsi que l'approximation fondamentale présentée ci-dessus et réutilisée au paragraphe 8 de [6]. Laplace a fait grand usage de cet artifice, dont nous verrons (au sous-paragraphe 3.2 du présent article) que Radau le critique un peu plus loin dans son

mémoire [3] : car il est plus naturel de partir du profil de  $\eta$  en fonction de  $z$  pour calculer les coefficients  $a_p$ .

Il serait trop long de vouloir reproduire ici dans le détail les calculs tortueux traditionnellement menés dans ce but, avec diverses approximations supplémentaires cependant ; la plupart des fois, ils se heurtent à un problème de convergence.

Contentons-nous alors d'en expliquer le principe général : on repart de l'approximation fondamentale incluse dans l'expression (9) du présent article, pour laquelle on développe  $[(z/r_S) + \eta - \eta_S]^p$ , ce qui donne une somme de monômes proportionnels à  $z^m \eta^q$  (avec  $m$  et  $q$  dans  $\{0, 1, 2, \dots, p\}$ ) ; pour exprimer  $a_p$  à l'aide de (9), on se ramène alors à l'utilisation de hauteurs caractéristiques relatives  $h_{m,q}$  telles que

$$\begin{aligned} \eta_S^{q+1} h_{m,q}^m &:= \int_0^{\eta_S} \left(\frac{z}{r_S}\right)^m \eta^q d\eta = - \int_0^\infty \left(\frac{z}{r_S}\right)^m \frac{d}{dz} \frac{\eta^{q+1}}{q+1} dz \\ &= - \left[ \left(\frac{z}{r_S}\right)^m \frac{\eta(z)^{q+1}}{q+1} \right]_0^\infty + \int_0^\infty m \left(\frac{z}{r_S}\right)^{m-1} \frac{\eta(z)^{q+1}}{q+1} \frac{dz}{r_S} = \frac{m}{q+1} \int_0^\infty \left(\frac{z}{r_S}\right)^{m-1} \eta^{q+1} \frac{dz}{r_S} \end{aligned} \tag{11}$$

où l'intégration par parties a permis de passer de l'exposant  $m$  à l'exposant  $m-1$ . Cette intégrale, proportionnelle à  $\rho_1^{q+1} I_{m,q}$  de Newcomb [9] — voir l'extrait ci-dessous — reste à estimer pour chaque profil de réfractivité. Dans le cas polytropique (étudié par Ivory, Bauernfeind, etc. — voir le sous-paragraphe 6.3 de [5]) Newcomb reconnaît à ce stade une intégrale eulérienne de première espèce (« intégrale bêta » — [12, p. 209]) ; elle se traite en remarquant qu'une primitive de  $\eta(z)^{q+1}$  est proportionnelle à une autre puissance de  $\eta(z)$ , et donc qu'en itérant cette intégration par parties encore  $m-1$  fois on arrive à une intégrale triviale. Notons que  $h_{m,q}^m$  est le moment réduit et relatif, d'ordre  $m$ , de  $-(d/dz)(\eta^{q+1}/(q+1))$ .

214

ASTRONOMICAL REFRACTION

[§ 114.

Thus we have

$$x^n w^i dw = -x^n \frac{d\rho}{\rho_1} + ix^n \frac{\rho d\rho}{\rho_1^2} - \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} x^n \frac{\rho^2 d\rho}{\rho_1^3} + \dots$$

These terms are to be integrated for  $w$  between the limits 1 and 0. The integrals to be found now become of the general form

$$\int_0^{\rho_1} x^n \rho^\kappa d\rho \equiv \rho_1^{\kappa+1} I_{n,\kappa} \dots\dots\dots(27)$$

[9, p. 214]

Dans le cas de l'atmosphère bien mélangée et satisfaisant la loi de Gladstone–Dale, supposée en plus constituée d'un mélange idéal de gaz parfaits de température absolue  $T$  uniforme, avec une distribution verticale de pression  $P$  hydrostatique dans le champ de pesanteur radial et de norme  $g$  considérée uniforme, on a un profil de réfractivité exponentiellement décroissant

$$\eta(z) = \eta_S e^{-z/H_T}, \quad \text{avec } H_T = \frac{RT}{M_a g} \tag{12}$$

qui est l'échelle de hauteur de cette atmosphère dite isotherme (où  $R$  désigne la constante des gaz parfaits, et  $M_a$  la masse molaire de l'air). Alors  $h_{p,0}$  se déduit (comme cela fut déjà remarqué par Kramp [13]) de

$$(r_S h_{p,0})^p = - \int_0^\infty z^p [\eta'(z)/\eta_S] dz = \int_0^\infty z^p e^{-z/H_T} dz / H_T = p! H_T^p \quad \forall p \in \mathbb{N} \tag{13}$$

(qui est une intégrale eulérienne de seconde espèce, donc liée à la « fonction gamma » — [12, p. 1137–1142]) alors  $h_{1,0} = H_T/r_S$  dans ce cas ; et puisque  $[\exp(-z/H_T)]^{q+1} = \exp(-[(q+1)/H_T]z)$ , du calcul précédent on déduit alors facilement  $h_{m,q}$  par

$$h_{m,q}^m = \frac{m}{q+1} \int_0^\infty \left(\frac{z}{r_S}\right)^{m-1} \exp\left(-\frac{q+1}{H_T}z\right) \frac{dz}{r_S} = \frac{m! h_{1,0}^m}{(q+1)^m}. \tag{14}$$

Bien sûr, si dans le profil (12) de  $\eta$  on change  $H_T$  en une autre hauteur  $H_1$ , comme l'ont aussi fait Bessel et Kramp selon Radau [3, B.27], il suffit de faire de même dans les expressions (13)–(14) donnant  $h_{p,0}$  et  $h_{m,q}$ . Plus généralement, avec un profil de  $\eta$  quelconque la famille des  $h_{m,q}$  ne dépend que de la forme de celui-ci, pas de la constante multiplicative  $\eta_S$  — vu la définition (11).

Cela nous donne du recul sur l'approximation pédagogique effectuée au sous-paragraphe 5.2.1 de [6] : admettre  $Y \cong z/r_S$  implique de négliger tous les  $h_{m,q}$  tels que  $q \neq 0$ , pour ne conserver que les  $h_p := h_{p,0}$ . On trouve alors, pour une atmosphère isotherme,

$$a_p \cong \frac{(2p-1)!!}{p!} \int_0^{\eta_S} \left(\frac{z}{r_S}\right)^p d\eta = \frac{(2p-1)!!}{p!} (n_S-1) h_{p,0}^p \sim \frac{n_S-1}{\sqrt{\pi p}} (2h_{p,0})^p \tag{15}$$

— où l'équivalent est obtenu grâce à la formule de Stirling [13, p. 2868].

On obtient finalement, avec cette approximation pédagogique,

$$a_p = (2p-1)!! \eta_S h_1^p \tag{16}$$

qui donne, pour le coefficient du terme en  $\tan^3 Z'$ ,

$$-a_1 = -\frac{(2-1)!!}{1!} (n_S-1) h_{1,0} = -\eta_S h_1. \tag{17}$$

On constate qu'on ne retrouve pas exactement le coefficient du terme en  $\tan^3 Z'$  de la formule de Laplace (équation (30) de [5]) :  $-\eta_S[h_1 - (\eta_S/2)] = -\eta_S\theta$  ; cette différence vient surtout de l'approximation pédagogique, dont l'effet revient ici à négliger  $\eta_S/2 \cong 0,08h_1$ .

### 3.1.3. Divergence

La pointe de ce sous-paragraphe 3.1 consiste à remarquer que l'ensemble des résultats obtenus, pour tout profil de  $\eta$  exponentiel décroissant, donne

$$\chi_S = (n_S-1) \left[ (1-h_1) + \sum_{p=1}^\infty (-1)^p (2p-1)!! (h_1 \tan^2 Z')^p \right] \tan Z' \tag{18}$$

qui est une série violemment divergente, avec notre approximation pédagogique, mais pas à cause d'elle ! Ce problème de divergence est signalé une rare fois par Radau — voir l'extrait ci-dessous.

On voit déjà, cependant, que la série  $\mathfrak{r} = A_0 \operatorname{tang} z - A_1 \operatorname{tang}^3 z + \dots$  ne peut guère être employée avec avantage au delà de  $80^\circ$ , car, en faisant  $\operatorname{tang} z = 10$  ( $z = 84^\circ, 3$ ) ; elle diverge à partir du terme  $A_5 \operatorname{tang}^{11} z$ , qui a pour valeur approchée  $10''$ .

[3, B.14–15] Source : NASA / ADS

Radau ne dit jamais explicitement dans cet article (ni aux pages G.36–G.38 de son article ultérieur de 1889 [4], où il s'inquiète de la convergence) que la série approchée obtenue finalement pour  $\chi_S(\tan Z')$  est semi-convergente (voir le sous-paragraphe 6.3 de [5]), ni que  $\lim_{p \rightarrow \infty} a_p \tan^{2p+1} Z' = \infty$  aussi petits que soient  $H_1$  et même  $\tan Z'$  (non nuls) ! Dans [6] nous avons expliqué que ce paradoxe ne vient pas de l'intervention du développement en série et de l'intégrale — voir les relations (1)–(3) — mais de l'approximation majorante fondamentale consistant à assimiler  $1 - [n_S^2 r_S^2 / (n^2 r^2)]$  à  $2Y$  — cf. (8) — dans l'intégrale de l'expression de  $a_p$ , ce

qui a un effet désastreux pour  $p$  grand dans le cas d'une atmosphère illimitée même avec un profil de  $\eta$  à décroissance aussi rapide qu'une exponentielle. Comme cette approximation fondamentale est bien antérieure à Radau, sa conséquence néfaste se retrouve aussi chez d'autres du XIX<sup>e</sup> siècle (voir le sous-paragraphe 6.3 de [5]). La divergence vient du terme  $z/r_S$  introduit avec  $Y$  qui diverge à l'infini (contrairement à  $\eta - \eta_S$  et à  $1 - [n_S^2 r_S^2 / (n^2 r^2)]$ ) ; ceci, pour un profil de réfractivité comme  $\eta(z) = \eta_S e^{-z/H_1}$ , ruine la convergence pour tout  $Z'$  non nul, en introduisant les moments réduits  $h_{m,q}^m$  qui croissent trop vite avec  $m$  (à cause de  $m!$ ) [14, p. 107] — voir les expressions (13) et (14), en notant que  $\lim_{p \rightarrow \infty} [(2p-1)!! / (p! 2^p)] (2h_1)^p = \lim_{p \rightarrow \infty} (1/\sqrt{\pi p}) (2h_1)^p = 0$ , alors que le remplacement de  $h_1$  par  $h_p$  (conformément à (15)) donne une limite non plus nulle mais infinie avec tout profil de réfractivité exponentiel : la suite des  $(2h_p)^p$  est décroissante pour  $p < r_S / (2H_1)$  puis croissante vers l'infini pour  $p > r_S / (2H_1)$ . Mais pour une atmosphère limitée (comme celle d'un modèle polytropique) et de hauteur totale inférieure à  $r_S/2$ , la suite des  $(2h_p)^p$  est décroissante tendant vers 0 ; alors  $\lim_{p \rightarrow \infty} [(2p-1)!! / p!] h_p^p = \lim_{p \rightarrow \infty} (1/\sqrt{\pi p}) (2h_p)^p = 0$ , donc pour  $Z'$  assez petit tel que la suite des  $[(2p-1)!! / (p! 2^p)] (2h_p \tan^2 Z')^p$  soit aussi décroissante tendant vers 0, la série approchée obtenue avec notre approximation pédagogique converge car elle est alternée [15, p. 200–201].

### 3.2. Utilisation d'autres formulations des modèles

Quant à l'usage des modèles exprimant  $\eta$  en fonction de  $Y$  plutôt que de  $z$ , Radau précise ce qui suit :

Les relations de la forme  $\eta = f(u)$  permettent d'établir l'expression de la réfraction d'une manière très directe ; c'est pourquoi j'ai voulu examiner le parti qu'on en peut tirer. Malheureusement elles ont l'inconvénient de déguiser, en quelque sorte, la loi des densités (ou celle des températures) sur laquelle repose l'hypothèse qu'elles expriment. Aussi a-t-on presque toujours préféré définir la constitution hypothétique de l'atmosphère par une relation simple entre la densité et l'altitude (Kramp, Bessel), ou la température et l'altitude (Schmidt, Bauernfeind, Gylden), ou la densité et la température (Ivory, Kowalski).

[3, B.27] Source : NASA / ADS

### Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

### Remerciements

L'auteur exprime sa gratitude au Dr. Andrew Young pour la mise à disposition de sa fabuleuse bibliographie en ligne (citée à la fin du paragraphe 2) et pour ses conseils personnalisés d'utilisation. Il remercie aussi Julien Desmarets (du service des publications de l'Académie des sciences) pour son précieux travail technique améliorant la lisibilité des extraits de textes anciens.

### Références

- [1] J.-P. Poirier, *Antoine d'Abbadie Voyageur et physicien du globe au XIX<sup>e</sup> siècle*, Hermann, Paris, 2009.
- [2] L. Dettwiller, « Les développements de Lambert : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 453-465.

- [3] R. Radau, « Recherches sur la théorie des réfractions astronomiques », *Ann. Obs. Paris* **16** (1882), p. B.1-B.114.
- [4] R. Radau, « Essai sur les réfractions astronomiques », *Ann. Obs. Paris* **19** (1889), p. G.1-G.90.
- [5] L. Dettwiller, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 13-62.
- [6] L. Dettwiller, « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 63-102.
- [7] J.-B. Delambre, *Astronomie Théorique et Pratique*, t. 1, Courcier, Paris, 1814.
- [8] S. P. Glazenap, *Refraktionii Uklon*, F. S. Sushchinskii, Saint-Pétersbourg, 1881.
- [9] S. Newcomb, *A Compendium of Spherical Astronomy*, Macmillan, New York, 1906.
- [10] P. S. Laplace, *Traité de Mécanique Céleste*, t. 4, J. B. M. Duprat, Paris, 1805.
- [11] N. Bowditch, *Mécanique Céleste. By the Marquis de La Place, translated, with a commentary*, vol. VI, Little and Brown, Boston, 1839.
- [12] E. W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, 2<sup>e</sup> éd., Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [13] C. Kramp, *Analyse des Réfractions Astronomiques et Terrestres*, Dannbach, Strasbourg, an VII – et Schwikkert, Leipzig, 1799.
- [14] A. T. Young, « Understanding astronomical refraction », *Observatory* **126** (2006), p. 82-115.
- [15] R. Couty, J. Ezra, *Analyse*, t. 2, 4<sup>e</sup> éd., A. Colin, Paris, 1976.



---

Astronomy, Atmospheres and Refraction / *Astronomie, atmosphères et réfraction*

# La photométrie des éclipses de Lune, vue par František Link : commentaire historique

*Photometry of lunar eclipses, as analyzed by František Link : an historical commentary*

Luc Dettwiller<sup>® a</sup>

<sup>a</sup> Univ Lyon, UJM-Saint-Étienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School,  
Laboratoire Hubert Curien UMR 5516, F-42023, Saint-Étienne, France  
*Courriel*: [dettwiller.luc@gmail.com](mailto:dettwiller.luc@gmail.com)

**Résumé.** Dans un article de 1933, Link (1906–1984) montre comment calculer (en tenant compte de la réfraction et l'extinction de la lumière dans l'atmosphère terrestre, ainsi que de l'assombrissement centre-bord du disque solaire), l'éclairement du disque lunaire lors d'une éclipse totale. Il en déduit des propriétés de la couche d'ozone stratosphérique. Cet article illustre la façon dont les recherches de Hausdorff concernant la haute atmosphère, basées sur l'étude de la réfraction et de la photométrie, ont pu être prolongées dans la première moitié du <sup>xx</sup><sup>e</sup> siècle, avant de disposer des techniques spatiales.

**Abstract.** In a 1933 article, Link (1906–1984) shows how to calculate the lunar disc irradiance during a total eclipse, by taking in account the refraction and extinction of light in the Earth's atmosphere, as well as the limb darkening of the Sun. Hence, he deduces some properties of the terrestrial ozone layer. This article illustrates how Hausdorff's research on the upper atmosphere, based on the study of refraction and photometry, was extended during the first half of the 20th century, before space research emerged.

*Published online: 2 February 2023, Issue date: 11 August 2023*

## 1. Introduction

František Link (1906–1984), astronome tchèque ayant suivi à l'université Masaryk — devenue depuis 1960 l'université Purkyně — de sa ville natale (Brno) des études de mathématiques, de géodésie et d'astronomie jusqu'à son doctorat (en 1930), eut son premier contact avec l'astronomie française par un séjour à l'observatoire du Pic du Midi en 1927–1928; il y étudia la vase atmosphérique (i.e. le voile blanchâtre culminant à 1 800 m d'altitude car il est dû aux noyaux de condensation que sont les gros ions formés en présence de poussières neutres, donc en dessous de 1 800 m), il mesura l'extinction de la lumière qu'elle provoque [1], il précisa l'hypothèse d'une



couche absorbante supplémentaire clairement formulée en 1923 par Bauer et Danjon (qui prolongeaient les investigations photométriques de Müller datant des années 1890) [1], et il caractérisa la couche d'ozone. Dans la suite de sa carrière très productive (environ 300 articles), Link travaillera beaucoup sur des sujets de photométrie : dès 1934 (donc bien avant l'exploration directe par les techniques spatiales), à partir de mesures de brillance (i.e. de luminance) du ciel au zénith faites dans les Tatras à 2 300 m d'altitude, il saura déduire le profil de masse volumique de l'atmosphère, et montrer que la température de l'ionosphère approche les  $10^3$  K vers 150 km d'altitude [2]; trois années auparavant, il était déjà l'un des pionniers de l'étude de la haute atmosphère terrestre par le biais de la photométrie des éclipses totales de Lune, où la réfraction joue un rôle central (comme l'avait déjà suggéré Kepler en 1604 [3]) — voir son article [4] que nous présentons. Par ces travaux, il fera œuvre de géophysicien, obtenant ainsi les premiers sondages en ozone, en aérosols et en poussières météoritiques de la stratosphère; cette technique fera école. Le lien conceptuel entre la photométrie des éclipses de Lune et la réfraction astronomique terrestre (voir le paragraphe 3) le poussera à étudier le phénomène de lentille gravitationnelle [5], 43 ans avant sa première observation (par Walsh en 1979), et un an avant la prévision de Fritz Zwicky qui annonçait l'effet optique des galaxies [6].

Au cours des années 1930, Link s'investit aussi avec succès dans la vulgarisation de la physique et de l'astronomie. Il sera en outre le créateur de « l'astronomie historique » — ses analyses de documents anciens le conduiront à proposer l'existence de cycles solaires d'environ 80 et 400 ans [7], mais actuellement on considère plutôt qu'il existe un cycle de 150–200 ans, dit de Suess-de Vries [8], en plus du cycle de Schwabe de 11,2 ans (en moyenne) et de celui de Gleissberg de 80–90 ans [9].

En 1936, il introduisit l'astrophysique dans les cours de l'Université Charles de Prague. En 1942, il entra à l'Observatoire de Ondřejov en Bohême. En 1947, il créa le *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia*, publié aussi en tchèque; ce journal fusionnera en 1992 avec la revue européenne *Astronomy and Astrophysics*. Link développa alors l'astronomie du système solaire; par exemple, dès 1948, il quantifia la luminescence de la Lune [10] (*a priori* due à l'irradiation par les rayonnements solaires de courte longueur d'onde, ou au vent solaire) grâce à une méthode utilisable en dehors des éclipses lunaires : la mesure de la profondeur relative des raies de Fraunhofer, moins forte dans la lumière lunaire que dans la lumière solaire. Il a observé des luminescences lunaires corrélées aux éjections de matière coronale solaire (donc ce serait de la luminescence surtout due aux protons solaires, ou bien — selon Vassy — le vent solaire créerait dans la haute atmosphère terrestre des centres diffusants qui éclaireraient la Lune [11]); d'ailleurs au Pic du Midi, dans les années 1950, Roberts a étudié 24 000 points de la surface lunaire par une méthode photoélectrique, et a montré que la moitié d'entre eux avait une luminosité variable avec des temps caractéristiques de quelques secondes à quelques heures. Link s'interrogera aussi sur une éventuelle luminescence des satellites de Jupiter [12]. Il devint directeur de son observatoire (à Ondřejov), à partir de 1948; en 1951, il y lança une étude des relations entre l'activité solaire (il a fait installer une coupole dédiée au Soleil) et la haute atmosphère (60–130 km d'altitude), grâce au suivi des météores par triangulation, et ses avancées furent internationalement reconnues. Mais il quitta son poste en 1952; alors il se concentra sur ses études de la haute atmosphère par les éclipses lunaires, dont il perfectionna la théorie ainsi que l'observation. Il devint le chef du département de la haute atmosphère à l'Institut d'Astronomie de l'Académie des sciences tchécoslovaque, dont il fut élu correspondant [13]. Depuis son passage au Pic du Midi en 1927–1928, puis à l'Observatoire de Lyon, Link collabora étroitement avec Bernard Lyot et plus généralement avec la France, qui était devenue dès 1927 son second pays, où il émigra volontairement et définitivement en 1969 — suite à l'invasion de la Tchécoslovaquie par les troupes du pacte de Varsovie écrasant le Printemps de Prague en 1968. Il vécut exilé quinze ans jusqu'à son décès à Paris; naturalisé français vers 1971, il changea son prénom en François, et devint Di-



**FIGURE 1.** Mosaïque montrant l'ombre de la Terre, et la Lune lors de la phase de totalité de l'éclipse du 3 mars 2007 (vue depuis le Pic du Midi). La teinte rouge-orangé n'est pas uniforme, ni l'éclairement normal (appelé aussi « irradiance » et désignant le flux lumineux arrivant par unité de surface sous incidence normale) sur la Lune assimilée à un disque; il décroît alors en fonction de la distance au bord de l'ombre (voir le paragraphe 3), rendant la phase de totalité encore plus fascinante : la sensation de voir une boule (éclairée par le haut sur cette image) contraste avec l'impression de platitude donnée par la pleine Lune ordinaire. © Photo : Patrick Muller

recteur de recherches à l'Institut d'Astrophysique de Paris. Cette dernière période de sa vie fut d'une intense productivité scientifique — il ne prit jamais de retraite. Son livre de synthèse [14] de ses travaux sur les éclipses de Lune [15–24] (voir la Figure 1) et autres corps a été publié chez Springer l'année de son exil, mais après son émigration il conserva ce thème de recherches, auquel il apporta des contributions uniques et originales, et qui restera sa passion jusqu'à la fin de ses jours [25–29], [30, chapitre 3].

Nous présentons ici un de ses articles séminaux qui utilise le plus la réfraction astronomique : celui de 1933 (qui reprend sa thèse) sur la « Théorie photométrique des éclipses de Lune » [4]; il est disponible sur NASA/ADS :

[https://ui.adsabs.harvard.edu/link\\_gateway/1932BuAst...8...77L/ADS\\_PDF](https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/1932BuAst...8...77L/ADS_PDF)

et sur Gallica :

<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k65443654/f89.item#>

Il est résumé dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* la même année [15]. En guise d'avant-propos, rappelons que si on néglige la diffraction et l'effet de l'atmosphère terrestre, le sommet V du cône d'ombre de la Terre est à  $1,4 \times 10^6$  km de son centre T, donc la Lune pourrait être complètement dans l'ombre; mais si on tient compte de la déflexion de  $70'$  par l'atmosphère (le double de la réfraction horizontale pour un observateur au sol, donc la déviation totale d'un rayon lumineux rasant la surface de la Terre), alors  $TV \cong 0,26 \times 10^6$  km, donc la Lune ne peut jamais rencontrer ce cône d'ombre raccourci par la réfraction — mais bien sûr les rayons lumineux qui rasant le sol sont très éteints, et dans la pratique on en tient compte en augmentant le rayon terrestre d'environ 70 km (ce dont La Hire avait déjà compris la nécessité en 1702 [31]), mais cela reste débattu [32]. Ainsi les cogitations de Link et ses suiveurs [33–35]

(qui s'intéressent aussi à la colorimétrie, et peuvent éventuellement utiliser des logiciels de tracé de rayons) sont-elles fondamentales pour rendre compte de l'éclairement de n'importe quel point du disque lunaire lors d'une éclipse totale; l'analyse de son travail permet de voir comment fonctionne l'étude mathématique de l'éclairement lunaire lors d'une telle éclipse — cette étude devant prendre en compte à la fois la réfraction et l'extinction. On voit aussi à l'œuvre une ultime voie pour déterminer des caractéristiques de la haute atmosphère terrestre, grâce à la réfraction et l'extinction : l'observation de leur effet sur la Lune éclipsée — et non pas de leurs variations avec la distance zénithale, comme Hausdorff l'espérait en vain (voir le paragraphe 7 de notre « panorama historique [...] » [36] dans ce numéro spécial). Bien sûr, les méthodes utilisées par Link sont maintenant dépassées par celles offertes par la technologie spatiale.

THÉORIE PHOTOMÉTRIQUE DES ÉCLIPSES DE LUNE. 77

## THÉORIE PHOTOMÉTRIQUE DES ÉCLIPSES DE LUNE,

Par M. F. LINK.

**SOMMAIRE.** — Exposé d'une théorie permettant de calculer les densités optiques de l'ombre projetée sur la Lune à partir des densités de l'atmosphère.

La théorie tient compte de la répartition de brillance sur le disque solaire, néglige les variations de diamètre de celui-ci; l'aplatissement de la Terre et les variations saisonnières et locales de la structure de l'atmosphère qu'elle prend en son état moyen.

Les densités de l'atmosphère étant connues jusqu'à une certaine altitude, l'exploration théorique de l'ombre est limitée du centre au bord géométrique de celle-ci. Dans ces limites, le calcul peut donner une bonne approximation des densités optiques moyennes. Un Tableau calculé pour trois parallaxes différentes et trois régions spectrales donne les densités optiques de l'ombre dans chaque circonstance qui peut se présenter.

Confrontés avec les observations, les résultats ont permis de tirer quelques conclusions relatives à la haute atmosphère, sur la couche absorbante élevée et la couche d'ozone. Cette dernière serait plus basse que l'indiquait au début les observations; son niveau inférieur serait voisin de 20<sup>km</sup>. L'existence d'une couche absorbante élevée est confirmée, ses caractéristiques sont en bon accord avec celles trouvées antérieurement.

A la fin, quelques conditions imposées par la théorie aux observateurs sont discutées, notamment le choix des écrans et des régions de l'ombre à observer.

[4, p. 77] Source : NASA / ADS

## 2. Résumé et commentaires

Ce gros article de synthèse introduit son propos en annonçant l'apport escompté de l'étude photométrique des éclipses lunaires à diverses questions plus géophysiques qu'astronomiques, comme l'étude de la couche d'ozone, et celle de l'absorption ionosphérique. Il s'intéresse aussi à la loi de Danjon [37] : la clarté d'une éclipse totale de Lune et la vivacité de sa couleur

orangée seraient corrélées à l'activité solaire et suivraient son cycle de 11 ans, avec une chute brutale de clarté de l'éclipse environ deux ans après le minimum solaire — mais il y a des exceptions liées à l'activité volcanique [38,39]. Link montrera en 1974 [40] la difficulté d'expliquer quantitativement cette loi par des caractéristiques de l'atmosphère terrestre qui seraient pilotées par l'activité solaire (Danjon invoquait l'absorption, puis Vassy la diffusion par une couche d'aérosols [11]), mais il l'explique en envisageant une luminescence du sol lunaire : celle-ci serait accrue quand l'âge du cycle avance, compte tenu de la baisse de la latitude héliographique moyenne des plages actives (taches solaires et facules, auxquelles nos connaissances présentes ajoutent les trous coronaux [41]) au cours du cycle undécennal (cette latitude étant minimale à l'approche du minimum solaire — loi « des zones », ou loi de Spörer [42]); ainsi Link expliquera de même les variations saisonnières de clarté des éclipses [30, chapitre 3] par les variations d'exposition de la Terre au vent solaire (dont les trous coronaux sont des émetteurs importants). Cependant, des tests sur les échantillons de roches lunaires ramenés par les missions Apollo montrent que leur luminescence est insuffisante pour rendre compte de la loi de Danjon, qui reste inexpliquée [39, 40].

Il y a une dizaine d'années, Danjon a trouvé une relation entre l'éclairement de la Lune éclipsée et l'activité solaire [6]. Ses conclusions furent combattues par Maunder [7] et Fisher [8]. En réalité, à la base de la discussion, il manquait une théorie permettant de préciser l'importance de couches atmosphériques qui interviennent dans l'éclairement d'une région déterminée de l'ombre.

D'autre part, la découverte de l'ozone dans la haute atmosphère, par Fabry et Buisson [9], a déclenché une longue série de travaux. La couche d'ozone a été étudiée par plusieurs méthodes optiques électriques et acoustiques. Les éclipses de Lune n'ont pas encore apporté leur part à cette intéressante question.

[4, p. 78] Source : NASA / ADS

Dans la première partie suivant l'introduction, Link expose la méthode de calcul de l'éclairement lunaire dû au disque solaire, dont il tient compte de l'assombrissement centre-bord — entrevu par Bouguer dès le milieu du XVIII<sup>e</sup> siècle, puis par Arago en 1839, confirmé par Fizeau et Foucault en 1845, et caractérisé par un coefficient  $k$  variable avec la longueur d'onde. Il mène ce calcul selon les lois de la photométrie classique, donc dans le cadre de l'optique géométrique (ce qui avait été initié par Dionis du Séjour dès 1786, mais était tombé dans l'oubli [30, chapitre 3]) : la diffraction de la lumière solaire par la Terre est négligée, mais pas sa réfraction dans l'atmosphère terrestre (voir la Figure 2) ni son extinction. Il obtient une formule indiquant, en fonction de  $k$ , le résultat de l'intégrale approximative donnant l'éclairement lunaire  $E$  en l'absence de toute éclipse; dans le cas d'une éclipse, il écrit l'intégrale de l'éclairement  $e$  qu'il estimera numériquement, et qui varie beaucoup avec la longueur d'onde, contrairement à  $E$  [30, chapitre 3].

Dans sa deuxième partie, il aborde la réfraction et l'extinction (par l'atmosphère) dont la théorie est nécessaire pour préciser l'intégrande de  $e$ . Ces deux grandeurs sont elles-mêmes écrites sous forme d'intégrales approchées classiques, mais dont les intégrandes divergent en une borne; Link estime numériquement ces intégrales, après un changement de variable qui rend les intégrandes non-divergents — Biot avait suivi la même démarche, avec un changement de variable différent (voir le paragraphe 7 de notre article sur les « propriétés remarquables de la



**FIGURE 2.** Vues de la Terre prises par l'orbiteur lunaire Kaguya (de l'agence japonaise JAXA) vers la fin de la phase de totalité de l'éclipse de Lune du 9 février 2009 — le bas de l'image de l'auréole terrestre est caché par la Lune, car la fin de l'éclipse s'est produite pendant un lever de Terre pour Kaguya. Une étude théorique de la forme de l'image solaire vue de la Lune se trouve résumée dans [14, p. 47–49]. © Photo : JAXA

réfraction [...] » [43] et le sous-paragraphe 3.1 de notre commentaire sur « le théorème de Biot [...] » [44], dans ce numéro spécial).

Muni de ses résultats théoriques, Link consacre une troisième partie d'abord aux calculs numériques déduits de sa théorie; il les commente ainsi :

On voit qu'au bord de l'ombre géométrique la troposphère intervient très peu. Son influence se fait sentir lorsqu'on s'approche du centre, de sorte qu'à partir de 30' du centre les nuages supérieurs peuvent causer des perturbations appréciables. C'est pour cela que nous avons fixé la limite inférieure de nos calculs à 20' du centre. Comme limite supérieure, on peut pousser le calcul jusqu'au bord de l'ombre géométrique avec une assez bonne approximation. Dans ces limites, la seule chose à redouter sont les variations saisonnières et locales dans la stratosphère. Leurs influences échappent à nos calculs.

[4, p. 95] Source : NASA / ADS

Puis il compare ses calculs avec les mesures prises lors des éclipses de 1921 et 1931. Il constate que les mesures (avec un photomètre différentiel à œil de chat [14], [45, article VIII], ou plus tard avec un photomètre différentiel photographique de sa fabrication [14, 16], à défaut des photomètres industriels actuels [46]) donnent une densité d'ombre systématiquement plus grande (de quelques dixièmes) que la densité calculée, ce qui est cohérent avec son travail de 1929 [1]. Il impute certaines caractéristiques de ce décalage à l'ozone stratosphérique, dont il calcule l'épaisseur de sa couche (ramenée dans les conditions normales de température et de pression); il trouve que dans celle-ci la longueur d'un rayon horizontal au sol est :

8<sup>m</sup>, 2 en moyenne. La quantité d'ozone traversée au zénith étant égale à 3<sup>mm</sup> en moyenne, on trouve l'absorption des rayons horizontaux 27 fois plus grande. Si l'ozone était concentré en une couche mince et homogène, son altitude serait 18<sup>km</sup>. Ce chiffre n'est pas loin de 20<sup>km</sup> trouvés plus haut.

[4, p. 99] Source : NASA / ADS

Cette méthode d'étude de la couche d'ozone sera reprise et affinée par d'autres [47]; certains y trouveront aussi un lien avec l'élargissement de l'ombre de la Terre [48].

Ses observations le conduisent aussi à réviser les parts relatives de l'absorption et de la diffusion dans le phénomène d'extinction de la lumière se propageant dans l'air :

Les observations, d'autre part, conduisent à diminuer de 12 pour 100 le coefficient d'absorption dans le bleu, ce qui revient à augmenter le nombre de centres diffusants qui serait

3,02.10<sup>19</sup> par centimètre cube au lieu de 2,70.10<sup>19</sup> par centimètre cube.

Les expériences de laboratoire sur la diffusion de la lumière par les gaz ont conduit au résultat presque identique [48].

[4, p. 98] Source : NASA / ADS

Quant aux variations de clarté d'une éclipse de Lune à l'autre, il affine le diagnostic sur leurs causes :

Nous avons trouvé que les parties centrales de l'ombre sont influencées par l'état de la troposphère à tel point que toutes les variations constatées à des distances inférieures à 30' du centre sont en grande partie, sinon en totalité, explicables par les troubles dans celle-ci. Si, par exemple, en comparant plusieurs éclipses, nous trouvons une éclipse très sombre pendant toute la totalité, il faut bien admettre que les conditions atmosphériques défavorables ont eu lieu sur une très grande étendue de la surface terrestre. Cette condition diminue un peu la probabilité de la localisation des troubles dans la troposphère. La cause pourrait être aussi dans la stratosphère. Mais, si nous trouvons des variations dans les parties marginales de l'ombre, la cause est sûrement dans la stratosphère.

[4, p. 100] Source : NASA / ADS

Une analyse récente, basée sur les rapports indiquant les couleurs de 36 éclipses totales échelonnées entre 1665 et 1800, a permis de montrer que, sur cette période, la stratosphère était relativement claire presque tout le temps; d'ailleurs, il n'y a quasiment pas eu d'éruption volcanique envoyant des poussières jusqu'à la stratosphère, contrairement à ce qui s'est produit aux XIX<sup>e</sup> et XX<sup>e</sup> siècles [49].

### 3. Présentation illustrée du calcul de l'éclairement lunaire

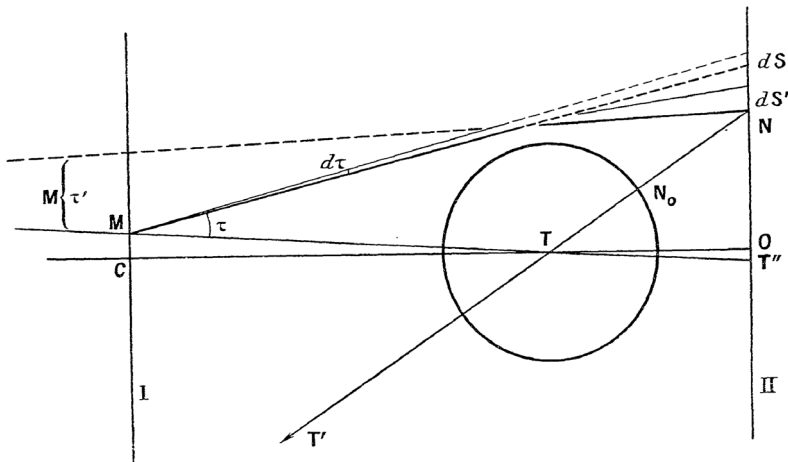
Link commence par mettre en place les bases du calcul de l'éclairement du disque lunaire, assimilé à une surface plane recevant la lumière en incidence quasi normale.

#### II. — THÉORIE GÉNÉRALE DE L'ÉCLIPSE.

2. **Principe des calculs.** — Soient I le plan du Soleil (*voir* la figure 1) dont le centre se trouve en C, II le plan de la Lune, et T le centre de la Terre. Considérons les rayons lumineux issus d'un élément lumineux en M et frappant le plan II en N : l'atmosphère agit d'une certaine manière sur la direction et l'intensité de ces rayons, et cette action restè constante pour tous les éléments situés sur la circonférence ayant le centre en T' et le rayon T'M. Nous négligeons ici la faible inclinaison des rayons sous laquelle ils frappent le plan I. En toute rigueur, la courbe est une ellipse très peu différente du cercle.

Une partie de cette circonférence couvre le disque solaire que nous prenons plan, et c'est ce segment de l'anneau élémentaire qui contribuera à l'éclairement du point N pendant l'éclipse. L'éclairement total sera la somme de ces éclaircements élémentaires, la sommation étant étendue sur tout le disque solaire. L'éclairement ainsi obtenu, comparé à celui qui se serait produit en dehors de

Fig. 1.



l'éclipse en l'absence de la Terre, nous donne, par son logarithme décimal, la densité de l'ombre, telle quelle est mesurable pendant les éclipses.

Correspondance des notations

TABLE 1. Notations (le symbole := indique une définition)

Notations de Link [3]	Notations de Dettwiller [36, 43] dans ce numéro de <i>C. R. Phys.</i>	Indications [et unités usuelles]
Altitude $h_0$	Élévation $E := r_S - r_0$ du sommet S d'un rayon lumineux (R) allant du Soleil à la Lune	Grandeur associée à S [km]
$h - h_0$	Altitude $z$	Grandeur associée aux points courants d'abscisse curviligne $s$ sur (R) [km]
$\omega$	$2\chi_{Sh}$	Angle de réfraction totale pour (R) — sa moitié $\chi_{Sh}$ étant la « réfraction horizontale » [rad, °, ', '' ]
$a$	Rayon terrestre $r_0$	[km]
$\eta$ ou $n$	$\mu$	Masse volumique de l'air [ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ]
Densité $\rho$	$\mu/\mu_0$ où $\mu_0$ est la valeur de $\mu$ à 0 °C et 1 atm	Rapport de la masse volumique de l'air à sa valeur normale
$\rho_0$	$\mu_S/\mu_0$	Densité au sommet S du rayon
$\mu$	$n$	Indice de réfraction de l'air
$c$	$C\mu_0$	Réfractivité de l'air à 0 °C et 1 atm
$M := \int_{(R)} \rho ds$	$2Q_{Sh}/\mu_0$	« Masse d'air » absolue sur tout le rayon (R) [km], selon Link

Puis Link présente le premier effet de l'atmosphère terrestre sur l'éclairement du disque lunaire : un affaiblissement dû à la divergence locale des rayons qu'elle amplifie par réfraction différentielle, qui est quasiment achromatique.

**3. Affaiblissement par la réfraction.** — Considérons un flux élémentaire issu de M et contenu entre les deux cônes infiniment voisins  $\tau$  et  $\tau + d\tau$ . Ce flux en absence de l'atmosphère terrestre frapperait le plan II en  $dS$ . En réalité, il le frappe en  $dS'$ . Le rapport de ces deux anneaux élémentaires donne le rapport des éclairagements pendant et après l'éclipse et nous l'appellerons *l'affaiblissement par la réfraction*.

Les rayons issus de M sous l'angle  $\tau$  couperont l'axe MT après la réfraction sous l'angle  $\tau'$ . On a, parce que les angles sont petits,

$$TM = L, \quad \tau = \frac{a + h'_0}{L}, \quad \tau' = \frac{a + h'_0}{L'}, \quad \tau' = \tau - \omega, \quad TM' = L',$$

où  $\omega$  est le double de la réfraction horizontale à l'altitude  $h_0$  (voir la figure 2).

D'autre part, posons :

$$\widehat{MTT'} = \widehat{NTT''} = r, \quad l = TT'',$$

$$r = \frac{NT''}{e}, \quad NT'' = (L' + l)\tau,$$

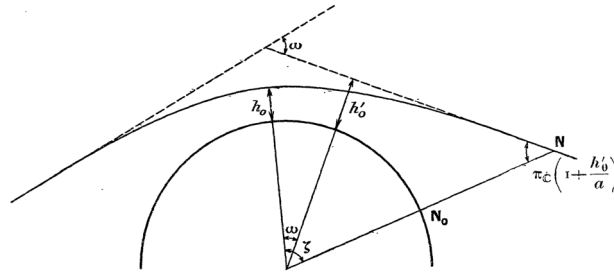


nous avons, par suite.

$$(1) \quad r = \frac{L'+l}{l} \tau' = (a+h'_0) \frac{L+l}{Ll} - \omega = (\pi_{\odot} + \pi_{\zeta}) \left(1 + \frac{h'_0}{a}\right) - \omega,$$

où  $\pi_{\odot}$ ,  $\pi_{\zeta}$  sont les parallaxes moyennes horizontales du Soleil et

Fig. 2.



de la Lune, moyennes voulant dire pour les latitudes moyennes et non pour l'équateur.

Pour les anneaux  $dS$  et  $dS'$ , on a

$$dS' = 2\pi l^2 r dr, \quad dS = 2\pi(L+l)^2 \tau d\tau,$$

$$dr = \left( \frac{L+l}{Ll} - \frac{d\omega}{dh'_0} \right) dh'_0, \quad d\tau = \frac{dh'_0}{L},$$

et l'affaiblissement

$$(2) \quad \frac{dS'}{dS} = s = \left[ 1 - \frac{\omega}{\pi_{\odot} + \pi_{\zeta}} \left(1 - \frac{h'_0}{a}\right) \right] \left[ 1 - a \frac{d\omega}{dh'_0} \frac{1}{\pi_{\odot} + \pi_{\zeta}} \right].$$

Nous utiliserons ce rapport sous la forme de son logarithme ou de sa densité en écrivant

$$(2') \quad d_1 = \log_{10} s.$$

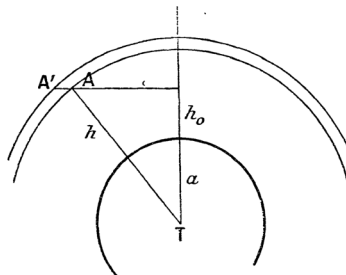
[4, p. 79–81] Source : NASA / ADS

N. B. : l'angle au centre noté  $\omega$  sur la Fig. 2 de Link ci-dessus est en fait sa moitié,  $\chi_{Sh}$ .

Link présente ensuite le second effet de l'atmosphère terrestre : l'absorption du flux solaire (mais en fait, plus généralement, son extinction, i.e. son affaiblissement dû à l'absorption aggravée par la diffusion affectant le faisceau transmis), qui engendre aussi une baisse de l'éclairement du disque lunaire; au facteur  $\mu_0$  près (la masse volumique normale de l'air), la masse dont Link parle est la « masse d'air » absolue sur le rayon lumineux (R), notée  $M$  par la suite (voir la Table 1, et le sous-paragraphe 7.4.1 de [43]) — elle est dite « absolue » au sens où elle n'est pas divisée par la grandeur correspondante pour un rayon de référence, usuellement vertical.

**6. Absorption dans une couche élevée.** — Considérons une couche absorbante élevée et cherchons la masse traversée par les

Fig. 3.



rayons horizontaux passant à l'altitude  $h_0$ . Si nous admettons que la densité de la couche est une fonction de l'altitude seulement  $n = f(h)$ . On trouve facilement (voir la figure 3)

$$\overline{AA'} = dG = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} f(h) \frac{1 + \frac{h}{\alpha}}{\sqrt{h - h_0}} dh,$$

d'où, en désignant par  $g_1$  et  $g_2$  les limites de la couche,

$$G = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \int_{g_1}^{g_2} \frac{1 + \frac{h}{\alpha}}{\sqrt{h - h_0}} f(h) dh.$$

La structure de la couche étant un élément inconnu, nous sommes obligés de poser, en première approximation,  $f(h) = \text{const.} = n_0$ , c'est-à-dire prendre une couche homogène. On obtient alors

$$(5) \quad G = n_0 \sqrt{2\alpha} [\sqrt{g_2 - h_0} - \sqrt{g_1 - h_0}].$$

Le trajet des rayons horizontaux augmente avec l'altitude jusqu'au niveau inférieur de la couche où il atteint sa valeur maximum. Il décroît ensuite et s'annule à l'altitude  $g_2$ . Dans nos calculs interviendra surtout le rapport de la masse traversée à une

84

F. LINK.

altitude quelconque à la masse  $G_0$  correspondant à  $h = 0$ . On trouve facilement

$$(6) \quad \frac{G}{G_0} = \frac{\sqrt{g_2 - h_0} - \sqrt{g_1 - h_0}}{\sqrt{g_2} - \sqrt{g_1}}.$$

En appelant  $g$  sans indice l'altitude de la limite inférieure de la couche et  $\Delta$  son épaisseur, on a

$$(6') \quad \frac{G}{G_0} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\Delta - h_0}{g}} - \sqrt{1 - \frac{h_0}{g}}}{\sqrt{1 + \frac{\Delta}{g_0}} - 1}.$$

Tant qu'on peut négliger les puissances supérieures de  $\frac{\Delta}{g}$ , on peut écrire

$$(7) \quad \frac{G}{G_0} = 1 + \frac{1}{2} \frac{h_0}{g} + \frac{1}{8} \frac{\Delta}{g} \left( \frac{h_0}{g} - \frac{1}{2} \frac{\Delta}{g} \right) \dots$$

Le rapport reste donc sensiblement constant et égal à l'unité tant que l'altitude  $h_0$  est faible par rapport à l'altitude de la limite inférieure.

Pour une couche infiniment mince, on trouve

$$(7') \quad \frac{G}{G_0} = 1 + \frac{1}{2} \frac{h_0}{g} + \frac{3}{8} \left( \frac{h_0}{g} \right)^2 + \dots$$

Le rapport croît plus vite pour une couche mince que pour une couche épaisse. D'ailleurs le rapport est infini au niveau de la

couche infiniment mince et atteint le maximum fini au niveau inférieur de la couche épaisse :

$$\frac{G_{\max}}{G_0} = \frac{2}{\sqrt{\frac{\Delta}{g}}} \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{\Delta}{g} \right).$$

**7. Variation de la brillance sur le disque solaire.** — Supposons qu'on regarde le plan I du centre de la Terre (voir la figure 4). Le centre du Soleil se trouvant en C la distance CT' correspond à l'angle  $\gamma = \widehat{NTO}$  (voir la figure 1).

L'intensité lumineuse d'un élément de la surface solaire sera

$$di = f(R)r dr dz,$$

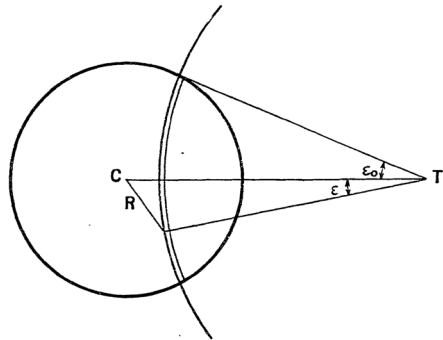
THÉORIE PHOTOMÉTRIQUE DES ÉCLIPSES DE LUNE. 85

où  $f(R)$  est la fonction qui donne la répartition de la brillance sur le disque solaire. D'après les mesures d'Abbot [15], cette fonction est de la forme

$$(8) \quad f(R) = 1 - k + \frac{k}{R_{\odot}} \sqrt{R_{\odot} - R^2} = 1 - k + \frac{k}{R_{\odot}} \sqrt{2r\gamma} \sqrt{\cos \varepsilon - \cos \varepsilon_0}.$$

La constante  $k$  dépend de la longueur d'onde. Nous nous occu-

Fig. 4.



perons plus loin de sa détermination. Nous avons alors, en considérant la moitié du disque seulement,

$$\begin{aligned} de &= \int \int (1 - k)r dr dz + \frac{kr}{R_{\odot}} \sqrt{2r\gamma} \sqrt{\cos \varepsilon - \cos \varepsilon_0} dz dr \\ &= \int \left[ (1 - k)\varepsilon_0 + \frac{k}{R_{\odot}} \sqrt{2r\gamma} \mathcal{J}_m \right] r dr, \end{aligned}$$

où

$$(9) \quad \mathcal{J}_m = \int_0^{\varepsilon_0} \sqrt{\cos \varepsilon - \cos \varepsilon_0} d\varepsilon = \frac{\pi m \sqrt{2}}{8} \left( 1 + \frac{m}{3^2} + \frac{3m^2}{10 \cdot 2^4} + \dots \right),$$

$$m = 4 \sin^2 \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{(R_{\odot} + \gamma - r)(R_{\odot} + r - \gamma)}{r\gamma}.$$

L'expression

$$(10) \quad i = (1 - k)\varphi_0 r + \frac{kr}{R_{\odot}} \sqrt{2r\gamma} \mathcal{J}_m = P - kQ$$

avec

$$P = \varphi_0 r \quad \text{et} \quad Q = P - \frac{r}{R_\odot} \sqrt{2r\gamma} \mathcal{J}_m$$

86

F. LINK.

nous donne l'intensité lumineuse d'anneau élémentaire découpé sur le Soleil par le rayon  $r$  dont le centre est à  $\gamma$  du centre du Soleil (Tableau I).

8. Calcul de la densité de l'ombre. — L'éclairement en N sera

$$(11) \quad e = \int_{\gamma - R_\odot}^{\gamma + R_\odot} 10^{-d} i \, dr,$$

où  $d = d_1 + d_2$  est la densité de l'ombre auxiliaire à  $r$  du centre.

Le rayon  $r$  est défini par la formule (1).

En l'absence de la Terre, on aurait

$$E = \int_{\gamma - R_\odot}^{\gamma + R_\odot} i \, dr = \pi \int_0^{R_\odot} \left( 1 - k + \frac{k}{R_\odot} \sqrt{R_\odot^2 - R^2} \right) R \, dR = \frac{\pi R_\odot^2}{2} \left( 1 - \frac{k}{3} \right).$$

Le logarithme du rapport  $\frac{e}{E}$  donne la densité de l'ombre en N,

$$(12) \quad D = -\log_{10} \frac{e}{E}.$$

Quant à la détermination de l'intégrale (11), on procède par l'intégration numérique.

9. Masses d'air moyennes. — Le calcul de l'intégrale suppose connu le coefficient d'absorption atmosphérique. Or nous ne connaissons que sa valeur approchée. Pour éviter de nombreux tâtonnements, on peut établir une relation différentielle qui permet aisément de corriger ces faibles écarts. En différentiant l'intégrale par rapport à  $d = d_1 + AM$ , on trouve

$$\frac{de}{dA} = 2,30 \int 10^{-d} i \, dr M,$$

et, d'autre part,

$$\frac{dD}{de} = 0,43 \frac{1}{e},$$

on a

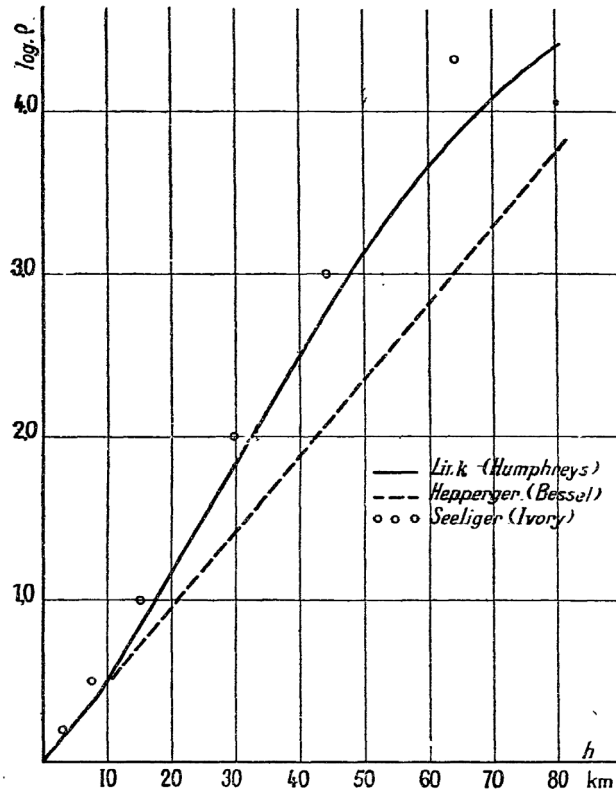
$$(13) \quad \frac{dD}{dA} = M_0 = \frac{\int 10^{-d} i \, dr M}{\int 10^{-d} i \, dr}.$$

[4, p. 83-86] Source : NASA / ADS

N. B. :  $d := d_1 + d_2 = d_1 + AM$  où  $A$  désigne le coefficient d'extinction linéique spécifique.

On voit donc, à la fin du paragraphe 8 de Link, qu'il doit recourir à une intégration numérique afin d'obtenir l'éclairement  $e$  du disque lunaire totalement éclipsé. Pour cela, il a besoin de connaître les valeurs de  $\rho(h)$  — voir la Fig. 6 ci-dessous extraite de l'article de Link, où il faut remplacer  $\log \rho$  par  $\log \rho^{-1}$ .

Fig. 6.



[4, p. 90] Source : NASA / ADS

Mais Link a besoin, pour exprimer la densité  $D$  de l'ombre, de préciser  $M$  et  $a(d\omega/dh'_0) = (d\omega/dh_0)a(dh_0/dh'_0)$ . Pour cela, il part de formules approximatives classiques, qui découlent directement des expressions (79) et (81) de [43], en mettant le point  $S$  de [43] au sommet du rayon lumineux considéré; avec les notations de Link (dont la signification est explicitée dans la Table 1)

$$\omega \cong 2 \frac{c}{\sqrt{2}} \int_0^{\rho_0} Z^{-1} d\rho \quad \text{où } Z := \sqrt{\frac{h-h_0}{a} - c(\rho_0 - \rho)} \quad (1)$$

$$M \cong 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{h_0}^{\infty} Z^{-1} \rho dh. \quad (2)$$

Notons que ces deux intégrales (1) et (2) sont impropres, ce qui rend délicate leur évaluation numérique.

### Changement de variable pour le calcul numérique de $\omega$ et $M$ par la méthode de Simpson

En corrigeant quelques coquilles dans l'article [4] et en conservant les notations de Link, on a

$$\omega = c\sqrt{2} \int_{\infty}^0 Z^{-1} \frac{d\rho}{dh} dh = c\sqrt{2} \int_0^{\infty} Z^{-1} \beta \rho dh \quad (3)$$

où  $\beta := d(\ln(1/\rho))/dh$  est ln 10 fois la pente du graphe ci-dessus (Fig. 6 de Link); dans la relation (3) nous avons mis = au lieu de  $\cong$  car nous n'avons pas introduit de nouvelle approximation en plus de celle indiquée au début de ce paragraphe 3. Or

$$2Z \frac{dZ}{dh} = \frac{d}{dh} Z^2 = \frac{1}{a} + c \frac{d\rho}{dh} = \frac{1 - ac\beta\rho}{a}, \tag{4}$$

donc

$$\omega = c\sqrt{8} \int_0^\infty K dZ \quad \text{où } K := \frac{a\beta\rho}{1 - ac\beta\rho} \tag{5}$$

( $K$  tend vers 0 quand  $Z$  tend vers l'infini, et ne diverge pas en  $Z = 0$  — voir la Fig. 7 ci-dessous).

Avec la même technique, on écrit

$$M = \sqrt{2} \int_{h_0}^\infty Z^{-1} \rho dh = \sqrt{2} \int_0^\infty 2 \frac{a\rho}{1 - ac\beta\rho} dZ = \sqrt{8} \int_0^\infty L dZ \quad \text{où } L := K/\beta. \tag{6}$$

Notons que dans le cas d'une atmosphère à profil exponentiel,  $\beta$  est uniforme (i.e. indépendant de  $h$  — voir la courbe correspondant à Hepperger-Bessel sur la Fig. 6 de Link); malgré les approximations classiques adoptées implicitement par Link, la comparaison des résultats (5) et (6) fait retrouver ce que donne, pour un astre vu sur l'horizon astronomique, le théorème de réfraction-extinction de Laplace — voir le sous-paragraphe 7.4 de [43].

Afin d'estimer  $\omega$  et  $M$  pour  $h_0 = 14$  km, Link calcule  $K$ ,  $L$  et  $Z$  aux altitudes (en kilomètres) 14, 20, 25, 30 et 40 (cette altitude maximale correspond à  $Z \cong 0,08$  et donnera une précision suffisante); puis il interpole afin d'avoir des valeurs correspondant à des  $Z$  équidistants, il trace  $K$  et  $L$  en fonction de  $Z$ , et estime numériquement l'aire correspondante par la méthode de Simpson (comme Biot un siècle auparavant) — voir ci-dessous la Fig. 7 de Link [4].

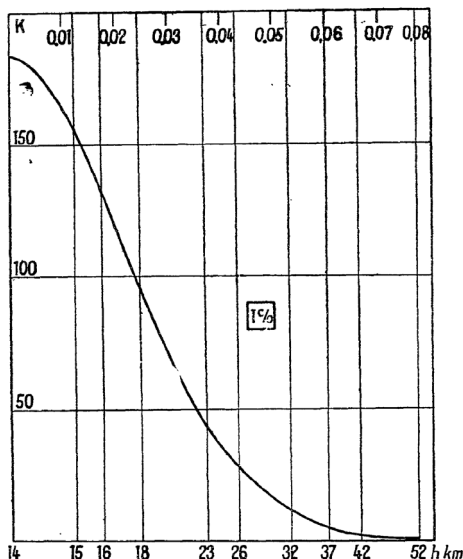


Fig. 7. — Courbe dont la surface représente la réfraction horizontale à 1/4 km d'altitude.

[4, p. 91] Source : NASA / ADS

N. B. : ce graphe montre, pour  $h_0 = 14$  km, la grandeur  $K$  sans dimension (comme  $c$ ), sous-entendu donnée en fonction de  $Z$  (sans dimension aussi) qui est mis en abscisse avec une échelle linéaire, alors que les valeurs numériques indiquées en abscisse sont celles de  $h$  dont l'échelle n'est alors pas linéaire ici, vu la définition de  $Z$  selon Link — recopiée dans nos expressions (1).

Son paragraphe 7 est consacré à l'effet de l'assombrissement centre-bord du disque solaire, assimilé aussi à une surface plane. Dans le calcul montré sur ses pages 83–86 (cf. supra), où il utilise son expression (8) qu'il considère « comme une bonne approximation qui, grâce à sa forme, simplifie beaucoup les calculs » [4, p. 94], Link néglige la courbure du rayon lumineux et fait des approximations liées à  $h \ll a$  et  $h_0 \ll a$ , comme  $2a + h + h_0 \cong 2(a + h)$ , etc. La série de sa relation (9) s'obtient en posant

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} := \left( \sin \frac{\varepsilon_0}{2} \right) \sin u := \frac{\sqrt{m}}{2} \sin u \quad (7)$$

et en écrivant

$$\sqrt{\cos \varepsilon - \cos \varepsilon_0} = \sqrt{2 \left( \sin^2 \frac{\varepsilon_0}{2} - \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \right)} = \sqrt{\frac{m}{2} (1 - \sin^2 u)} = \sqrt{\frac{m}{2}} \cos u \quad (8)$$

puis

$$\begin{aligned} \int_0^{\varepsilon_0} \sqrt{\cos \varepsilon - \cos \varepsilon_0} d\varepsilon &= \sqrt{\frac{m}{2}} 2 \left( \sin \frac{\varepsilon_0}{2} \right) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u}{\cos(\varepsilon/2)} \cos u du \\ &= \frac{m\sqrt{2}}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 u}{\sqrt{1 - \frac{m}{4} \sin^2 u}} du \end{aligned} \quad (9)$$

et en utilisant alors le développement binomial de  $(1 - (m/4) \sin^2 u)^{-1/2}$ , ce qui permet de ramener l'intégrale ci-dessus à une série faisant intervenir des intégrales de Wallis [50, p. 3166b] (technique classique utilisée aussi pour exprimer rigoureusement la période d'un pendule d'amplitude  $\varepsilon_0$ ). Tous calculs faits, on obtient

$$\int_0^{\varepsilon_0} \sqrt{\cos \varepsilon - \cos \varepsilon_0} d\varepsilon = \pi \frac{m\sqrt{2}}{8} \sum_{p=0}^{\infty} \left[ \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \right]^2 \frac{(m/4)^p}{p+1} \quad (10)$$

où  $N!$  et  $N!!$  sont classiquement définis par récurrence :  $0! := 1 := 0!! := (-1)!!$  et

$$N! := N \times (N-1)! \quad \text{et} \quad N!! := N \times (N-2)!! \quad \forall N \in \mathbb{N}^*.$$

Cela redonne bien les premiers termes indiqués par Link dans son expression (9). Notons que dans les expressions de  $di$ ,  $de$  et leurs intégrales (ainsi que  $E$ ) aux paragraphes 7–8 de Link [4], il manque le facteur multiplicatif qui est la brillance du centre du disque solaire.

### Calcul numérique de la densité de l'ombre

Afin de calculer la densité  $D$  de l'ombre, Link exprime transitoirement  $d\omega/dh_0$ . Pour cela, il préfère intégrer (5) par parties au préalable, ce qui lui permet de partir de

$$\omega = c\sqrt{8} \int_0^{K_0} Z dK \quad (11)$$

où  $K_0$  désigne la valeur de  $K$  à l'altitude  $h_0$ . Alors, en appliquant à cette expression le théorème de dérivation sous le signe somme (directement car  $Z(K_0) dK_0/dh_0$  est nul), et en procédant ensuite au changement de la variable  $K$  en  $h$  puis enfin en  $Z$  dans le résultat, il vient, tous calculs faits :

$$\frac{d\omega}{dh_0} = c\sqrt{8} \left( \frac{1}{a} - c\rho_0\beta_0 \right) \int_0^{\infty} H dZ \quad (12)$$

où  $\beta_0$  désigne la valeur de  $\beta$  à l'altitude  $h_0$ , et

$$H := \left( \frac{d\beta}{dh} - \beta^2 \right) \frac{L^3}{a\rho^2}. \quad (13)$$

Mais pour obtenir  $D$ , on a besoin de  $a(d\omega/dh'_0) = (d\omega/dh_0)a(dh_0/dh'_0)$ . Link trouve  $dh_0/dh'_0$  en adoptant la loi empirique de Gladstone-Dale [51] (suivant l'avis de Bemporad et Puiseux [52, p. 16–17] — voir l'introduction du paragraphe 6 de [36]), en écrivant l'équation de Bouguer (voir le paragraphe 4.2 de [43])

$$a + h'_0 = (1 + c\rho_0)(a + h_0) \tag{14}$$

et en la dérivant en tant que fonction de  $h_0$ , ce qui donne

$$\frac{dh'_0}{dh_0} = (1 + c\rho_0) - (a + h_0)c\rho_0\beta_0 ; \tag{15}$$

on en déduit finalement

$$a \frac{d\omega}{dh'_0} = c\sqrt{8} \frac{1 - ac\rho_0\beta_0}{1 - ac\rho_0\beta_0 + (1 - h_0\beta_0)c\rho_0} \int_0^\infty H dZ \cong c\sqrt{8} \int_0^\infty H dZ \tag{16}$$

qui dépend de  $h_0$  même avec l'approximation finale (la fonction  $Z \mapsto H(Z)$  étant paramétrée par  $h_0$  vu la définition de  $Z$ ), et que Link estime numériquement par la même méthode que  $\omega$  et  $M$ .

Muni de ces résultats, Link peut estimer, d'après les mesures d'Abbot pour les longueurs d'onde de 0,46  $\mu\text{m}$ , 0,54  $\mu\text{m}$  et 0,62  $\mu\text{m}$ , la valeur du coefficient d'assombrissement  $k$  introduit par son expression (8) : respectivement 0,73, 0,62 et 0,54. Puis, pour une longueur d'onde, il peut calculer la courbe photométrique de l'éclipse, i.e. le graphe de la densité de l'ombre (en ordonnée avec un axe orienté vers le bas) en fonction de la distance au centre de celle-ci — voir la courbe en trait d'axe sur la Fig. 2 de Link ci-dessous obtenue pour l'éclipse du 8 janvier 1936 [16], où on constate l'excès de densité mesurée dans l'ombre (cf. notre résumé au paragraphe 2), et où la partie droite (celle qui correspond à la pénombre) varie très peu avec la longueur d'onde [30, chapitre 3].

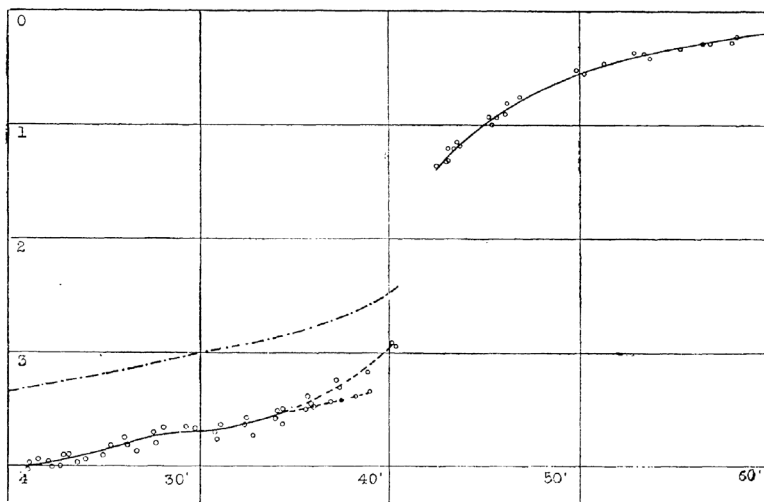


Fig. 2

Courbe de densité de l'ombre pour  $\lambda = 0,58 \mu\text{m}$ . En pointillé la courbe calculée.

[16, p. 131] Source : NASA / ADS. D. R.

Les courbes passant entre les points de mesure du 8 janvier 1936 montrent l'ajustement proposé; la courbe en trait d'axe correspond au calcul analytique de  $D$  (en ordonnée), et « le décalage entre la courbe observée et la courbe calculée [pour  $\lambda = 0,58 \mu\text{m}$ ] est en grande partie dû à l'absorption de l'ozone. » Les tracés sont incomplets car « le temps était peu favorable aux observations »; on sait que dans la partie manquante, la variation de  $D$  avec la position angulaire est rapide mais pas discontinue.



Des études plus récentes confirment et précisent ces courbes photométriques, en utilisant l'outillage informatique — qui bien sûr n'existait pas à l'époque où Link écrivait ses articles [4] et [16]. La simulation numérique [34] montre qu'avec une Terre complètement recouverte d'un océan surmonté d'une atmosphère sans aérosols et sans ozone, la Lune éclipsée est rouge (à cause de la diffusion Rayleigh jointe à la réfraction) et l'irradiance au centre de l'ombre se trouve réduite d'un facteur 2400 par rapport à sa valeur hors éclipse; l'absorption dans les bandes de Chapuis (vers 600 nm) par l'ozone stratosphérique rend le bord interne de l'ombre bleu pâle ou turquoise, ce que confirme l'observation photographique de l'éclipse du 21 février 2008 [35]; la distribution usuelle d'aérosols, de nuages et de montagnes au limbe terrestre diminue encore l'irradiance de 2 ordres de grandeur dans l'ombre [34], et son asymétrie peut décentrer de 17' la position du minimum d'irradiance [35].

### Conflit d'intérêt

L'auteur n'a aucun conflit d'intérêt à déclarer.

### Remerciements

L'auteur exprime sa reconnaissance au Dr. Serge Koutchmy pour de fructueuses discussions et sa mise à disposition des références [30, chapitre 3], [39]. Il remercie aussi la bibliothèque de l'Observatoire de Paris pour son autorisation de reproduction de nombreuses pages de [4]. Enfin, il exprime sa gratitude à Lilie Pons (secrétaire éditoriale – Centre Mersenne) pour son précieux travail technique améliorant la lisibilité des extraits de textes anciens.

### Références

- [1] F. Link, « L'absorption atmosphérique et quelques phénomènes connexes », *Bull. Obs. de Lyon* **11** (1929), p. 229-249.
- [2] F. Link, « Sondages de la haute atmosphère à l'aide des phénomènes crépusculaires », *J. des Observateurs* **17** (1934), p. 161-169.
- [3] J. Kepler, *Ad Vitellionem paralipomena, quibus Astronomiae pars optica traditur*, Claudium Marnium & Haeredes Ioannis Aubrii, Francfort, 1604.
- [4] F. Link, « Théorie photométrique des éclipses de Lune », *Bull. Astron.* **8** (1933), p. 77-108.
- [5] F. Link, « Sur les conséquences photométriques de la déviation d'Einstein », *C. R. Acad. Sci.* **202** (1936), p. 917-919.
- [6] F. Zwicky, « Nebulae as Gravitational Lenses », *Phys. Rev.* **51** (1937), p. 290.
- [7] F. Link, « Variations à longues périodes de l'activité solaire avant le 17<sup>ème</sup> siècle », *Bull. Astron. Inst. Czech.* **14** (1963), p. 226-230.
- [8] F. R. Stephenson, A. W. Wolfendale (éds.), *Secular Solar and Geomagnetic Variations in the Last 10,000 Years*, Springer, Dordrecht, 1988.
- [9] W. Gleissberg, « The eighty-year cycle in auroral frequency numbers », *J. Brit. Astr. Assoc.* **75** (1965), p. 227-231.
- [10] F. Link, « Variations lumineuses de la Lune », *Bull. Astron. Inst. Czech.* **2** (1951), p. 131-133.
- [11] E. Vassy, « Interpretation of Danjon's law », *J. Sci. Meteorol.* **8** (1956), p. 1-3.
- [12] F. Link, « Sur la possibilité de la luminescence des satellites de Jupiter », *Bull. Astron. Inst. Czech.* **14** (1963), p. 23.
- [13] A. Dollfus, « In Memoriam – Frantisek Link – 1906–1984 », *Acta Astronaut.* **13** (1986), p. 215-216.
- [14] F. Link, *Eclipse Phenomena in Astronomy*, Springer, New York, 1969.
- [15] F. Link, « Théorie photométrique des éclipses de Lune », *C. R. Acad. Sci.* **196** (1933), p. 251-253.
- [16] F. Link, « Photométrie photographique des éclipses de Lune », *J. des Observateurs* **19** (1936), p. 129-132.
- [17] F. Link, « Le rôle de l'ozone atmosphérique dans les éclipses de Lune », *Ann. Astrophys.* **9** (1946), p. 227-231.
- [18] F. Link, « Circonstances géographiques d'une éclipse de Lune », *Bull. Astron.* **13** (1947), p. 171-179.
- [19] F. Link, « Théorie photométrique de la pénombre pendant les éclipses de Lune », *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky* **72** (1947), p. 65-78.
- [20] F. Link, « Sur la luminosité des éclipses de Lune », *Bull. Astron. Inst. Czech.* **2** (1950), p. 59.
- [21] F. Link, Z. Linková, « Agrandissement de l'ombre terrestre pendant les éclipses de Lune. I. Influences météoriques », *Bull. Astron. Inst. Czech.* **5** (1954), p. 82-83.

- [22] F. Link, « Densité de la pénombre pendant les éclipses de Lune », *Bull. Astron. Inst. Czech.* **9** (1958), p. 169-177.
- [23] F. Link, « Densité de l'ombre pendant les éclipses de Lune », *Bull. Astron. Inst. Czech.* **11** (1960), p. 13-22.
- [24] F. Link, « Lunar Eclipses », in *Physics and Astronomy of the Moon* (Z. Kopal, éd.), Academic Press, New York et Londres, 1962, p. 161-229.
- [25] J. Dubois, F. Link, « Analyse photométrique de la pénombre pendant les éclipses de Lune », *The Moon* **1** (1969), p. 85-105.
- [26] J. Dubois, F. Link, « Analyse photométrique de l'ombre intérieure pendant les éclipses de Lune », *The Moon* **2** (1971), p. 354-362.
- [27] F. Link, « Lunar Eclipses », in *Advances in Astronomy and Astrophysics* (Z. Kopal, éd.), vol. 9, Academic Press, New York et Londres, 1972, p. 66-148.
- [28] F. Link, « On the specular reflection from the Earth's atmosphere observed by Voskhod-2 cosmonauts and its possible implications for lunar eclipses », *The Moon* **11** (1974), p. 369-371.
- [29] J. Dubois, F. Link, « Analyse photométrique de l'éclipse de Lune du 11 septembre 1978 », *The Moon and the Planets* **23** (1980), p. 109-111.
- [30] F. Link, *La Lune*, 3<sup>e</sup> éd., P. U. F., Paris, 1981.
- [31] P. de la Hire, *Tabulae Astronomicae*, Joannem Boudot, Paris, 1702.
- [32] P. Marmet, C. Couture, « Enlargement of the earth's shadow on the moon: An optical illusion », 2009, <https://www.newtonphysics.on.ca/astronomy/index.html> (page consultée le 31 janvier 2022).
- [33] J. E. Hansen, S. Matsushima, « Light illuminance and color in the Earth's shadow », *J. Geophys. Res.* **71** (1966), p. 1073-1081.
- [34] M. Vollmer, S. D. Gedzelman, « Simulating irradiance during lunar eclipses: the spherically symmetric case », *Appl. Opt.* **47** (2008), p. H52-H61.
- [35] S. D. Gedzelman, M. Vollmer, « Simulating irradiance and color during lunar eclipses using satellite data », *Appl. Opt.* **47** (2008), p. H149-H156.
- [36] L. Dettwiller, « Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre Optique, Mathématiques et Géodésie », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 13-62.
- [37] A. Danjon, « Sur une relation entre l'éclairement de la Lune éclipisée et l'activité solaire », *C. R. Acad. Sci.* **171** (1920), p. 1127-1129.
- [38] F. Link, « La loi de Danjon et les éruptions volcaniques », *The Moon* **11** (1974), p. 261-272.
- [39] D. W. Hughes, « Lunar eclipses and Danjon's law », *Nature* **253** (1975), p. 503.
- [40] F. Link, « Some remarks on Danjon's law », *The Moon* **11** (1974), p. 137-140.
- [41] J. D. Bohlin, N. R. Sheeley, « Extreme ultraviolet observations of coronal holes », *Sol. Phys.* **56** (1978), p. 125-151.
- [42] G. Spoerer, « Sur les différences que présentent l'hémisphère nord et l'hémisphère sud du soleil », *Bull. Astron. Serie I* **6** (1889), p. 60-63.
- [43] L. Dettwiller, « Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 63-102.
- [44] L. Dettwiller, « Le théorème de Biot et le changement de variable de Biot–Auer–Standish : commentaire historique », *C. R. Phys.* **23** (2022), n° S1, p. 483-501.
- [45] A. Danjon, « Recherches de photométrie astronomique », *Ann. Obs. Strasbg.* **2** (1928), p. 1-185.
- [46] N. Hernitschek, E. Schmidt, M. Vollmer, « Lunar eclipse photometry: absolute luminance measurements and modeling », *Appl. Opt.* **47** (2008), p. H62-H71.
- [47] V. G. Fesenkov, « On the investigation of atmospheric ozone by photometry of lunar eclipses », *Soviet Astron.* **3** (1959), p. 554-562.
- [48] R. Penndorf, « Effects of the ozone shadow », *J. Atmos. Sci.* **5** (1948), p. 152-160.
- [49] R. B. Stothers, « Stratospheric transparency derived from total lunar eclipses colors, 1668–1800 », *Publ. Astron. Soc. Pac.* **116** (2004), p. 886-893.
- [50] E. W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, 2<sup>e</sup> éd., Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [51] J. H. Gladstone, T. P. Dale, « Researches on the refraction, dispersion, and sensitiveness of liquids », *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **153** (1863), p. 317-343.
- [52] A. Bemporad, P. Puiseux, « Réfraction et extinction », in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*, t. 7 – *Astronomie*, vol. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1913, p. 14-67.



# Comptes Rendus

---

## Physique

### Objet de la revue

Les *Comptes Rendus Physique* sont une revue électronique évaluée par les pairs de niveau international, qui couvre l'ensemble des domaines de la physique et de l'astrophysique. Ils publient principalement des numéros thématiques, mais également des articles originaux de recherche, des annonces préliminaires, des articles de revue, des mises en perspective historiques, des textes à visée pédagogique ou encore des actes de colloque, sans limite de longueur, en anglais ou en français. Ils proposent également des numéros spéciaux consacrés à certains aspects récents et/ou significatifs de la discipline, dont les auteurs sont choisis parmi les chercheurs les plus actifs sur le sujet et dont la coordination est assurée par des rédacteurs en chef invités.

Les *Comptes Rendus Physique* sont diffusés selon une politique vertueuse de libre accès diamant, gratuit pour les auteurs (pas de frais de publications) comme pour les lecteurs (libre accès immédiat et pérenne).

**Directeur de la publication :** Étienne Ghys

**Rédacteurs en chef :** D. Gratias, J. Villain

**Rédacteurs en chef invités :** Pierre Léna et Luc Dettwiller

**Comité éditorial :** Jacqueline Bloch, Christian Bordé, Hélène Bouchiat, Alexandre Bouzdine, Yves Bréchet, Françoise Combes, Jean Dalibard, Michel Davier, Daniel Estève, Stéphan Fauve, Pierre Fayet, Frédérique de Fornel, Maurice Goldman, Guy Laval, Chaouqi Misbah, Jean-Yves Ollitrault, Nathalie Palanque-Delabrouille

**Secrétaire éditorial :** Julien Desmarests

### À propos de la revue

Toutes les informations concernant la revue, y compris le texte des articles publiés qui est en accès libre intégral, figurent sur le site <https://comptes-rendus.academie-sciences.fr/physique/>.

### Informations à l'attention des auteurs

Pour toute question relative à la soumission des articles, les auteurs peuvent consulter le site <https://comptes-rendus.academie-sciences.fr/physique/>.

### Contact

Académie des sciences  
23, quai de Conti, 75006 Paris, France  
Tél. : (+33) (0)1 44 41 43 72  
[CR-Physique@academie-sciences.fr](mailto:CR-Physique@academie-sciences.fr)



Les articles de cette revue sont mis à disposition sous la licence  
Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.fr>

# COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

## Physique

Volume 23, n° S1, 2022

### Special issue / Numéro thématique

Astronomie, atmosphères et réfraction / *Astronomy, Atmospheres and Refraction*

### Guest editors / Rédacteurs en chef invités

Pierre Léna (Professeur émérite, Observatoire de Paris et Université Paris Cité, membre de l'Académie des sciences)

Luc Dettwiller (Université Jean Monnet Saint-Etienne, CNRS, Institut d'Optique Graduate School, Laboratoire Hubert

Curien UMR 5516, F-42023, SAINT-ETIENNE, France)

### Cover illustration / Illustration de couverture

Haut : ©photo Philippe Muller. Bas : Archives de l'Acad. des sciences / numérisation par la Bibl. de l'Inst. de France

Rédacteurs en chef invités .....	3-4	<b>Luc Dettwiller, Pierre Léna, Denis Gratias</b> <i>Astronomy, Atmospheres and Refraction: Foreword</i> .....	5-11
----------------------------------	-----	---	------

### PREMIÈRE PARTIE. OBSERVATIONS, THÉORIE ET APPLICATIONS

<b>Luc Dettwiller</b> Panorama historique de l'étude de la réfraction astronomique : une histoire méconnue entre optique, mathématiques et géodésie .....	13-62	<b>Serge Koutchmy</b> The Lomonossov arc: refraction and scattering in Venus atmosphere during solar transits .....	243-268
<b>Luc Dettwiller</b> Propriétés remarquables de la réfraction astronomique dans une atmosphère à symétrie sphérique .....	63-102	<b>Daniel Bonneau</b> Les effets optiques de la turbulence atmosphérique dans les images astronomiques .....	269-291
<b>Luc Dettwiller</b> Phénomènes de réfraction atmosphérique terrestre .....	103-132	<b>Gérard Rousset, Thierry Fusco</b> Optique adaptative : correction des effets de la turbulence atmosphérique sur les images astronomiques .....	293-344
<b>François Mignard</b> Les tables de réfraction astronomique .....	133-178	<b>Laurent Koechlin, Luc Dettwiller</b> Correction de la dispersion atmosphérique dans l'imagerie par les grands télescopes et les interféromètres astronomiques .....	345-364
<b>Andrew T. Young</b> Relations among atmospheric structure, refraction, and extinction .....	179-212	<b>Siebren van der Werf</b> Novaya Zemlya effect and Fata Morgana. Raytracing in a spherically non-symmetric atmosphere .....	365-389
<b>Bruno Sicardy</b> Study of atmospheres in the solar system, from stellar occultation or planetary transit .....	213-241	<b>François Mignard</b> Images du Soleil et de la Lune, depuis le sol ou la Station spatiale internationale .....	391-414

### SECONDE PARTIE. HISTOIRE SPÉCIALISÉE : DÉCRYPTAGE DE DONNÉES THÉORIQUES FÉCONDES, SUR DES DOCUMENTS ORIGINAUX (XVIII<sup>e</sup>–XX<sup>e</sup>)

<b>Luc Dettwiller</b> L'invariant de Bouguer et ses conséquences : commentaire historique .....	415-452	<b>Luc Dettwiller</b> La discussion par Kummer d'une quadrature sur la réfraction astronomique : commentaire historique .....	503-525
<b>Luc Dettwiller</b> Les développements de Lambert : commentaire historique .....	453-465	<b>Luc Dettwiller</b> Les développements de Radau et leur divergence: commentaire historique .....	527-536
<b>Andrew T. Young</b> Did Monge really explain inferior mirages? .....	467-481		
<b>Luc Dettwiller</b> Le théorème de Biot et le changement de variable de Biot–Auer–Standish : commentaire historique .....	483-501	<b>Luc Dettwiller</b> La photométrie des éclipses de Lune, vue par František Link : commentaire historique .....	537-555

1878-1535 (electronic)

**COMPTES RENDUS**  
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

---

*Physique*

Volume 23, n° S1, 2022